На правах рукописи

АНОХИН Николай Владимирович

УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ДЕФИЦИТОМ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена в лаборатории механики управляемых систем Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт Проблем Механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Ананьевский Игорь Михайлович**
Официальные оппоненты:	**Розенблат Григорий Маркович,** доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)”, кафедра теоретической механики, профессор
	Романов Игорь Викторович, кандидат физико-математических наук, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, департамент математики факультета экономики, кафедра высшей математики, доцент
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук

Защита состоится 17 апреля 2014 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета *Д 002.240.01* на базе Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН по адресу: Москва, просп. Вернадского 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН.

Автореферат разослан "___" _________ 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.240.01, к.ф.-м.н. Сысоева Е. Я.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Проблемы управления нелинейными механическими системами возникают во многих областях естественных наук и технике. Теория и методы управления такими системами требуют дальнейшей интенсивной разработки, так как результаты исследований в этом направлении находят применение в робототехнике, транспорте и других отраслях. Среди задач управления механическими системами наибольшей сложностью отличаются задачи управления объектами с дефицитом управлений, т. е. объектами, у которых число управляющих параметров меньше числа степеней свободы. К таким объектам относятся маятниковые системы, некоторые шагающие механизмы, системы с дефицитом управлений встречаются в космонавтике, среди транспортных систем, летательных аппаратов, в робототехнике. Построение эффективных алгоритмов управления позволяет расширить функциональные возможности и повысить надежность таких систем.

При этом актуальной является задача разработки алгоритмов управления, обладающих набором следующих характеристик.

Во-первых, управление должно быть выражено в форме обратной связи. Это позволяет применять предложенный подход при неизвестных наперед начальных состояниях системы и во многих случаях обеспечивает эффективность управления даже при наличии малых возмущающих воздействий.

Во-вторых, важной является проблема приведения системы в одно из ее неустойчивых положений равновесия при наличии ограничений на управление. Последнее требование обусловлено тем, что на практике ресурсы управления всегда ограничены. Зачастую такое приведение оказывается возможным не из любого начального состояния системы, а из некоторой области, называемой областью управляемости.

Наконец, подход к построению управления должен обладать достаточной простотой, чтобы для решения задачи управления в “реальном времени" не требовалось больших вычислительных мощностей. Это позволит применять разработанный алгоритм управления в широком спектре управляемых систем.

Цели работы.

- Разработать подход к построению ограниченного управления в форме обратной связи, позволяющего приводить нелинейную динамическую систему в положение равновесия из окрестности этого положения равновесия за конечное (нефиксированное) время.
- Дать строгое математическое обоснование предлагаемого подхода.
- На примере задач управления многозвенными маятниками с помощью момента, приложенного к первому звену, продемонстрировать эффективность разработанного подхода и с помощью численного моделирования подтвердить его работоспособность.

Научная новизна. В настоящей работе предложен оригинальный подход к построению управления нелинейной механической системой с дефицитом управляющих воздействий. Подход отличается от ранее известных простотой алгоритма управления и его обоснования. Подход основан на методах теории устойчивости движения. Для построения управления применяется функция Ляпунова, общая для двух устойчивых линейных систем дифференциальных уравнений. В отличие от большинства существующих алгоритмов управления системами с дефицитом управляющих воздействий, которые обеспечивают лишь асимптотическую устойчивость состояния покоя, то есть приводят систему в это состояние за бесконечное время, управление, построенное с помощью предложенного метода, осуществляет точное приведение нелинейной динамической системы за конечное время. Показана эффективность разработанного подхода для решения задач управления маятниковыми системами.

Научная и практическая значимость работы. Полученные в диссертации результаты вносят существенный вклад в теорию управления нелинейными динамическими системами. Они могут быть использованы для решения задач точного приведения в требуемое положение реальных механических систем. Примерами таких задач являются конструирование шагающего механизма, звенья которого представляют из себя неустойчивые перевернутые маятники, или моделирование транспортного средства типа Segway, составляющего вместе с пассажиром неустойчивый маятник, закрепленный шарнирно на движущейся платформе.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строгих математических рассуждений и доказательств. Эффективность предложенного метода управления демонстрируется с помощью компьютерного моделирования динамики управляемых систем. В частности, проведено моделирование движения многозвенного маятника с плоскими шарнирами и многозвенного маятника с двухстепенными шарнирами. Численные эксперименты показали, что предложенное управление обеспечивает требуемый режим функционирования моделируемых систем. Моделирование проводилось с использование программного пакета MATLAB/Simulink.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Предложен подход, который позволяет для линейных вполне управляемых динамических систем строить управления в форме обратной связи, приводящие систему в начало координат за конечное время. Подход отличается простотой как в построении закона управления, так и в его обосновании. Если на управление наложены ограничения, то указаны области, в которых управление удовлетворяет ограничениям.

2. Показано, что предложенный подход применим для решения задачи синтеза ограниченного управления в окрестности состояния покоя для гладких нелинейных динамических систем (в том числе, механических) с целью приведения системы в это состояние покоя за конечное время. На примере нелинейного многозвенного маятника показана эффективность данного подхода для решения задач синтеза ограниченных управлений нелинейными механическими системами с дефицитом управляющих воздействий.

3. Решены задачи локального синтеза управления нелинейными многозвенными маятниками в окрестности произвольного неустойчивого положения равновесия с помощью одного момента, приложенного к первому или последнему звену. Для многозвенного плоского маятника, а также для многозвенного маятника с двухстепенными шарнирами установлена полная управляемость их уравнений, линеаризованных в окрестности любого положения равновесия. В окрестности любых положений равновесия нели-

нейных маятников построены ограниченные управления в форме обратной связи, приводящие маятник в положение равновесия за конечное время.

Апробация работы. Основные результаты, представленные в диссертации были доложены на семинаре “Теория управления и динамика систем”, ИПМех РАН (руководитель семинара - академик Черноусько Ф.Л., ученый секретарь – Костин Г.В.), на семинаре “Механика и управление движением” ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (руководитель семинара – д.ф.-м.н. Голубев Ю.Ф. ученый секретарь – к.ф.-м.н. Ткачев С.С.), а также на 7-й конференции по математическому моделированию MATHMOD в Вене в 2012 году, 5-й мультиконференции по проблемам управления в Санкт Петербурге в 2012 году, XII международной конференции “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” в Москве в 2012 году, XI международной конференции “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” в Москве в 2010 году, международной конференции по математической теории управления и механике в Суздале в 2013 году, 51 и 52 научных конференциях МФТИ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ, в том числе 4 статьи в рецензируемых изданиях, в том числе 2 статьи в журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ.

Личный вклад автора в работы с соавторами определяется положениями, выносимыми на защиту и основными результатами данной диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 72 страницах, содержит 17 иллюстраций и список литературы, состоящий из 87 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность рассматриваемой задачи, изложена суть предлагаемого подхода, дан обзор литературы по теме диссертации, перечислены представленные в работе результаты и кратко изложена структура диссертации.

В **главе 1** дается постановка основной задачи управления для нелинейной динамической системы.

В общем виде решаемая задача управления формулируется следующим образом. Пусть динамика системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = F(x, u), \quad u \in U, \tag{1}$$

где x – n-мерный вектор обобщенных координат, u – m-мерный вектор управления, а U – подмножество пространства R^m, и пусть точка 0 является положением равновесия, то есть $F(0, 0) = 0$. Требуется найти управление в форме обратной связи $u(x)$, которое приводит систему (1) из некоторой окрестности нуля в нуль за конечное (нефиксированное) время.

Полагая правую часть системы (1) достаточно гладкой и применяя процедуру линеаризации в окрестности 0 по x и u, перепишем эту систему в эквивалентном виде

$$\dot{x} = Cx + Du + f(x, u), \quad |f(x, u)| < c(|x|^2 + |u|^2). \tag{2}$$

Согласно предлагаемому алгоритму построения управления сначала управление строится для линейной части исходной системы. Для этого формулируется следующая задача управления.

З а д а ч а 1. Пусть линейная система

$$\dot{x} = Cx + Du, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad n > m, \tag{3}$$

удовлетворяет условию полной управляемости Калмана. Требуется построить такое ограниченное управление в форме обратной связи $u = u(x)$, что для любых достаточно малых $x_0 \in R^n$ решение системы (3) с начальным состоянием $x(0) = x_0$ попадает в точку 0 за конечное время.

Существенное условие, накладываемое на рассматриваемую систему – это условие полной управляемости ее линейной части. Для линейной системы (3) это условие состоит в том, что ранг матрицы управляемости

$$(D \mid CD \mid \ldots \mid C^{n-1}D)$$

равен размерности системы n.

В излагаемом в диссертации подходе задача синтеза решается не непосредственно для линейной системы общего вида (3), а для системы в канонической форме Бруновского. Известно[1], что задача 1 эквивалентна задаче управления для m независимых канонических подсистем $z^{(n)} = v, \quad z \in R$, которые в векторной форме принимают вид

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ \ x \in R^n, \ u \in R, \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Таким образом, решается следующая вспомогательная задача управления.

З а д а ч а 2. Для системы в канонической форме Бруновского (4) построить такое управления $u = u(x)$, удовлетворяющее ограничению

$$|u| \leq 1, \tag{6}$$

чтобы любое решение достигало точки 0 за конечное время.

Сформулированная задача синтеза управления рассматривалась ранее[2]. Предлагаемый в диссертации подход к ее решению отличается простотой как в построении закона управления, так и в его обосновании.

Так как речь идет о задачах локального синтеза управления, то, как нетрудно видеть, задачи 1 и 2 эквивалентны.

В первой главе излагаются стандартные процедуры приведения вполне управляемой линейной системы к каноническому виду Бруновского для случая одномерного и многомерного управлений.

В **главе 2** описана процедура построения управления для вспомогательной задачи 2 управления системой в каноническом виде Бруновского. Предлагаемый подход основан на втором методе Ляпунова, в частности, использует конструкцию квадратичной функции Ляпунова $V(x) = (Qx, x)$, общей для двух

[1] Brunovsky P. A. A classification of linear controllable systems // Kybernetika. 1970. V. 6. № 3, p. 173–188.

[2] Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Мат. сборник. 1979. Т. 109(151). №4(8)

устойчивых линейный систем дифференциальных уравнений с матрицами $\hat{A}$ и $M - \beta I$, где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -n+1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ и константа $\beta > 0$ выбраны так, чтобы матрица $\hat{A}$ была устойчива и существовала симметрическая матрица $Q > 0$, являющаяся решением системы линейных матричных неравенств

$$Q\hat{A} + \hat{A}^* Q < 0,$$
$$Q(M - \beta I) + (M - \beta I)Q < 0.$$

С использованием матрицы Q вычисляется функция $T(x)$, заданная неявно уравнением

$$T^{-2\beta}(Q\delta(T)x, \delta(T)x) = 1, \quad x \neq 0, \tag{7}$$

где

$$\delta(T) = \begin{pmatrix} T^{-n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T^{-n+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T^{-1} \end{pmatrix}.$$

Показано, что существует единственное положительное решение уравнения (7) в каждой точке фазового пространства x.

Управление задается формулой

$$u = (a, \delta(T)x). \tag{8}$$

Функция $T(x)$ выступает в роли функции Ляпунова для системы (4), управляемой по закону (11). Конечность времени приведения системы обусловлена тем, что производная функции T в силу (4), (11) удовлетворяет неравенству

$$\dot{T} \leq -\gamma < 0,$$

то есть остается отрицательной и отделенной от нуля вдоль траектории движения.

Управление в форме (11) приводит систему (4) (и, следовательно, систему (3)) в начало координат за конечное время из любого начального состояния. Однако такое управление остается ограниченным лишь в некоторой окрестности начала координат. В работе указана окрестность, в которой выполнено ограничение (6).

В главе 2 показано также, что управление, построенное для вспомогательной задачи управления, то есть для линейной системы в канонической форме со скалярным управлением, в окрестности терминального состояния остается эффективным и для нелинейной системы, другими словами, является решением сформулированной выше основной задачи управления для случая $m = 1$.

Если размерность m вектора управления больше единицы, то линеаризованная система (3) эквивалентна набору независимых подсистем в форме Бруновского, для каждой из которых в отдельности может быть найдена функция T и построено свое управление. При этом время прихода в нулевое положение равновесия у каждой из подсистем будет свое, вообще говоря, отличное от времен прихода других подсистем. Это обстоятельство служит препятствием применению такого способа управления к нелинейной системе (2). Предложенная в главе 2 модификация алгоритма построения управления для случая $m > 1$ использует одну, общую для всех подсистем, функцию T, обращение которой в нуль означает одновременный приход всех подсистем в начало координат, а также достижение исходной нелинейной системой положения равновесия.

В случае $m > 1$ линеаризованная система (3) представима в виде совокупности подсистем, имеющих канонический вид Бруновского

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1, \quad x_1 \in R^{n_1}, \\ \ldots \\ \dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m, \quad x_m \in R^{n_m}, \end{cases} \tag{9}$$

где $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$, а матрицы A_i, B_i имеют вид (5) и размерности $n_i \times n_i$ и $n_i \times 1$ соответственно.

Пусть $u = (u_1, \ldots, u_m) \in R^m$, а вектор $x \in R^n$ составлен из векторов $x_1, \ldots, x_m$. Введем в рассмотрение скалярную функцию $T(x) > 0$, которая будет определена ниже, и для произвольного натурального числа k зададим диагональные матрицы

$$\delta_k(T) = \begin{pmatrix} T^{-k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T^{-k+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T^{-1} \end{pmatrix}, \quad M_k = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k+1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Выберем векторы $a^i = (a_1^i, \dots, a_{n_i}^i),\ i = 1, \dots, m$, так, чтобы матрицы

$$\hat{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1^i & a_2^i & a_3^i & \dots & a_{n_i}^i \end{pmatrix},$$

были устойчивы. Введем в рассмотрение блочно-диагональные $n \times n$-матрицы

$$\hat{A} = \mathrm{diag}\{\hat{A}_i\}, \quad \delta(T) = \mathrm{diag}\{\delta_{n_i}(T)\}, \quad M = \mathrm{diag}\{M_{n_i}\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Матрица $\hat{A}$, очевидно, устойчива. Существует симметрическая матрица $Q > 0$, являющаяся решением системы линейных матричных неравенств

$$Q\hat{A} + \hat{A}^* Q < 0, \quad Q(M - \beta I) + (M - \beta I)Q < 0$$

при достаточно больших $\beta > 0$. Зададим функцию T неявно уравнением

$$T^{-2\beta}(Q\delta(T)x, Q\delta(T)x) = 1. \tag{10}$$

Как и в случае $m = 1$, можно показать существование и единственность решения уравнения (10) относительно T при любых $x \in R^n$. Управление задается соотношениями

$$u_i = (a^i, \delta_{n_i}(T)x_i), \quad i = 1, \dots, m. \tag{11}$$

Производная функции T в силу (9), (11) удовлетворяет неравенству

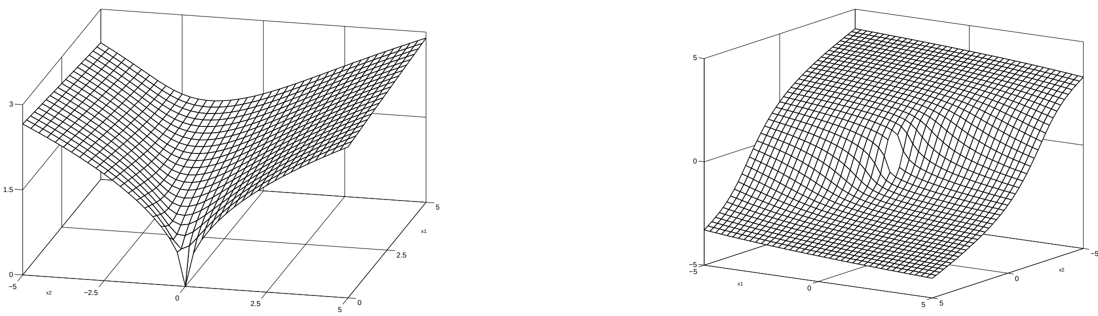
$$\dot{T} \le -\gamma < 0.$$

Так как функция T общая для всех подсистем (9) и равна нулю только в начале координат, то все подсистемы (9) приводятся в нуль одновременно, а именно, в момент, когда становится равной нулю функция T.

В качестве иллюстрации предложенный алгоритм управления применен к простой системе вида

$$\ddot{x} = u, \quad x \in R.$$

Графики функций $T(x, \dot{x})$ и управления $u(x, \dot{x})$ представлены на рисунках 1a и 1b соответственно.



(a) Функция $T(x, \dot{x})$ (b) Функция $u(x, \dot{x})$

Рис. 1: Результаты моделирования системы $\ddot{x} = u$

Приведем полную процедуру построения управления нелинейной динамической системой

1. Линеаризовать уравнения движения, отбросив нелинейные члены. Проверить управляемость полученной линейной системы.

2. Привести линеаризованные уравнения (3) к канонической форме Бруновского.

3. Выбрать вектор a и β, так чтобы матрицы $\hat{A}$ и $M - \beta I$ была устойчивы.

4. Выбрать положительно-определенную матрицу Q так, чтобы $V(x) = (Qx, x)$ являлась общей функцией Ляпунова для систем с матрицами $\hat{A}$ и $M - \beta I$.

5. В текущей точке траектории системы решить уравнение (7) относительно T. В общем случае это уравнение не удается решить аналитически, тем не менее его можно эффективно решить численно.

6. Вычислить в текущей точке управление согласно (11).

7. Пересчитать управление в исходных координатах и применить его к исходной системе.

В **главах 3 и 4** решены задачи локального синтеза управления нелинейными многозвенными маятниками. Рассматриваются n-звенные маятники двух типов: плоский и с двухстепенными шарнирами. Каждый из этих маятников имеет 2^n различных положений равновесия, в которых какие-то звенья ориентированы вверх, а какие-то – вниз. Среди всех положений равновесия лишь одно – нижнее – является устойчивым, остальные же – неустойчивы. Предполагается, что углы и угловые скорости всех звеньев доступны измерению в каждый момент времени. Маятник управляется единственным моментом, приложенным к первому звену.

В **главе 3** разрабатываемый подход применен к задаче локального приведения n-звенного плоского маятника в произвольное неустойчивое положение равновесия.

Многозвенный маятник представляет из себя механическую систему, состоящую из n материальных точек с массами $m_1 \ldots m_n$ и n жестких невесомых стержней с длинами $l_1 \ldots l_n$ (рис. 2). Первый стержень крепится с помощью идеальных шарнирных соединений с одной стороны к неподвижной опоре, а с другой – к первой материальной точке. Далее для всех $k = \overline{2, n}$ стержень с номером k соединяет материальные точки $k-1$ и k. Предполагается, что система находится в поле тяжести и может двигаться в вертикальной плоскости.

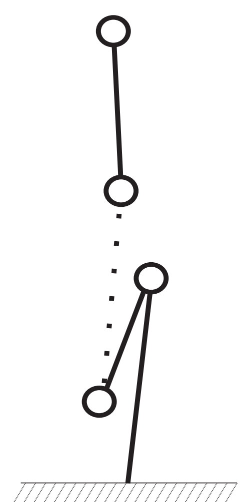


Рис. 2: Многозвенный маятник в окрестности одного из положений равновесия

Введем вектор θ размерности n, определяющий ориентацию звеньев маятника в рассматриваемом положении равновесия:

$$\theta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-е звено ориентированно вверх;} \\ 1, & \text{если } i\text{-е звено ориентированно вниз.} \end{cases}$$

Линеаризованные в окрестности такого положения равновесия уравнения Лагранжа для многозвенного маятника, представленные в форме Коши, имеют вид

$$\dot{x} = Cx + Du, \tag{12}$$

где C — блочная матрица размера $(2n \times 2n)$, D – вектор размерности $2n$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}P & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ A^{-1}E \end{pmatrix},$$

I — единичная $n \times n$-матрица, а E — n-мерный вектор вида $E = (1, 0, \ldots, 0)^\top$. Компоненты матриц кинетической энергии A и потенциальной энергии P задаются выражениями

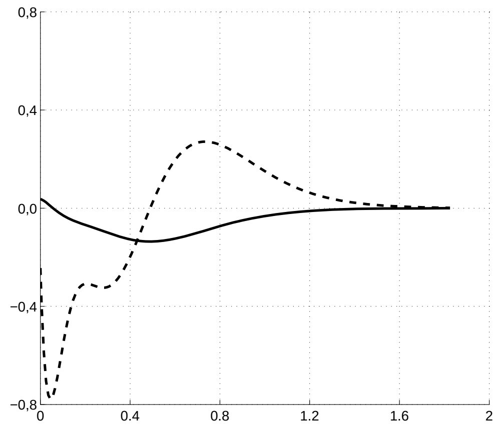
$$A_{ij} = (-1)^{\theta_i + \theta_j} l_i l_j \sum_{k=\max(i,j)}^{n} m_k,$$
$$P = \operatorname{diag}\{(-1)^{\theta_i + 1} g l_i \sum_{k=i}^{n} m_k\}.$$

В диссертации установлена полная управляемость линейной системы (12). Затем, используя изложенный в главе 2 подход, построено ограниченное по модулю управление в форме обратной связи, приводящее маятник из окрестности положения равновесия в это положение равновесия за конечное время с помощью момента, приложенного к первому звену.

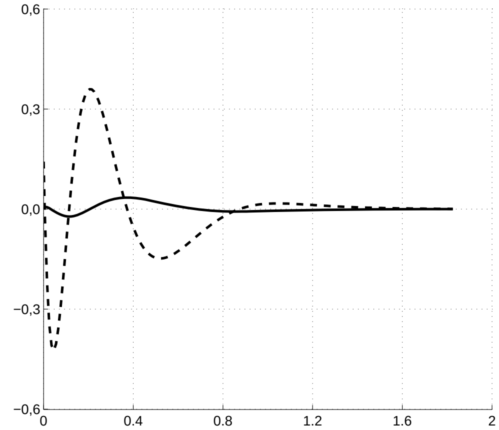
Эффективность полученного закона управления продемонстрирована с помощью компьютерного моделирования динамики трехзвенного маятника с параметрами

$$m_1 = 0.4,\ m_2 = 0.2,\ m_3 = 0.1;$$
$$l_1 = l_2 = l_3 = 0.1.$$

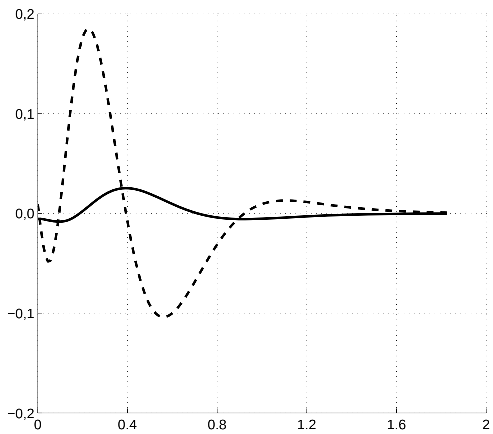
Зависимость угловых координат и скоростей первого, второго и третьего звеньев трехзвенного маятника показаны на рисунках 3a, 3b и 3c соответственно.



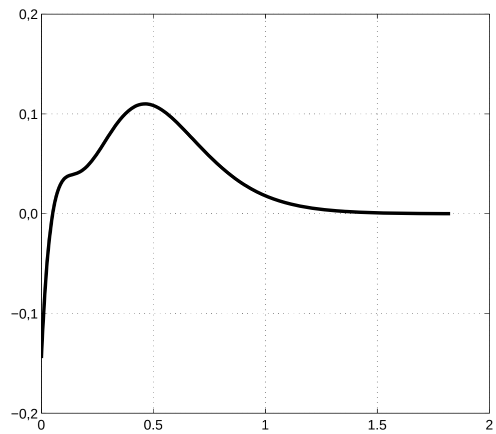
(a) Сплошная – $\varphi_1(t)$, пунктирная – $\dot{\varphi}_1(t)$



(b) Сплошная – $\varphi_2(t)$, пунктирная – $\dot{\varphi}_2(t)$



(c) Сплошная – $\varphi_3(t)$, пунктирная – $\dot{\varphi}_3(t)$



(d) Функция $u(t)$

Рис. 3: Результаты моделирования трехзвенного маятника

Управляющий момент показан на рисунке 3d. Из рисунков видно, что все звенья маятника приходят из выбранного начального состояния в нуль одновременно за время менее двух секунд.

В **главе 4** решена аналогичная задача управления для многозвенного маятника с двухстепенными шарнирами, совершающего пространственные движения. Маятник также управляется моментом, приложенным к первому звену. Показано, что уравнения движения распадаются на две независимые системы вида (12). В отличие от плоского маятника, управляемого скалярным моментом, управление маятником с двухстепенными шарнирами представляет собой двумерный вектор. Это обстоятельство требует применения модифицированного построения управления, изложенного в главе 2. Численное моделирование трехзвенного маятника с теми же параметрами, что и в плоском случае показало, что предложенный алгоритм управления эффективен для приведение многозвенника с двухстепенными шарнирами в неустойчивое положение равновесия.

В **заключении** кратко сформулированы основные результаты, представленные в диссертации.

Публикации соискателя по теме диссертации

1. **И.М. Ананьевский, Н.В. Анохин, А.И. Овсеевич. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова. Доклады академии наук. 2010, т. 434, №3. с. 319-323.**

2. **Н.В. Анохин. Приведение многозвенного маятника в положение равновесия с помощью одного управляющего момента // Известия РАН. Теория и системы управления. №5, С. 44 - 53.**

3. I.M. Ananievski, N.V. Anokhin, A.I. Ovseevich. Design of Bounded Feedback Controls for Linear Dynamical Systems by Using Common Lyapunov Functions. Chinese Journal of Theoretical & Applied Mechanics Letters. V. 1, 013001-1-013001-3 (2011).

4. И.М. Ананьевский, Н.В. Анохин, А.И. Овсеевич. Общая функция Ляпунова в задаче синтеза управления линейными динамическими системами. Сборник научных статей, посвященный 80-летию академика В.М. Матросова. 2013. с. 92-104.

5. Ananyevskiy, N. Anokhin. Control of a multi-link inverted pendulum by a single torque. Preprints MATHMOD 2012 Vienna - Full Paper Volume (the 7th Vienna Conference on Mathematical Modelling , Vienna, Austria, February 14-17) [ed. by D. Bernardini, G. Rega and F. Romeo] Vienna: ARGESIM, Report no. 444, 2012.

6. И.М. Ананьевский, Н.В.Анохин. Управление многозвенным маятником в окрестности положения равновесия. 5-я Мультиконференция по проблемам управления. 9-11 октября 2012 г. Санкт-Петербург. Материалы конференции

"Управление в технических системах"(УТС-2012). Санкт-Петербург, 2012. С. 45-48.

7. И.М. Ананьевский, Н.В. Анохин, А.И. Овсеевич. Управление по обратной связи для линейных динамических систем на основе общей функции Ляпунова. XI Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления Москва, 1-4 июня 2010 г. С. 19-20.

8. И.М. Ананьевский, Н.В.Анохин. Управление перевернутым многозвенным маятником с помощью одного момента. XII Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления 5-8 июня 2012 г. С. 19-20.

9. И.М. Ананьевский, Н.В. Анохин. Управление многозвенным маятником в окрестности положения равновесия с помощью одного момента. Международная конференция по математической теории управления и механике. Суздаль, 5-9 июля 2013 г. С. 21-22.

Анохин Николай Владимирович

УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ДЕФИЦИТОМ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Автореферат