

Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем механики  
им. А.Ю. Ишлинского РАН

---

*На правах рукописи*



Любичева Анастасия Николаевна

**КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ИЗНАШИВАНИЕ  
НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ**

01.02.04. – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

Научный руководитель: академик РАН  
Горячева Ирина Георгиевна  
Институт проблем механики  
им. А.Ю. Ишлинского РАН

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор  
Александров Виктор Михайлович  
Институт проблем механики  
им. А.Ю. Ишлинского РАН

доктор физико-математических наук, профессор  
Тарлаковский Дмитрий Валентинович  
Московский государственный авиационный  
институт (технический университет)

Ведущая организация: Научно-исследовательский институт механики  
Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 16 октября 2008 г. в 15 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (119526, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1 ИПМех РАН).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН.

Автореферат разослан « 16 » сентября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

Д 002.240.01 при ИПМех РАН,

кандидат физико-математических наук

Е.Я. Сысоева

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена аналитическому исследованию контактного взаимодействия и изнашивания тел с учетом неоднородности их механических, геометрических и триботехнических свойств.

### Актуальность темы

Развитие новых технологий и создание новых материалов послужило стимулом к изучению особенностей контактного взаимодействия и изнашивания неоднородных сред. Впервые задачи о контактном взаимодействии неоднородных тел были поставлены в середине прошлого века при расчетах фундаментов, покрытий дорожных одежд, плит на многослойных основаниях. К настоящему времени опубликовано большое количество работ, в которых рассмотрены контактные задачи для многослойных и непрерывно-неоднородных упругих сред. Разработка новых композиционных материалов делает актуальным развитие методов решения контактных задач для структурно-неоднородных тел.

Особое место в ряду неоднородных сред занимают материалы с фазовыми включениями, образовавшимися в процессе эксплуатации. Вблизи таких включений возникают остаточные напряжения, влияющие на суммарное поле напряжений и характер разрушения материала. Классической работой, где представлена модель для определения остаточных напряжений, обусловленных фазовыми превращениями в неограниченном теле, является работа Дж. Эшелби. Однако включения, выходящие на поверхность, ранее не рассматривались. Актуальность изучения напряженного состояния поверхностных слоев материалов, имеющих включения другой фазы, в условиях контактного взаимодействия определяется широким использованием указанных материалов в тяжело нагруженных узлах трения и необходимостью прогнозирования надежности и долговечности сопряжений.

Большое внимание уделяется исследованию контактного взаимодействия шероховатых поверхностей. Дискретность контакта вносит неоднородность в распределение контактных и внутренних напряжений. Построено значительное количество моделей контактного взаимодействия упругих тел с шероховатыми поверхностями. Однако для материалов, обладающих вязкоупругими свойствами, влияние параметров микрогеометрии на контактные характеристики изучено недостаточно. Исследование этого вопроса даст возможность, в частности, изучить влияние параметров шероховатости на потери энергии при трении.

Известно, что изнашивание тел с неоднородной структурой происходит неравномерно, их первоначально плоская рабочая поверхность становится волнистой. Исследование и анализ изнашивания структурно-неоднородных тел, взаимодействующих с упругими и вязкоупругими материалами, позволит

определить эксплуатационные характеристики сопряжений в зависимости от свойств контртела и условий нагружения.

Математическое моделирование контактного взаимодействия и изнашивания в процессе трения элементов трибосопряжений позволяет не только прогнозировать долговечность, но и управлять их работой за счет выбора материалов с необходимыми свойствами.

### **Цель и задачи исследования**

Целью диссертации является анализ контактных характеристик и их изменения при изнашивании на основе постановки и решения контактных задач с учетом геометрических и механических параметров неоднородности взаимодействующих тел.

Задачи исследования:

- определить остаточные напряжения вблизи включений различной формы, выходящих на поверхность и возникающих в результате фазовых переходов; провести анализ влияния остаточных напряжений на напряжено-деформированное состояние при контактном взаимодействии;
- провести анализ взаимного влияния пятен контакта на контактные характеристики и деформационную составляющую коэффициента трения при скольжении геометрически неоднородных поверхностей по вязкоупругому полупространству;
- изучить особенности изнашивания композиционного материала, обладающего переменным по поверхности коэффициентом износа, при скольжении по нему вязкоупругого тела

### **Методы исследования**

Примененные в работе подходы к решению поставленных задач основываются на методах теории упругости, механики контактного взаимодействия и трибологии. Для получения аналитических результатов использованы методы теории функций комплексного переменного, математического анализа и теории дифференциальных уравнений. Аналитические решения дополнены численными расчетами.

### **Научная новизна**

Предложен метод определения остаточных напряжений вблизи включений, выходящих на поверхность тела и возникающих в результате фазового перехода с изменением плотности материала. Исследовано влияние остаточных напряжений на напряженное состояние при контактном взаимодействии.

Поставлена и решена задача о скольжении периодической системы недеформируемых осесимметричных неровностей по поверхности вязкоупругого слоя, сцепленного с жестким основанием.

Определены особенности изнашивания композиционного материала при скольжении по его поверхности вязкоупругого тела. Получено аналитическое выражение для установившейся формы поверхности композита.

**Достоверность** полученных результатов расчетов и выводов, сформулированных в диссертации, обеспечивается корректностью постановок контактных задач, использованием классических методов механики контактного взаимодействия, соответствием расчетов аналитическим результатам в предельных случаях.

**Практическая значимость** Полученные результаты могут быть использованы для решения ряда практических задач о контактом взаимодействии различного рода неоднородных тел в условиях трения скольжения и нормального нагружения. В частности, результаты моделирования напряженного состояния вблизи мартенситных включений используются для оценки условий образования дефектов на поверхности железнодорожных колес. Задачи о контактом взаимодействии вязкоупругого материала с периодической системой неровностей и изнашиваемым композитом использованы для оценки параметров микрорельефа дорожного покрытия при взаимодействии с шинами автомобиля.

#### **Представляется к защите**

Метод расчета остаточных напряжений вблизи мартенситных включений, возникающих на поверхности полупространства. Исследование влияния остаточных напряжений вблизи включений на распределение поверхностных и внутренних напряжений в условиях контактного взаимодействия.

Исследование эффекта взаимного влияния пятен контакта при скольжении периодической системы сферических инденторов по вязкоупругому слою, моделируемому телом Кельвина. Анализ зависимости контактных характеристик и деформационной составляющей коэффициента трения от нагрузки, скорости скольжения и плотности пятен контакта.

Установившееся решение износоконтактной задачи для вязкоупругого материала, взаимодействующего с изнашиваемым композитом, использованное для анализа совместного влияния скорости скольжения, геометрических и триботехнических характеристик композита на форму изношенной поверхности.

### **Апробация работы**

Результаты работы были представлены на Международных молодежных научных конференциях «Гагаринские чтения» (Москва, 2005, 2006, 2007); Международных научных конференциях Summer School – Conference “Advanced Problems in Mechanics” (Санкт-Петербург, 2005, 2007); на Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» посвященной 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна (Ереван, 2007); на семинаре им. Л.А.Галина «Механика сплошной среды» (2004, 2007) и на семинаре им. И.В.Крагельского «Механике фрикционного взаимодействия» (2008) в Институте проблем механики РАН.

### **Публикации**

Основные результаты, представленные в диссертации, опубликованы в четырех статьях [1-4] в журнале, рекомендованном к размещению публикаций Высшей аттестационной комиссией.

### **Структура и объем работы**

Работа изложена на 88 страницах, иллюстрирована 23-мя рисунками. Диссертация состоит из введения и трех глав, включая литературный обзор. Список цитированной литературы содержит 80 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** указана актуальность работы, формулируется ее цель, раскрывается научная новизна. Приведен обзор литературы по соответствующей проблематике. Изложены основные положения диссертационной работы по главам.

**В первой главе** определяются остаточные напряжения вблизи включений, возникающих на поверхности полупространства в результате фазового перехода. В связи с тем, что на практике встречаются включения различной формы, даны постановка и решение плоской и осесимметричной задач. Изучены особенности напряженного состояния вблизи включений различной формы. Проведен анализ влияния выходящих на поверхность включений на распределение поверхностных и внутренних напряжений в условиях контактного взаимодействия.

*Плоская задача.* Рассмотрено упругое включение, которое представляет собой длинный полуцилиндр с полукругом радиуса  $R$  в основании, включение выходит на поверхность упругого полупространства (рис. 1). Основной материал и включение имеют одинаковые модули Юнга  $E$  и коэффициенты Пуассона  $\nu$ . Плотность материала включения  $\rho_2$  после фазового превращения несколько меньше, чем плотность окружающего его материала  $\rho_1$ . На границе

включения и матрицы нормальная к границе раздела компонента смещений (т.е. радиальная компонента) терпит скачок:

$$u_r^{(1)} - u_r^{(2)} = \varepsilon. \quad (1.1)$$

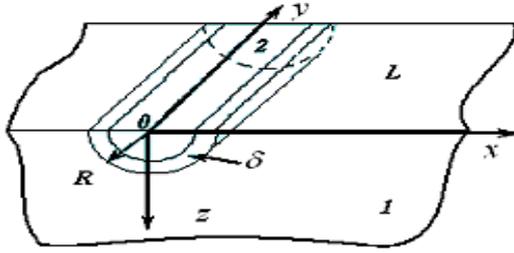


Рис. 1 а – включение в форме полуцилиндра;

Величина скачка  $\varepsilon$  определяется отношением плотностей материалов, формой и размером включения. Внешняя граница полупространства свободна от напряжений, т.е.:

$$\sigma_z^{(r)}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{xz}^{(r)}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{yz}^{(r)}|_{z=0} = 0. \quad (1.2)$$

Решение поставленной задачи представляется в виде суммы двух напряженных состояний:

$$\sigma_{ij}^{(r)} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}. \quad (1.3)$$

Здесь  $\sigma_{ij}^{(1)}$  соответствует напряженному состоянию бесконечной упругой плоскости с круговым включением. Второе слагаемое  $\sigma_{ij}^{(2)}$  представляет собой напряженное состояние нижней полуплоскости, возникающее в результате действия на её границе ( $z=0$ ) распределенной нагрузки  $p(x) = -\sigma_z^{(2)}|_{z=0}$ ,  $q(x) = \tau_{xz}^{(2)}|_{z=0}$ , причем для удовлетворения граничным условиям (1.2) необходимо чтобы:

$$p(x) = \sigma_z^{(1)}|_{z=0}, \quad q(x) = -\tau_{xz}^{(1)}|_{z=0}. \quad (1.4)$$

Таким образом, метод решения заключается в применении принципа суперпозиции и решении двух вспомогательных задач. Первая вспомогательная задача представляет собой задачу сопряжения для упругого диска, вставленного в круговую полость меньшего радиуса в бесконечной упругой плоскости, выполненной из того же материала. На границе диска и окружающего его материала скачок смещений определяется соотношением (2.1). Вторая – задача теории упругости о распределенной нагрузке, приложенной к границе полуплоскости. В результате решения получены аналитические выражения для компонент тензора напряжений (в виду громоздкости формулы здесь не приводятся).

*Осесимметричная задача.* Рассматривается упругое включение в форме полусферы радиуса  $R$ , находящееся в упругом полупространстве и выходящее на его поверхность (рис. 1b). Скачок перемещений в данном случае в сферической системе координат имеет вид:  $u_\rho^1 - u_\rho^2 = \varepsilon$ . Напряженное состояние полупространства с включением, удовлетворяющее условию свободной границы, т.е.  $\sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$ , а также скачку смещений, определяется методом аналогичным тому, который применен для решения плоской задачи.

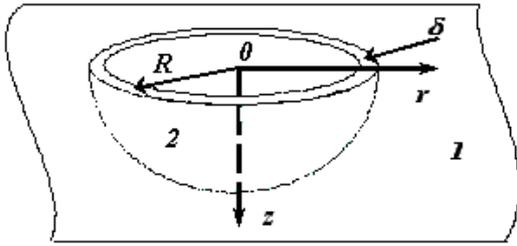


Рис. 1 б – включение в форме полусферы

Общее решение представлено в виде суммы двух вспомогательных. Первое вспомогательное – решение пространственной задачи теории упругости о концентрации напряжений вблизи сферического отверстия радиуса  $R$ , в которое вставлен шар большего

радиуса  $(R+\varepsilon)$ ; второе – задачи об осесимметрично нагруженном упругом полупространстве. В произвольной точке полупространства искомое решение получено численно, а на оси симметрии включения и поверхности полупространства получены аналитические выражения для компонент тензора напряжений.

Расчеты проводились на примере локального аустенитно-мартенситного превращения стали: модуль упругости  $E=0.21 \cdot 10^{12}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ , отношение плотностей материалов включения и исходного  $\rho_2/\rho_1=0,993$ . В этом случае для полуцилиндрического включения относительное увеличение радиуса включения  $\varepsilon/R=0.003$ , а значения напряжений отнесены к постоянной  $A=346$  МПа. Для включения в форме полусферы  $\varepsilon/R=0.002$  и  $B=247$  МПа.

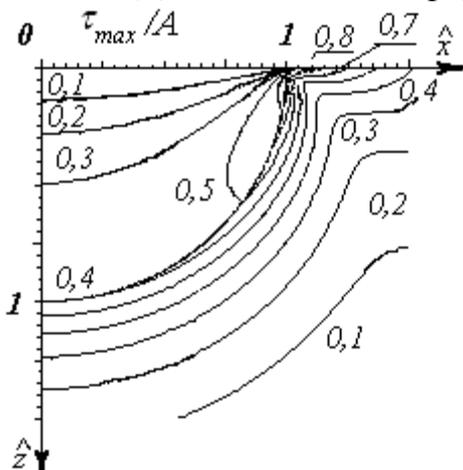


Рис.2 - Изолинии максимальных касательных напряжений  $\tau_{max}/A$ .

Проведен анализ напряженного состояния материала вблизи выходящих на поверхность включений. Установлено, что компоненты тензора напряжений  $\sigma_x$  для протяженного включения,  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  для полусферического и максимальные касательные напряжения  $\tau_{max}$  терпят разрыв на границе включения и основного материала. Изолинии максимальных касательных напряжений  $\tau_{max}$  вблизи протяженного включения изображены на рис.2.

Значения  $\tau_{max}(x,z)$  терпят разрыв вдоль границы между включением и основным материалом в точках  $(x^2+z^2)^{1/2}=R$ . В точках  $(\pm R, 0)$ , т.е. на поверхности полупространства при  $z=0$  в основном материале напряжения  $\tau_{max}(x, z)$  достигают своего максимума  $\tau_{max}=A$ . Максимальные касательные напряжения имеют на оси локальный максимум  $\tau_{max}=0.63A$ , при  $z=R+0$ . В этой же точке и растягивающие напряжения достигают максимального значения  $\sigma_x=A$ .

Напряженное состояние вблизи полусферического включения качественно не отличается от напряженного состояния вблизи протяженного включения. Как и в случае протяженного включения, граница материалов является концентратором остаточных напряжений, причем значения

максимальных касательных напряжений в основном материале выше, чем во включении.

Рассмотрено контактное взаимодействие жесткого сферического штампа с упругим полупространством вблизи выходящего на поверхность включения. При построении модели сделано допущение, что выходящая на поверхность граница включения остается плоской. Предполагается, что напряженное состояние, возникающее при контактном взаимодействии, не приводит к изменению формы и размеров включения и задачи определения внутренних контактных и остаточных напряжений можно решать отдельно. Трение на границе отсутствует. В таком случае распределение контактных давлений определяется теорией Герца, а площадка контакта представляет собой круг радиуса  $a$ . Напряженное состояние полупространства с включением при контактном взаимодействии определяется соотношением:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(r)} + \sigma_{ij}^{(c)}, \quad (1.5)$$

где  $\sigma_{ij}^{(c)}$  – внутренние напряжения, возникающие в результате контактного взаимодействия,  $\sigma_{ij}^{(r)}$  – остаточные напряжения.

В результате аналитических и численно–аналитических расчетов, проведенных при различных взаимных положениях штампа и включения, определены значения компонент тензора напряжений и главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , в каждой точке, что позволило получить распределение максимальных касательных напряжений  $\tau_{max}$  в полупространстве с включением.

Вычисления проводились на примере контактного взаимодействия железнодорожного колеса с рельсом. Максимальное давление на площадке контакта колесо – рельс составляет  $p_0=1010$  МПа, при этом постоянные, к которым отнесены значения остаточных напряжений, для включений разной формы равны  $A=0,34p_0$  и  $B=0,24p_0$ . Значения растягивающих напряжений не велики по сравнению с максимальными касательными: их максимальное значение при совпадении центров площадки контакта и включения не превышает 4 % от  $p_0$  и достигается на границе включения в основном материале.

Распределение  $\tau_{max}$  на оси симметрии полусферического включения, показано на рисунке 3а при разных соотношениях радиусов площадки контакта  $a$  и включения  $R$ :  $a>R$  (кривые 1,2)  $a=R$  (кривая 3)  $a<R$  (кривая 4). Пунктирной линией отмечена огибающая максимальных значений  $\tau_{max}(z)$ . На границе между включением и основным материалом имеет место разрыв напряжений. Величина скачка составляет  $[\tau_{max}] \sim 0,24p_0$ . Максимальное значение  $\tau_{max}$  достигается на границе включения в основном материале. Локальный максимум  $\tau_{max}$  во включении не превышает значения  $0,24p_0$  на глубине  $z \sim 0,48a$ . Огибающая  $\tau_m = \max(\tau_{max})$  имеет немонотонный характер, максимальное значение  $\tau_m$  составляет  $0,485p_0$  в случае, когда радиус включения равен  $R=0,48a$ .

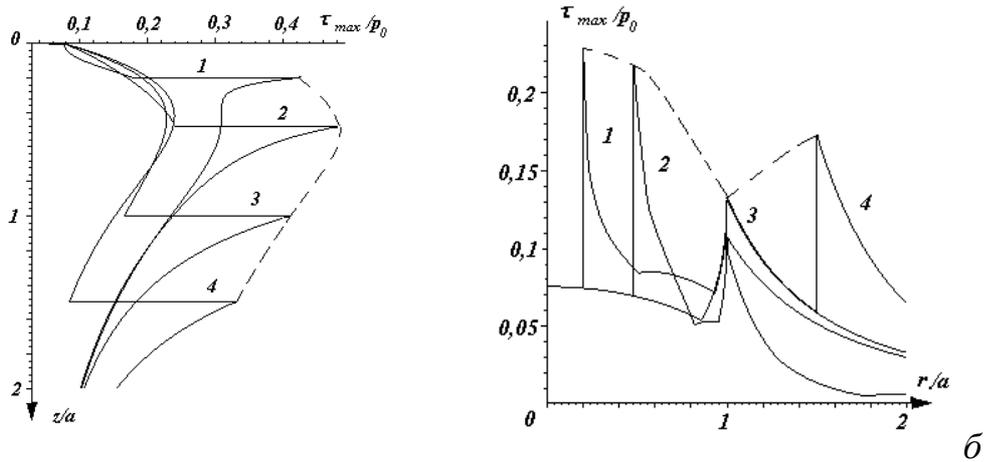


Рис. 3. Распределение максимальных касательных напряжений совпадению центра площадки контакта с центром полусферического включения (а)-вдоль оси симметрии при  $r=0$  и (б)-на поверхности полупространства при  $z=0$ . 1- $R/a=0.2$ ; 2- $R/a=0.48$ ; 3- $R/a=1$ ; 4- $R/a=1.5$ .

Распределение  $\tau_{max}$  на поверхности полупространства при  $z=0$  (рис. 3б) также зависит от относительных размеров зоны контакта и включения, функция  $\tau_{max}$  имеет разрыв на границе включения и разрыв производной на границе зоны контакта. Огибающая линия имеет точку минимума  $\tau_{max} \approx 0,13p_0$ , (при  $R=a$ ) и горизонтальную асимптоту  $\tau_{max} \approx 0,23p_0$  в случае, когда размер включения велик.

Если центр области контакта не совпадает с центром полусферического включения, картина распределения напряжений меняется в зависимости от того, каково их взаимное расположение. Проведенный анализ влияния смещения  $D$  на максимальные значения  $\tau_{max}$  показал, что максимальные значения  $\tau_{max}$ , возникающие в процессе прохождения области контакта по включению, всегда имеют место на пересечении границ области контакта, в основном материале.

**Во второй главе** дано решение контактной задачи о взаимодействии периодической системы жестких сферических инденторов с вязко-упругим основанием, определена деформационная составляющая коэффициента трения.

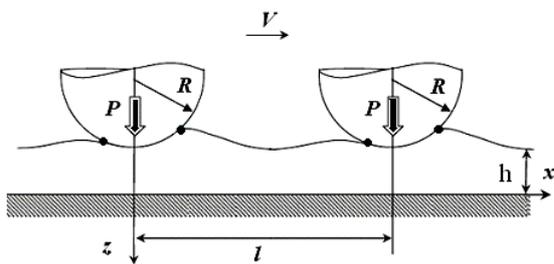


Рис. 4 Схема контакта

В зоне контакта  $\Omega$  выполняется условие:

$$w(x, y) = \delta + f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.1)$$

где  $w(x, y)$  - нормальные перемещения границы вязкоупругого слоя вследствие его деформирования;  $\delta$  - сближение тел за счет деформирования.

Контактное давление  $p(x,y)$  вне площадок контакта и на её границе ( $-a(y)$ ,  $b(y)$ ) равно нулю:

$$p(x,y) = 0, \quad (x,y) \notin \Omega, \quad p(-a(y)) = p(b(y)) = 0 \quad (2.2)$$

Нормальные перемещения и давление по координате  $x$  удовлетворяют условиям периодичности в любой точке на поверхности  $(x,y)$ :

$$w(x,y) = w(x+l,y), \quad p(x,y) = p(x+l,y). \quad (2.3)$$

Уравнение равновесия для каждого индентора имеет вид:

$$\iint_{\Omega} p(x,y) dx dy = P, \quad (2.4)$$

где  $P$  нагрузка на один индентор.

В качестве модели материала используем одномерную модель слоя на жестком основании и обобщенную модель Кельвина. Нормальные перемещения слоя  $w(x,y)$  связаны с давлением  $p(x,y)$  соотношением:

$$w(x',y',t) + T_{\varepsilon} \frac{dw(x',y',t)}{dt} = \frac{(1-\nu^2)h}{E_L} \left( p(x',y',t) + T_{\sigma} \frac{dp(x',y',t)}{dt} \right), \quad (2.5)$$

где  $T_{\varepsilon}$  и  $T_{\sigma}$  – времена последействия и релаксации,  $E_L$  – длительный модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона, отношение толщины слоя  $h$  к приведенному модулю  $E^*$  характеризует податливость слоя. В подвижной системе координат ( $x = x' - Vt$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$ ), связанной с жестким телом и движущейся со скоростью  $V$  (рис. 4), соотношение (2.5) имеет вид:

$$w(x,y) - T_{\varepsilon} V \frac{dw(x,y)}{dx} = \frac{h}{E^*} \left( p(x,y) - T_{\sigma} V \frac{dp(x,y)}{dx} \right). \quad (2.6)$$

Для решения трехмерной контактной задачи использован **метод полос** (иначе метод плоских сечений). Зона контакта разбита на  $2N$  тонких полос параллельных направлению скольжения (рис 5). Для каждой полосы решена соответствующая плоская периодическая задача.

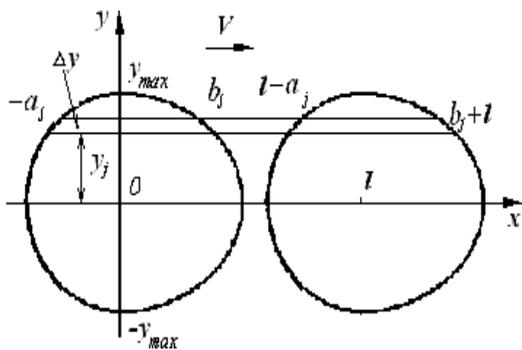


Рис. 5 Метод полос

В случае одномерной модели материала данный метод является точным т.к. нет необходимости учитывать взаимодействие между полосами. На рисунке 5 изображены две соседние площадки контакта и характерная полоса шириной  $\Delta y$  с номером  $j$ , находящаяся на расстоянии  $y_j$  от оси  $x$ ,  $y_{max}$  – полуширина площадки контакта в направлении оси  $y$ .

В результате решения дифференциального уравнения (2.6) в зоне контакта при фиксированном значении  $y_j$  получено соотношение (2.7), позволяющее найти распределение давлений. Предполагается, что вблизи области контакта форма индентора описывается уравнением параболы.

Система уравнений для определения неизвестной границы зоны контакта (2.8) получена из решения уравнения (2.6) в свободной зоне с учетом граничных условий и условий периодичности.

$$\hat{p}_j(\hat{x}, \hat{y}_j) = e^{(\hat{x} + \hat{a}_j)\zeta / \hat{a}_H} (\hat{a}_j^2 - C_1 \hat{a}_j - C_{2j}) - \hat{x}^2 - C_1 \hat{x} + C_{2j}, \quad (2.7)$$

$$e^{(\hat{a}_j + \hat{b}_j - \hat{l})\zeta / \hat{c} \hat{a}_H} (2\hat{\delta} - \hat{y}_j^2 - \hat{a}_j^2) = 2\hat{\delta} - \hat{y}_j^2 - \hat{b}_j^2, \quad (2.8)$$

$$e^{(\hat{b}_j + \hat{a}_j)\zeta / \hat{c} \hat{a}_H} (\hat{a}_j^2 - C_1 \hat{a}_j - C_{2j}) = \hat{b}_j^2 + C_1 \hat{b}_j - C_{2j},$$

где

$$C_1 = 2\hat{a}_H(1-c)/\zeta, \quad C_{2j} = 2\hat{\delta} - \hat{y}_j^2 - 2\hat{a}_H^2(1-c)/\zeta, \quad (2.9)$$

и введены безразмерные координаты и переменные:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x/R; \quad \hat{y} = y/R; \quad \hat{w} = w/R; \quad \hat{\delta} = \delta/R; \quad \hat{l} = l/R; \\ \hat{p}_j &= \frac{2p_j}{R} \frac{h}{E^*}; \quad \hat{P} = \frac{2P}{R^3} \frac{h}{E^*}; \quad \zeta = 2a_H/T_\sigma V; \quad \hat{a}_H = 2a_H/R. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $a_H$  – радиус площадки контакта рассчитанный по формулам Герца при длительном модуле упругости. Этот параметр характеризует приложенную нагрузку. Внедрение  $\delta$ , соответствующее заданной нагрузке  $P$ , вычислено с использованием итерационной процедуры. Нагрузка на неровность, определяется уравнением равновесия (2.4).

Смещение области контакта относительно оси симметрии индентора и несимметричное распределение контактных давлений приводят к тому, что на индентор действует тангенциальная сила в направлении противоположном направлению скольжения. Отношение тангенциальной силы к приложенной нагрузке позволяет вычислить деформационную составляющую коэффициента трения:

$$\mu = \iint_{\Omega} \hat{x} \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} / R \iint_{\Omega} \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y}. \quad (2.11)$$

В результате расчетов построено распределение контактных давлений, определены размеры площадки контакта и нормальные перемещения границы слоя в разных режимах трения. Взаимное влияние пятен контакта проявляется в неполном восстановлении свободной поверхности между инденторами.

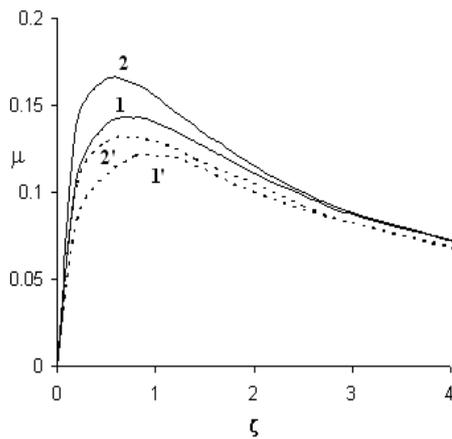


Рис. 6 Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения  $\mu$  от параметра  $\zeta$ ; сплошные линии  $\hat{P}=0,08$ , пунктирные линии  $\hat{P}=0,032$ ; при высокой плотности контакта  $l/R=1$  (1, 1'); при малой плотности контакта  $l/R=10$  (2, 2')

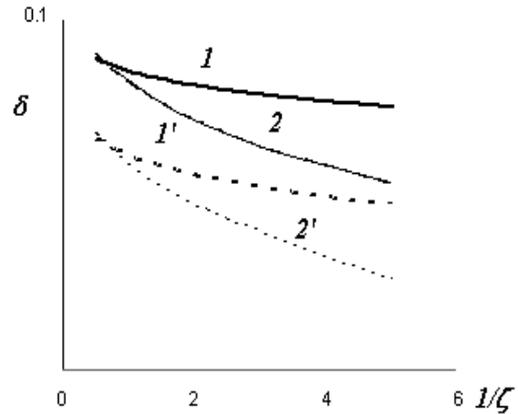


Рис. 7 Зависимость внедрения в центре индентора от параметра  $1/\zeta$ ; сплошные линии  $\hat{P}=0,08$ , пунктирные линии  $\hat{P}=0,032$ ; при высокой плотности контакта  $l/R=1$  (1, 1'); при малой плотности контакта  $l/R=10$  (2, 2')

Для разной плотности контакта и податливости слоя получены зависимости внедрения индентора  $\delta$  и деформационной составляющей коэффициента трения  $\mu$  от параметра  $\zeta=2a_H/T_\sigma V$ , который является аналогом числа Деборы (рис 6, 7). Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения  $\mu$  от параметра  $\zeta$  является немонотонной, при этом значение  $\mu$  стремится к нулю, когда  $\zeta \rightarrow 0$  и  $\zeta \rightarrow +\infty$  (рис.6). Коэффициент трения уменьшается с ростом плотности контакта и уменьшением податливости слоя. Полученные зависимости внедрения от параметра  $1/\zeta$  (рис. 7) иллюстрируют эффект «всплытия» контртела при больших скоростях скольжения, характерный для вязкоупругих материалов, при этом величина внедрения определяется плотностью пятен контакта: чем выше плотность контакта, тем больше величина внедрения.

При значении параметра  $\zeta$  близкого к единице, т.е. вблизи максимального значения коэффициента трения площадка контакта не симметрична, а максимум контактного давления локализован вблизи набегающего края (рис.8). При малых скоростях скольжения площадка контакта является круговой, давление распределено симметрично, что соответствует упругому поведению материала. Следует отметить характерную особенность решения рассматриваемой задачи: в отличие от решения задачи для единичного индентора площадка контакта при больших значениях  $\zeta$  и близком расположении инденторов становится эллиптической, сильно вытянутой в направлении перпендикулярном направлению скольжения (рис. 9 а).

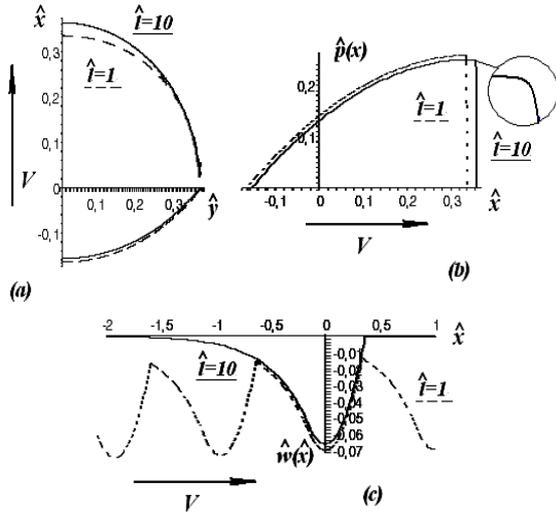


Рис. 8.  $\zeta = 1$ . Форма площадки контакта на поверхности тела (а), распределение контактных давлений (б) и нормальные перемещения в среднем сечении при  $y=0$  (с); сплошные линии  $l/R=10$  пунктирные  $l/R = 1$

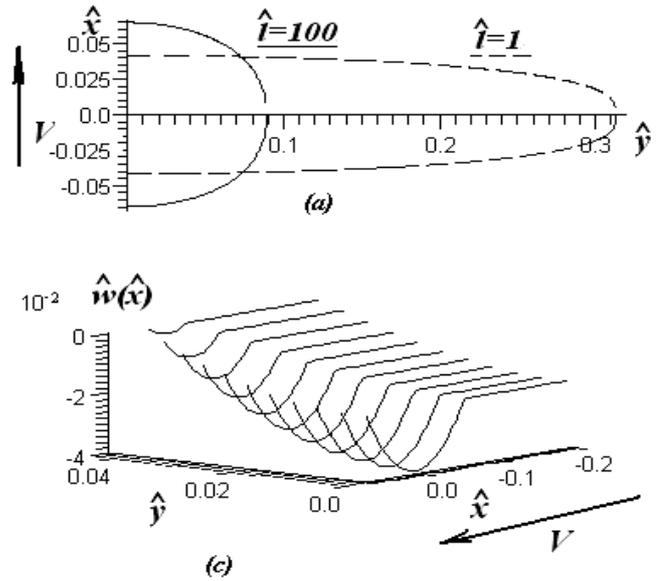


Рис. 9.  $\zeta = 10^{-5}$ . Форма площадки контакта на поверхности тела (а) сплошные линии  $l/R=100$  пунктирные  $l/R = 1$ ; и прогиб поверхности в нескольких сечениях при  $l/R = 1$  (с)

При больших расстояниях между инденторами результаты расчетов совпадают с результатами, полученными Маховской Ю.Ю., Морозовым А.В. для единичного индентора.

Результаты настоящего исследования могут применяться для оценки коэффициента трения резин при скольжении вдоль поверхности с регулярной шероховатостью.

**В третьей главе** определяется установившаяся форма изношенной поверхности неоднородного материала при скольжении по нему вязкоупругого контртела.

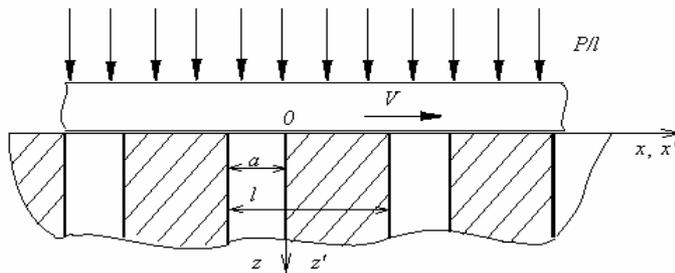


Рис.10 Схема скольжения вязкоупругого тела по поверхности полупространства, имеющего неоднородную периодическую структуру.

Вязкоупругое тело прижато к неоднородному полупространству силой  $P/l$  и движется с постоянной скоростью  $V$  вдоль оси  $x$  (рис. 10). Жесткий неоднородный материал обладает кусочно-постоянным коэффициентом износа  $K_{\omega}(x)$ , при этом структура материала является периодической с периодом  $l$ .

$$K_{\omega}(x) = \begin{cases} K_{\omega 1}, & x \in [nl, a + nl], \\ K_{\omega 2}, & x \notin [nl, a + nl] \end{cases} \quad (3.1)$$

здесь  $K_{\omega 1}$  и  $K_{\omega 2}$  – коэффициенты износа поверхности внутри и вне заштрихованных полос  $[nl+a, (n+1)l]$ , ( $K_{\omega 1} > K_{\omega 2}$ ).

При трении имеет место изнашивание неоднородного полупространства, причем скорость линейного изнашивания  $\partial\omega_*(x,t)/\partial t$  связана с давлением  $p(x,t)$  соотношением:

$$\frac{\partial\omega_*(x,t)}{\partial t} = K_\omega(x) \left( \frac{p(x,t)}{\tilde{p}} \right)^\alpha, \quad (3.2)$$

где  $\omega_*(x,t)$  – перемещения границы тела за счет износа,  $K_\omega(x)$ ,  $\alpha$  – параметры, определяемые экспериментально,  $\tilde{p}$  – некоторое характерное давление.

Реализуется полный контакт двух тел, поверхность жесткого полупространства в начальный момент времени совпадает с координатной плоскостью  $(x,y)$ , а условие контакта имеет вид:

$$u_z(x,t) + \omega_*(x,t) = D(t), \quad (3.3)$$

здесь  $u_z(x,t)$  перемещения точек поверхности вязкоупругого тела,  $D(t)$  – сближение тел в результате действия нагрузки. Полная нагрузка на период  $l$  при  $z = 0$  определяется выражением:

$$P(t) = \int_0^l p(x,t) dx. \quad (3.4)$$

В процессе изнашивания происходит формоизменение первоначально плоской поверхности полупространства и перераспределение контактного давления  $p(x,t)$ . Пусть функция  $f(x,t)$  описывает границу поверхности полупространства. Необходимо определить асимптотику функции  $f(x,t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Заметим, что при построении модели мы пренебрегаем влиянием сил трения на распределение контактных давлений.

При установившемся изнашивании ( $t \rightarrow \infty$ ) скорость износа  $\partial\omega_*(x,t)/\partial t = D_\infty$  постоянна, установившееся распределение давлений  $p(x,t)$  согласно (3.2) не зависит от времени.

$$p_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(x,t), \quad p_\infty(x) = \begin{cases} p_1 = \tilde{p} \left( \frac{D_\infty}{K_{\omega 1}} \right)^{1/\alpha}, & x \in [nl, a + nl], \\ p_2 = \tilde{p} \left( \frac{D_\infty}{K_{\omega 2}} \right)^{1/\alpha}, & x \notin [nl, a + nl] \end{cases} \quad (3.5)$$

Для описания свойств вязкоупругого тела использован двумерный аналог модели Максвелла–Томсона. Определяющие соотношения в случае плоской деформации имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{x'}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_{x'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left( \sigma_{z'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{z'}}{\partial t} \right), \\ \varepsilon_{z'} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{z'}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_{z'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{z'}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left( \sigma_{x'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial t} \right), \\ \gamma_{x'z'} + T_\varepsilon \frac{\partial \gamma_{x'z'}}{\partial t} &= \frac{1+\nu}{E} \left( \tau_{x'z'} + T_\sigma \frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь  $E$  и  $\nu$  модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, отношение  $T_\varepsilon E/T_\sigma$  представляет собой мгновенный модуль упругости,  $l/T_\varepsilon$  – коэффициент скорости последействия ( $T_\varepsilon > T_\sigma$ ).

В подвижной системе координат компоненты вектора смещений  $u_i$  и тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  не зависят явно от времени и являются функциями координат  $(x, z)$ . При этом комплексы  $\varepsilon_{ij} - T_\varepsilon V \partial \varepsilon_{ij} / \partial x$ ,  $\sigma_{ij} - T_\varepsilon V \partial \sigma_{ij} / \partial x$  удовлетворяют уравнениям, эквивалентным уравнениям равновесия, совместности деформаций и закону Гука для изотропного упругого тела. Это обстоятельство и решение соответствующей задачи теории упругости позволяют найти решение поставленной задачи. При действии на границу упругой полуплоскости периодического по оси  $0x$  нормального давления упругие перемещения на границе получены Штаерманом И.Я.. Для определения перемещений на границе вязкоупругой полуплоскости необходимо решить уравнение:

$$u_z^{(\infty)} - T_\varepsilon V \frac{\partial u_z^{(\infty)}}{\partial x} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int \ln 2 \left| \sin \frac{\pi(\xi-x)}{l} \right| \left[ p_\infty(\xi) - T_\sigma V \frac{\partial p_\infty(\xi)}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (3.7)$$

Решение уравнения (3.7) при  $t \rightarrow \infty$  с учетом соотношения (3.5) определяется выражением:

$$u_z^{(\infty)}(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left\{ \int_0^a p_1 \ln 2 \left| \sin \frac{\pi(\xi-x)}{l} \right| d\xi + \int_a^l p_2 \ln 2 \left| \sin \frac{\pi(\xi-x)}{l} \right| d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{(1-e^{-\frac{l}{T_\varepsilon V}})} \left( 1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) \Delta p \int_0^l e^{-\frac{\chi}{T_\varepsilon V}} \ln \left| \frac{\sin(\pi(a-(x+\chi))/l)}{\sin(\pi(-(x+\chi))/l)} \right| d\chi \right\}. \quad (3.8)$$

здесь принято обозначение  $\Delta p = p_2 - p_1$ . Выражение (3.8) позволяет определить форму изношенной поверхности  $f(x)$  при  $t \rightarrow \infty$  с точностью до константы.

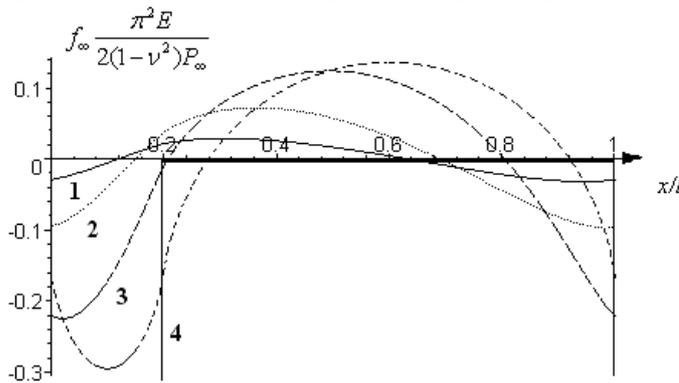


Рис.11 Установившаяся форма изношенной поверхности при  $m_1=0,3$ ,  $\hat{a}=0,2$ ,  $\gamma=10^{-3}$ ,  $\zeta=1-1$ ;  $\zeta=3-2$ ;  $\zeta=10-3$ ;  $\zeta=1000-4$ .

В результате проведенных вычислений были построены графики формы поверхности жесткого тела в установившемся режиме изнашивания при различных значениях параметра  $\zeta = l/T_\varepsilon V$  (рис. 11). На рисунке более прочная зона обозначена утолщенной линией.

Отметим, что форма выступов изношенной поверхности при контакте с вязкоупругим телом при значениях  $10^{-2} < \zeta < 10^2$  является не симметричной (1-3) в отличие от формы выступов при контакте с упругим телом (4). При  $\zeta=100$

формы поверхности, полученные в результате решения вязкоупругой и упругой задач, отличаются не значительно, а при  $\zeta=1000$  совпадают. При прочих равных условиях в зависимости от параметра  $\zeta = l/T_\varepsilon V$  меняется глубина впадин (амплитуда волн).

Полученные результаты могут быть применены для моделирования износа дорожного покрытия при контакте с шинами автомобиля. В процессе износа микро и макро рельеф дорожного полотна меняется, что приводит к изменению коэффициента сцепления. Поддержание оптимального коэффициента сцепления в течение длительного времени и прогнозирование его снижения обеспечивает необходимую безопасность движения транспорта.

**В заключении** сформулированы основные выводы и результаты, полученные в диссертации.

#### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Предложен метод определения остаточных напряжений, возникающих вблизи мартенситных включений выходящих на поверхность полупространства. Рассмотрены включения в форме длинного полуцилиндра и полусферы. При моделировании предполагалось, что в результате фазового перехода плотность материала включения уменьшилась, а упругие характеристики не изменились. Получены аналитические выражения для компонент тензора остаточных напряжений в задаче о полуцилиндрическом включении.
2. Проведена оценка влияния выходящих на поверхность включений на распределение поверхностных и внутренних напряжений в условиях контактного взаимодействия. Рассмотрены различные взаимные положения включения и пятна контакта. Анализ напряженного состояния показывает, что значения максимальных касательных напряжений, возникающих при контактном взаимодействии в полупространстве с включениями, превышают наибольшие величины напряжений в однородном полупространстве до 30 %. Наиболее опасным с точки зрения разрушения является совпадение центров включения и пятна контакта.
3. Поставлена и решена контактная задача о скольжении периодической системы сферических инденторов по вязкоупругому слою, моделируемому телом Кельвина. Показано, что с увеличением плотности контакта деформационная составляющая коэффициента трения уменьшается, а относительное внедрение увеличивается. При высокой плотности контакта форма контактного пятна меняется от круговой при малых значениях числа Деборы до эллиптической при высоких.
4. Построено установившееся решение износоконтактной задачи для вязкоупругого материала, взаимодействующего с недеформируемым, изнашиваемым композитом. Вязкоупругие свойства материала

описываются с помощью двумерного аналога модели Максвелла–Томсона. Показано, что форма выступов и впадин является не симметричной в отличие от упругого решения. Определен диапазон параметра - аналога числа Деборы, в котором имеет место асимметрия.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Горячева И. Г., Любичева А. Н. Расчет остаточных напряжений вблизи включений в неоднородном материале. Трение и износ, 2004, Том 25, №2, с. 115-124.
2. Любичева А. Н., Торская Е. В. Напряженное состояние упругих тел с включениями при контактном взаимодействии. Трение и износ, 2004, Том 25, №4, с. 416-422.
3. Любичева А.Н. Установившееся решение периодической задачи об изнашивании композиционного материала вязкоупругим телом // Трение и износ 2006 г., том 27, №5, с. 465-472.
4. Любичева А.Н. Анализ взаимного влияния пятен контакта при скольжении периодической системы неровностей по вязкоупругому основанию винклеровского типа// Трение и износ 2008 г., том 29, №2, с.125-133.
5. Lyubicheva A. N. Analysis of contact and internal stresses in structurally inhomogeneous bodies.// 32 Summer School – Conference “Advanced Problems in Mechanics” June 24 – July 1, 2004, St. Petersburg (Repino), Russia.
6. Любичева А.Н. Исследование напряженного состояния структурно неоднородных тел при контактном взаимодействии// 2005, Тезисы докладов Международная молодежная научная конференция 31-е Гагаринские чтения, с. 93
7. Любичева А.Н. Формирование установившегося рельефа поверхности неоднородного полупространства при изнашивании вязкоупругим телом// 2006, Тезисы докладов Международная молодежная научная конференция 32-е Гагаринские чтения, с. 23
8. Любичева А.Н. Скольжение периодической системы неровностей по вязкоупругому слою, сцепленному с основанием// 2007, Тезисы докладов Международная молодежная научная конференция 33-е Гагаринские чтения, с. 61
9. Lyubicheva A.N.3-D Problem for the Periodic System of Asperities Sliding over Visco-elastic Foundation// 34 Summer School – Conference “Advanced Problems in Mechanics” 20-28 June, 2007, St. Petersburg (Repino), Russia pp. 79-80
10. Любичева А.Н. Периодическая износ-контактная задача для вязкоупругого основания// Сборник докладов Актуальные проблемы механики сплошной среды 24-29 сентября 2007, Ереван, Армения, с.239-242