

На правах рукописи

Пантелеев Сергей Александрович

**Двусторонние оценки критических
значений параметра нагружения
в задачах об устойчивости толстых
упругих блоков при больших сжатиях**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена в ГОУ ВПО "Самарский государственный университет"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Е.И. Рыжак

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Л.В. Никитин

доктор физико-математических наук
Н.Г. Бураго

Ведущая организация: ГОУ "Московский физико-технический
институт. Государственный университет"

Защита состоится 29 апреля 2010 г. в 15:00 час. на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН по адресу: 119526, г. Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН.

Автореферат разослан "____" апреля 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

Е.Я. Сысоева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Исследование устойчивости и неустойчивости упругих тел при сжатии является традиционным направлением в прикладной механике, берущим начало от классической задачи Эйлера о выпучивании продольно сжатого стержня. Актуальность данной тематики не уменьшается со временем и обусловлена, прежде всего, огромным прикладным значением вопросов устойчивости (и тесно связанных с ними вопросов прочности) для самых разных областей технической деятельности — от машиностроения и авиации до строительства и разработки полезных ископаемых. Изучение именно этих вопросов, обусловленное потребностями практики, послужило важнейшим толчком к появлению и развитию такой науки как механика деформируемого твердого тела.

Помимо основоположника теории устойчивости деформируемых тел Л. Эйлера, большой вклад в исследование различных аспектов этой теории внесли такие ученые как Г. Пиола, Г. Кирхгоф, Дж. Максвелл, У. Кельвин, Ж. Адамар, Д.У. Релей, Э. Трефтц, Дж.У. Гиббс, Р.Э. Мизес, Т. Карман, С.П. Тимошенко, В.З. Власов, Дж. Болл, Р. Хилл, Д. Друккер, В. Койтер, Ф.Р. Шенли, М.А. Био, М.Ф. Битти, Дж. Холден, В.В. Новожилов, А.А. Мовчан (ст.), А.И. Лурье, А.Н. Гузь, В.Д. Ключников, В.В. Болотин, Дж. Райс и другие.

На многие вопросы, которые ставит перед инженерами практика, обоснованный ответ может дать только теория. Это в большой степени способствует развитию самой теории, и по мере этого развития появляются возможности теоретического рассмотрения и решения тех задач (в том числе и практически важных), которые ранее теоретическому исследованию не поддавались. Сказанное в полной мере относится и к данной работе: в ней представлены исследования таких задач об устойчивости сжатых упругих тел, которые ранее не были и, в определённой степени, не могли быть решены в силу отсутствия средств — соответствующих теоретических разработок. При всём колоссальном количестве выполненных ранее и выполняемых в настоящее время расчётов на устойчивость, традиционные методики таких расчётов имеют очень существенные ограничения и пробелы, восполняемые лишь эмпирически и "на ощупь". Традиционные методы приспособлены только для нахождения необходимых условий устойчивости (иначе говоря, достаточных условий неустойчивости, соответствующих оценкам сверху для критических значений параметра нагружения), и при этом они хорошо "работают" только для тонких тел (стержней, пластин, оболочек). Практически же гораздо более важной задачей является нахождение достаточных условий устойчивости (оценок снизу для критических значений параметра нагружения), да и тела (элементы конструкций и сооружений) зачастую являются "толстыми"; кроме

того, они могут в рабочем состоянии находиться в условиях больших сжатий, что требует при анализе устойчивости корректного учёта нелинейно упругих свойств материала (в соответствии с современным состоянием и известными соотношениями нелинейной теории упругости). Точные решения задачи об устойчивости, которые давали бы условия, являющиеся как необходимыми, так и достаточными условиями устойчивости, отсутствуют.

Из всего изложенного выше вытекает

Цель работы: получение как достаточных условий устойчивости, так и достаточных условий неустойчивости (т.е. двусторонних оценок для критических значений параметра нагружения) в некотором специфическом (но при этом достаточно широком) классе задач о равновесном деформировании (а именно, сжатии) нелинейно упругих тел, относительная толщина которых может быть сколь угодно большой. Упомянутый класс задач характеризуется тем, что тела имеют форму прямоугольного параллелепипеда ("блока") со свободной от кинематических ограничений парой граней и некоторыми специальными кинематическими граничными условиями на гранях двух других пар; при этом соотношение размеров блока произвольно. Выбор именно такого класса задач обусловлен двумя обстоятельствами: во-первых, появлением в последнее время теоретических результатов, касающихся указанных геометрии и граничных условий и открывающих совершенно новые возможности в использовании известных методов анализа устойчивости; во-вторых, форма блока разных пропорций и рассматриваемый набор граничных условий представляют немалый интерес для приложений как сами по себе, так и в качестве основы для гипотез и аналогий в отношении тел иной формы и при иных граничных условиях.

Научная новизна диссертации определяется следующими полученными в ней основными результатами, которые и выдвигаются в качестве защищаемых положений:

1. Предложены и исследованы упругие потенциалы, задающие ортотропные сжимаемые нелинейно-упругие материалы при конечных деформациях. Материалы предложенного типа представляют собой обобщение на случай анизотропии и сжимаемости известного (изотропного и несжимаемого) материала Муни-Ривлина.
2. Впервые найдены (с помощью модифицированного метода Холдена) достаточные условия устойчивости (оценки снизу для критического значения параметра нагружения) в задачах об устойчивости сжатых упругих блоков произвольных пропорций из материалов предложенного типа.
3. Для получения достаточных условий неустойчивости (имеющих смысл нарушения необходимых условий устойчивости) предложена и использована принципиально новая кинематическая гипотеза, заключающая-

ся в том, что формы потери устойчивости ищутся в классе экстремалей модифицированной вариационной задачи Корна (которая тесно связана с задачами о выпучивании стержней при сжатии).

4. Впервые определены (с помощью упомянутой новой гипотезы) достаточные условия неустойчивости (оценки сверху для критического значения параметра нагружения) в тех же задачах об устойчивости сжатых упругих блоков произвольных пропорций.
5. Проведено сравнение оценок сверху для критического значения параметра нагружения, полученных с помощью предложенной кинематической гипотезы и с помощью традиционной кинематической гипотезы ортогональных плоских сечений ("балочного приближения"). Показано, что новая гипотеза дает меньшие (т.е. лучшие) оценки сверху при любых геометрических и жесткостных параметрах блоков в рассматриваемых классах задач. При этом в пределе малых толщин результаты асимптотически совпадают, а в пределе больших толщин новая гипотеза дает конечные оценки сверху для критических напряжений (качественно соответствующие полученным в работе оценкам снизу), а традиционная гипотеза — дает оценки сверху, стремящиеся к бесконечности.
6. Проведено численно-аналитическое сравнение полученных оценок снизу и оценок сверху при изменении как геометрических параметров блока, так и параметров анизотропии и сжимаемости материала. Выявлено подобие параметрических зависимостей для оценок обоих типов во всем диапазоне изменения указанных параметров. Выявленное подобие косвенно указывает на то, что найденные зависимости для оценок сверху и оценок снизу правильно отражают соответствующие зависимости для точных критических значений параметра нагружения.

Достоверность результатов подтверждается физической обоснованностью выбора модели материала и физической обоснованностью постановок задач об устойчивости, а также строгим аналитическим характером рассмотрения этих задач с применением современных теоретических концепций и математических средств механики деформируемого твердого тела.

Практическая значимость результатов. Полученные в работе результаты могут быть использованы для определения практически важных безопасных нагрузок (то есть таких нагрузок, при которых еще не теряется устойчивость) для блокообразных упругих тел при рассмотренных в работе специальных граничных условиях. Кроме того, полученные результаты (строгие двусторонние оценки критических значений параметра нагружения) могут быть использованы для тестирования применяемых на практике процедур численного решения задач об устойчивости.

Апробация работы. Основные положения и работа в целом докладывались и обсуждались на следующих конференциях, семинарах и школах:

- Научный семинар "Современные проблемы математики и механики" под руководством доктора физико-математических наук, профессора Ю.Н. Радаева. Самара, Самарский государственный университет, 2006–2009 гг.;
- Научный семинар "Механические проблемы геофизики" под руководством доктора физико-математических наук, профессора Л.В. Никитина. Москва, Институт физики Земли РАН, 2006–2009 гг.;
- 15-я Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, Институт механики сплошных сред УрО РАН, 26 февраля – 3 марта 2007 г.;
- Международная молодежная научная конференция "XXXIII Гагаринские чтения" Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 3 – 7 апреля 2007 г.;
- Юбилейная школа семинар "Проблемы современной механики деформируемого твердого тела и прикладной математики", Самара, Самарский государственный университет, 29 января – 2 февраля 2008 г.
- Международная молодежная научная конференция "XXXIV Гагаринские чтения" Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 1 – 5 апреля 2008 г.;
- Всероссийская конференция "Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела." Пермь, Институт механики сплошных сред УрО РАН, 13 – 15 октября, 2008. г.
- Научный семинар по механике деформируемого твердого тела под руководством доктора физико-математических наук, профессора Р.В. Гольдштейна. Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 15 мая 2009 г.;
- Научный семинар по механике сплошной среды имени Л.А. Галина под руководством профессоров В.М. Александрова, В.Н. Кукуджанова, А.В. Манжирова. Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 6 ноября 2009 г.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 7 печатных работ (без соавторов), в том числе 2 статьи в журналах из перечня ВАК РФ.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. В тексте имеется 35 рисунков. Список цитируемой литературы содержит 47 наименований. Общий объем работы составляет 164 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационного исследования, сформулирована цель работы. Приведен обзор литературы по соответствующей проблематике.

В первой главе приводится описание основных понятий и методов, используемых в работе.

В разделе **I.1** вводятся основные понятия, используемые при отсчетном описании сплошной среды.

Отображение $\mathbf{r}(\mathbf{x})$, переводящее отсчетную конфигурацию в текущую, называется трансформацией, а $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — градиентом трансформации

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla_{\kappa} \otimes \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad d\mathbf{r}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Для описания напряженного состояния используется **тензор напряжений Пиолы** \mathbf{T}_{κ} , связанный с тензором напряжений Коши известными формулами

$$\mathbf{T}_{\kappa} = (\det \mathbf{F}) (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{T}; \quad \mathbf{T} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T}_{\kappa}. \quad (2)$$

При $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ тензор напряжений Коши и тензор напряжений Пиолы совпадают.

Определяющие соотношения упругого (гиперупругого) материала. Материал называется **упругим**, если текущее напряженное состояние зависит от текущего значения градиента трансформации \mathbf{F} , причем соответствующее определяющее соотношение удовлетворяет принципу материальной объективности:

$$\mathbf{T} = \hat{\mathfrak{F}}(\mathbf{F}); \quad \mathfrak{F}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T \cdot \mathfrak{F}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{Q}.$$

Другой вид определяющего соотношения для упругого материала задает связь между тензором напряжений Пиолы и градиентом трансформации, которое вытекает из известного соотношения между тензором напряжения Пиолы и тензором напряжений Коши (2)

$$\mathbf{T}_{\kappa} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot \hat{\mathfrak{F}}(\mathbf{F}).$$

Пусть $\sigma(\mathbf{F})$ — объемная плотность упругой энергии по отношению к отсчетной конфигурации (упругий потенциал); тогда

$$\delta\sigma = \mathbf{T}_{\kappa} : \delta\mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}_{\kappa} = \frac{d\sigma(\mathbf{F})}{d\mathbf{F}}.$$

Соотношение, связывающее упругие потенциалы $\sigma_{\kappa}(\tilde{\mathbf{F}})$ и $\sigma_{\kappa_0}(\mathbf{F})$ для одного и того же материала, заданные относительно разных отсчетных конфигураций, имеет вид:

$$\sigma_{\kappa}(\tilde{\mathbf{F}}) = \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \sigma_{\kappa_0}(\mathbf{F}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}),$$

где \mathbf{F}_0 — градиент трансформации, переводящей конфигурацию κ_0 в конфигурацию κ , а \mathbf{F} — градиент трансформации относительно конфигурации κ .

В разделе **I.2** формулируется критерий устойчивости / неустойчивости для упругих тел со специальными граничными условиями.

Принимается следующее определение устойчивости: пусть упругое тело B находится в равновесной конфигурации κ_0 . Если при переходе в любую другую кинематически допустимую конфигурацию потенциальная энергия упругого тела B увеличивается, то конфигурация κ_0 называется устойчивой. Если существует хотя бы одна допустимая конфигурация, при переходе в которую потенциальная энергия уменьшается, то конфигурация κ_0 называется неустойчивой. В дальнейшем будут рассматриваться лишь те состояния, которые в некотором смысле близки к исходному.

Сформулируем соответствующий математический критерий устойчивости / неустойчивости (в малом) упругого тела при некоторых граничных условиях (ГУ). Будем считать, что в отсчетной конфигурации тело занимает область B_{κ_0} , имеющую блокообразную форму, а граница этой области ∂B_{κ_0} состоит из граней блока, образующих три группы Σ_1, Σ_2 и Σ_3 . На гранях группы Σ_1 имеет место свободное проскальзывание вдоль соответствующей грани, т.е. выполняются условия тангенциальности перемещений и отсутствия тангенциального внешнего напряжения:

$$\delta \mathbf{r}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\kappa_0}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{t}_{\kappa_0}^{\text{ex}}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n}_{\kappa_0}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}_{\kappa_0}(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_1, \quad (3)$$

где $\delta \mathbf{r}(\mathbf{x})$ — поле инкрементальных смещений, $\mathbf{n}_{\kappa_0}(\mathbf{x})$ — внешняя нормаль к ∂B_{κ_0} в соответствующей точке.

На гранях группы Σ_2 имеет место свободное перемещение точек по нормали к соответствующей грани, т.е. выполняются условия нормальности перемещений и отсутствия нормального внешнего напряжения:

$$\delta \mathbf{r}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n}_{\kappa_0}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}_{\kappa_0}(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{t}_{\kappa_0}^{\text{ex}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\kappa_0}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_2. \quad (4)$$

На части Σ_3 действует мертвая нагрузка

$$\mathbf{n}_{\kappa_0} \cdot \mathbf{T}_{\kappa_0} = \mathbf{t}_{\kappa_0}^{\text{ex}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_3. \quad (5)$$

Тогда для тела B функционал второй вариации полной потенциальной энергии имеет следующий вид:

$$R\{\delta \mathbf{r}\} = \int_{B_{\kappa_0}} \nabla_{\kappa_0} \otimes \delta \mathbf{r} : \mathbf{C} : \nabla_{\kappa_0} \otimes \delta \mathbf{r} dV. \quad (6)$$

Конфигурация κ_0 является устойчивой, если функционал $R\{\delta \mathbf{r}\}$ положительно определен. Если функционал $R\{\delta \mathbf{r}\}$ может принимать отрицательные значения, то конфигурация κ_0 является неустойчивой.

В **I.3** дано описание метода кинематических гипотез и метода Холдена, используемых в работе для получения двусторонних оценок критического значения параметра нагружения.

Получение достаточных условий неустойчивости (которые имеют смысл нарушения необходимых условий устойчивости) основано на методе кинематический гипотез, который сводится к искусственному сужению класса всех кинематически допустимых полей смещений до некоторого подкласса. Задача о вырождении функционала R в этом случае решается на выбранном подклассе и зачастую допускает аналитическое решение исходной вариационной задачи на подклассе (отметим при этом, что полученное решение все равно остается приближенным решением исходной задачи). Если в выбранном подклассе есть такое поле смещений, на котором функционал второй вариации полной потенциальной энергии принимает отрицательное значение, то рассматриваемая конфигурация неустойчива. Если же такое поле в выбранном подклассе отсутствует, то это не означает устойчивости рассматриваемой конфигурации, так как на всем классе кинематически допустимых полей смещений такое поле может существовать.

Для получения достаточных условий устойчивости (иначе говоря, оценок снизу для критических значений параметра нагружения) используется предложенный в 1964 г. метод Холдена. Этот метод состоит в построении функционала $\tilde{R}\{\delta\mathbf{r}\}$, минорирующего функционал (6) на любых допустимых полях смещений:

$$R\{\delta\mathbf{r}\} \geq \tilde{R}\{\delta\mathbf{r}\}, \quad \forall \delta\mathbf{r}. \quad (7)$$

Минорирующий функционал метода Холдена имеет простую структуру и это делает возможным аналитическое получение условий его положительной определенности. Очевидно, что эти же условия служат достаточными условиями положительной определенности исходного функционала (6).

В **I.4** приводится чрезвычайно важный для всех дальнейших рассмотрений вспомогательный материал, а именно: результаты решения модифицированной задачи Корна для блока со специальными граничными условиями, совпадающими с кинематическими граничными условиями исследуемых в работе задач об устойчивости. Под результатами понимаются аналитические выражения для константы Корна и соответствующих экстремалей.

Во **второй главе** вводится предложенное в работе семейство упругих потенциалов, позволяющих задавать начально изотропные и начально ортотропные нелинейно-упругие материалы при произвольных деформациях. Кроме того, вводится два семейства однородных равновесных сжатых конфигурациях блоков, соответствующих двум типам рассматриваемых задач об устойчивости.

Семейство упругих потенциалов задается следующим равенством

$$\begin{aligned} \sigma_{\kappa_0}(\mathbf{F}) = \frac{3}{4}G (\ln(\mathbf{A} : (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)) + \ln(\mathbf{A} : (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}))) + \\ + \frac{K}{2} (\det \mathbf{F} + \det \mathbf{F}^{-1}). \end{aligned} \quad (8)$$

где K , G — скалярные параметры (которые имеют смысл упругих модулей в законе Гука), \mathbf{A} — тензорный параметр, задающий ортотропию материала (тензор \mathbf{A} — симметричный и положительно определенный). Потенциалы этого семейства являются обобщением потенциала Муни–Ривлина на случай сжимаемости и ортотропии.

Также как и потенциал Муни–Ривлина, потенциалы семейства (8) удовлетворяют принципу энергетической эквивалентности сжатия и растяжения, то есть не меняют свое значение при замене $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ на $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1}$.

Материалы, задаваемые при помощи потенциалов этого семейства, могут быть как начально изотропными (в том случае когда тензор \mathbf{A} является шаровым), так и начально ортотропными (когда собственные числа тензора \mathbf{A} различны).

Следующее из потенциала (8) выражение для тензора напряжений Пиолы относительно конфигурации κ_0 выглядит так:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\kappa_0} = \frac{3}{2}G \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}}{\mathbf{A} : (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)} - \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-T}}{\mathbf{A} : (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})} \right) + \\ + \frac{K}{2} ((\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} - (\det \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{F}^{-T}). \end{aligned} \quad (9)$$

Для тензора напряжений Коши, согласно (2), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \frac{3}{2}G \left(\frac{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}}{\mathbf{A} : (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)} - \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-T}}{\mathbf{A} : (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})} \right) + \\ + \frac{K}{2} (1 - (\det \mathbf{F}^{-1})^2) \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тензор упругих модулей для тензора напряжений Пиолы относительно

конфигурации κ_0 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\kappa_0}(\mathbf{F}) &= \frac{d^2\sigma(\mathbf{F})}{d\mathbf{F}d\mathbf{F}} = \frac{3}{2}G \left\{ \frac{(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I})^{(2314)}}{\mathbf{A} : (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)} + \right. \\
&+ \frac{1}{\mathbf{A} : (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})} \left[(\mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-T})^{(3214)} + \right. \\
&+ (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-T})^{(2314)} + (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{F}^{-T})^{(3214)} \left. \right] - \\
&- 2 \left[\frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}) \otimes (\mathbf{A} \cdot \mathbf{F})}{(\mathbf{A} : (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T))^2} + \frac{(\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \otimes (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-T})}{(\mathbf{A} : (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}))^2} \right] \left. \right\} + \\
&+ \frac{K}{2} \left\{ \mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{F}^{-T} (\det \mathbf{F} + \det \mathbf{F}^{-1}) + (\mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{F}^{-T})^{1423} (\det \mathbf{F}^{-1} - \det \mathbf{F}) \right\}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Заметим, что при $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ тензор напряжений Коши $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ (то есть конфигурация κ_0 является естественной), а тензор упругих модулей \mathbf{C} в случае изотропии совпадает с тензором упругих модулей закона Гука

$$\mathbf{C} = G \left((\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{(1324)} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{(1342)} \right) + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \tag{12}$$

В **II.4** сформулировано два типа задач об устойчивости сжатых блоков.

Исследуемый на устойчивость блок B , находящийся между двумя парами жестких плит, задаётся следующими неравенствами

$$B = \{ \mathbf{x} | 0 \leq \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x} \leq l_1, 0 \leq \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x} \leq l_2, -l_3 \leq \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{x} \leq l_3 \}, \tag{13}$$

где \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) — ортонормированный базис, направленный по ребрам блока, l_i ($i = 1, 2, 3$) — положительные действительные числа, задающие исходные размеры блока.

Пару граней с нормальными $-\mathbf{e}_1$ и \mathbf{e}_1 будем называть первой парой граней (Σ_1^- и Σ_1^+), с нормальными $-\mathbf{e}_2$ и \mathbf{e}_2 — второй парой граней (Σ_2^- и Σ_2^+), с нормальными $-\mathbf{e}_3$ и \mathbf{e}_3 — третьей парой граней (Σ_3^- и Σ_3^+).

На первой и второй паре граней для перемещений задаются либо условия тангенциальности (проскальзывания), либо условия нормальности. Третья пара граней свободна от каких-либо кинематических ограничений, но на ней задаются граничные условия в напряжениях в виде "мертвой" нагрузки (в частности, отсутствие напряжений). Система "блок + плиты" изображена на рисунке 1.

В направлении \mathbf{e}_2 происходит квазистатическое сжатие блока, задаваемое коэффициентом растяжения β ($\beta < 1$). Первая пара граней остается неподвижной. Третья пара граней движется таким образом, чтобы удовлетворить

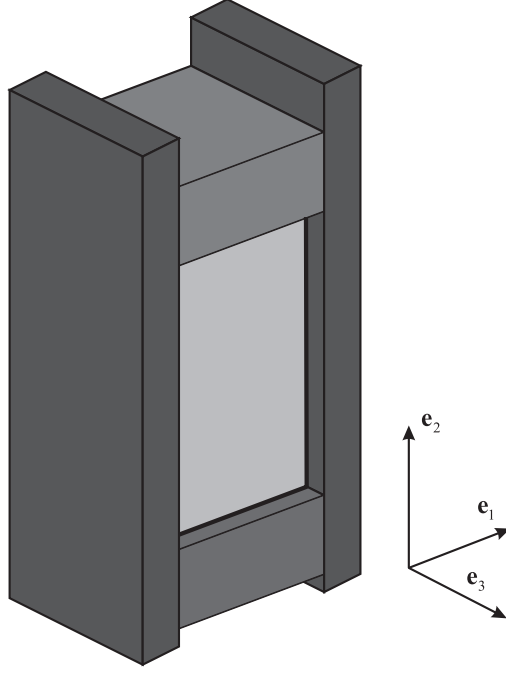


Рис. 1. Механическая система "блок + плиты"

граничным условиям в напряжениях, коэффициент растяжения в направлении \mathbf{e}_3 обозначим через θ . Градиент трансформации, соответствующий такому сжатию, имеет вид

$$\mathbf{F}(\beta) = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \theta(\beta) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (14)$$

Нелинейный материал блока может быть изотропным или ортотропным и задается упругими потенциалами (8).

Тензор напряжений Коши для исследуемого однородного состояния имеет следующий вид

$$\mathbf{T} = t_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + t_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + t_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (15)$$

Задачи первого и второго типа различаются друг от друга граничными условиями.

Для задач первого типа граничные условия таковы: тангенциальное проскальзывание на $\Sigma_1^\pm \cup \Sigma_2^\pm$, третья пара граней свободна.

Граничные условия задач второго типа следующие: на Σ_1^\pm — тангенциальное проскальзывание, на Σ_2^\pm условие нормальности перемещений. Для того, чтобы удовлетворить условию нормальности на второй паре граней и при этом сохранить однородность деформации, необходимо отсутствие растяжения в направлении \mathbf{e}_3 ($\theta(\beta_2) = 1$). Отсутствие растяжения достигается при помощи задания "мертвой" нагрузки на Σ_3^\pm , равной соответствующему главному напряжению внутри.

Каждая из конфигураций для двух описанных типов задач является равновесной и однородной.

Таким образом, для обоих типов задач описаны квазистатические процессы сжатия блока, трактуемые как однопараметрические семейства конфигураций с параметром β . Именно конфигурации этого семейства будут в дальнейшем исследоваться на устойчивость, то есть предполагается, что на эти конфигурации накладываются поля малых смещений (удовлетворяющие кинематическим ГУ, а в остальном произвольные), и изучается знак функционала $R\{\delta\mathbf{r}\}$ на этих полях. Если для любых допустимых полей малых смещений $R\{\delta\mathbf{r}\} > 0$, то конфигурация устойчива, а если для некоторых допустимых полей смещений $R\{\delta\mathbf{r}\} < 0$, то конфигурация неустойчива.

Третья глава посвящена получению достаточных условий устойчивости и достаточных условий неустойчивости. Затем для полученных двусторонних оценок проводится анализ их зависимости от характеристик материала.

В **III.1** более конкретно сформулированы исследуемые в работе два типа задач об устойчивости и неустойчивости.

В разделе **III.2** получены при помощи метода Холдена достаточные условия устойчивости. При построении минорирующего функционала подынтегральное выражение в функционале второй вариации полной потенциальной энергии преобразуется к следующему виду

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{H} : \mathbf{C} : \delta\mathbf{H} &= \\ &= (\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{T} : (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^2)) - 2\mathbf{T} : (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^2) + \mathbf{T} : (\delta\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{H}^T) = \\ &= \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\tilde{\mathbf{L}}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} - 2\mathbf{T} : (\delta\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mathbf{T} : (\delta\mathbf{H} : \delta\mathbf{H}^T), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\delta\mathbf{H} = \nabla \otimes \delta\mathbf{r}$, $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = 1/2 (\delta\mathbf{H} + \delta\mathbf{H}^T)$. Затем для каждого слагаемого в этом выражении строится оценка снизу.

Для того, чтобы найти оценки снизу для первого из слагаемых в выражении (16), разложим пространство симметричных тензоров второго ранга в прямую ортогональную сумму следующих трех подпространств: подпространства симметричных девиаторов $\delta\boldsymbol{\varepsilon}'_d$, содержащих только диагональную часть относительно базиса \mathbf{e}_i , подпространства симметричных девиаторов $\delta\boldsymbol{\varepsilon}'_n$, содержащих только недиагональную часть относительно того же базиса и подпространства шаровых тензоров $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}}$. При этом упомянутые выше ортогональные подпространства ортогональны также с весом $\tilde{\tilde{\mathbf{L}}}$:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\tilde{\mathbf{L}}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\boldsymbol{\varepsilon}'_d : \tilde{\tilde{\mathbf{L}}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}'_d + \delta\boldsymbol{\varepsilon}'_n : \tilde{\tilde{\mathbf{L}}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}'_n + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}} : \tilde{\tilde{\mathbf{L}}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}}. \quad (17)$$

Находя оценки снизу для $\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\tilde{\mathbf{L}}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}$ на каждом из подпространств и беря наименьшую из них, получаем следующую оценку снизу для квадратичной

формы $\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\mathbf{L}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\mathbf{L}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \geq \min \left\{ 9G \det \mathbf{F}^{-1} \min_{i \neq j} (m_i^1 m_j^1 + m_i^2 m_j^2), \right. \\ \left. 3G \det \mathbf{F}^{-1} \min_i (m_i^1 + m_i^2), \frac{3K}{2} \left(1 + (\det \mathbf{F}^{-1})^2 \right) \right\} (\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}) = \\ = \underline{\lambda} (\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (18)$$

Для второго слагаемого в выражении (16) оценка снизу будет следующей

$$-2\mathbf{T} : (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^2) \geq 2|t_3| \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (19)$$

для третьего слагаемого в выражении (16) имеем:

$$\mathbf{T} : (\delta\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{H}^T) \geq -|t_1| (\delta\mathbf{H} : \delta\mathbf{H}). \quad (20)$$

Здесь $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ — собственные числа тензора напряжений Коши \mathbf{T} .

Тогда, используя неравенство Корна

$$\int_B \delta\mathbf{H} : \delta\mathbf{H} dV \leq k \int_B \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (21)$$

для (20) получаем

$$\int_{B(\beta)} \mathbf{T} : (\delta\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{H}^T) dV \geq -|t_1| k \int_{B(\beta)} (\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}) dV. \quad (22)$$

Используя неравенства (16)–(22), удастся построить функционал $\tilde{R}\{\delta\mathbf{r}\}$, минорирующий функционал второй вариации полной потенциальной энергии

$$R\{\delta\mathbf{r}\} \geq (\underline{\lambda} - k|t_1| + 2|t_3|) \int_B (\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}) dV \quad (23)$$

Знак полученного функционала \tilde{R} определяется знаком следующего выражения:

$$\underline{\lambda} - k|t_1| + 2|t_3| \geq \underline{\lambda} - k|t_1|. \quad (24)$$

Тогда достаточное условие устойчивости рассматриваемой конфигурации принимает следующий простой вид

$$|t_1| \leq \frac{\lambda}{k}. \quad (25)$$

Для того, чтобы неравенство для наибольшего сжимающего напряжения обрело конкретный смысл, нужно знание конкретных значений $\underline{\lambda}$ и k . Значение $\underline{\lambda}$ получено в работе и дается равенством (18), а значение константы Корна берется из работы Е.И. Рыжака (Math. Mech. Solids, 1999).

В разделе **III.3** получены (при помощи метода кинематических гипотез) достаточные условия неустойчивости. В этом методе в качестве кинематической гипотезы используется гипотеза, кинематика которой основана на экстремальных модифицированной задачи Корна (Е.И. Рыжак, Math. Mech. Solids, 1999).

Кроме решения, полученного при помощи кинематических гипотез, основанных на экстремальных модифицированной задачи Корна, для обоих типов задач были получены достаточные условия неустойчивости на основе традиционной гипотезы ортогональных плоских сечений. Сравнительный анализ полученных оценок показывает, что использование гипотезы, основанной на экстремальных модифицированной задачи Корна, позволяет улучшить оценку сверху для критического значения параметра нагружения, а также существенно расширить диапазон соотношения линейных размеров блока, на котором удастся определить эту оценку.

Сравнение оценки сверху, полученной на основе экстремалей задачи Корна (сплошная линия), и оценки сверху, полученной при помощи гипотезы ортогональных плоских сечений (пунктир), в зависимости от отношения линейных размеров блока, показано на рисунке 2.

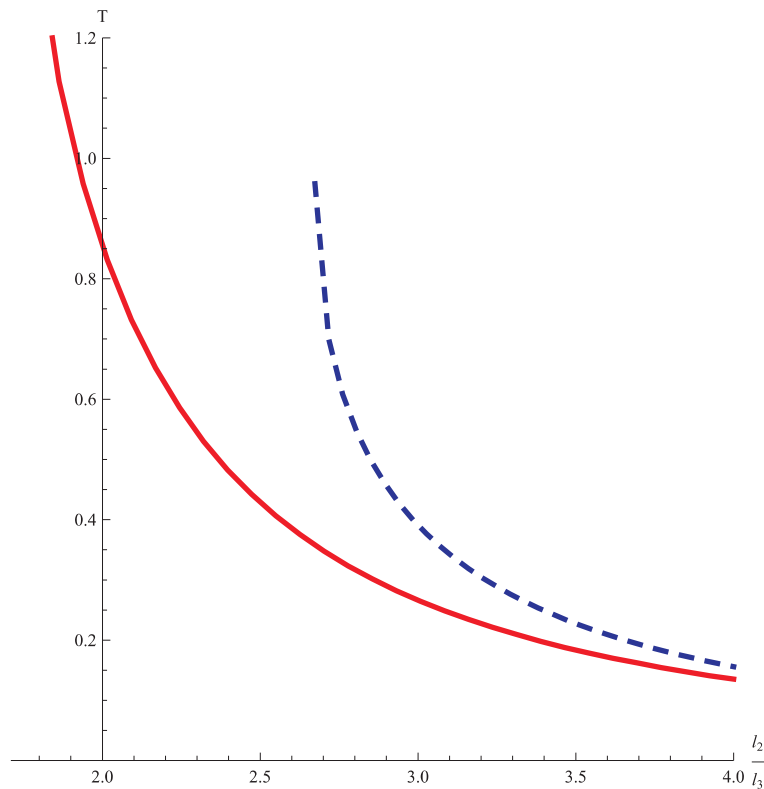


Рис. 2. Сравнение оценок сверху для "толстых" блоков

Рассмотрим задачу о сжатии блока, кинематические граничные условия которой совпадают с задачами первого типа, а материал блока ортотропный. Пусть со стороны третьей пары граней действует такая "мертвая" нагрузка, что градиент трансформации имеет следующий вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (26)$$

В этом случае тензор напряжений Коши имеет следующую структуру:

$$\mathbf{T} = t_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + t_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + t_2 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (27)$$

Тогда, подставляя в качестве поля смещений экстремали задачи Корна, получим следующую оценку сверху для функционала R

$$R\{\delta \mathbf{r}\} \leq (\bar{\lambda} - |t_2|(k-2)) \int_B (\delta \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\mathbf{L}} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \leq \max \left\{ 3G\beta^{-2} \left(\frac{\beta^2}{1+2\beta^2} + \frac{\beta^{-2}}{1+2\beta^{-2}} \right), \right. \\ \left. \left(3G\beta^{-2} \left(\frac{\beta^2}{1+2\beta^2} + \frac{\beta^{-2}}{1+2\beta^{-2}} \right) + 3 \left(\frac{K}{2} (1+\beta^{-4}) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 3G\beta^{-2} \left(\frac{\beta^4}{(1+2\beta^2)^2} + \frac{\beta^{-4}}{(1+2\beta^{-2})^2} \right) \right) \right) \right\} (\delta \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \bar{\lambda} (\delta \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, для этого случая двусторонняя оценка функционала R имеет следующий вид

$$\begin{aligned} (\underline{\lambda} - |t_1|k) \int_B (\delta \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV \leq \\ \leq R\{\delta \mathbf{r}\} \leq \\ \leq (\bar{\lambda} - |t_2|(k-2)) \int_B (\delta \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV. \end{aligned} \quad (30)$$

Отсюда получаем простую двустороннюю оценку для критических сжимающих напряжений в терминах константы Корна и характерных ("нижних" и "верхних") модулей материала

$$\frac{\underline{\lambda}}{k} \leq |t_2| \leq \frac{\bar{\lambda}}{k-2} \quad (k > 4). \quad (31)$$

В разделе III.4 проведен сравнительный анализ оценок снизу и сверху. В ходе этого анализа были проанализированы зависимости полученных оценок от отношения линейных размеров исследуемого на устойчивость блока.

Для наглядного представления полученных результатов в качестве параметра нагружения вводится следующий параметр:

$$T \equiv \frac{|\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_2|}{G}. \quad (32)$$

Достаточные условия устойчивости, полученные в разделе **III.2**, в этом случае примут следующий вид: $T_* < T_{\text{кр}}$, где T_* — оценка снизу критического значения параметра нагружения $T_{\text{кр}}$. Достаточные условия неустойчивости, полученные в разделе **III.3**, примут вид $T_{\text{кр}} < T^*$, где T^* — оценка сверху критического значения параметра нагружения $T_{\text{кр}}$. Таким образом, для критического значения параметра нагружения получена следующая двусторонняя оценка

$$T_* \leq T_{\text{кр}} \leq T^*.$$

Для оценок каждого типа построены их зависимости от отношения размеров блока при различных значениях ряда других параметров задачи: отношения модулей K и G , а также безразмерных величин a_1 , a_2 и a_3 , характеризующих анизотропию.

Полученные графики позволяют судить о влиянии изменения каждого из параметров задач на значение оценок и на промежуток между оценками, внутри которого находится точное критическое значение параметра нагружения $T_{\text{кр}}$. Особенно простой и наглядной является двусторонняя оценка, выраженная формулой (31).

Пользуясь неравенствами (31), для коэффициента сжатия β^{-1} получаем оценки сверху и снизу, графики которых показаны на рисунке 3.

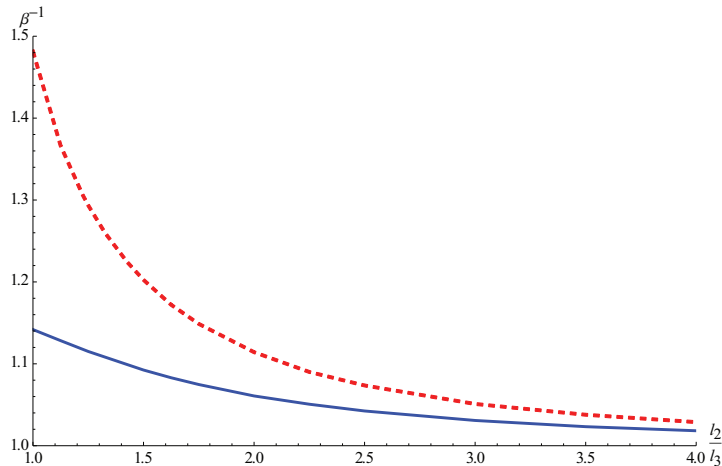


Рис. 3. Оценки сверху и снизу для коэффициента сжатия β^{-1}

В **заключении** сформулированы основные выводы и результаты, полученные в диссертационной работе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

- Впервые получены достаточные условия устойчивости (при помощи метода Холдена).
- Впервые применены экстремали модифицированной задачи Корна для получения достаточных условий неустойчивости.
- Полученные достаточные условия неустойчивости оказываются точнее таких условий, полученных на основе традиционной гипотезы ортогональных сечений; для толстых блоков оценка на основе традиционной гипотезы стремится к бесконечности, а оценка на основе использованной кинематической гипотезы — конечна и имеет величину порядка модулей упругости.
- Как достаточные условия неустойчивости, так и достаточные условия устойчивости получены в аналитическом виде.
- Построено и исследовано аналитически семейство упругих потенциалов, позволяющих задавать как начально изотропные, так и начально ортотропные материалы при произвольных деформациях.
- Проведен численный анализ полученных результатов. Получены зависимости оценок сверху и оценок снизу от соотношения линейных размеров блока, типа краевых условий и параметров, задающих ортотропию материала блока.

Статьи из перечня ведущих научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Министерства образования науки РФ по тематике диссертационной работы:

1. Пантелеев, С.А. Оценки сверху для критического значения коэффициента сжатия нелинейно-упругого параллелепипеда / С.А. Пантелеев // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2007. – №6(56). – С. 86–101.
2. Пантелеев, С.А. Двусторонние оценки в задаче об устойчивости сжатых упругих блоков / С.А. Пантелеев // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – №1. – С. 51–63.

Основные результаты диссертации опубликованы также в работах:

1. Пантелеев, С.А. Устойчивость нелинейноупругого параллелепипеда / С.А. Пантелеев // Зимняя школа по механике сплошных сред (пятнадцатая). Сборник статей. В 3-х частях. – Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – Т. 3. – С. 67–70.
2. Пантелеев, С.А. Два типа оценок сверху для критического сжатия нелинейно-упругого параллелепипеда / С.А. Пантелеев // XXXIII Гагаринские чтения. Научные труды Международной молодежной научной конференции в 8 томах. Москва, 3–7 апреля 2007 г. – М.: МАТИ, 2007. – Т. 1. – С. 146–147.
3. Пантелеев, С.А. Применение экстремалей модифицированной задачи Корна для получения достаточных условий неустойчивости сжатого нелинейно-упругого блока произвольных размеров / С.А. Пантелеев // Юбилейная школа семинар "Проблемы современной механики деформируемого твердого тела и прикладной математики" (29 января – 2 февраля 2008 г.). Труды школы семинара. – Самара: Издательство "Самарский университет", 2008. – С. 46–48.
4. Пантелеев, С.А. Задача о потере устойчивости нелинейно-упругого блока при квазистатическом двусосном сжатии / С.А. Пантелеев // XXXIV Гагаринские чтения. Научные труды Международной молодежной научной конференции. Секция "Механика и моделирование материалов и технологий". Москва, 1–5 апреля 2008 г. – М.: МАТИ, 2008. – С. 88.
5. Пантелеев, С.А. Безопасные оценки для коэффициента сжатия нелинейно-упругого блока / С.А. Пантелеев // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. Тезисы докладов Всероссийской конференции, 13–15 октября, 2008 г., Пермь. – Екатеринбург: УрО РАН, 2008. – С. 83.

**ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ КРИТИЧЕСКИХ
ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА НАГРУЖЕНИЯ
В ЗАДАЧАХ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЛСТЫХ
УПРУГИХ БЛОКОВ ПРИ БОЛЬШИХ СЖАТИЯХ**

Пантелеев Сергей Александрович

**Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Подписано в печать 12.03.2010 г. Заказ № 2010 г. Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе, ИПМех РАН
119526 Москва, проспект Вернадского, д. 101, к. 1.