На правах рукописи

Кошелев Александр Петрович

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ ПОСРЕДСТВОМ ОГРАНИЧЕННОЙ СИЛЫ

01.02.01 – теоретическая механика

Автореферат
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена в Институте проблем механики РАН

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор Л.Д. Акуленко

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Д.В. Баландин,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

доктор физико-математических наук, профессор А.М. Формальский,
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Ведущая организация:
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Защита состоится 21 февраля 2008 г. в 15.00 на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при Институте проблем механики РАН по адресу: 119526, Москва, проспект Вернадского, 101-1, ИПМех РАН

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем механики РАН

Автореферат разослан 18 января 2008 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 002.240.01

кандидат физико-математических наук

Е.Я. Сысоева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена решению многомерной задачи оптимального управления. Динамический объект совершает управляемые движения в отсутствие внешних сил и возмущений, требуется привести его в заданное фазовое состояние за наименьшее время посредством управляющего ускорения, ограниченного по абсолютной величине. Ее решение для различных частных случаев финальных условий и случая одномерного движения было проведено в работах А.А. Фельдбаума, Л.С. Понтрягина, Н.Н. Красовского, А.М. Летова, А.И. Субботина и других. Здесь эта задача будет рассмотрена в общей постановке.

Цель работы заключается в построении синтеза оптимального управления и исследовании времени быстродействия как функции начальных условий задачи (функции Беллмана), создании численного алгоритма решения задачи и исследовании качественных особенностей оптимального движения.

Методы исследований. В диссертационной работе использованы методы теоретической механики, оптимального управления, численное моделирование.

Научная новизна. Получено оптимальное управление в форме программы и синтеза для задачи управления многомерным динамическим объектом посредством ограниченной силы. Рассмотрен ряд частных постановок: нулевая начальная скорость, совпадение начального и финального положений, совпадение начальной и финальной скоростей, а также выборки по величине и направлению начальной скорости и начального радиус-вектора. Доказана единственность оптимального решения задачи, создана эффективная процедура отбора оптимальных решений. Написана программа, позволяющая численно решать задачу во всем фазовом пространстве начальных условий.

Практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Решение задачи может быть использовано как начальное приближение в задачах, описывающих движение динамического объекта под действием различных внешних сил: линейной диссипации, постоянной внешней силы. Найденные особенности оптимального управления и движения управляемого объекта позволяют получить качественную картину оптимального движения в неограниченной области фазового пространства. Они могут быть использованы в механике мобильных роботов, транспортных средств, а также соответствуют движениям КЛА в пространстве без внешних сил и возмущений.

Достоверность полученных результатов вытекает из корректности постановок решаемых задач, использовании строгих методов оптимального управления и проверки теоретических выводов численными экспериментами.

Апробация работы. Основные результаты докладывались на 9-м Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике в 2006 году, на конференциях МФТИ в 2002-2006 годах, а также на семинаре Института проблем механики РАН "Теория управления и динамика систем"под руководством академика Ф.Л. Черноусько.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 статьи в журналах Российской Академии Наук [7-9,11] и 7 в трудах научных конференций [1-6, 10].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 73 наименования. Объем диссертации составляет 93 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обзор литературы по теме диссертации и краткое изложение содержания всех глав.

В первой главе формулируется задача оптимального управления и исследуются особенности решения задачи принципа максимума.

Динамический объект движется в n - мерном геометрическом пространстве под действием управляющего ускорения ограниченного по абсолютной величине. Необходимо привести его в требуемое фазовое состояние за наименьшее время. Уравнения движения, начальные и финальные условия имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{x} = v, \qquad x(0) = x_0, \qquad x(t_f) = 0 \\ \dot{v} = u, \qquad v(0) = v_0, \qquad v(t_f) = v_f \\ |u| \le 1, \qquad t_f \to \min_u \qquad x, v, u \in R^n, \qquad n \ge 1\end{gathered} \tag{1}$$

Для $n > 1$ задача (1) становится нелинейной, так как имеет место соответствующее ограничение на величину управляющего вектора. К виду (1) сводится случай ненулевого вектора финального положения $x(t_f)$ и произвольной величины управляющего вектора.

Для решения задачи применен принцип максимума. Особые решения задачи отсутствуют, так как в этом случае условие максимума гамильтониана дает нулевой вектор сопряженных переменных. Управляющая функция имеет вид

$$u = \frac{-\xi t + \eta}{|-\xi t + \eta|}, \qquad |\xi| = \rho, \qquad |\eta| = 1, \qquad \cos\theta = \sigma.$$

Здесь ξ, η - нормированные векторы сопряженных переменных, θ - угол между ними, ρ, σ - автомодельные параметры. Задача (1) имеет оптимальное решение во всем фазовом пространстве, так как существует допустимое управление, которое может привести материальную точку в заданное фазовое состояние, вообще говоря, неоптимально.

При $\rho > 0$ или $|\sigma| < 1$ оптимальное управление является непрерывной и гладкой вектор-функцией. При $\rho = 0$ или $\sigma = -1$ управление - постоянный вектор, а для $\sigma = 1$ - кусочно-постоянная вектор-функция с единственной точкой переключения между двумя противоположными направлениями управляющего вектора. Подставим управляющую функцию в (1) и проинтегрируем. Получим зависимости скорости и координаты от времени

$$
\begin{gathered}
v(t) = v_0 + V_\xi(t)\xi + V_\eta(t)\eta, \\
x(t) = x_0 + v_0 t + X_\xi(t)\xi + X_\eta(t)\eta, \\
V_\xi = -\rho^{-2}(\sigma V + R)|_0^t, \qquad V_\eta = \rho^{-1} V|_0^t, \\
X_\xi = \frac{1}{2\rho^3}[(-\rho\tau + 3\sigma)R + (-2\rho\sigma\tau + 3\sigma^2 - 1)V]_0^t + \frac{t}{\rho^2}(1 + \sigma V(0)), \\
X_\eta = \rho^{-2}[-R + (\rho\tau - \sigma)V]_0^t - \frac{t}{\rho}V(0), \\
R(t) = (\rho^2 t^2 - 2\sigma\rho t + 1)^{1/2}, \qquad V(t) = \mathrm{Arsh}\kappa, \\
\mathrm{Arsh}\kappa = \ln(\kappa + (1+\kappa^2)^{1/2}), \qquad \kappa = (\rho t - \sigma)(1-\sigma^2)^{-1/2}.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Запишем систему (2) с учетом финальных условий $x(t_f) = 0$, $v(t_f) = v_f$. Имеем систему $2n$ линейных алгебраических уравнений относительно $2n$ неизвестных: $2n-1$ компонент векторов ξ, η и неизвестного времени движения t_f.

$$
\begin{gathered}
-x_0 - v_0 t_f = X_\xi(t_f)\xi + X_\eta(t_f)\eta, \\
v_f - v_0 = V_\xi(t_f)\xi + V_\eta(t_f)\eta.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Утверждение 1. *В ситуации общего положения ($\rho > 0$, $|\sigma| < 1$) система (3) однозначно разрешима для произвольных x_0, v_0, v_f.*

Из Утв. 1 следует, что в случае размерности фазового вектора $n \geq 3$ движение объекта осуществляется в трехмерном геометрическом пространстве, образованном векторами x_0, v_0, v_f. Задача симметрична относительно направления финальной скорости. В случае постоянного или кусочно-постоянного управления движение сводится к плоскому или линейному. В диссертационной работе подробно рассмотрен случай плоского движения ($n = 2$).

Введем вектор $\zeta = \xi t_f$ вместо ξ, что позволит отделить t_f, причем $|\zeta| = t_f\rho = \mu$. Без ограничения общности можно положить $v_f = (-1, 0)$. Таким образом, соотношения (3) это система четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

Приведем их к скалярному виду, получим систему трех уравнений для определения неизвестных параметров t_f, μ, σ :

$$(v_0 - v_f)^2 = t_f^2 f_v^2(\mu, \sigma), \tag{4}$$

$$x_0^2 = t_f^4 f_x^2(\mu, \sigma) - 2|x_0| c t_f - t_f^2,$$

$$|x_0||v_0 - v_f| d_1 = -t_f |v_0 - v_f| d_2 + t_f^3 f_{xv}(\mu, \sigma) \qquad (v_f^2 = 1).$$

Здесь введены естественные обозначения

$$f_x^2(\mu, \sigma) = a_\zeta^2 \mu^2 + 2 a_\zeta a_\eta \mu\sigma + a_\eta^2,$$

$$f_v^2(\mu, \sigma) = b_\zeta^2 \mu^2 + 2 b_\zeta b_\eta \mu\sigma + b_\eta^2,$$

$$f_{xv}(\mu, \sigma) = a_\zeta b_\zeta \mu^2 + (b_\zeta a_\eta + b_\eta a_\zeta)\mu\sigma + a_\eta b_\eta,$$

$$c = (x_0, v_f)|x_0|^{-1}, \qquad d_1 = \frac{(x_0, v_0 - v_f)}{|x_0||v_0 - v_f|}, \qquad d_2 = \frac{(v_f, v_0 - v_f)}{|v_0 - v_f|}.$$

Таким образом, получена определяющая система уравнений относительно неизвестных $t_f \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\sigma \in [-1, 1]$. Эта система зависит от пяти параметров, характеризующих начальные и финальные условия задачи. Время быстродействия t_f выражается из первого уравнения системы (4).

В ситуации общего положения решение задачи (1) может быть сведено к численному решению системы двух нелинейных уравнений относительно двух неизвестных, причем порядок этой системы не зависит от размерности векторов x_0, v_0, v_f при $n \geq 2$. Неизвестные параметры μ, σ находятся численно, а остальные параметры, характеризующие управление находятся путем решения системы линейных уравнений (3), причем для известных μ и σ искомое управление находится единственным образом. Численный метод решения задачи основан на комбинации метода ускоренной сходимости, применяемого для решения системы нелинейных уравнений, и метода половинного деления для выбора начального приближения. В окрестности начальных условий, соответствующих постоянному или кусочно-постоянному управлениям, численный алгоритм сходится очень медленно. Эти случаи исследованы аналитически.

В ряде частных случаев эту систему можно существенно упростить, разделив переменные μ и σ при $(x_0, v_0) = 0$, $(x_0, v_0 - v_f) = 0$, $(x_0, v_f) = 0$, или используя дополнительные предположения о свойствах управляющей функции. Представляют интерес случаи совпадения начальной и финальной скоростей $v_0 = v_f$, возвращения в исходную точку $x_0 = 0$, нулевой начальной скорости $v_0 = 0$.

Рассмотрим случай равенства начальной и конечной скоростей $v_0 = v_f$. Перепишем (4) в виде

$$x_0 + v_f t_f = t_f^2(a_\zeta \zeta + a_\eta \eta), \tag{5}$$
$$0 = b_\zeta \zeta + b_\eta \eta.$$

Векторы ζ и η коллинеарны. Система (5) разрешается аналитически, ее единственное решение $\mu = 2$, $\sigma = 1$.

Зависимости скорости и координаты от времени примут следующий вид:

$$v(\tau) = v_0 - \frac{\eta}{2} t_f(|2\tau - 1| - 1), \tag{6}$$
$$x(\tau) = x_0 + v_0 t_f \tau + \frac{\eta}{8} t_f^2(|2\tau - 1|(1 - 2\tau) + 4\tau - 1), \qquad \tau \in [0, 1].$$

Здесь $\tau = t/t_f$ - нормированное время.

Траектория обладает центральной симметрией относительно точки переключения. Переключение управления происходит при $\tau = 0.5$. Характерной особенностью времени быстродействия как функции начальных данных является наличие разрыва, вызванного существованием неоптимальных решений задачи принципа максимума.

Рассмотрим постоянное, кусочно-постоянное и непрерывное управления отдельно как решения задачи принципа максимума. Зная финальную скорость v_f и задавая направление управления η и времени движения t_f, найдем начальные условия, соответствующие постоянному оптимальному управлению

$$v_0 = v_f - \eta t_f, \tag{7}$$
$$x_0 = \frac{\eta t_f^2}{2} - v_f t_f.$$

Для кусочно-постоянного оптимального управления соответствующие уравнения имеют вид

$$v_0 = v_f - \eta t_f(2\tau^* - 1), \tag{8}$$
$$x_0 = -v_f t_f - \frac{\eta t_f^2}{2}(-1 + 4\tau^* - 2\tau^{*2}).$$

Искомое множество строится на основе вариации трех параметров: времени движения t_f, направления управления η и момента переключения управления τ^*.

Используя (7) и (8), можно исследовать аналитически случаи постоянного и кусочно-постоянного управлений. Случай постоянного управления подробно рассмотрен в литературе как решение задачи (1) с нефиксированной финальной скоростью.

Рассмотрим общий случай кусочно-постоянного управления. Управляющая функция имеет вид

$$u(\tau) = \eta \operatorname{sign}(-\lambda\tau + 1), \qquad \tau \in [0,1], \qquad \lambda = \frac{t_f}{t} > 1.$$

Подставим выражение для управления в уравнения движения (1) и проинтегрируем. Зависимости скорости и радиус-вектора от времени и граничные условия соответственно

$$v = v_0 + \eta\frac{t_f}{\lambda}(1 - |\lambda\tau - 1|), \tag{9}$$

$$v_f = v_0 + \eta\frac{t_f}{\lambda}(2-\lambda), \qquad v_f = (-1, 0),$$

$$x = x_0 + v_0\tau t_f + \eta\frac{t_f^2}{2\lambda^2}(|\lambda\tau - 1|(1-\lambda\tau) + 2\lambda\tau - 1),$$

$$0 = x_0 + v_0 t_f + \eta\frac{t_f^2}{2\lambda^2}(-\lambda^2 + 4\lambda - 2).$$

Из второго уравнения для скорости системы (9) найдем время быстродействия

$$t_f = \frac{\lambda(1 + |v_0|^2 + 2|v_0|\ \cos\alpha)^{0.5}}{|2-\lambda|}.$$

Здесь α - угол, характеризующий направление начальной скорости. Вектор управления равен

$$\eta = \frac{v_f - v_0}{|v_f - v_0|}\operatorname{sign}(2-\lambda).$$

Установлено, что при $v_0 \neq v_f$ возможно существование только одного кусочно-постоянного управления среди решений задачи принципа максимума. Его оптимальность определяется сведением данного случая к случаю равенства начальной и финальной скоростей путем продолжения решения до скорости $v_0' = v_f$.

Рассмотрев отдельно постоянное, кусочно-постоянное и непрерывное управления, можно определить являются ли они решениями задачи принципа максимума и определить их оптимальность.

Утверждение 2. *Среди решений задачи (1) не может быть одновременно постоянного и кусочно-постоянного управлений при* $n > 1$.

Утверждение 3. *Если среди решений задачи (1) есть оптимальное кусочно-постоянное управление* $u_1(t)$, *то оно будет единственным оптимальным решением задачи (1) при* $n \geq 1$.

Утверждение 4. *Если среди решений (1) есть постоянное управление, то оно будет единственным оптимальным решением задачи (1) при* $n \geq 1$.

Теорема *Задача (1) имеет единственное оптимальное решение при* $n \geq 1$.

В случае кусочно-постоянного управления для $v_0 = v_f$ возможны до трех решений задачи принципа максимума. Постоянное и кусочно-постоянное управления вместе могут быть решениями задачи принципа максимума только в одномерном случае. Обнаружено сочетание постоянного и непрерывного решений задачи принципа максимума. Среди постоянного, кусочно-постоянного и непрерывного управлений, наименьшим время движения будет у постоянного, а наибольшим у непрерывного или кусочно-постоянного управлений. Это позволяет построить эффективную процедуру отбора корней для численного решения задачи (1).

Сначала проверяем справедливость (7); если она верна, то единственное оптимальное решение найдено. В противном случае проверим справедливость системы (8); если она верна, то проверяется ее оптимальность сведением данного случая кусочно-постоянного управления к случаю равенства начальной и финальной скоростей. Если (7) и (8) не выполнены, то задача (1) решается численно.

Вторая глава посвящена решению задачи (1) в случае плоского движения. Подробно рассмотрены случаи нулевого начального радиус-вектора, нулевой начальной скорости, а также выборки по величине и направлению начальной скорости и начального радиус-вектора.

При совпадении начального и конечного положений динамического объекта, траектория представляет собой замкнутую кривую. В задаче существует симметрия относительно величины начальной и финальной скоростей: при замене $v_0' = v_0|v_0|^{-2}$ время быстродействия $t_f' = t_f|v_0|^{-1}$. При этом $\mu' = \mu$, $\sigma' = \sigma$, $\xi' = \xi|v_0|$, $\eta' = \eta$. Таким образом, решение задачи (1) при $|v_0| > 1$, можно свести к случаю $0 < |v_0'| \leq 1$, причем если $|v_0'| < |v_0|$, то управление $u'(t)$ в начальной точке будет соответствовать управлению $u(t)$ в финальной точке.

Утверждение 5. *При $x(0) = x(t_f)$ оптимальные траектории лежат в угле, образованном направлениями вектора начальной скорости и вектора, направленного противоположно финальной скорости. Направление радиус-вектора x_0 - функция $\beta(t)$ монотонна при $t \in (0, t_f)$.*

Установлено, что в начальный момент времени происходит торможение компоненты скорости вдоль оси ординат (перпендикулярно финальной скорости). Не существует режимов оптимального управления, при которых в начале движения был бы разгон, а в окрестности финальной точки - торможение скорости.

Рассмотрим частную постановку задачи (1), в которой начальная скорость $v_0 = 0$. К этому случаю задача (1) сводится если начальная скорость либо много больше, либо много меньше финальной скорости. С учетом нормировки финальной скорости время быстродействия и оптимальное управление зависят от двух параметров: величины начального радиус-вектора $|x_0|$ и его направления β.

Утверждение 6. *Оптимальная траектория при $v_0 = 0$ лежит в угле, образованном направлением начального радиус-вектора x_0 и направлением, противоположным направлению финальной скорости. Направление радиус-вектора $\beta(t)$ - монотонная функция на интервале $t \in (0, t_f)$.*

Для выборки по величине начальной скорости условия трансверсальности приводятся к случаям $v_0 = 0$ или $v_0 \perp \eta$. Для выборки по направлению начальной скорости условия трансверсальности сводятся к $v_0 \uparrow\uparrow \eta$ или $v_0 \uparrow\downarrow \eta$. Переход между этими режимами имеет место при постоянном управлении. Эти особенности соответствуют максимумам и минимумам функции времени быстродействия $t_f(|v_0|, \alpha)$.

Путем численного моделирования установлено, что в зависимости от направлений векторов η и v_0, а также значений $u(t_f)$ и v_f имеют место четыре основных типа траекторий. Тип 1: движение вправо вначале, т.е. угол $\phi < \alpha$, затем поворот вправо в конце, т.е. угол $\psi > \pi$; тип 2: движение влево вначале, угол $\phi > \alpha$, затем движение вправо в конце, угол $\psi > \pi$; тип 3: движение влево вначале, угол $\phi > \alpha$, затем движение влево в конце, угол $\psi < \pi$; тип 4: движение вправо вначале, угол $\phi < \alpha$, затем движение влево в конце, угол $\psi < \pi$. Здесь ϕ и ψ - углы, характеризующие направление управления $u(t)$ в начальной и конечной точках соответственно. Переходом между этими типами траекторий служат точки, в которых вектор начальной скорости v_0 коллинеарен или антиколлинеарен сопряженному вектору η, а также точки, в которых векторы v_f и $u(t_f)$ коллинеарны или антиколлинеарны.

Интерпретируя найденные особенности времени быстродействия $t_f(\alpha)$ как свойства оптимальных траекторий, заключаем, что переход между типами траекторий при $|v_0| > 0$ соответствует коллинеарности или антиколлинеарности векторов v_0 и η, т.е. максимальному или минимальному времени быстродействия.

Таким образом, при $|v_0| < |v^*|$ в точке минимума времени происходит разгон, при $|v_0| > |v^*|$ - торможение, где v^* - скорость соответствующая постоянному управлению. В точке максимума имеет место торможение при $|v_0| > 0$.

Зафиксируем финальные условия, величину и направление начальной скорости и исследуем оптимальное управление и время быстродействия при различных направлениях и величинах начального радиус-вектора x_0 материальной точки. В качестве примера рассмотрены выборки по направлению β при фиксированном $|x_0|$ для различных начальных скоростей v_0.

Для выборки по величине начального радиус-вектора условия трансверсальности приводятся к случаям $x_0 = 0$ или $x_0 \perp \xi$. Для выборки по направлению начального радиус-вектора условия трансверсальности сводятся к $x_0 \uparrow\uparrow \xi$ или $x_0 \uparrow\downarrow \xi$. Переход между этими режимами имеет место при постоянном управлении. Эти особенности соответствуют максимумам и минимумам функции времени быстродействия $t_f(|x_0|, \beta)$.

Полученные результаты позволяют строить частичный синтез оптимального управления для различных скоростей v_0 и положений x_0 материальной точки. В вычислительном аспекте изложенный подход позволяет строить и анализировать программные движения для произвольных x_0, v_0.

Полученные результаты могут быть использованы в следующих случаях.

1°. Рассмотрим задачу с фиксированным направлением начальной скорости α и произвольным значением модуля $|v_0|$. Нахождение времени быстродействия t_f и начального направления управления ϕ проводится при помощи семейств кривых $t_f(\alpha)$, $\phi(\alpha)$ для фиксированной величины начальной скорости $|v_0|$.

2°. Пусть рассматривается задача с фиксированным модулем начальной скорости $|v_0|$ и произвольным направлением α. Тогда точка минимума времени находится при помощи семейства кривых $t_f(\alpha)$ для заданного значения $|v_0|$. По графику $\phi(\alpha)$ находится оптимальное управление.

3°. Исследуем более общую постановку задачи с условиями начала (окончания) процесса в форме неравенств для величин $|v_0|$ и α. Начальная скорость v_0 находится при помощи семейства кривых $t_f(\alpha)$ из условия минимума времени для величин $|v_0|$ и α, удовлетворяющих указанным неравенствам. Время быстродействия и направление оптимального управления находятся по графикам $t_f(|v_0|, \alpha)$, $\phi(|v_0|, \alpha)$.

4°. Рассмотрим задачу с фиксированным направлением начального радиус-вектора β и произвольным значением модуля $|x_0|$. Нахождение времени быстродействия t_f и начального направления управления ϕ проводится при помощи семейств кривых $t_f(\beta)$, $\phi(\beta)$ для фиксированной величины начального радиус-вектора $|x_0|$.

5°. Пусть рассматривается задача с фиксированным модулем начального радиус-вектора $|x_0|$ и произвольным направлением β. Тогда точка минимума времени находится при помощи семейства кривых $t_f(\beta)$ для заданного значения $|x_0|$. По графику $\phi(\beta)$ находится оптимальное управление.

6°. Исследуем более общую постановку задачи с условиями начала (окончания) процесса в форме неравенств для величин $|x_0|$ и β. Начальное положение x_0 находится при помощи семейства кривых $t_f(\beta)$ из условия минимума времени для величин $|x_0|$ и β, удовлетворяющих указанным неравенствам. Время быстродействия и направление оптимального управления находятся по графикам

$t_f(|x_0|, \beta)$, $\phi(|x_0|, \beta)$.

7°. Пусть рассматривается постановка задачи управления с фиксированным временем T и условиями, соответствующими случаям $1^\circ - 6^\circ$. Тогда, используя график времени быстродействия для задачи (1), можно определить условие существования решений $t_f \leq T$. Если оптимальное время t_f оказывается меньшим T, то можно оптимизировать величину управляющего ускорения в задаче с фиксированным временем движения, т.е. ввести функцию $\tilde{u}(t) = (t_f/T)u(t)$ для выполнения условия $t_f = T$.

Основные результаты диссертации.

Рассмотрена задача наискорейшего приведения динамического объекта в требуемое фазовое состояние посредством ограниченного по величине управляющего ускорения. Решение задачи свелось к исследованию частных случаев: нулевого начального радиус-вектора, нулевой начальной скорости, а также выборки по величине и направлению начальной скорости и начального радиус-вектора.

Оптимальное управление находится в два этапа: численное решение системы нелинейных уравнений и решения системы линейных уравнений с коэффициентами, являющимися функциями найденных параметров.

Построен численный алгоритм решения задачи, позволяющий находить оптимальное управление и время быстродействия во всем фазовом пространстве начальных условий. Вычислительная процедура учитывает как непосредственно численное решение системы нелинейных уравнений, так и выбор начального приближения в пространстве состояний с помощью метода половинного деления. Для упрощения численного счета введена классификация управлений, позволяющая выделить и аналитически исследовать задачу для начальных условий, при которых алгоритм сходится очень медленно. На основе этой классификации построена эффективная процедура отбора корней. Найдены начальные условия, соответствующие этим типам управлений.

В процессе численного моделирования обнаружены случаи неединственности решения задачи принципа максимума: до трех решений при равенстве начальной и финальной скоростей, существование постоянного и непрерывного управлений; кусочно-постоянного и непрерывного управлений. Наличие двух и больше непрерывных управлений не обнаружено. Доказана единственность оптимального решения задачи.

Для случая равенства начальной и финальной скоростей исследованы оптимальные траектории, время быстродействия и оптимальное управление. Найдены начальные условия, при которых имеет место разрыв функции Беллмана, соответствующие неединственности решения задачи принципа максимума.

Для случая совпадения начального и финального положений были исследованы управление и время быстродействия при различных начальных скоростях. Доказано, что оптимальная траектория, представляющая собой замкнутую кривую, находится в угле, образованном направлением начальной скорости и направлением противоположном финальной скорости, причем направление радиус-вектора является монотонной функцией времени движения. При исследовании оптимального управления установлено, что режимы, в которых в начальный момент происходит торможение, а в финальной точке разгон скорости - не являются оптимальными.

Для нулевой начальной скорости получены новые результаты, описывающие качественные особенности времени быстродействия и оптимального управления. Доказано, что оптимальная траектория, представляющая собой замкнутую кривую, находится в угле, образованном направлением начального радиус-вектора и направлением противоположном финальной скорости, причем направление радиус-вектора является монотонной функцией времени движения.

В ситуации общего положения, когда начальные и конечные условия произвольны, оптимальные траектории можно классифицировать в зависимости от направления скорости и управления в начальный и конечный моменты времени. Всего реализуются четыре типа траекторий, которые соответствуют всем возможным случаям взаимного направления скорости и управления (разгона или торможения) в начальной и финальной точках.

Исследованы выборки по величине и направлению начальной скорости и начального радиус-вектора. Установлена связь особенностей времени быстродействия и оптимального управления. Найдены начальные условия, при которых время быстродействия будет меньше, чем время, соответствующее нулевой начальной скорости. В этой области одно и то же время быстродействия достигается при двух различных величинах начальной скорости.

Полученные зависимости времени и направления управления от начальных данных позволяют решать данную задачу при ограничениях на величину и направление начальной скорости и начального радиус-вектора в форме неравенств и могут быть использованы при решении задачи с фиксированным временем движения для оптимизации величины управляющего ускорения.

На языке Visual C++ написана программа, позволяющая строить оптимальные траектории, находить время быстродействия и управление по обратной связи во всем фазовом пространстве начальных условий.

Публикации по теме диссертации

1. *Кошелев А. П.* Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию приведения материальной точки в начало координат с заданной финальной скоростью. Труды 45-ой научной конференции МФТИ. Москва-Долгопрудный. МФТИ. Том III. 2002. С. 36.

2. *Кошелев А. П.* Оптимальный по быстродействию разворот материальной точки. Труды 46-ой научной конференции МФТИ. Москва-Долгопрудный. МФТИ. Том III. 2003. С. 43.

3. *Кошелев А. П.* Исследование оптимального управления для линейной задачи быстродействия. Труды 47-ой научной конференции МФТИ. Москва-Долгопрудный. МФТИ. Том III. 2004. С. 176.

4. *Кошелев А. П.* Параметрический анализ в задаче управления материальной точкой с учетом линейной диссипации и внешней силы. Труды 48-ой научной конференции МФТИ. Москва-Долгопрудный. МФТИ. Том III. 2005. С. 226-228.

5. *Кошелев А. П.* Исследование особенностей одного класса задач оптимального быстродействия. Труды 49-ой научной конференции МФТИ. Москва-Долгопрудный. МФТИ. Том III. 2006. С. 262.

6. *Кошелев А. П.* Оптимальное по быстродействию управление динамическим объектом посредством ограниченной силы. IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Тезисы докладов. Том I. Н.Новгород. 2006. С. 73-74.

7. *Акуленко Л. Д., Кошелев А. П.* Наискорейшее приведение динамического объекта в начало координат при равенстве начальной и конечной скоростей // Известия РАН: Теория и системы управления. 2003. №6. С. 98 - 105.

8. *Акуленко Л. Д., Кошелев А. П.* Оптимальное по быстродействию возвращение динамического объекта с требуемой скоростью // ДАН. 2005. Т. 403. №5. С. 614 - 618

9. *Акуленко Л. Д., Кошелев А. П.* Наискорейшее приведение динамического объекта в исходное положение с требуемой скоростью. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. №5. С. 46-52.

10. *Акуленко Л. Д., Кошелев А. П.* Оптимальное по быстродействию уклонение от двугранного угла. Труды 49-ой научной конференции МФТИ. Москва-Долгопрудный. МФТИ. Том III. 2006. С. 256-257.

11. *Акуленко Л. Д., Кошелев А. П.* Наискорейшее приведение материальной точки в заданное положение с требуемой скоростью // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 2. С. 228-236.

Кошелев Александр Петрович

Оптимальное по быстродействию управление
динамическим объектом посредством ограниченной силы

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 20.12.2007. Заказ №27.007. Тираж 70 экз.

Отпечатано на ризографе Института проблем механики РАН
119526, Москва, проспект Вернадского, 101-1