

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Н.Э. БАУМАНА (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи

Гончаров Дмитрий Александрович

**Разработка экспериментально-аналитического
метода расчета колебаний двухслойной
жидкости в сосуде с проницаемой перегородкой**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. т. н., профессор

Пожалостин Алексей Алексеевич

Москва – 2016

Оглавление

Аннотация	4
Введение	5
Глава 1. Математические модели колебаний жидкости в сосудах	11
1.1. Теоретические и экспериментальные методы исследования в гидроупругости	11
1.2. Гидродинамические модели энергетических установок космических летательных аппаратов	20
1.3. Выводы к первой главе	28
Глава 2. Математические модели движения двухслойной жидкости в баке с непроницаемым разделителем	30
2.1. Осесимметричные колебания двухслойной жидкости, разделенной мембраной, в закрытом сосуде	30
2.2. Точное решение задачи о малых осесимметричных колебаниях двухслойной жидкости с разделителем	37
2.3. Малые осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения	44
2.4. Моделирование осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения посредством механического аналога	50
2.5. Выводы по второй главе	57
Глава 3. Математические модели движения двухслойной жидкости в баке с проницаемым разделителем. Параметрические колебания	59

3.1. Малые колебания двухслойной жидкости с учётом проницаемости разделителя	59
3.2. Малые осесимметричные колебания двухслойной жидкости с проницаемым разделителем в цилиндрическом баке с пологой сферической оболочкой в качестве днища	66
3.3. Параметрические колебания свободной поверхности жидкости в упругом баке	73
3.4. Выводы по третьей главе	78
Глава 4. Экспериментальное определение коэффициента сопротивления разделителя	79
4.1. Цели и задачи эксперимента	79
4.2. Описание эксперимента	81
4.3. Описание системы модальных испытаний PRODERA	87
4.4. Результаты	95
4.5. Выводы по четвертой главе	101
Заключение	102
Список литературы	106

Аннотация

В работе рассмотрен ряд краевых задач, возникающих при исследовании осесимметричных колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде. Получены точные аналитические решения краевых задач в рамках принятых допущений. Частотные уравнения представляют собой мероморфные функции с бесконечной последовательностью простых полюсов. Рассмотрена задача о колебаниях двухслойной жидкости в цилиндрическом сосуде с перегородкой в условиях малой гравитации в линейной постановке. Введен приведенный коэффициент сопротивления перегородки для построения модели малых колебаний жидкости в сосуде с проницаемой перегородкой. Решены задачи об осесимметричных колебаниях жидкости в сосудах различной геометрии, с проницаемой перегородкой. Получены зависимости приведенных коэффициентов сопротивления перегородки от коэффициентов затухания для рассматриваемых механических систем. Разработана методика проведения эксперимента, создана экспериментальная установка, проведен ряд экспериментов по определению коэффициентов затухания.

Введение

Актуальность темы исследования. Задачам о колебаниях жидкостей в ограниченных объемах, ставшим традиционными для гидродинамики, посвящено весьма существенное число экспериментальных и теоретических исследований. Последние, как правило, предполагают разработку аналитических или численных моделей. Исследования колебаний жидкости в ограниченных объемах обусловлены важным прикладным значением такого рода движений жидкости, возникающим из технических приложений, реализуемых в ракетно-космической и авиационной технике [1], [2], [3], [4], [5], транспортной технике или, например, при моделировании биологических систем [6], [7]. В этой связи, как правило, возникают задачи гидроупругости, где исследуются взаимодействия жидкости с упругой стенкой или днищем [8], [9], [10]. Кроме того, к задачам о колебаниях жидкости в ограниченном объеме приводят некоторые гидрологические проблемы, например, сейши в озерах и водоемах, рассмотренные в работах [11], [12], [13], [14], [15], [16].

Топливные баки космических летательных аппаратов обеспечивают сохранность жидкого топлива в течение продолжительного времени. Для космического летательного аппарата, совершающего различные маневры в своем орбитальном движении, необходимо обеспечивать бесперебойную подачу компонент топлива от топливного бака в двигательную установку, в том числе, и из состояния малой гравитации. Для решения этой задачи широко применяются системы обеспечения запуска двигательной установки, представляющие собой экраны (разделители), выполненные из пористого материала, удерживающие компоненты жидкого топлива у заборного устройства [17]. Таким образом, топливный бак космического аппарата представляет собой сосуд разделенный проницаемой перегородкой, что приводит к демпфированию колебаний жидкости, обусловленному наличием разделителя.

Течение жидкости сквозь пористую среду традиционно рассматривают с

позиций теории фильтрации и закона Дарси [18], [19], [20], что позволяет формулировать краевые задачи о колебаниях жидкости в сосудах с пористой средой [21].

Двигательная установка, тракт питания и топливный бак образуют замкнутую колебательную систему, в которой возможны автоколебания, для анализа которых необходимо учитывать пульсации давления на выходе жидкости из бака, для чего необходимо определять собственные частоты осесимметричных колебаний бака с жидкостью с учетом демпфирования на разделителе [22].

Создание новых космических летательных аппаратов актуализирует вопрос о разработке новых расчетных методов, конструктивно-обусловленных расчетных моделей, позволяющих определять динамические характеристики баков с элементами систем обеспечения запуска двигательной установки [23].

Цели и задачи диссертационной работы. Целью настоящей диссертационной работы является разработка математической модели колебаний упругого сосуда, заполненного двухслойной жидкостью, разделенной проницаемой перегородкой, учитывающей сопротивление перегородки.

Для достижения указанной цели решаются следующие задачи:

- Формулируются ряд краевых задач с граничными условиями. Находятся их решения.
- Устанавливается зависимость приведенного коэффициента сопротивления при течении сквозь перегородку от приведенного коэффициента демпфирования системы.
- Разрабатывается методика экспериментального определения приведенного коэффициента демпфирования системы.

Научная новизна.

Получены новые результаты, в частности:

- Получены аналитические решения задач о малых симметричных колебаниях жидкостей в сосудах.
- Разработана модель колебаний жидкости в сосуде с проницаемой перегородкой. Сопротивление перегородки учитывается посредством приведенного коэффициента сопротивления. Определена зависимость последнего от частотных параметров и коэффициента затухания.
- Разработан экспериментальный стенд, позволяющий создавать осесимметричные движения жидкости в сосудах, регистрировать собственные частоты колебаний.

Теоретическая и практическая значимость.

- Разработанная модель взаимодействия жидкого топлива с проницаемым разделителем позволяет определять условия при которых в системе двигательная установка — топливный бак возникает автоколебательный режим работы.
- Разработана методика экспериментально-аналитического определения приведенного коэффициента демпфирования, что позволяет с одной стороны, обеспечивать устойчивость расчета вынужденных колебаний и автоколебаний в ракетно-космической технике, а с другой — устанавливать границы применений гидравлических моделей в ракетной технике.
- Осуществлено внедрение научно-технических результатов работы в рамках НИР №01201355404, выполняемой в ИМАШ РАН в рамках п.№30 Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук «Методы анализа и синтеза многофункциональных механизмов и машин для перспективных технологий и человекомашинных комплексов. Динамические и виброакустические процессы в технике» на 2013 — 2020 годы.

Положения, выносимые на защиту:

- Результаты решения краевых задач о малых симметричных колебаниях жидкости с разделяющей диафрагмой.
- Аналитическая зависимость между приведенным коэффициентом сопротивления и коэффициентом затухания.
- Методика экспериментального определения коэффициента затухания.
- Результаты экспериментальных исследований симметричных колебаний жидкости в сосуде цилиндрической формы. По результатам эксперимента получены численные значения коэффициентов затухания системы.

Степень достоверности и апробация результатов. Работа выполнена на базе фундаментальных положений теоретической механики, теории колебаний и гидромеханики. Достоверность получаемых результатов обусловлена:

- Применением строгих, апробированных моделей и математических методов для решения задач гидромеханики и математической физики, в частности: модели идеальной жидкости и метода собственных функций для уравнения Лапласа.
- Корректностью постановки задач, принятых допущений и ограничений.
- Применением известных методов экспериментального исследования на апробированном оборудовании и использованием современных регистрирующих средств.
- Согласованием теоретических и экспериментальных результатов с известными положениями гидромеханики и теории колебаний, а также результатами других исследователей.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. XVII сессия Международной научной конференции Fluxes and structures in fluids-2013, 25 — 28 июня 2013 года, Санкт-Петербург, Россия
2. 4-я Международная научная школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», 26 — 29 ноября 2013 года, Москва, Россия
3. Научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвящённая 135-летию кафедры теоретической механики им. профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана, 23 — 25 октября 2013 года, Москва, Россия
4. XXXVIII Академические чтения по космонавтике памяти академика С.П. Королёва, 28 — 31 января 2014 года, Москва, Россия
5. Международная научная конференция «Физико-математические проблемы создания новой техники», посвященная 50-летию юбилею НУК ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана, 17 — 19 ноября 2014 года, Москва, Россия
6. 5-я Международная научная школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», 25 — 28 ноября 2014 года, Москва, Россия
7. XVIII сессия Международной научной конференции Fluxes and structures in fluids-2015, 23 — 26 июня 2015 года, Калининград, Россия
8. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 20 — 24 августа 2015 года, Казань, Россия

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 17 печатных работах [24–40], из них 6 статей в рецензируемых журналах на момент публикации (из перечня ВАК), 5 сборников материалов конференций и 3 тезисов докладов.

Личный вклад автора. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь принадлежащий непосредственно соискателю материал.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 121 страниц, из них — 108 страниц текста, включая 42 рисунка. Библиография включает 133 наименования на 16 страницах.

Глава 1

Математические модели колебаний жидкости в сосудах

1.1. Теоретические и экспериментальные методы исследования в гидроупругости

Исследование взаимодействий твёрдых и упругих тел с жидкостью имеет длительную историю. Особо внимания заслуживают работы Жуковского Н.Е., Сретенского Л.Н., Лейбензона Л.С., Черноусько Ф.Л., Нестерова С.В., Акуленко Л.Д., Чашечкина Ю.Д., Стуровой И.В., Балабуха Л.И., Горшкова А.Г., Раппорта И.М., Луковского И.А., Моисеева Н.Н., Мышкиса А.Д., Колесникова К.С., Копачевского Н.Д., Шмакова В.П., Шклярчука Ф.Н., Лампера Р.Е., Докучаева Л.В., Рабиновича Б.И., Абрамсона Н., Баура Г., Ибрагима Р.А., Гонткевича В.С., Троценко В.А., Микишева Г.Е., Синёва А.В., Пожалостина А.А., Темнова А.Н., Самойлова Е.А.

Прежде всего следует отметить классическую работу Н.Е.Жуковского [41], где была разработана теория движения тел с полостью, целиком заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Колебания жидкости в цилиндрическом сосуде были в свое время также рассмотрены Д.Е. Охоцимским в работе [42]. В частности, приведено следующее соотношение для частоты колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде

$$\omega_n^2 = \frac{g\zeta_n}{a} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{a} \right), \quad (1.1)$$

где g — ускорение свободного падения, h — высота столба жидкости, a — радиус сосуда, ζ_n , $n = 1, 2, \dots$ — последовательные положительные нули производных функций Бесселя $J'_0(\zeta_n) = 0$

В монографии Сретенского Л.Н. [43] излагается общая теория волновых движений жидкости и содержится разбор специальных вопросов этой теории, относящихся к ряду задач геофизики и теории корабля.

В монографии Лейбензона Л.С. [18] изложены методы исследования движения несжимаемой жидкости в пористой среде, теории ламинарного и турбулентного течения в пористой среде и основы теории гидравлического режима.

В обзорной монографии Р. Ибрахима [44] изложено современное состояние по проблеме динамики свободной поверхности жидкости в сосудах.

Чашечкин Ю.Д. в работе [45] приводит результаты согласованного аналитического, численного и лабораторного моделирования динамики течений и их внутренней структуры. Математическую основу работы составляет фундаментальная система уравнений механики неоднородных жидкостей, включающая в себя дифференциальные уравнения неразрывности, баланса импульса, энергии, диффузии компонентов и замыкающее уравнение состояния, которая анализируется с учетом условий совместности и наблюдаемости входящих величин.

В работе [46] Нестеровым С.В. исследовалось параметрическое возбуждение колебаний в прямоугольном сосуде при его периодическом вертикальном движении. Были найдены стационарные колебательные режимы и исследована их устойчивость.

В работе [11] теоретически и экспериментально исследованы поверхностные и внутренние сейши в прямоугольном наклонном бассейне, заполненном двухслойной жидкостью. В рамках линейной теории мелкой воды выполнены расчеты в одномерной постановке в предположении длинного и узкого водоема. Для водоема с постоянными значениями площади поперечного сечения в каждом из слоев и ширины этого сечения на уровне свободной поверхности и границы раздела получено аналитическое решение задачи. Показано, что одномерная модель удовлетворительно описывает собственные частоты колебаний и положение узлов поверхностных и внутренних сейш.

Работа [14] посвящена исследованию поведения внутренних сейш в бас-

сейне переменной глубины в рамках линейной модели длинных волн. Результаты для непрерывной стратификации на примере одного из поперечных сечений Телецкого озера (Горный Алтай, Россия) сопоставлены с результатами для прямоугольного бассейна, а также моделями двухслойной и трехслойной жидкости. Показано, что для глубоководного озера периоды внутренних сейш достаточно хорошо аппроксимируются решением для эквивалентного прямоугольного бассейна.

В работе [8] представлены результаты решения линейной задачи об установившихся колебаниях горизонтального цилиндра, погруженного в жидкость, на верхней границе которой плавает полубесконечная упругая пластина с прямолинейным свободным краем. Оставшаяся часть поверхности жидкости является свободной. Использован метод распределенных по контуру тела массовых источников. Соответствующая функция Грина построена с использованием разложения по собственным функциям.

В [9] выполнено исследование двумерной нестационарной задачи гидроупругости о взаимодействии поверхностных волн с подвижной вертикальной стенкой, закрепленной на пружинах. Построены аналитическое решение задачи в рамках линейного приближения и численное решение в рамках нелинейной модели потенциального течения жидкости с использованием комплексного метода граничных элементов. В результате анализа линейного и нелинейного решений установлено, что линейное решение может быть использовано для предсказания основных характеристик движения стенки и течения жидкости при умеренных амплитудах волн.

В статье [15] проведены измерения колебаний свободной поверхности озера Байкал на трех станциях: г. Байкальск, п. Листвянка и Большие Коты. Используются современный метод регистрации и усовершенствованная методика обработки измерений. По данным наблюдений годичной длительности проведен анализ амплитуд сейшевых колебаний и их сезонной изменчивости.

В работе [16] теоретически и экспериментально исследованы собственные

частоты и формы сейшевых колебаний в замкнутом водоеме, состоящем из длинного узкого канала, соединенного с широким бассейном. В рамках линейной теории мелкой воды выполнены расчеты в двумерной и одномерной постановках. Экспериментально исследованы спектральные свойства колебаний уровня свободной поверхности в точках, лежащих на узловых линиях первых четырех мод сейшевых колебаний. Показано, что результаты, полученные по одномерной модели, удовлетворительно описывают частоты низших мод и несколько отличаются от результатов, полученных экспериментально и с использованием двумерной модели, по определению положения узловых точек сейшевых колебаний.

Работы [47–49] академика Ф.Л. Черноузько посвящены исследованию движения твёрдого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью.

В работе [50] изучается параметрическое возбуждение стоячих трехмерных волн на границе раздела вязкой двухслойной тяжелой жидкости, полностью заполняющей сосуд произвольной формы, совершающий вертикальные колебания.

В статье Секерж-Зеньковича С.Я. [51] изучаются трехмерные бесконечно малые колебания маловязкой двухслойной тяжелой жидкости в сосуде произвольной формы. В частности, для сосуда цилиндрической формы с плоским дном получено следующее соотношение для частоты колебаний идеальной жидкости:

$$\omega_n^2 = g \frac{\nu_n}{a} \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 \operatorname{cth} \left(\nu_n \frac{h_2}{R} \right) + \varrho_1 \operatorname{cth} \left(\nu_n \frac{h_1}{R} \right)}, \quad (1.2)$$

где ϱ_1, ϱ_2 — плотности жидкостей, g — ускорение свободного падения, a — радиус цилиндрического сосуда, ν_n — последовательные положительные нули производных функций Бесселя $J'_0(\zeta_n) = 0$.

В работе Кравцова А.В. и Секерж-Зеньковича С.Я. [52] рассматривалась задача о свободных малых колебаниях маловязкой жидкости в сосуде, частично

заполненным пористой средой. Были соотношения для собственных частот и для декремента затухания.

Книга [19] содержит детальный анализ идей и фактов, лежащих в основе гидродинамики пористых сред. Раскрывается физическая сущность теоретических предпосылок, экспериментальных методов. Вместе с тем, расчетные математические методы занимают в книге подчиненное положение.

В статье [53] аналитически получено выражение для коэффициента проницаемости в законе фильтрации Дарси.

В работе Гаврикова А.А. [54] исследуются малые колебания эмульсии двух слабовязких сжимаемых жидкостей во внешнем звуковом поле, структура смеси считается периодической с достаточно малым размером ячейки. Методом двухмасштабной сходимости выводятся интегро-дифференциальное акустическое уравнение, выражение для средней скорости и доказывается сильная сходимость к нулю в L_2 по малому параметру разности скоростей и разности градиентов скоростей допредельной и предельной задач (исходной и усредненной).

В работе [55] Л.И. Балабух получил точное решение задачи о свободных колебаниях упругого цилиндрического бака с плоским днищем.

В монографии К.С.Колесникова[56] рассмотрены дифференциальные уравнения возмущённого движения твёрдого тела с жидкостью как объекта управления, а также исследована устойчивость движения рассматриваемой механической системы.

В монографии [22] К.С. Колесникова рассмотрены также продольные и поперечные колебания ракеты, как замкнутой системы, состоящей из упругого корпуса с жидкостью в баках, системы подачи топлива и жидкостного ракетного двигателя.

Монография Луковского И.А.[57] посвящена приближённым методам исследования нелинейных задач динамики твердого тела с полостями, содержащими жидкость со свободной поверхностью.

Монографии профессоров Микишева Г. Н и Рабиновича Б. И. [58], [59] по-

священы динамике твердых и тонкостенных упругих конструкций, содержащих полости и отсеки, заполненные жидкостью. В работе [59] приведено решение методом Галеркина краевой задачи о продольных колебаниях тонкостенного стержня с упругими баками, наполненных жидкостью. Бак представляет собой цилиндрическую закрытую плоским днищем, соединенную с трубопроводом. Полость и трубопровод наполнены идеальной, несжимаемой жидкостью. Приведено решение указанной краевой задачи методом начальных параметров. В статье [60] излагаются результаты экспериментальных исследований по определению собственных частот и коэффициентов демпфирования колебаний жидкости в различных полостях, в том числе и для цилиндра с плоским днищем.

Параметрическое возбуждение колебаний в цилиндрическом сосуде с жидкостью реализовывалось в работе [61]. Движения свободной поверхности описывались при помощи уравнения Матье ввиду гармонического возбуждения вертикальных колебаний сосуда с жидкостью. Влияние диссипации на параметрические колебания было исследовано в работе Акуленко Л.Д. и Нестерова С.В. [62].

Дальнейшее развитие аналитические способы решения задач гидроупругости получили в работах Балабуха Л.И. [63–65], Пожалостина А.А. [66–71] и Шмакова В.П. [72–75]. В частности, в работе [65] найдено частотное уравнение в виде мероморфной функции для определения частот свободных осесимметричных колебаний упругой безмоментной, безинерционной сферической оболочки частично заполненной жидкостью. В работе [64] для цилиндрической полости исследованы свойства собственных функций краевой задачи с граничными условиями в зависимости от параметра. Работа [66] посвящена исследованию движения идеальной, несжимаемой и нестратифицированной жидкости совместно с упругим днищем. Постановка задачи с иным подходом к решению дифференциального уравнения движения пластины представлена в статье [76].

В работе Ю. Г. Балакирева [77] была рассмотрена задача о колебаниях пологой сферической оболочки, являющейся днищем для жидкости, заполняю-

щей цилиндрическую полость с жёсткими стенками. Исследовались различные случаи граничных условий для оболочки, получены зависимости частот колебаний оболочки с жидкостью от глубины заполнения и степени пологости, а также приведена простая формула для оценки частоты первого тона колебаний. Работы Пожалостина А.А. посвящены дальнейшей разработке аналитических приближенных методов расчёта колебаний упругого сосуда, частично заполненного жидкостью, которые могут быть использованы при определении, например, форм и частот колебаний корпуса ракеты как продольного, так и поперечного деления, работающей на жидком топливе. Кроме того, разработаны способы, позволяющие получить приближенные решения в аналитическом виде, которые могут быть рекомендованы к использованию в системах автоматизированного проектирования (САПР) жидкостных ракет для определения динамических характеристик.

В работе А.А. Пожалостина и О.А. Каменского [78] рассмотрены свободные колебания безмоментной и безинерционной чечевицеобразной оболочки, частично заполненной идеальной, несжимаемой жидкостью.

Статья [73] Шмакова посвящена применению численных методов к задачам о колебаниях упругих оболочек вращения, заполненных идеальной, несжимаемой жидкостью. Краевая задача для системы уравнений сводится к задаче Коши. Полученные уравнения интегрируются методом Рунге-Куты с ортогонализацией по Грамму-Шмидту [79].

В работе [80] Ивлёны, Кухто и Лампера разработан численный вариационный метод с нелинейным параметром в приложении к задаче о колебаниях бака с жидкостью. Используется метод Ритца и неполная система функций Бесселя комплексного аргумента.

В работе [81] Шклярчуком получены уравнения параметрических колебаний цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью при продольном возбуждения колебательных движений. Рассмотрены нелинейные уравнения движения цилиндрической оболочки и параметрическое возбуждение коле-

баний, возникающее от периодического изменения по времени вынуждающей силы в оболочке.

Работа В.А. Бужинского [2] посвящена разработке приближенной модели движения несжимаемой маловязкой жидкости для определения сил сопротивления, действующих на тела с острыми кромками при их чисто колебательном движении в жидкости, либо при колебательном движении жидкости относительно тел с острыми кромками. На основе предлагаемой модели автор построил полумпирическую асимптотическую теорию вихревого сопротивления, которая затем была им использована для определения гидродинамических характеристик топливных баков.

В работах Докучаева [82], [83] получены уравнения движения твёрдого тела с жидкостью, имеющей на свободной поверхности гибкую мембрану.

Монография [84] Л.В. Докучаева посвящена задачам нелинейной динамики летательного аппарата с деформируемыми элементами в виде гибких стержней. Рассмотрены вопросы устойчивости движения таких систем с учётом колебаний жидкости в жестких полостях, являющихся элементам конструкции системы.

В работе Алиева с соавторами [85] был выведен нелинейный по комбинации частоты и относительной скорости дисперсионный определитель в задаче о распространении волн на границе слоев жидкостей конечной толщины.

Монография И.А. Луковского, В.А. Троценко и В.И. Усюкина [86] посвящена постановке и решению задач гидроупругости, возникающих в теории движения механических систем, имеющих полости с жидкостью и конструктивными устройствами в виде упругих ребер-перегородок и вытеснительными диафрагмами из высокоэластичных материалов. Приведены результаты решения задач о колебаниях идеальной жидкости в полостях с кольцевыми и радиальными перегородками, нелинейных задач статики и линеаризованных задач динамики мягких оболочек, взаимодействующих с ограниченным объёмом жидкости.

В работах Левина В.Е. и Балгеймера Г.Л. [87], [88] разработан метод рас-

чѐта топливных баков, построены на сочетании метода конечных элементов (МКЭ) для описания деформирования оболочек бака и метод граничных элементов (МГЭ) для представления жидкости. Однако, метод граничных элементов приводит к заполненным матрицам, которые могут оказаться намного хуже обусловлены, по сравнению с матрицами, возникающими при реализации метода конечных элементов. В этой связи, с целью сокращения конечномерной модели бака с топливом, перед автором возникла необходимость в уточнённом описании как геометрии бака, так и функций форм в МКЭ и МГЭ.

В статье [89] предложена методика определения динамического давления автоцистерны на проезжую часть при торможении с учетом подвижности жидкости, что является актуальным в связи с ее повышенным динамическим воздействием на путь. Разработана динамическая модель автоцистерны, в которой плоская динамическая модель автомобиля дополнена механической моделью жидкого груза. В работе [90] разработана динамическая модель автоцистерны с учетом деления котла на отсеки. Для моделирования продольных колебаний жидкости использовался механический аналог, расчет параметров которого был выполнен с учетом возможности появления гидроудара.

Работы [91–96] Дьяченко М.И. и Темнова А.Н. посвящены исследованиям динамики перераспределения топлива в крупногабаритных ракетно-космических системах. Статья [92] посвящена исследованию задачи о малых движениях несжимаемой жидкости, вытекающей из бака произвольной формы через плоскую поверхность слива. В [93] рассмотрена задача, порожденная проблемой перераспределения топлива, находящегося в баках ракет-носителей пакетной схемы, с целью получить максимальный прирост энергетики выведения полезной нагрузки. Операторная постановка задачи о малых движениях жидкости, вытекающей из бака, рассмотрена в [94]. Исследование движений стратифицированной жидкости совместно с упругим днищем в виде пластины изложено в статье [97]. Исследования свойств спектра проводились в работе [98], тем не менее было получено лишь приближенно-аналитическое решение, а не точное.

В работах [24], [25] получены приближенные аналитические решения задачи о малых осесимметричных колебаниях мембраны в жидкости без учета сил поверхностного натяжения и с их учётом соответственно. Работы [99] и [100] посвящены исследованию колебаний многослойных жидкостей и разделяющих мембран. В работе [3] исследовались колебания оболочки при протекании жидкости сквозь проницаемую перегородку. В работе [101] исследовались колебания упругой проницаемой перегородки, взаимодействующей с жидкостью.

В работе [102] Грибкова В.А. решение задачи о собственных колебаниях тонкостенного бака, частично заполненного жидким топливом представлено в виде матричных рядов, а также проведено экспериментальное исследование динамических характеристик составных оболочек.

В серии работ [103], [12], [104] [13], [105] экспериментально исследовались вопросы движения жидкости в подвижном сосуде с локальными нерегулярностями на дне, выполнялось построение механического аналога таких движений.

1.2. Гидродинамические модели энергетических установок космических летательных аппаратов

В отчете NASA [106] приведены различные теоретические и экспериментальные модели поведения жидкости в баках космических летательных аппаратов. Исследования проводились в рамках работ по лунной программе «Сатурн-Аполлон».

Исследованию поведения жидкости в условиях невесомости или микрогравитации посвящено множество публикаций и монографий, из работ последнего времени можно отметить, например, [107], где также рассматривается движение механического аналога, применительно к процессам кипения жидкости в условиях невесомости. В работе [108] исследуется линейная неустойчивость равновесия плоского горизонтального слоя неоднородно нагретой жидкости относительно колебательных возмущений. В статье [109] приводится математическая

модель движения КА с колеблющимися в баках КА жидкими компонентами топлива. Для моделирования колебаний жидких компонентов топлива в баках использован „механический аналог“ колебаний жидкости — колебания сферических маятников. Все дифференциальные уравнения записаны в векторной форме в декартовых координатах. Обсуждаются отличия приведенной модели от известных. Обсуждается применение приведенной модели для имитационного моделирования движения КА. В работе [110] описывается методика определения параметров механической модели движения жидкости в баке при вращении относительно продольной его оси с использованием результатов испытаний бака с жидкостью в режиме свободных колебаний. Путём сравнения экспериментальных данных и результатов математического моделирования поведения механического аналога жидкости в виде твёрдых вкладышей находятся параметры, характеризующие влияние её подвижности на движение бака. Примечательна работа [111], где на основе результатов испытаний бака с жидкостью в режиме свободных колебаний описываются особенности механической модели движения такой жидкости в баке разгонного блока (РБ) с радиальными перегородками при вращении относительно продольной его оси. Путём сравнения данных экспериментов и математического моделирования поведения механического аналога жидкости в виде твёрдых вкладышей и обобщённого вихря находятся параметры, характеризующие влияние её подвижности на движение бака.

В монографии, под общей редакцией профессора В.М. Поляева [17], на основе отечественных, зарубежных и оригинальных исследований обобщены материалы по капиллярным системам отбора жидкости, дана их классификация и рассмотрено применение в различных системах отбора жидкости для двигательных установок космических летательных аппаратов.

Механике жидкости в условиях невесомости и малой гравитации посвящена монография под редакцией А.Д. Мышкиса [112].

В работе Копачевского Н.Д. [113] рассматривалась проблема статической

устойчивости и устойчивости малых движений свободной поверхности жидкости заполняющей открытый сосуд с отверстиями в днище.

Серия работ Г. Бауэра [114], [115], [116], [117], [118] посвящена исследованиям динамики жидкости в баках космических летательных аппаратов в условиях внешнего возбуждения, а также в условиях микрогравитации.

В работе [119] Сапожникова В.Б., Меньшикова В.А. и Партолы И.С. рассматривались вопросы применения пористо-сетчатых материалов для внутрибаковых заборных устройств в тороидальных баках КЛА.

Работа [4] Сапожникова В.Б., Крылова В.И., Новикова Ю.М. и Ягодникова Д.А. затрагивает вопросы обеспечения наземной отработки капиллярных фазоразделителей на основе комбинированных пористо-сетчатых материалов для топливных баков жидкостных ракетных двигателей верхних ступеней ракет-носителей, разгонных блоков и космических летательных аппаратов.

В работах [120], [121], [122] изложены аспекты экспериментальных исследований разделяющих экранов.

В работе [123] с помощью механических аналогов исследовались колебания жидких топлив во вращающихся космических летательных аппаратах, а в работе [124] осуществлено численное моделирование таких взаимодействий.

Возможные конструктивные реализации топливных баков космических летательных аппаратов (КЛА) с капиллярной системой отбора жидкости (КСОЖ), в частности, с разделителями на основе комбинированных пористо-сетчатых материалов (КПСМ), были рассмотрены в монографии [17]. По объёму функциональных требований, предъявляемых к КСОЖ, в соответствии с [17] их можно разделить на три группы.

Наиболее узкие задачи выполняют системы отбора компонентов жидкого ракетного топлива из баков маршевой двигательной установки (МДУ) разгонных ракетных блоков и двигательных установок системы орбитального маневрирования (СОМ) КЛА. Они должны обеспечивать многократный запуск двигателя в условиях микрогравитации или на значительных знакопеременных

ускорений, а также его работу в течение некоторого промежутка времени, который достаточен для прилива основной массы находящейся в баке жидкости к заборному отверстию. Данные задачи выполняют так называемые локальные КСОЖ, определяемые как конструкции, способные отбирать жидкость без газовых включений только из части объёма бака, его некоторой локализованной зоны или отсека, называемого накопителем.

Более широкий круг вопросов решается посредством системам отбора топлива жидкостных ракетных двигателей реактивной системы управления. В этих двигательных установках КСОЖ обеспечивают непрерывный поток топлива не только для включения двигателей, которые, как правило, происходят не только при микрогравитации, но и в течение всего периода их работы, когда положение жидкости в баке изменяется, и его трудно предопределить. Для жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) реактивной системы управления (РСУ) разработаны так называемые тотальные КСОЖ, способные производить забор компонента, находящегося в любой зоне бака.

Наиболее жестким требованиям отвечают КСОЖ двигательных установок межпланетных и орбитальных КЛА, так как в них ракетное топливо составляет значительную часть от общей массы аппарата. Помимо непрерывной подачи компонентов к потребителю эти устройства должны обеспечивать минимальное изменение положения центра масс жидкости во время функционирования реактивной системы управления, постоянный контакт газовой подушки с отверстием для подачи газа и незначительные плескания жидкости при запуске маршевой двигательной установки. Указанный перечень задач выполняют капиллярные системы контроля положения центра масс жидкости в баке. Они представляют собой внутрибаковую конструкцию, которая, воздействуя на поверхность раздела «жидкость-газ», способна влиять на взаимное положение жидкости и газа внутри бака.

Подробно остановимся на локальных КСОЖ, как наиболее отвечающих задачам модернизации существующих ракет-носителей и создания перспектив-

ных разгонных блоков и рассмотрим их типичные конструктивные реализации, в соответствии с [17].

1.2.1. Топливный бак системы орбитального маневрирования космического корабля «Спейс Шаттл»

СОМ космического корабля „Спейс Шаттл“ служила для изменения скорости его полёта при переходе на новую орбиту, стыковке с другими КЛА, а также при торможении перед посадкой на Землю. Двигатели СОМ включаются и в период работы стартовых ступеней для создания дополнительной тяги. СОМ состоит из двух одинаковых автономных ЖРД, расположенных в боковых гондолах рассматриваемого КЛА. Цилиндрические топливные баки (рис. 1.1) снабжены одинаковыми локальными заборными устройствами. Оболочки баков изготавливают из титанового сплава 6А14V. Коническая перегородка делит бак на два отсека. Наддуваемый газом жидкостный отсек имеет объём 1,7 м³. Ёмкость накопителя не превышает 0,8 м³. Этого объёма топлива достаточно для маловероятной, но предусмотренной техническим заданием, заправки баков ЖРД РСУ и последующего запуска МДУ. Межотсекочная перегородка представляет собой силовой каркас с окнами, которые закрыты капиллярным экраном (КЭ).

1.2.2. Топливный бак ИСЗ для телевизионной связи

Топливный бак ЖРД телевизионного спутника связи содержит локальное заборное устройство (ЗУ). Этот бак (рис.1.2) предназначен для хранения и подачи азотного тетраоксида. Накопитель является частью объема бака, отделенного от газожидкостной полости сплошной перегородкой, в которой имеется 7 круглых окон с КЭ. Перегородка выполнена в виде усеченного конуса. Его вершина ориентирована вниз к выпускному отверстию бака. Такая форма перегородки позволяет ей совместно с внутренней поверхностью оболочки бака

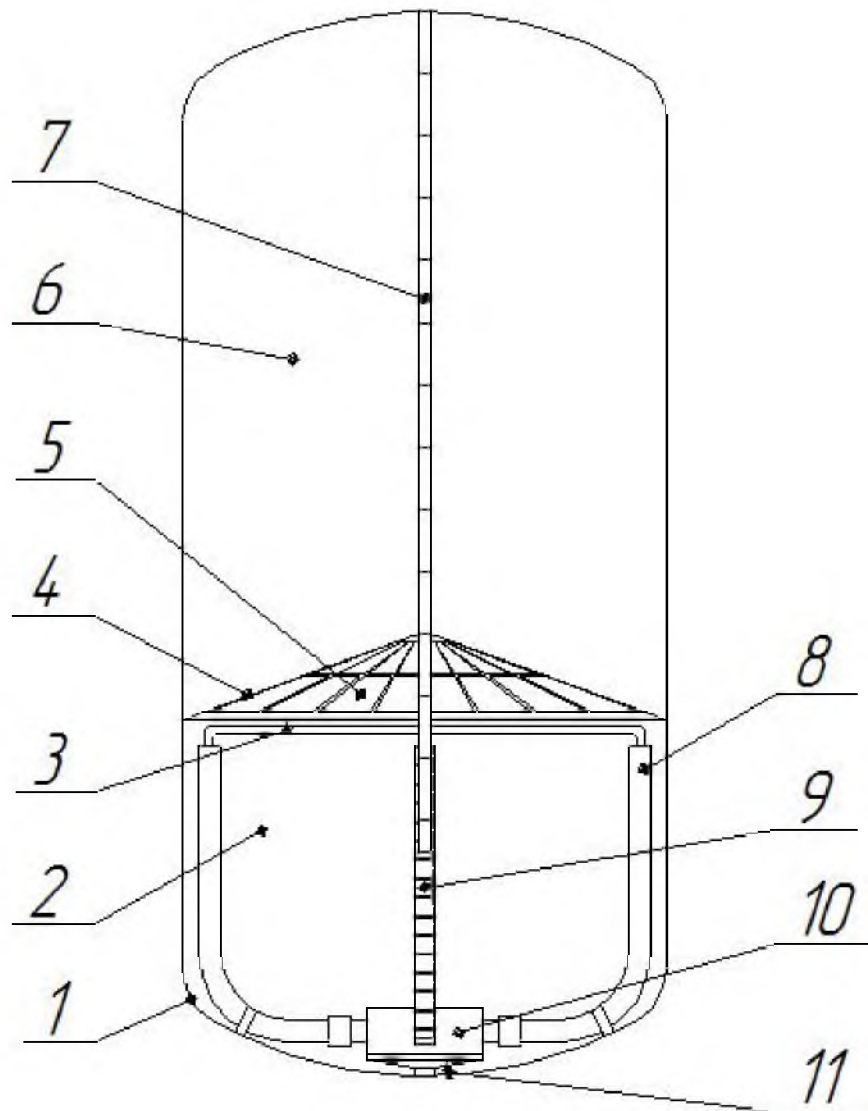


Рис. 1.1. Конструктивная схема локальной КСОЖ двигательной установки СОМ космического корабля „Спейс Шаттл“:

1 — оболочка бака; 2 — накопитель; 3 — трубопровод для дренажа заборных клапанов внутринакопительного ЗУ; 4 — межотсекочная перегородка; 5 — окно закрытое КПСМ; 6 — основной объем бака; 7 — датчик уровня жидкости; 8 — заборный канал внутринакопительного ЗУ; 9 — окно заборного канала, закрытое КПСМ; 10 — сборный коллектор; 11 — патрубок для выхода жидкости

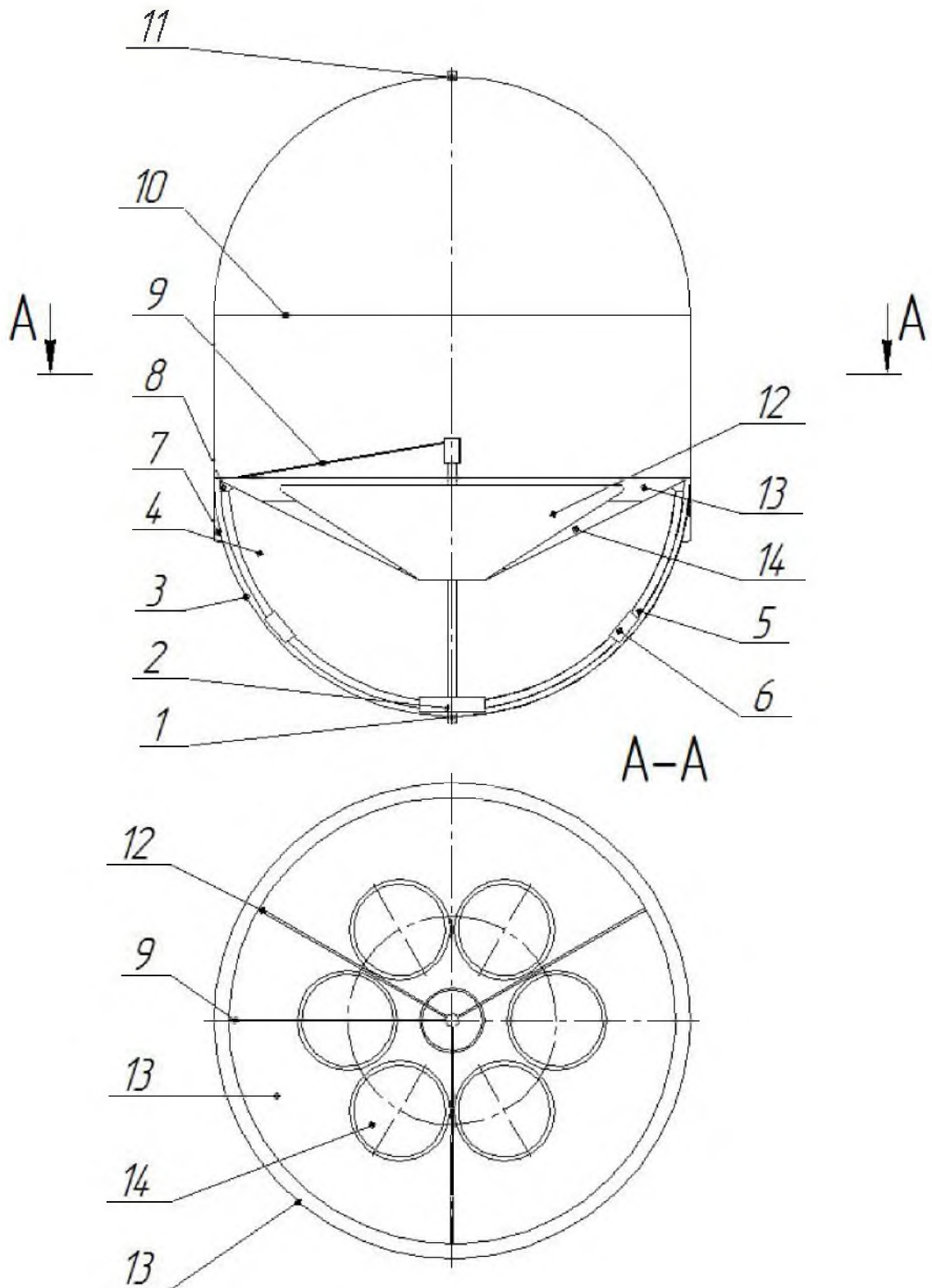


Рис. 1.2. Топливный бак ЖРД искусственного спутника Земли:

1 — топливная магистраль; 2 — коллектор внутринакопительного ЗУ; 3 — оболочка бака; 4 — накопитель; 5 — заборный канал внутринакопительного ЗУ; 6 — вспомогательный заборный элемент; 7 — фланец для крепления бака; 8 — основной заборный элемент; 9 — дренажный трубопровод; 10 — сварочный шов; 11 — патрубок для подачи газа наддува; 12 — ребро жёсткости; 13 — внутрибаковая перегородка; 14 — окно, закрытое КФЭ

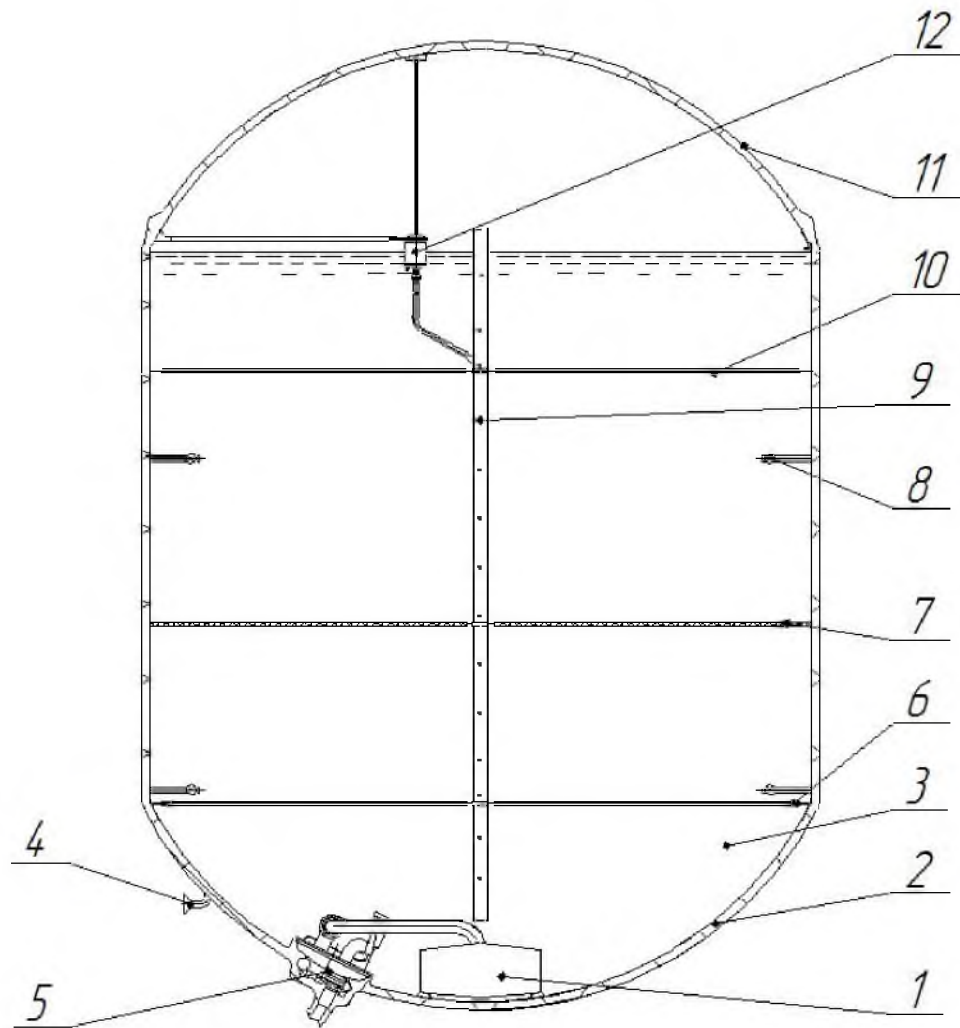


Рис. 1.3. Бак горючего ЖРД кислородно-водородного разгонного блока:

1 — Внутринакопительное ЗУ; 2 — оболочка бака; 3 — накопитель; 4 — дренажное сопло; 5 — бустерный насос; 6, 10 — подкрепляющие элементы; 7 — КЭ, выполненный из КПСМ; 8 — датчики температуры; 9 — система контроля уровня топлива; 11 — теплоизоляционное покрытие; 12 — система контроля запуска

образовать капиллярный насос, способный в условиях микрогравитации концентрировать жидкость в верхней зоне накопителя. В верхней зоне накопителя установлены основные заборники 4-х заборных каналов, являющихся совместно с коллектором внутринакопительным тотальным заборным устройством. Основные заборники имеют форму конического раструба, торец которого закрыт КЭ. Дополнительные заборные элементы образованы примерно посередине заборных каналов. Коллектор соединяет внутренний объем каналов с выпускным отверстием. Возможно течение жидкости из накопителя в выходной трубопро-

вод непосредственно через коллектор, для чего в нем предусмотрены закрытые КФЭ окна. Дренажное отверстие накопителя с помощью радиальной трубки сообщается с расположенным по оси бака внутренним дренажным устройством. Оболочка бака и все элементы КСОЖ, кроме КЭ, изготовлены из титанового сплава. КЭ выполнен из сетки из нержавеющей стали, имеющей ЭКД 9-10 мкм.

1.2.3. Кислородно-водородный разгонный блок

Топливный бак кислородно-водородного разгонного блока, рассмотренного в [125] также содержит локальное ЗУ. Накопитель, как и ранее является частью объёма бака, однако, на этот раз перегородка выполнена целиком из КПСМ на основе пеноматериала. В дальнейшем, мы будем проводить исследования для КПСМ на основе пеноникеля, однако представляется возможным применение и иных материалов. Перегородка выполняется плоской из технологических соображений. В нижней части днища расположено заборное устройство и бустерный насос.

Рассмотренные конструктивные схемы обуславливают выбор модельных задач, рассматриваемых далее.

1.3. Выводы к первой главе

На основе анализа литературы можно сделать вывод о недостаточной изученности вопроса о колебаниях жидкости с проницаемой перегородкой. В частности, работы [17], [119] и [4] указывают на необходимость экспериментального определения гидравлических параметров пористых материалов, применяемых в качестве разделителей. Указывается также принципиальные трудности такого определения особенно для криогенных компонент топлив, ввиду необходимости обеспечения различных критериев гидродинамического подобия, противоречащих друг другу. В этой связи, целесообразно, как указывают авторы в [4], проводить соответствующие определения на натуральных баках, однако такой

подход ставит вопрос о возможности и справедливости определения, например, гидравлической проницаемости пористых материалов методом вынужденных колебаний, изложенным в частности, в [101] и [126], что обуславливает актуальность настоящей диссертационной работы. Имеющиеся экспериментальные исследования по колебаниям жидкости с проницаемой перегородкой представлены, по нашему мнению, недостаточно полно и, кроме того, требуют уточнения граничные условия на поверхности разделителя при переходе от верхнего слоя жидкости к нижнему. Обзор конструкций позволяет обосновать граничные условия на смачиваемой поверхности в рассматриваемых далее краевых задачах.

Глава 2

Математические модели движения двухслойной жидкости в баке с непроницаемым разделителем

2.1. Осесимметричные колебания двухслойной жидкости, разделенной мембраной, в закрытом сосуде

2.1.1. Постановка задачи

Будем рассматривать малые осесимметричные движения идеальной несжимаемой двухслойной жидкости, заполняющей неподвижный цилиндрический сосуд, разделенной упругой мембраной. Объём, заполненный жидкостью выше мембраны обозначим как ϑ_1 , объём, заполненный жидкостью ниже разделяющей мембраны — соответственно, как ϑ_2 .

Обозначим плотности жидкости в объёмах ϑ_1 и ϑ_2 как ρ_1 и ρ_2 соответственно. Введем цилиндрическую систему координат $O r \eta z$, с осями $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ и центром O , связанным с центром недеформированной срединной поверхности мембраны. Полагая движение жидкости потенциальным, введем в областях ϑ_1 и ϑ_2 потенциалы скоростей жидкостей $\Phi_1(r, z, t)$ и $\Phi_2(r, z, t)$, где

$$\Phi_1(r, z, t) = \tilde{\Phi}_1(r, z) \sin(\omega t),$$

$$\Phi_2(r, z, t) = \tilde{\Phi}_2(r, z) \sin(\omega t).$$

Для функций Φ_1 и Φ_2 будут выполняться уравнения Лапласа:

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad \text{в} \quad \vartheta_1, \quad \Delta \Phi_2 = 0 \quad \text{в} \quad \vartheta_2, \quad (2.1)$$

где Δ — оператор Лапласа, который в цилиндрической системе координат приобретает вид: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

На смачиваемой поверхности сосуда будут выполняться условия непротекания:

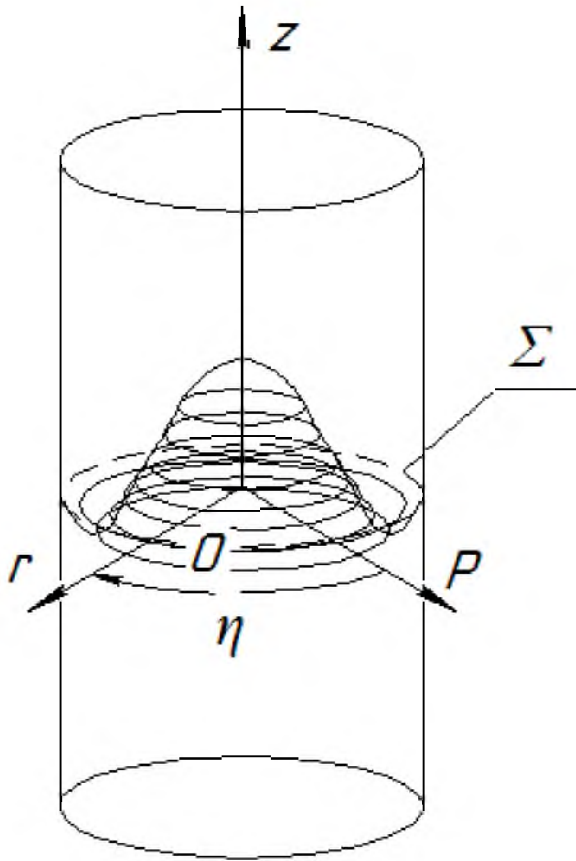


Рис. 2.1. Система координат.

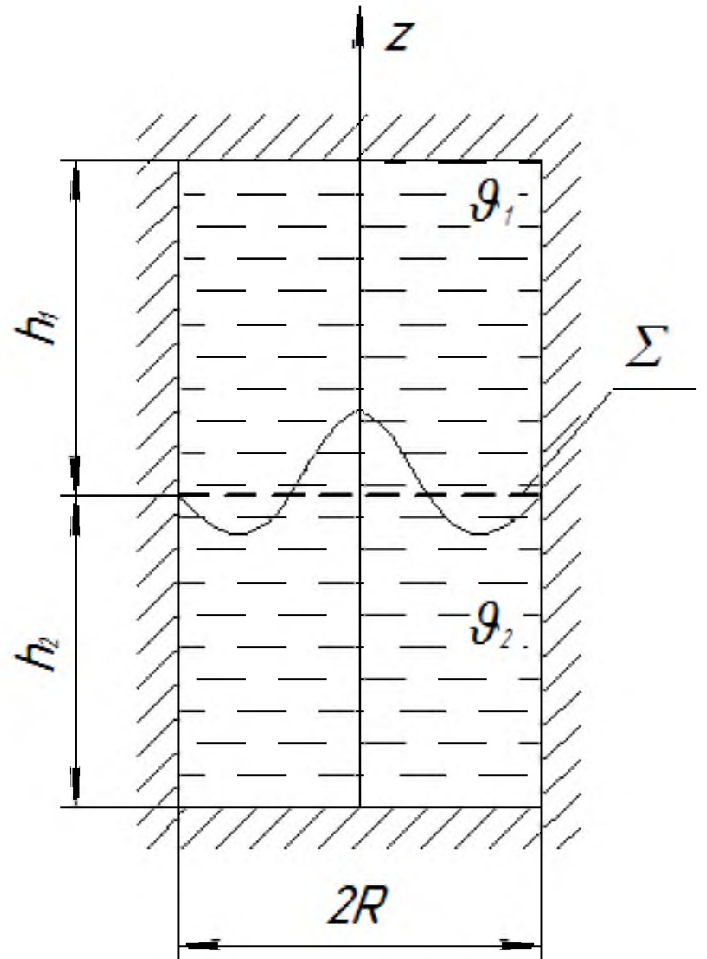


Рис. 2.2. Неподвижный сосуд с двухслойной жидкостью и разделяющей мембраной.

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на } L_1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad \text{на } L_2, \quad (2.2)$$

где $L_i, i = 1, 2$ — смачиваемая поверхность объёма ϑ_i , n — нормаль к смачиваемой поверхности сосуда. В то же время, на мембране будут выполняться кинематические условия:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \dot{w} \quad \text{на } \Sigma, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \dot{w} \quad \text{на } \Sigma, \quad (2.3)$$

где Σ — невозмущенная поверхность мембраны, w — смещение мембраны от невозмущенной поверхности. Кроме того на мембране будет выполняться следующее динамическое условие:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\rho \delta}{\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau} \left[\varrho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \Big|_{z=0} - \varrho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} \right]. \quad (2.4)$$

Здесь ϱ — плотность материала мембраны, δ — ее толщина, τ — натяжение мембраны $[\tau] = \text{Н/м}$. Правая часть в соотношении (2.4) представляет собой разность давлений, полученную из интеграла Коши-Лагранжа для случая безвихревого движения жидкости [127]:

$$\begin{aligned}\varrho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \varrho_1 \frac{(\nabla \Phi_1)^2}{2} + \varrho_1 g z + p_1 &= F_1(t), \\ \varrho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \varrho_2 \frac{(\nabla \Phi_2)^2}{2} + \varrho_2 g z + p_2 &= F_2(t),\end{aligned}$$

где ∇ — оператор Гамильтона, $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \hat{\mathbf{p}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$, $F_i, i = 1, 2$ — функции только лишь времени. Рассматривая задачу в линейной постановке и пренебрегая слагаемыми $\frac{(\nabla \Phi_i)^2}{2}, i = 1, 2$, а также гидростатической составляющей $\varrho_i g z, i = 1, 2$ получим выражение для правой части уравнения (2.1). Ввиду малой толщины разделяющей перегородки и значительного натяжения, возникающего в применяемых материалах (в соответствии с [17] $\delta \sim 5 \cdot 10^{-3} \text{м}$, $\varrho \sim 700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\tau \sim 1000 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$), можем пренебречь инерционным членом $\frac{\varrho \delta}{\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ в дифференциальном уравнении для прогиба мембраны (2.4). В этом случае, оно примет вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{\tau} \left[\varrho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \Big|_{z=0} - \varrho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} \right]. \quad (2.5)$$

Граничные условия для мембраны примем в виде:

$$w(r, t)|_{r=R} = 0, \quad |w(r, t)|_{r=0} < \infty \quad (2.6)$$

2.1.2. Решение краевой задачи

Уравнение (2.1) в областях ϑ_1 и ϑ_2 соответственно приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1}{\partial z^2} \right) \sin(\omega t) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} \right) \sin(\omega t) = 0. \quad (2.7)$$

Представим $\tilde{\Phi}_1(r, z)$ в виде произведения функций $\tilde{\Phi}_1(r, z) = R_1(r) \cdot Z_1(z)$ и, аналогично, $\tilde{\Phi}_2(r, z) = R_2(r) \cdot Z_2(z)$. Разделяя переменные, получим функции $Z_1(z)$ и $Z_2(z)$ в следующем виде:

$$Z_1(z) = C_1 \cdot \text{ch} [k_1(z - h_1)], \quad Z_2(z) = C_2 \cdot \text{ch} [k_2(z + h_2)],$$

где $C_i, i = 1, 2$ — постоянные интегрирования, k_i — собственные значения данной краевой задачи. Для функций $R_i(r)$, $i = 1, 2$ уравнение (2.7) примет вид:

$$\frac{d^2 R_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_i}{dr} + k_i^2 R_i = 0 \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) представляет собой уравнение Бесселя нулевого порядка, его решение выражается через функции Бесселя и Неймана:

$$R_i(r) = \tilde{A}_i J_0(k_i r) + \tilde{B}_i N_0(k_i r), \quad (2.9)$$

где $J_0(k_i r)$ — функция Бесселя первого рода, нулевого порядка, $N_0(k_i r)$ — функция Бесселя второго рода или функция Неймана, также нулевого порядка. Ввиду ограниченности функций $\Phi_i(z, r, t)$ при $r = 0$ и, следовательно, функций $R_i(r)$, положим коэффициенты \tilde{B}_i при функциях Неймана $N_i(k_i r)$ равными нулю, поскольку, как известно, функция Неймана имеет особенность при $r = 0$. Не ограничивая общности, можно положить $\tilde{A}_i = 1$.

Из условий непротекания на стенках сосуда, имеем:

$$\left. \frac{dJ_0(k_i r)}{dr} \right|_{r=R} = 0,$$

откуда

$$k_1^{(n)} = k_2^{(n)} = \frac{\xi_{0n}}{R},$$

где ξ_{0n} — корни уравнения $J_1(r) = 0$ (ввиду рекуррентного соотношения $J_0'(r) = -J_1(r)$). Таким образом, выражения для потенциалов скоростей жидкостей при-

обретают вид:

$$\begin{aligned}\Phi_1(z, r, t) &= \sin(\omega t) \left\{ C_{11}^{(0)} + C_{12}^{(0)} \frac{z}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} C_1 \operatorname{ch} \left[\frac{\xi_{0n}}{R} (z - h_1) \right] J_0 \left(\frac{\xi_{0n}}{R} r \right) \right\}, \\ \Phi_2(z, r, t) &= \sin(\omega t) \left\{ C_{21}^{(0)} + C_{22}^{(0)} \frac{z}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} C_2 \operatorname{ch} \left[\frac{\xi_{0n}}{R} (z + h_2) \right] J_0 \left(\frac{\xi_{0n}}{R} r \right) \right\}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Выполним граничные условия на верхнем и нижнем днищах сосуда. В соответствии с (2.2) имеем: $\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = 0$ и $\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} = 0$, откуда $C_{12}^{(0)} = 0$ и $C_{22}^{(0)} = 0$. В соответствии с [128], решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа могут отличаться лишь на постоянное слагаемое. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем рассматривать решения где $C_{11}^{(0)} = C_{21}^{(0)} = 0$. Выполняя теперь кинематическое условие на мембране (2.3), получим

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (2.11)$$

причем

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \sum_{n=1}^{\infty} C_1 \frac{\xi_{0n}}{R} \operatorname{sh} \left(\xi_{0n} \frac{h_1}{R} \right) J_0 \left(\xi_{0n} \frac{r}{R} \right) \sin(\omega t), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = + \sum_{n=1}^{\infty} C_2 \frac{\xi_{0n}}{R} \operatorname{sh} \left(\xi_{0n} \frac{h_2}{R} \right) J_0 \left(\xi_{0n} \frac{r}{R} \right) \sin(\omega t), \quad (2.13)$$

откуда

$$C_2 = -C_1 \frac{\operatorname{sh} \left(\xi_{0n} \frac{h_1}{R} \right)}{\operatorname{sh} \left(\xi_{0n} \frac{h_2}{R} \right)}. \quad (2.14)$$

Введем коэффициенты B_n так, что

$$C_1 = - \frac{B_n}{\operatorname{sh} \left(\xi_{0n} \frac{h_1}{R} \right)} \frac{1}{J_0(\xi_{0n})}, \quad C_2 = \frac{B_n}{\operatorname{sh} \left(\xi_{0n} \frac{h_2}{R} \right)} \frac{1}{J_0(\xi_{0n})}.$$

Выражения для потенциалов скоростей жидкостей, с учетом нормировки по значению $J_0(\xi_{0n})$ в таком случае примут вид:

$$\Phi_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{J_0\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right) \operatorname{ch}\left[\xi_{0n} \frac{z-h_1}{R}\right]}{J_0(\xi_{0n}) \operatorname{sh}\left(\xi_{0n} \frac{h_1}{R}\right)} \sin(\omega t), \quad (2.15)$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{J_0\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right) \operatorname{ch}\left[\xi_{0n} \frac{z+h_2}{R}\right]}{J_0(\xi_{0n}) \operatorname{sh}\left(\xi_{0n} \frac{h_2}{R}\right)} \sin(\omega t). \quad (2.16)$$

Дифференциальное уравнение (2.5) запишем в следующем виде, удобном для решения:

$$\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} = \frac{1}{\tau} \left[\varrho_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} \Big|_{z=0} - \varrho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \Big|_{z=0} \right]. \quad (2.17)$$

Представляя $\dot{w}(r, t) = w_r(r) \cdot \dot{s}(t)$, получим

$$w_r(r) = -\frac{\omega^2}{\tau} \left(\frac{R}{\xi_{0n}}\right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[\varrho_2 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_2}{R}\right) + \varrho_1 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_1}{R}\right) \right] \frac{J_0\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right)}{J_0(\xi_{0n})} + \tilde{C}_1 \ln r + \tilde{C}_2. \quad (2.18)$$

Ввиду ограниченности функции $w_r(r)$ при $r = 0$, положим $\tilde{C}_1 = 0$. Из граничного условия (2.6) определим постоянную \tilde{C}_2 :

$$C_2 = \frac{\omega^2}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{R}{\xi_{0n}}\right) \left[\varrho_2 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_2}{R}\right) + \varrho_1 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_1}{R}\right) \right].$$

Выполним теперь кинематическое условие (2.3) в части равенства скоростей прогиба мембраны \dot{w} и скорости жидкости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\xi_{0n}}{R} \frac{J_0\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right)}{J_0(\xi_{0n})} = \frac{\omega^2}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{R}{\xi_{0n}}\right)^2 \left[\varrho_2 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_2}{R}\right) + \varrho_1 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_1}{R}\right) \right] \times \left[1 - \frac{J_0\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right)}{J_0(\xi_{0n})} \right].$$

Домножая правую и левую часть выражения на $r J_0\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right)$ и интегрируя в пределах от 0 до R , с учетом соотношений

$$\int_0^R r J_0\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right) dr = 0, \quad \int_0^R r J_0^2\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right) dr = \frac{1}{2} R^2 [J_0^2(\xi_{0n}) + J_1^2(\xi_{0n})] = \frac{1}{2} R^2 J_0^2(\xi_{0n}),$$

получим

$$\omega_n^2 = \left(\frac{\xi_{0n}}{R}\right)^3 \frac{\tau}{\left[\varrho_2 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_2}{R}\right) + \varrho_1 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_1}{R}\right)\right]}. \quad (2.19)$$

2.1.3. Результаты

Соотношение (2.19) выражает зависимость квадрата частоты собственных колебаний безинерционной мембраны в двухслоной жидкости. Полученный результат хорошо согласуется с соотношением, представленным в работе Ю.Н. Кононова и Е.А. Титаренко [10] для схожей постановки задачи с иными граничными условиями для краевой задачи Неймана. Зависимость для частот первого и второго тона собственных колебаний при различных соотношениях определяющих параметров приведены на Рис. 2.3 и, соответственно, на Рис. 2.4.

Можно видеть, что для диапазона натяжений, характерных для используемых материалов [17], значения частот собственных колебаний мембраны будут значительно превосходить частоты собственных колебаний жидкости (обозначим их для определенности σ_n), заполняющей цилиндр радиуса R на высоту h , определяемых, например, из соотношения [127]:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{g \xi_{0n}}{R} \operatorname{th}\left(\xi_{0n} \frac{h}{R}\right)}. \quad (2.20)$$

Здесь g — ускорение свободного падения.

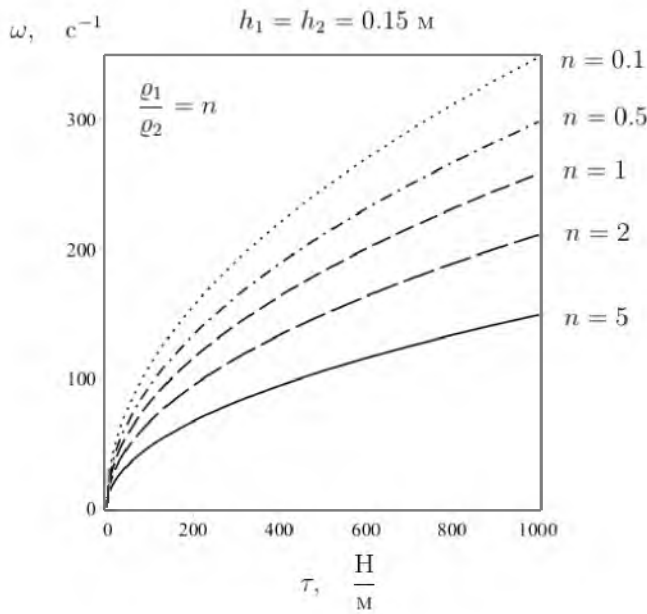


Рис. 2.3. Зависимость частоты первого тона от натяжения мембраны

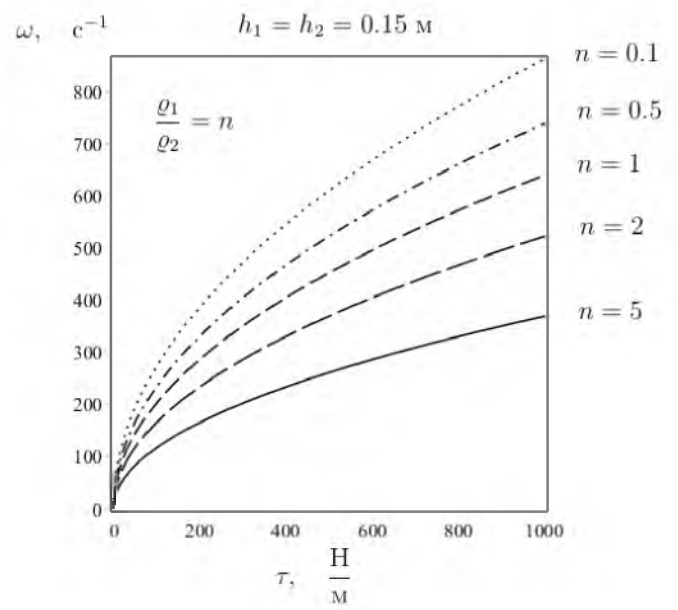


Рис. 2.4. Зависимость частоты второго тона от натяжения мембраны

2.2. Точное решение задачи о малых осесимметричных колебаниях двухслойной жидкости с разделителем

2.2.1. Постановка задачи

В данном разделе решена точно (аналитически), в рамках принятых допущений, краевая задача о малых свободных осесимметричных колебаниях двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями. Упругий разделитель моделируем плоской мембраной. Результаты этой краевой задачи могут использоваться в качестве некоторой модели для анализа динамики разгонного блока ракеты-носителя. Получено частотное уравнение для свободных колебаний системы, левая часть которого представляет собой целую мероморфную функцию. Входящие в это уравнение бесконечные ряды – быстроходящиеся.

Основные допущения:

- Жидкость заполняет жёсткий цилиндрический бак с плоским упругим разделителем (см. рис. 2.5), закрытый жёстким плоским дном.

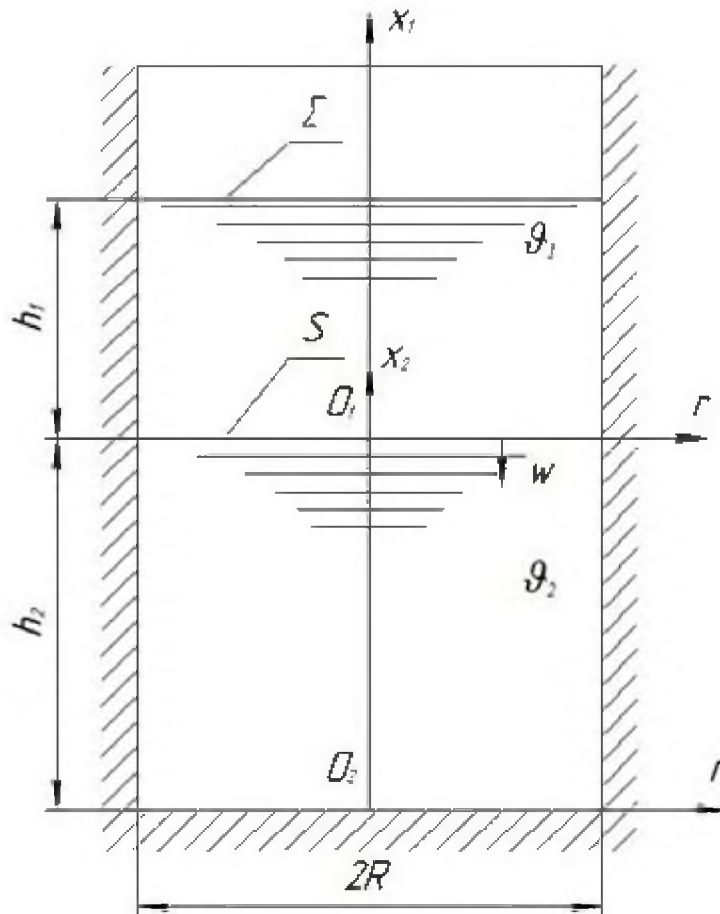


Рис. 2.5. Модель бака, заполненного жидкостью с разделителем

- Материал мембраны однороден, изотропен и подчиняется закону Гука.
- Жидкость идеальная, несжимаемая, её движение – потенциальное, с потенциалом скоростей Φ . Рассматриваем малые осесимметричные колебания жидкости.

Потенциал скоростей в соответствии с [127] должен удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2\Phi = 0$ в области ϑ , где ϑ – объём, занимаемый жидкостью. Слой жидкости 1 занимает полость объёмом ϑ_1 на высоту h_1 , а слой 2 – объём ϑ_2 на высоту h_2 соответственно.

Невозмущенную поверхность жидкости обозначим как Σ , невозмущенную поверхность мембраны – как S .

Вывод уравнения осесимметричных колебаний круглой мембраны в пренебрежении изгибными деформациями и сдвигом изложен в [129]. Рассматривая

упругие колебания бака с жидкостью, будем пренебрегать инерцией мембраны и ускорением свободного падения, поскольку эти слагаемые, как показывают расчеты, не оказывают существенного влияния на величину частот осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью. Учёт инерции мембраны не вызывает принципиальных трудностей при решении этой задачи, однако выражения в этом случае принимают значительно более громоздкий вид.

Уравнение движения упругой мембраны (разделителя), с учётом гидродинамического давления жидкости имеет вид в соответствии с [55]:

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} + \varrho_0 \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} \right) = -\dot{p}(r, t), \quad (2.21)$$

где $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$, ϱ_0 — плотность материала мембраны, δ — её толщина, τ — натяжение, $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t}$ — гидродинамическое давление от жидкости (интеграл Лагранжа-Коши). Применение в выражении не w , а \dot{w} удобно для решения. В дальнейшем, для простоты, инерцией мембраны и ускорением свободного падения пренебрегаем. Учёт последнего однако не вызывает никаких затруднений. Потенциал скоростей в объеме ϑ_1 будем обозначать как и ранее через Φ_1 , в объеме ϑ_2 — соответственно как Φ_2 . Функции Φ_1 и Φ_2 должны удовлетворять граничным условиям:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R, \quad (2.23)$$

где R — радиус цилиндра, и условию на свободной поверхности, которое мы для простоты примем в виде

$$\Phi_1 = 0 \quad \text{при } x_1 = h_1. \quad (2.24)$$

Кроме того, функции Φ_1 и Φ_2 должны удовлетворять граничным условиям на поверхности мембраны S :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \dot{w} \quad \text{при } x_1 = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} = \dot{w} \quad \text{при } x_2 = h_2, \quad (2.26)$$

2.2.2. Определение собственных частот

Выражения для потенциалов скоростей Φ_1 и Φ_2 соответственно из решения уравнения Лапласа, с учётом указанных граничных условий, имеют вид:

$$\Phi_1 = C_{20} + C_{10} \frac{x_1}{h_1} + \sum_{i=1}^{\infty} A_{1i} J_0 \left(\mu_i \frac{r}{R} \right) \left[C_{1i} \operatorname{ch} \left(\mu_i \frac{x_1}{R} \right) + C_{2i} \operatorname{sh} \left(\mu_i \frac{x_1}{R} \right) \right] \quad (2.27)$$

$$\Phi_2 = C_{21} + C_{22} \frac{x_2}{h_2} + \sum_{i=1}^{\infty} A_{2i} J_0 \left(\mu_i \frac{r}{R} \right) \left[C_{4i} \operatorname{ch} \left(\mu_i \frac{x_2}{R} \right) + C_{4i} \operatorname{sh} \left(\mu_i \frac{x_2}{R} \right) \right] \quad (2.28)$$

Здесь J_0 — функция Бесселя 1-го рода, нулевого порядка; μ_i — собственные значения данной краевой задачи. Временной множитель в (2.27) и (2.28) опущен. Поскольку рассматривается задача об определении только собственных частот колебаний системы, то очевидно $\ddot{s}_k(t) = -\omega_k^2 s_k(t)$ [55]. Дифференциальное уравнение малых осесимметричных колебаний мембраны имеет вид [55], [24]:

$$\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} = \frac{1}{\tau} \left[-\varrho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \Big|_{x_1=0} + \varrho_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} \Big|_{x_2=0} \right] \quad (2.29)$$

Здесь $p_i = \varrho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}$ — гидродинамическое давление жидкости на мембрану, согласно интегралу Лагранжа-Коши [55]; τ — натяжение мембраны. В дальнейшем будем полагать $\varrho_i^* = \frac{\varrho_i}{\tau}$, которое для простоты будем обозначать просто ϱ_i . Подставляя выражения для потенциалов скоростей Φ_1 и Φ_2 , (2.27) и (2.28) в уравнение (2.29), в соответствии с [130], [131], будем иметь:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{w} = & \varrho_1 \omega^2 \left[-C_{10} \frac{h_1}{R} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{1i} J_0 \left(\mu_i \frac{r}{R} \right) \right] - \\ & - \varrho_2 \omega^2 \left[-C_{22} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{1i} J_0 \left(\mu_i \frac{r}{R} \right) \operatorname{ch} \left(\mu_i \frac{h_2}{R} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Решение однородного уравнения соответствующего уравнению (2.30) имеет вид:

$$\dot{w} = C_1 + C_2 \ln r \quad (2.31)$$

Здесь полагаем $C_2 = 0$ ввиду ограниченности прогиба мембраны при $r = 0$. Общее решение дифференциального уравнения (2.30) и, таким образом, окончательное выражение для прогиба мембраны будет иметь вид:

$$\begin{aligned} w = C_1 + \varrho_1 \omega^2 \left[-C_{10} \frac{h_1 r^2}{R} \frac{1}{4} - \sum_{i=1}^{\infty} C_{1i} \left(\frac{R}{\mu_i} \right)^2 J_0 \left(\mu_i \frac{r}{R} \right) \right] - \\ - \varrho_2 \omega^2 \left[-C_{22} \frac{r^2}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{2i} J_0 \left(\mu_i \frac{r}{R} \right) \left(\frac{R}{\mu_i} \right)^2 \operatorname{ch} \left(\mu_i \frac{h_2}{R} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для определения произвольных постоянных будем разлагать функцию $\frac{r^2}{4}$ в ряд по функциям Бесселя $J_0 \left(\mu_i \frac{r}{R} \right)$ [55]:

$$\frac{r^2}{4} = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i J_0 \left(\mu_i \frac{r}{R} \right) + \beta_0, \quad (2.33)$$

где

$$\beta_0 = \frac{R^2}{8}, \quad \gamma_i = \frac{4}{J_0(\mu_i)} \frac{R^2}{\mu_i^2}. \quad (2.34)$$

Этот приём позволит в дальнейшем просуммировать бесконечные ряды решения. Обозначая последовательно

$$\alpha_{0i} = \frac{\gamma_i}{\beta_0}, \quad \alpha_{2i} = \frac{\mu_i h_2}{R}; \quad (2.35)$$

$$\alpha_{11}^{(i)} = \frac{\mu_i}{R} - \varrho_1 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2}, \quad \alpha_{12}^{(i)} = \varrho_2 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2} \operatorname{ch} \left(\mu_i \frac{h_2}{R} \right); \quad (2.36)$$

$$b_{1i} = \left(\frac{\mu_i}{R} \right) \operatorname{th} \alpha_{2i} + \varrho_2 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2}; \quad (2.37)$$

$$b_{2i} = \alpha_{11}^{(i)} + \frac{\alpha_{12}^{(i)} \varrho_1 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2}}{\operatorname{ch} \alpha_{2i} \frac{\mu_i}{R} \operatorname{th} \alpha_{2i} - \varrho_2 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2}}; \quad (2.38)$$

$$\beta_{1i} = \alpha_{0i} \left[1 - \frac{\alpha_{12}^{(i)}}{\operatorname{ch} \alpha_{2i} b_{2i}} \right]; \quad (2.39)$$

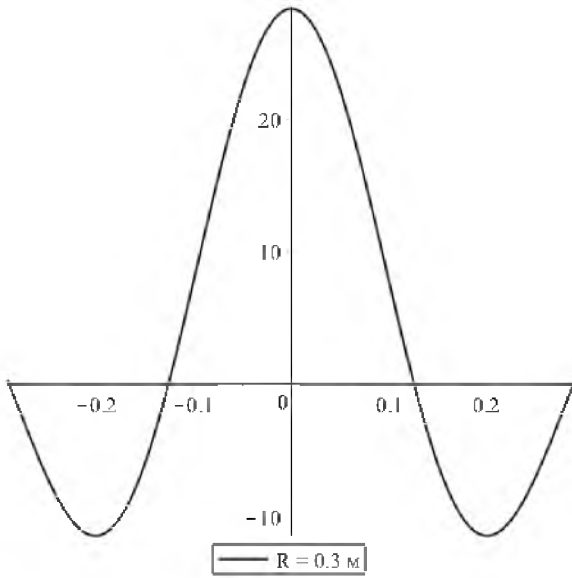


Рис. 2.6. Графические изображения форм колебаний I-го тона

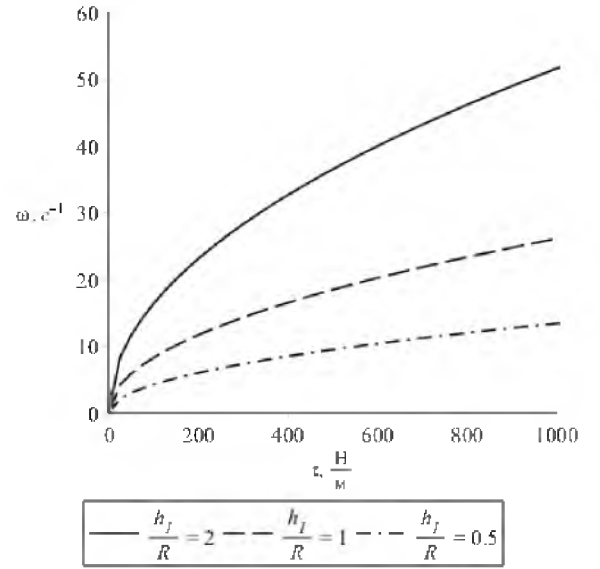


Рис. 2.7. Зависимость частоты I-го тона колебаний от натяжения мембраны

$$\beta_{2i} = \frac{\alpha_{0i}}{\operatorname{ch} \alpha_{2i} b_{2i}} \left[1 + \frac{1}{b_{2i}} \varrho_1 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2} \left(1 - \frac{\alpha_{12}^{(i)}}{\operatorname{ch} \alpha_{2i} b_{2i}} \right) \right], \quad (2.40)$$

получаем частотное уравнение в виде

$$\omega^2 \left[\varrho_2 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{2i} \frac{R^2}{\mu_i^2} J_0(\mu_i) \operatorname{ch} \alpha_{2i} - \varrho_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{1i} \frac{R^2}{\mu_i^2} J_0(\mu_i) \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i J_0(\mu_i)}{\beta_0} \quad (2.41)$$

Учитывая разложение (2.33) в выражении для прогиба мембраны (2.32) и выполняя граничные условия (2.22) – (2.24), а так же – (2.25) и (2.26) на поверхности мембраны определяем все C_{1i}, C_{2i} , через одну константу C_1 . В результате несложных преобразований, получим:

$$C_{10} = 0; C_{22} = \frac{C_1}{\varrho_2 \omega^2 \beta_0}; C_{1i} = \beta_{1i} C_1; C_{2i} = \beta_{2i} C_1. \quad (2.42)$$

2.2.3. Результаты

Результаты расчетов приведены ниже. Полагая $R = 0,075$ м, $h_1 = 0,15$ м, $h_2 = 0,15$ м, $\varrho_2 = 500$ кг/м³, $\varrho_1 = 1000$ кг/м³, $\tau = 1000$ Н/м, $m_s = 1$ кг/м² можем получить значения частот первых тонов, в частности: $\omega_1 = 55.13$ с⁻¹. Сравнивая полученный результат с численным решением, представленным в [114]

можно видеть, что для сделанных допущений значение частоты соответствует диапазонам, полученным в работе [114]. В заключении необходимо отметить, что получено аналитическое решение краевой задачи при сделанных допущениях. Частотное уравнение представляет собой выражение, левая часть которого является мероморфной функцией. Приведены значения частот и даны графические изображения форм первого тона колебаний (рис. 2.6) и зависимость частоты от натяжения мембраны (рис. 2.7).

2.3. Малые осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения

2.3.1. Постановка задачи

В данном разделе описано точное аналитическое решение в рамках принятых допущений краевой задачи о малых свободных осесимметричных колебаниях двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения. В качестве разделителя рассмотрена упругая тонкая непроницаемая мембрана. При решении этой краевой задачи получено трансцендентное частотное уравнение, левая часть которого представляет собой мероморфную функцию.

Исследуемую краевую задачу можно рассматривать в качестве модельной для анализа динамики разгонного блока ракеты-носителя на пассивном участке траектории.

Для получения точного аналитического решения рассматриваемой краевой задачи примем следующие допущения:

- Жидкость заполняет жесткий цилиндрический бак с плоским упругим разделителем, закрытый жестким плоским днищем (см. рис.2.5).
- Материал мембраны однороден, изотропен и подчиняется закону Гука.
- Жидкость идеальная, несжимаемая, ее движение – потенциальное, с потенциалом скоростей Φ . Рассмотрим нормальные колебания жидкости.

Потенциал скоростей в соответствии с [127] должен удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2\Phi = 0$ в области ϑ , где ϑ – объём, занимаемый жидкостью. Слой жидкости 1 занимает полость объёмом ϑ_1 на высоту h_1 , а слой 2 – объём ϑ_2 на высоту h_2 соответственно.

Невозмущенную поверхность жидкости обозначим как Σ , невозмущенную поверхность мембраны — как S .

Уравнение движения упругого разделителя будет имеет вид:

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} + \varrho_0 \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} \right) = -\dot{p}(r, t), \quad (2.43)$$

с граничным условием

$$w(r, t) = 0 \quad \text{при } r = R. \quad (2.44)$$

Здесь w — перемещение мембраны, $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$, ϱ_0 — плотность материала мембраны, δ — её толщина, τ — натяжение, $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t}$ — гидродинамическое давление от жидкости (интеграл Лагранжа-Коши). Применение в выражении не w , а \dot{w} удобно для решения. В дальнейшем, инерцией мембраны пренебрегаем. Потенциал скоростей в объеме ϑ_1 обозначим Φ_1 , в объеме ϑ_2 — Φ_2 . Функции Φ_1 и Φ_2 должны удовлетворять граничным условиям:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R, \quad (2.46)$$

где R — радиус цилиндра, и с условием на свободной поверхности, которое мы запишем в соответствии с [112]:

$$-\frac{\varrho_1}{\sigma_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{\varrho_1}{\sigma_1} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} u - \Delta u = 0 \quad \text{при } x_1 = h_1, \quad (2.47)$$

где ϱ_1 — плотность жидкости со свободной поверхностью, σ_1 — коэффициент поверхностного натяжения, u — смещение свободной поверхности, $\Pi = gx_1$ — потенциал массовых сил, g — ускорение свободного падения, Δ — оператор Лапласа-Бельтрами, который в случае плоской свободной поверхности имеет вид оператора Лапласа. Кроме того, функции Φ_1 и Φ_2 должны удовлетворять кинематическим условиям на поверхности мембраны:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \dot{w} \quad \text{при } x_1 = 0, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} = \dot{w} \quad \text{при } x_2 = h_2, \quad (2.49)$$

2.3.2. Определение собственных частот

Найдем теперь явные выражения для потенциалов скоростей частиц жидкости Φ_1 и Φ_2 . В соответствии с методом Фурье

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{\infty} X_i^{(k)}(x_k) R_i^{(k)}(r) S(t) \quad (2.50)$$

Далее временной множитель $S(t)$ опущен. Подставляя соотношение (2.50) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получаем для i -го члена ряда:

$$\frac{X_i''}{X_i} = -\frac{\frac{1}{r}R_i' + R_i''}{R_i} = \frac{\mu_i}{R^2}, \quad (2.51)$$

где

$$X_i'' = \frac{d^2 X_i^{(k)}}{dx_k^2}, R_i' = \frac{dR_i^{(k)}}{dr}, R_i'' = \frac{d^2 R_i^{(k)}}{dr^2}, \quad k = 1, 2. \quad (2.52)$$

Таким образом,

$$X_i'' - \frac{\mu_i^2}{R^2} X_i = 0, R_i'' + \frac{1}{r} R_i' + \frac{\mu_i^2}{R^2} R_i = 0. \quad (2.53)$$

Частные решения уравнений (2.53) представим в виде

$$X^{(k)}(x_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[C_{ki} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_i x_k}{R} \right) + C_{(k+1)i} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_i x_k}{R} \right) \right], \quad (2.54)$$

$$R_i(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[A_{1i} J_0 \left(\frac{\mu_i r}{R} \right) + A_{2i} N_0 \left(\frac{\mu_i r}{R} \right) \right], \quad (2.55)$$

где $C_{ki}, C_{(k+1)i}, A_{1i}, A_{2i}$ — константы, определяемые из граничных условий, J_0, N_0 — Бесселевы функции первого и второго рода соответственно. Ввиду ограниченности функций i при $r = 0$ полагаем $A_{2i} = 0$. С учетом соотношений (2.54) и (2.55) запишем выражения для потенциалов скоростей жидкости:

$$\Phi_1 = C_{20} + C_{10} \frac{x_1}{h_1} + \sum_{i=1}^{\infty} A_{1i} J_0 \left(\frac{\mu_i r}{R} \right) \left[C_{1i} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_i x_1}{R} \right) + C_{2i} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_i x_1}{R} \right) \right], \quad (2.56)$$

$$\Phi_2 = C_{21} + C_{22} \frac{x_2}{R} + \sum_{i=1}^{\infty} A_{2i} J_0 \left(\frac{\mu_i r}{R} \right) \left[C_{3i} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_i x_2}{R} \right) + C_{4i} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_i x_2}{R} \right) \right]. \quad (2.57)$$

Здесь μ_i — i -й корень бесселевой функции первого рода. Временной множитель в соотношениях (2.56) и (2.57) опущен. Дифференциальное уравнение движения мембраны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} = \frac{1}{\tau} \left[-\varrho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \Big|_{x_1=0} + \varrho_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} \Big|_{x_2=h_2} \right], \quad (2.58)$$

где $p_k = \varrho_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}$ — гидродинамическое давление жидкости на мембрану. Отметим, что однородное уравнение, соответствующее (2.58) удобно записывать для функции $\dot{w} = \frac{\partial w(r, t)}{\partial t}$. Его решение можно представить как $\dot{w} = C_1 + C_2 \ln r$. В силу граничных условий (2.45) – (2.46), а также условия (2.47) выражения для потенциалов скоростей принимают вид:

$$\Phi_1 = -C_{10} \frac{h_1}{R} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{1i} J_0 \left(\frac{\mu_i r}{R} \right) \Lambda_i, \quad (2.59)$$

$$\Phi_2 = -C_{22} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{2i} J_0 \left(\frac{\mu_i r}{R} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_i h_2}{R} \right), \quad (2.60)$$

где

$$\Lambda_i = \frac{\left[\frac{\varrho_1 g}{\sigma} + \left(\frac{\mu_i}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{\mu_i}{R} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_i h_1}{R} \right) - \frac{\varrho_1}{\sigma} \omega^2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_i h_1}{R} \right)}{\frac{\varrho_1}{\sigma} \omega^2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_i h_1}{R} \right) - \left[\frac{\varrho_1 g}{\sigma} + \left(\frac{\mu_i}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{\mu_i}{R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_i h_1}{R} \right)} \quad (2.61)$$

Окончательно, с учетом соотношений (2.59) и (2.60), дифференциальное уравнение движения разделяющей мембраны запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{w} = & \varrho_1 \omega^2 \left[-C_{10} \frac{h_1}{R} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{1i} J_0 \left(\mu_i \frac{r}{R} \right) \Lambda_i \right] - \\ & - \varrho_2 \omega^2 \left[-C_{22} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{2i} J_0 \left(\mu_i \frac{r}{R} \right) \operatorname{ch} \left(\mu_i \frac{h_2}{R} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.62)$$

где ω — собственная частота колебаний механической системы. Решение уравнения (2.62) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{w} = & C_1 + \varrho_1 \omega^2 \left[-C_{10} \frac{h_1 r^2}{R^2} - \sum_{i=1}^{\infty} C_{1i} \left(\frac{R}{\mu_i} \right)^2 J_0 \left(\frac{\mu_i r}{R} \right) \Lambda_i \right] - \\ & - \varrho_2 \omega^2 \left[-C_{22} \frac{r^2}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{2i} J_0 \left(\frac{\mu_i r}{R} \right) \left(\frac{R}{\mu_i} \right)^2 \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_i h_2}{R} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Здесь полагаем $C_2 = 0$, поскольку прогиб мембраны ограничен при $r = 0$. Для определения соответствующих постоянных разложим член $\frac{r^2}{4}$ в ряд по функциям $J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)$:

$$\frac{r^2}{4} = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) + \beta_0, \quad (2.64)$$

где $\beta_0 = \frac{R^2}{8}$, $\gamma_i = \frac{4}{J_0(\mu_i)} \frac{R^2}{\mu_i^2}$.

Вводя следующие обозначения

$$\alpha_{0i} = \frac{\gamma_i}{\beta_0}, \quad \alpha_{2i} = \frac{\mu_i h_2}{R}; \quad (2.65)$$

$$\alpha_{11}^{(i)} = \frac{\mu_i}{R} - \varrho_1 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2}, \quad \alpha_{12}^{(i)} = \varrho_2 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2} \operatorname{ch}\left(\mu_i \frac{h_2}{R}\right); \quad (2.66)$$

$$b_{1i} = \left(\frac{\mu_i}{R}\right) \operatorname{th} \alpha_{2i} + \varrho_2 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2}; \quad (2.67)$$

$$b_{2i} = \alpha_{11}^{(i)} + \frac{\alpha_{12}^{(i)}}{\operatorname{ch} \alpha_{2i}} \frac{\varrho_1 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2}}{\frac{\mu_i}{R} \operatorname{th} \alpha_{2i} - \varrho_2 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2}}; \quad (2.68)$$

$$\beta_{1i} = \alpha_{0i} \left[1 - \frac{\alpha_{12}^{(i)}}{\operatorname{ch} \alpha_{2i} b_{2i}} \right]; \quad (2.69)$$

$$\beta_{2i} = \frac{\alpha_{0i}}{\operatorname{ch} \alpha_{2i} b_{2i}} \left[1 + \frac{1}{b_{2i}} \varrho_1 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2} \left(1 - \frac{\alpha_{12}^{(i)}}{\operatorname{ch} \alpha_{2i} b_{2i}} \right) \right], \quad (2.70)$$

получаем частотное уравнение в виде

$$\omega^2 \left[\varrho_2 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{2i} \frac{R^2}{\mu_i^2} J_0(\mu_i) \operatorname{ch} \alpha_{2i} - \varrho_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{1i} \frac{R^2}{\mu_i^2} J_0(\mu_i) \Lambda_i \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i J_0(\mu_i)}{\beta_0}, \quad (2.71)$$

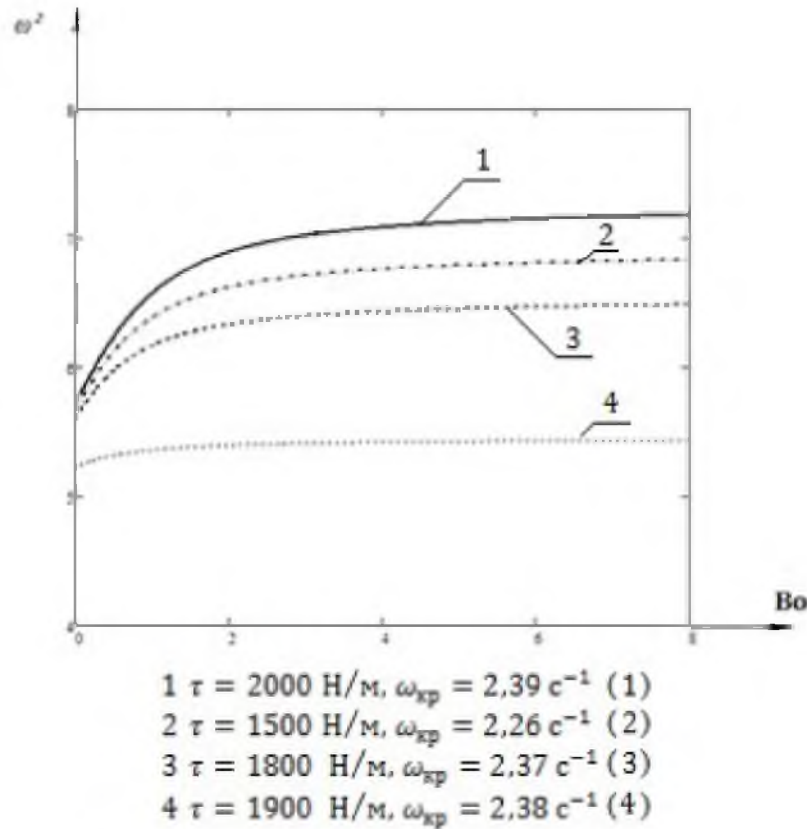


Рис. 2.8. Зависимость $\omega_{кр}^2$ от числа Бонда **Bo**

2.3.3. Результаты

Ограничим сумму ряда (2.71) пятью членами и получим зависимость квадрата собственной частоты первого тона колебаний от числа Бонда $\mathbf{Bo} = \frac{\rho g R}{\sigma}$ (рис.2.8). При построении зависимостей принимали: $R = 1$ м, $h_1 = 1$ м, $h_2 = 1$ м, $\rho_2 = 1000$ кг/м³, $\rho_1 = 900$ кг/м³, $m_s = 1$ кг/м². Из условия $\mathbf{Bo} = 0$ находим значение критической частоты, которая свидетельствует о нарушении односвязности объёма жидкости [112].

Таким образом, получено точное аналитическое решение модельной задачи о малых движениях жидкости, совместно с фазоразделяющим устройством. Частотное уравнение (2.71) позволяет контролировать результаты численного моделирования и, при исследовании зависимости собственной частоты от влияния соотношения массовых сил и сил поверхностного натяжения (характеризуемых

числом Бонда), выявлять опасные режимы на пассивном участке траектории полета, где движение жидкости может быть неустойчивым.

2.4. Моделирование осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения посредством механического аналога

Изложено приближенное аналитическое решение краевой задачи о малых свободных осесимметричных колебаниях упругого бака с жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения. Составлены выражения для колебаний механического аналога, действие сил поверхностного натяжения учтено как действие обобщенных потенциальных сил на механический аналог, фактически с помощью энергетического метода учтены капиллярные силы на свободной поверхности. В качестве механического аналога рассматривается осциллятор на пружине, жесткость которой определяется энергетическим методом. Учет сил поверхностного натяжения имеет существенное значение в условиях малой гравитации и невесомости.

2.4.1. Введение

Задача о малых движениях жидкости под действием сил поверхностного натяжения возникает в связи с возникновением условий невесомости или микрогравитации, что реализуется на пассивных участках траектории космических летательных аппаратов или при разделении ступеней ракет-носителей [17]. Возросшая актуальность задачи обусловлена интенсификацией работ в области проектирования и создания перспективных средств выведения и разгонных блоков, как в нашей стране, так и за рубежом. [23]

В данном разделе выполняется построение механического аналога для опи-

сания малых осисимметричных колебаний жидкости в упругом баке с учетом сил поверхностного натяжения, что в дальнейшем позволит проводить исследования переходных процессов, возникающих в баках космических летательных аппаратов при наступлении состояний невесомости или малой гравитации, когда пренебрежение силами поверхностного натяжения уже недопустимо [112], либо при переходе от таких состояний к наличию, например, инерционных сил, что реализуется при запуске двигательных установок космических летательных аппаратов [17].

В разделе „Постановка задачи“ мы вводим основные допущения, постулируем граничные условия и записываем уравнения описывающие малые движения жидкости в упругом баке. Далее, при построении модели, мы записываем энергетические соотношения, благодаря которым осуществляется переход к механическому аналогу. Там же мы будем учитывать действие сил поверхностного натяжения. В заключении проводится обзор полученных результатов.

В рамках данной работы, как можно видеть, нам удалось выполнить построение моделирующей механической системы, данный подход для случая малых колебаний жидкости под действием сил поверхностного натяжения ранее широко не применялся.

2.4.2. Постановка задачи

Указанная краевая задача решена при следующих допущениях:

- Бак с жидкостью предполагается цилиндрическим, абсолютно жестким, закрытым упругим плоским дном рис. 4.1
- Жидкость считается идеальной, несжимаемой, а ее движение — потенциальным с потенциалом скоростей Φ .
- Плоское днище считается идеальной мембраной постоянной толщины δ , материал которой подчиняется закону Гука.

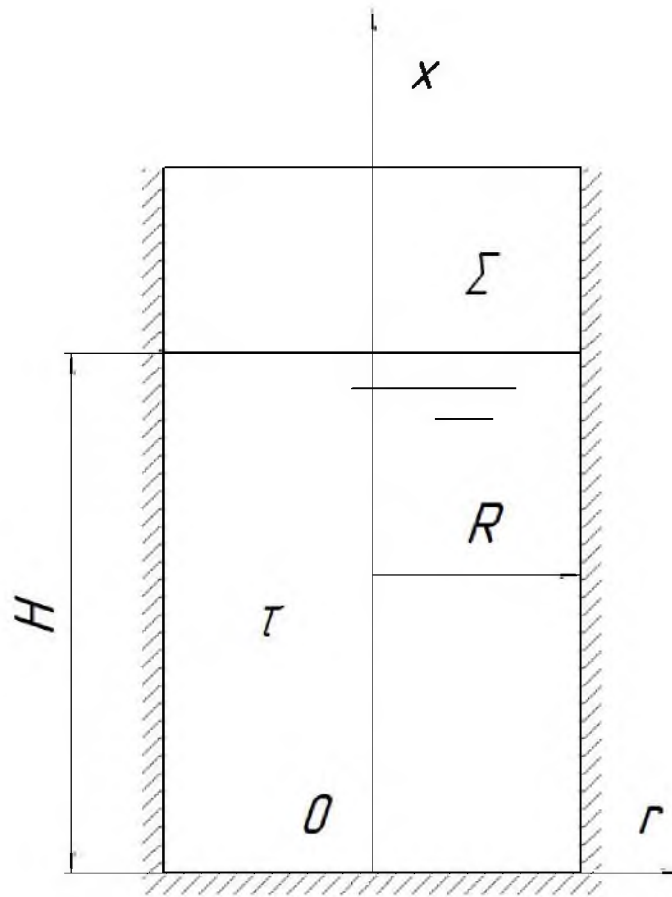


Рис. 2.9. Модель бака с упругим дном

- Рассматривается случай малых осесимметричных колебаний. Предполагается, что потенциал скоростей не изменяется при учёте сил поверхностного натяжения. Формы свободных колебаний потенциала скоростей $\Phi(x, r, t)$ считаются теми же, что и при колебаниях системы без учета сил поверхностного натяжения.

Таким образом, вначале, для решения поставленной задачи требуется определить частоты и формы свободных осесимметричных колебаний в баке с упругой мембраной в однородном поле тяжести. Ускорение свободного падения равно g .

После этого, колебания бака с жидкостью заменяются колебаниями механического аналога [22]. При этом постулируется равенство частот свободных колебаний системы бак-жидкость и собственных частот механического аналога.

Решение краевой задачи о малых осесимметричных колебаниях цилиндра,

закрытого упругой мембраной впервые было дано Л.И.Балабухом в 1964 году [55]. Воспользуемся на этом первом этапе решения задачи результатами Л.И. Балабуха. Краевая задача для функции Φ имеет вид:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \forall (x, r) \in \tau, \quad (2.72)$$

и граничным условиям:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \dot{w}, \quad (2.73)$$

здесь w — смещение мембраны. Кроме того, считается справедливым интеграл Лагранжа-Коши [55].

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \forall (x, r) \in \tau, \quad (2.74)$$

Линеаризованное граничное условие на свободной поверхности Σ имеет вид:

$$\Phi = 0 \quad (2.75)$$

Дифференциальные уравнения осесимметричных движений мембраны под действием гидродинамического давления жидкости примет вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.76)$$

2.4.3. Построение модели движения жидкости под действием сил поверхностного натяжения с использованием механического аналога

Потенциал Φ будем искать в виде [55]:

$$\Phi(r, x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [A_{1i} \operatorname{ch}(\lambda_i x) + A_{2i} \operatorname{sh}(\lambda_i x)] J_0\left(\lambda_i \frac{r}{h}\right) \cos \omega t. \quad (2.77)$$

Константы разделения находим из решения трансцендентного уравнения $J_1\left(\lambda_i \frac{R}{h}\right) = 0$, где $i \in \mathbb{N}$. Не приводя подробного решения задачи сошлемся на

результат [55]. Частотное уравнение в рассматриваемом случае — случае жесткой односвязной неподвижной цилиндрической полости с жидкостью, закрытой плоской мембраной имеет вид [55]:

$$-\frac{1}{8} + \frac{1}{\omega^2} \frac{h^2}{R^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda_i \rho \delta}{h} + 1}{\lambda_i^2 \left(\frac{\lambda_i \rho \delta}{h} + 1 - \lambda_i^3 \frac{h^3}{\omega^2 R^3} \right)} = 0 \quad (2.78)$$

Это трансцендентное уравнение — мероморфная функция, бесконечный ряд быстро сходится и определение частот колебаний — корней этого уравнения не представляет никаких затруднений.

Для первого тона колебаний, как это следует, например, из [22], можно приведенную массу системы M_1^0 в первом приближении считать равной массе жидкости в баке: $M_1^0 = \rho \pi R^2 H$. Тогда, решая трансцендентное уравнение (2.78), находим частоту первого тона колебаний ω_1 и приведённую жёсткость системы C_1^0 :

$$C_1^0 = M_1^0 \omega_1^2 \quad (2.79)$$

Итак, механический аналог рассматриваемой колебательной системы имеет вид (рис.2.10). Дифференциальное же уравнение колебаний механического аналога, в свою очередь примет вид:

$$M_1^0 \ddot{y} + C_1^0 y = Q_y. \quad (2.80)$$

Здесь Q_y — обобщенная сила, вычисляя которую мы можем учесть влияние сил поверхностного натяжения.

$$Q_y = \frac{\sum_k \delta A_k(\sigma_0)}{\delta y} \quad (2.81)$$

где $\sum_k \delta A_k(\sigma_0)$ — возможная работа сил поверхностного натяжения. В соответствии с известной формулой Лапласа, избыточное давление в точке свободной поверхности жидкости Δp сил поверхностного натяжения определяется как [132]

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.82)$$

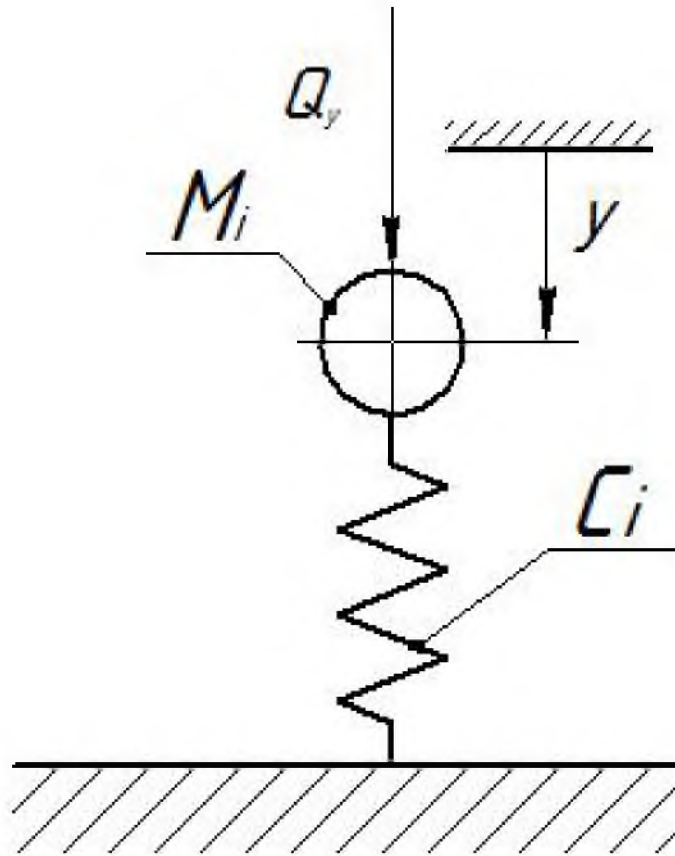


Рис. 2.10. Механический аналог рассматриваемой системы

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, $R_{1,2}$ — радиусы главных кривизн в рассматриваемой точке. Для нашего случая плоской свободной поверхности в круговом цилиндре мы, очевидно, будем иметь $R_1 = R, R_2 = \infty$, откуда:

$$\Delta p = \frac{\sigma}{R}. \quad (2.83)$$

Сумма возможных работ сил поверхностного натяжения будет иметь вид:

$$\sum_k \delta A_k(\sigma_0) = - \int_0^R \pi R \sigma \frac{\partial w_\Sigma}{\partial r} r \delta w_\Sigma dr, \quad (2.84)$$

где w_Σ — перемещения свободной поверхности жидкости при осесимметричных колебаниях первого тона. Поскольку вариация этого перемещения: $\delta w_\Sigma = -\frac{\lambda_1}{h} \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) J_0\left(\frac{\lambda_1 r}{h}\right) \delta y$, то выражения для Q_y будет иметь вид:

$$Q_y = -\pi \sigma \left(\frac{\lambda_1}{h}\right)^2 [\operatorname{sh}(\lambda_1)]^2 I(\lambda_1) y, \quad (2.85)$$

где

$$I(\lambda_1) = -\frac{\lambda_1}{h} \int_0^R J_1\left(\lambda_1 \frac{r}{h}\right) J_0\left(\lambda_1 \frac{r}{h}\right) r dr. \quad (2.86)$$

Вычисляя этот интеграл, получим:

$$I(\lambda_1) = \frac{R}{2} \left[J_0^2\left(\lambda_1 \frac{R}{h}\right) \right] - \frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} J_0^2(\xi) d\xi, \quad (2.87)$$

где в свою очередь $\xi_1 = \lambda_1 \frac{R}{h}$. Интеграл в последнем равенстве вычисляется численно или по теореме о среднем, тогда

$$I(\lambda_1) = \frac{R}{2} \left[J_0^2\left(\lambda_1 \frac{R}{h}\right) - J_0^{\oplus 2} \right], \quad (2.88)$$

где второе слагаемое есть некоторое значение функции $J_0^2(\xi)$ в диапазоне от 0 до R .

С учетом представления для Q_y выражение для колебаний механического аналога (2.80) примет вид:

$$M_1^0 \ddot{y} + C_1^0 y = -\pi \sigma \left(\frac{\lambda_1}{h}\right)^2 [\text{sh}(\lambda_1)]^2 I(\lambda_1) y, \quad (2.89)$$

или

$$M_1^0 \ddot{y} + C_1^* y = 0, \quad (2.90)$$

где $C_1^* = C_1^0 + \pi \sigma \left(\frac{\lambda_1}{h}\right)^2 [\text{sh}(\lambda_1)]^2 I(\lambda_1)$. Таким образом, частота свободных колебаний будет определяться выражением:

$$\omega_\sigma^2 = \frac{C_1^*}{M_1^0} \quad (2.91)$$

2.4.4. Заключение

Таким образом, предлагается возможность учесть влияние сил поверхностного натяжения в задаче о малых колебаниях идеальной, несжимаемой жидкости в упругом баке с помощью механического аналога. Полученные зависимости позволяют осуществить переход к эквивалентной механической системе. Указанный подход, возможно, позволит в будущем решать задачу о неустойчивости

осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью, колебания которого заменены эквивалентной механической системой, где учитывается лишь только первый основной тон колебаний. Устойчивость колебаний жидкой массы нарушается из-за возникновения явления невесомости на внеатмосферном участке траектории при движении старших ступеней ракет-носителей или разгонных блоков.

2.5. Выводы по второй главе

Таким образом, решены ряд краевых задач, возникающих при моделировании динамического взаимодействия разделителя в баке с жидкостью. В частности:

- Получено приближенно-аналитическое решение задачи об осесимметричных колебаниях непроницаемой мембраны в жестком цилиндрическом баке, хорошо согласуемое с известными результатами
- Впервые получено точное аналитическое решение задачи об осесимметричных колебаниях непроницаемой диффрагмы в жестком цилиндрическом баке
- Получено точное аналитическое решение задачи об осесимметричных колебаниях непроницаемой мембраны в жестком цилиндрическом баке с учетом капиллярных волн на поверхности жидкости, которое приобретает важное значение в условиях слабой гравитации
- Исследованы малые колебания двухслойной жидкости с учетом проницаемой недеформируемой перегородки, получено теоретическое значения для коэффициента затухания
- Осуществлено моделирование осесимметричных колебаний упругого бака

с жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения посредством механического аналога.

Глава 3

Математические модели движения двухслойной жидкости в баке с проницаемым разделителем.

Параметрические колебания

3.1. Малые колебания двухслойной жидкости с учётом проницаемости разделителя

В данном разделе рассматриваются малые симметричные колебания идеальной жидкости в жёстком цилиндрическом сосуде с проницаемой перегородкой. Получено приближённое аналитическое решение этой задачи. Основные допущения: движение жидкости считается безвихревым с потенциалом скоростей $\Phi = \Phi(x, r, t)$, сопротивление разделителя полагаем линейно-зависимым от скорости частиц жидкости с постоянным коэффициентом γ . Влияние проницаемой перегородки, разделяющей столб жидкости в баке на два слоя, учитывается как некоторое линейно-вязкое сопротивление с приведённым коэффициентом сопротивления γ , задаваемого в качестве параметра. В дальнейших исследованиях предполагается величину γ определять на основании модельного эксперимента, возбуждая колебания жидкости в баке. Установлено, что в случае $\Phi = 0$ на свободной поверхности колебания отсутствуют. В случае учёта ускорения свободного падения g на свободной поверхности жидкости, движения жидкости в баке представляют собой затухающие колебания с некоторым коэффициентом затухания n .

3.1.1. Постановка задачи

В разделе рассматриваются малые движения идеальной, несжимаемой двухслойной жидкости плотности ρ , разделённой жёсткой проницаемой плоской диа-

фрагмой. Введём цилиндрические системы координат с началами O_1 и O_2 соответственно (рис. 3.1). Движение жидкости полагаем безвихревым, с потенциалом скоростей Φ , удовлетворяющим уравнению Лапласа. Рассматриваем осесимметричные движения. Обозначим потенциал скоростей Φ_j для j -го слоя соответственно.

$$\Delta \Phi_j = 0, j = 1, 2. \quad (3.1)$$

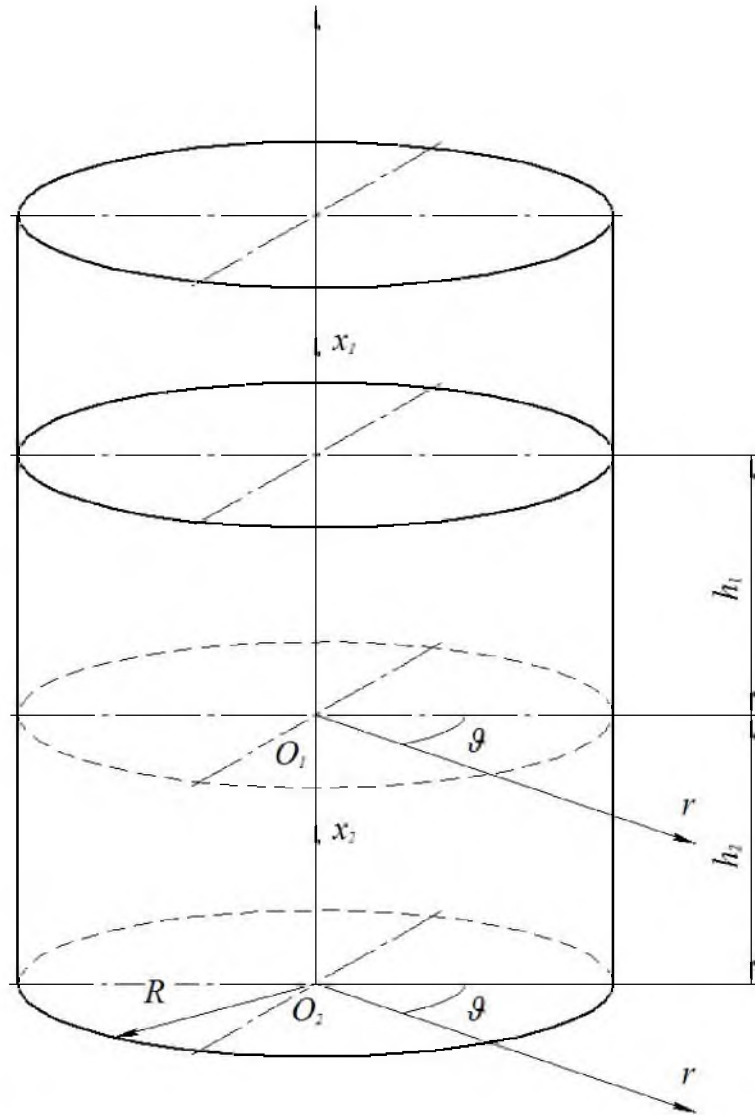


Рис. 3.1. Двухслойная жидкость, разделенная диафрагмой

Сформулируем отдельно граничные условия для случая отсутствия сопротивления разделителя и случая, когда коэффициент сопротивления равен γ .

Условие на свободной поверхности будет иметь вид:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \right|_{x_1=h_1} + g \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=h_1} = 0, \quad (3.2)$$

здесь g — ускорение свободного падения, ω — собственная частота колебаний рассматриваемой механической системы.

Условия непротекания на стенках бака запишем в виде:

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right|_{r=R} = 0; \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0. \quad (3.4)$$

В случае отсутствия сопротивления разделителя граничные условия для функций Φ_1 и Φ_2 примем как

$$\Phi_1|_{x_1=0} = \Phi_2|_{x_2=h_2}, \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=h_2}. \quad (3.6)$$

В случае, когда $\gamma \neq 0$ условие (3.5) согласно принятых допущений запишется в виде:

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right|_{x_1=0} - \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right|_{x_2=h_2} = \frac{\gamma}{\varrho} \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0}, \quad (3.7)$$

где ϱ — плотность жидкости.

3.1.2. Решение краевой задачи

Рассмотрим сначала случай $\gamma = 0$. Будем искать решение, представляя потенциал скоростей в комплексном виде:

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\omega_k t} \tilde{\Phi}_j^{(k)}, \quad j = 1, 2. \quad (3.8)$$

здесь через $\tilde{\Phi}$ обозначаем действительную часть комплексного потенциала скоростей. Удовлетворяя соотношению (3.1), разделяя переменные и выполняя граничные условия (3.2) — (3.6), получим выражения для $\tilde{\Phi}_j^{(k)}$:

$$\tilde{\Phi}_1^{(k)} = \left[B_k \operatorname{ch} \left(\xi_{0k} \frac{x_1}{R} \right) + C_k \operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{x_1}{R} \right) \right] J_0 \left(\xi_{0k} \frac{r}{R} \right), \quad (3.9)$$

$$\tilde{\Phi}_2^{(k)} = A_k \left[\operatorname{ch} \left(\xi_{0k} \frac{x_2}{R} \right) J_0 \left(\xi_{0k} \frac{r}{R} \right) \right], \quad (3.10)$$

здесь A_k, B_k, C_k — константы, определяемые из уравнений (3.2) — (3.7), J_0 — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка, λ_k — корень функции Бесселя 1-го рода порядка один. Его получаем, удовлетворяя граничным условиям (3.3). Из условия (3.2) определяем значение квадрата собственной частоты n -го тона осесимметричных колебаний:

$$\omega_k^2 = g \frac{\xi_{0k}}{R} \operatorname{th} \left(\xi_{0k} \frac{h_1 + h_2}{R} \right). \quad (3.11)$$

Рассмотрим теперь случай ненулевого значения коэффициента γ . Сначала рассмотрим случай $g = 0$ и $\Phi_1 = 0$ на свободной поверхности жидкости ($x_1 = h_1$). Будем полагать ω_k комплексным числом и в дальнейшем будем обозначать как p_k . Потенциалы скоростей Φ_1, Φ_2 ищем в комплексной форме (3.8). Удовлетворяя условиям (3.3), (3.4) и (3.6), получим соотношения, аналогичные (3.9) и (4.12):

$$\tilde{\Phi}_1^{(k)} = B_k \left[\operatorname{ch} \left(\xi_{0k} \frac{x_1}{R} \right) - \operatorname{cth} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right) \operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{x_1}{R} \right) \right] J_0 \left(\xi_{0k} \frac{r}{R} \right), \quad (3.12)$$

$$\tilde{\Phi}_2^{(k)} = A_k \left[\operatorname{ch} \left(\xi_{0k} \frac{x_2}{R} \right) J_0 \left(\xi_{0k} \frac{r}{R} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Тогда, подставляя (3.12) и (3.13) в граничное условие (3.7), получим:

$$(ip_k) \left[B_k - A_k \operatorname{ch} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right) \right] = -\frac{\gamma}{\varrho} B_k \frac{\xi_{0k}}{R} \operatorname{cth} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right), \quad (3.14)$$

или, далее

$$(ip_k) \left[\operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right) - \operatorname{ch} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right) \operatorname{cth} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right) \right] = -\frac{\gamma}{\varrho} \frac{\xi_{0k}}{R} \operatorname{cth} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right) \operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right). \quad (3.15)$$

Представляя $p_k = \alpha_k + i\beta_k$ получим из соотношения (3.15), что $\alpha_k = 0$ и, таким образом, колебания носят аperiодический характер, причём

$$p_k = i\gamma \frac{\frac{\xi_{0k}}{R} \operatorname{cth} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right) \operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right)}{\operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} + \operatorname{ch} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right) \operatorname{cth} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right)} \quad (3.16)$$

Рассмотрим теперь случай $g \neq 0$ и будем использовать условие на свободной поверхности в виде (3.2). Условие на диафрагме будем брать в виде (3.15) В этом случае, выражения для потенциалов скоростей примут вид:

$$\tilde{\Phi}_1^{(k)} = A_k \left[\operatorname{ch} \left(\xi_{0n} \frac{x_1}{R} \right) + \frac{\omega_k^2 \operatorname{ch} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right) - g \frac{\xi_{0k}}{R} \operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right)}{\omega_k^2 \operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right) - g \frac{\xi_{0k}}{R} \operatorname{ch} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right)} \operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{x_1}{R} \right) \right] J_0 \left(\xi_{0k} \frac{r}{R} \right),$$

$$\tilde{\Phi}_2^{(k)} = B_k \operatorname{ch} \left(\xi_{0k} \frac{x_2}{R} \right) J_0 \left(\xi_{0n} \frac{r}{R} \right).$$
(3.17)

Вновь представляя $p_k = \alpha + i\beta$ (далее мы будем ограничиваться первыми членами разложений) из соотношений (3.15) и (3.17) получим

$$\begin{cases} U(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \\ V_k(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

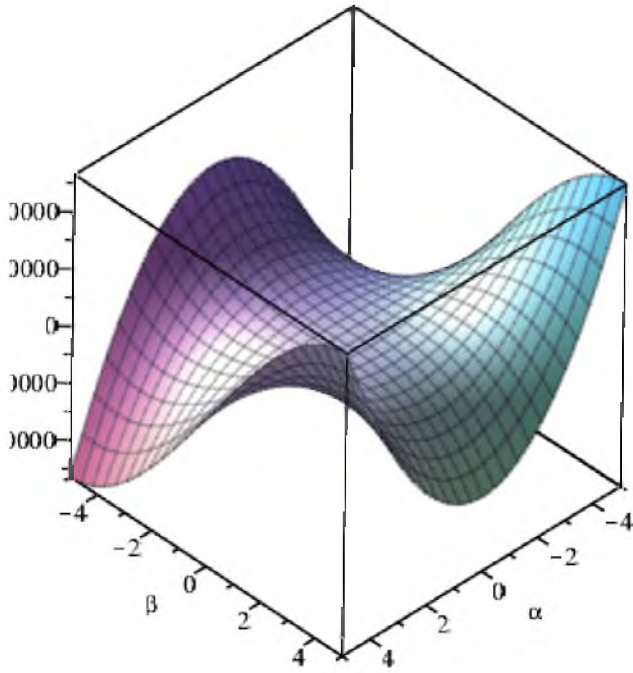
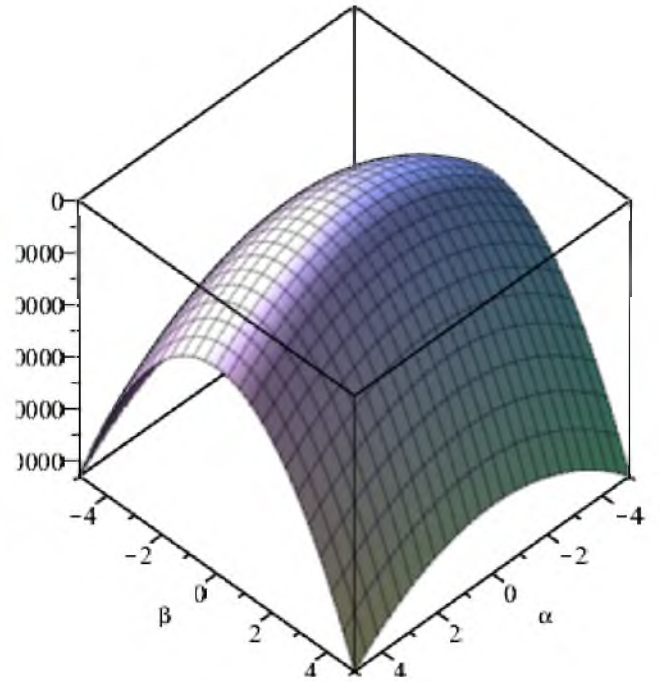
где

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\gamma g \xi_{0k}^2 \operatorname{th} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right)}{\rho R^2} - \frac{\beta g}{R} \left(1 + \frac{\operatorname{th} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right)}{\operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right)} \right) -$$

$$- \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \gamma \xi_{0k}}{\rho R} - \beta (-3\alpha^2 + \beta^2) \left[\operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right) \operatorname{th} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right)} \right],$$
(3.19)

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{g}{R} \left[1 + \frac{\operatorname{th} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right)}{\operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right)} \right] - 2 \frac{\beta \gamma \xi_{0k}}{\rho R} -$$

$$- (\alpha^2 + 3\beta^2) \left[\operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right) \operatorname{th} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right)} \right].$$
(3.20)

Рис. 3.2. $U(\alpha, \beta, \gamma)$ Рис. 3.3. $V(\alpha, \beta, \gamma)$

Графические представления для соотношений (3.19), (3.20) представлены на рисунках. Разрешая соотношение (3.18) относительно α_k и β_k с учетом (3.15) найдем:

$$\gamma = -\frac{\rho R a_{3k}}{2\xi_{0k}^2 \beta_k} \left[\frac{g a_{1k}}{R a_{3k}} \xi_{0k} - 8\beta^2 \xi_{0k} - \frac{g}{R} a_{1k} + \sqrt{\left(\frac{g a_{1k}}{R a_{3k}} \xi_{0k} - 8\beta^2 \xi_{0k} - \frac{g}{R} a_{1k} \right)^2 + 8 \frac{\xi_{0k}^2 \beta_k^2}{a_{3k}} \left(\frac{g}{R} a_{2k} + \beta_k^2 a_{3k} \right)} \right],$$

где β_k — коэффициент затухания, λ_k — корень первой производной функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, получаемый из условий непротекания на стенке бака, g — ускорение свободного падения, R — радиус бака, кроме того,

$$a_{3k} = \left[\operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right) \operatorname{th} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right)} \right], \quad a_{2k} = \left[1 + \frac{\operatorname{th} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right)}{\operatorname{sh} \left(\xi_{0k} \frac{h_2}{R} \right)} \right],$$

$$a_{1k} = \xi_{0k}^2 \operatorname{th} \left(\xi_{0k} \frac{h_1}{R} \right).$$

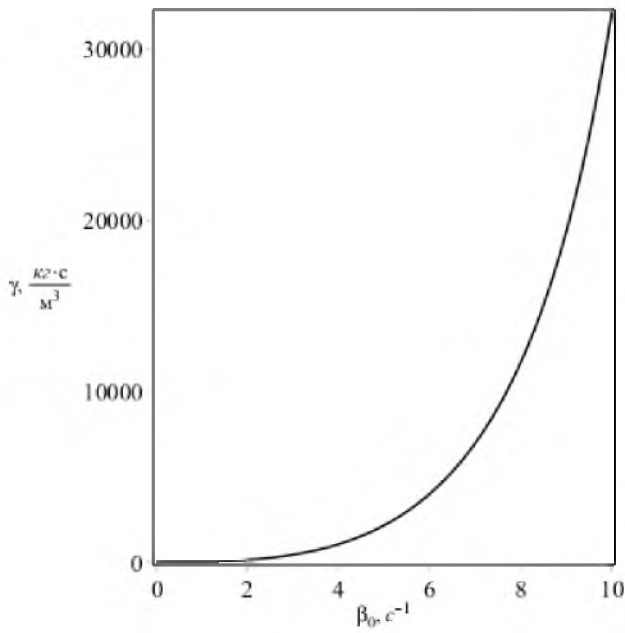


Рис. 3.4. Зависимость γ от коэффициента затухания β

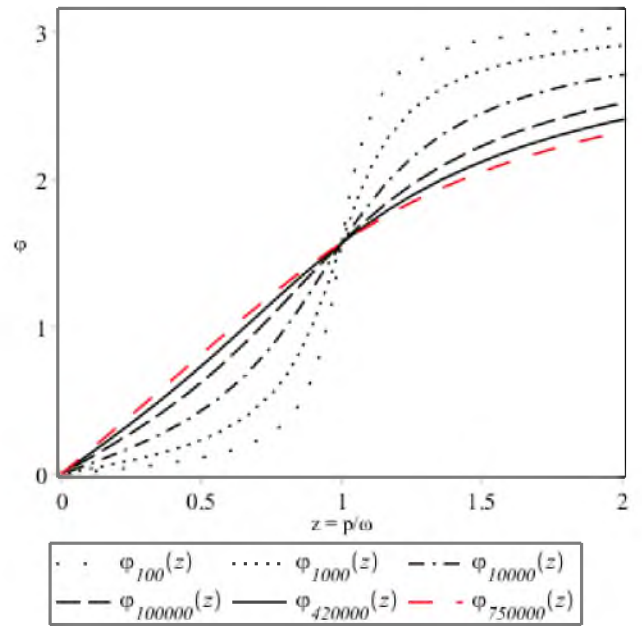


Рис. 3.5. ФЧХ системы при различных значениях γ

3.1.3. Результаты

Таким образом, установлено, что в случае равенства нулю потенциала скоростей на свободной поверхности жидкости (что может реализовываться при закрытии бака крышкой, плавающей на поверхности жидкости) колебания отсутствуют или имеют апериодический характер. Следует отметить, что при $\gamma = 0$, частота ω_1 , полученная из соотношения (3.18), равна частоте симметричных колебаний жидкости в баке, заполненном на высоту $H = h_1 + h_2$. На рис.3.4 показана зависимость приведенного гидравлического коэффициента γ от приведенного коэффициента затухания β , а на рис.3.5 — фазо-частотные характеристики системы в отсутствие демпфирования и при различных значениях коэффициента γ .

3.2. Малые осесимметричные колебания двухслойной жидкости с проницаемым разделителем в цилиндрическом баке с пологой сферической оболочкой в качестве днища

3.2.1. Постановка задачи

В работе рассматриваются малые движения идеальной, несжимаемой двухслойной жидкости плотности ϱ , разделённой жёсткой проницаемой плоской диафрагмой в цилиндрическом баке с пологим сферическим днищем. Введём цилиндрические системы координат с началами O_1 и O_2 соответственно (рис. 3.6). Движение жидкости полагаем потенциальным, с потенциалом скоростей Φ , удовлетворяющим уравнению Лапласа. Рассматриваем осесимметричные движения. Обозначим потенциал скоростей Φ_j для j -го слоя соответственно.

Граничные условия будут иметь вид:

$$\Phi_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (3.22)$$

Условие на диафрагме:

$$\varrho \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \varrho \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_1, \quad (3.23)$$

где ϱ — плотность жидкости, γ — приведенный коэффициент сопротивления разделителя. Условие на днище будет иметь вид:

$$\nabla^4 \dot{w} + k^4 \dot{w} + \varrho_0 \frac{R^4}{D} \delta \ddot{w} = \frac{R^4}{D} \dot{q} + \frac{4R^2}{DR_1} \left(\tilde{C}_2 + C_4 \ln \xi \right), \quad (3.24)$$

где R_1 — радиус кривизны днища, ϱ_0 — плотность материала оболочки, δ — толщина оболочки, $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ — жёсткость оболочки на изгиб, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости, R — радиус цилиндра, $k^4 = \frac{E\delta R^4}{DR_1^2}$,

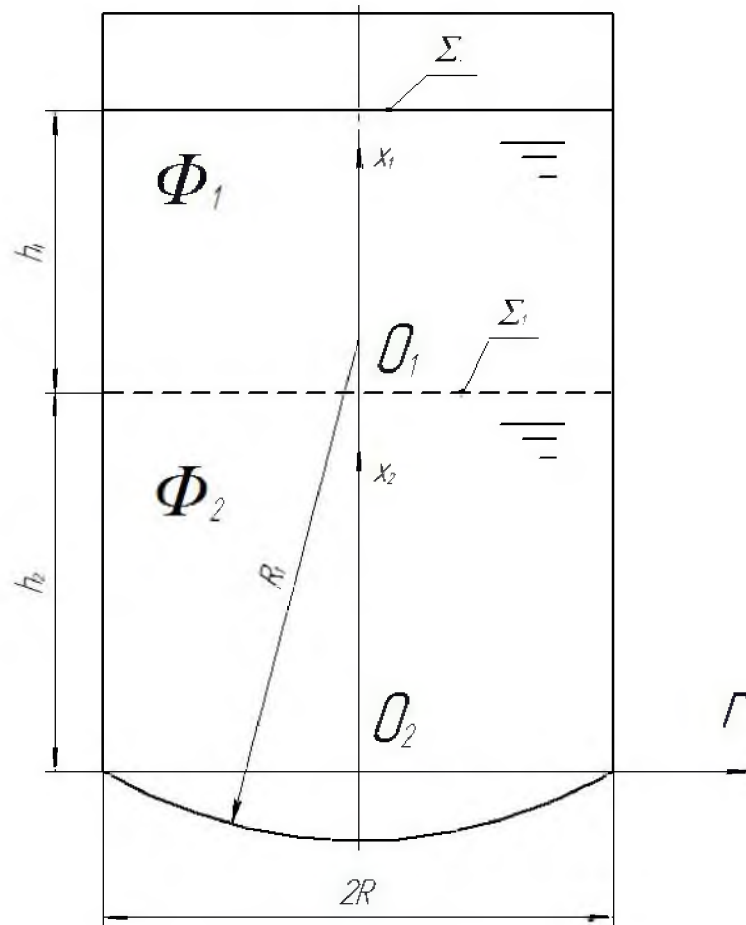


Рис. 3.6. Двухслойная жидкость, разделенная проницаемой диафрагмой в баке с пологим сферическим дном

$\dot{q} = -\rho\dot{\Phi}_2 + \rho g\dot{w}$, $\xi = \frac{r}{R}$, где r — текущий радиус, $\tilde{C}_2 = C_2 + C_4$ — произвольная постоянная. Кинематическое условие на днище будет иметь вид

$$\dot{w} = -\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} \quad \text{при} \quad x_2 = 0. \quad (3.25)$$

Кинематическое условие на диафрагме будет иметь вид

$$\left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=h_2} = \left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} \quad (3.26)$$

3.2.2. Решение краевой задачи

Выражения для i -го члена ряда в представлении для потенциалов скоростей будет иметь вид:

$$\Phi_1^{(i)} = \left[C_{10} + C_{20} \frac{x_1}{R} + J_0 \left(\xi_i \frac{r}{R} \right) \left(C_{1k} \operatorname{ch} \left(\xi_i \frac{x_1}{R} \right) + C_{2k} \operatorname{sh} \left(\xi_i \frac{x_1}{R} \right) \right) \right] e^{i\omega t}, \quad (3.27)$$

$$\Phi_2^{(i)} = \left[A_0 + B_0 \frac{x_2}{R} + J_0 \left(\xi_i \frac{r}{R} \right) \left(A_{1i} \operatorname{ch} \left(\xi_i \frac{x_2}{R} \right) + B_{2k} \operatorname{sh} \left(\xi_i \frac{x_2}{R} \right) \right) \right] e^{i\omega t}, \quad (3.28)$$

где ξ_k — корни трансцендентного уравнения $\xi_k J_1 \left(\xi \frac{r}{R} \right) \Big|_{r=R} = 0$. В дальнейшем, будем ограничиваться первыми членами разложения:

$$\Phi_1^{(1)} = \left[C_{10} + C_{20} \frac{x_1}{R} + J_0 \left(\xi_1 \frac{r}{R} \right) \left(C_1 \operatorname{ch} \left(\xi_1 \frac{x_1}{R} \right) + C_2 \operatorname{sh} \left(\xi_1 \frac{x_1}{R} \right) \right) \right] e^{i\omega t}, \quad (3.29)$$

$$\Phi_2^{(1)} = \left[A_0 + B_0 \frac{x_2}{R} + J_0 \left(\xi_1 \frac{r}{R} \right) \left(A_1 \operatorname{ch} \left(\xi_1 \frac{x_2}{R} \right) + B_2 \operatorname{sh} \left(\xi_1 \frac{x_2}{R} \right) \right) \right] e^{i\omega t}. \quad (3.30)$$

Из граничного условия на свободной поверхности (3.21) будем иметь

$$C_{10} = -C_{20} \frac{h_1}{R},$$

в свою очередь,

$$C_2 = -C_1 \operatorname{cth} \left(\xi_1 \frac{h_1}{R} \right), \quad \text{т.к.} \quad \int_0^R r J_0 \left(\xi_1 \frac{r}{R} \right) = 0.$$

Уравнение движения полой сферической оболочки в соответствии с [?] и [?]] будет иметь вид:

$$\nabla^4 \dot{w} - \beta^4 \dot{w} = \frac{4R^2}{DR_1} \left(\tilde{C}_2 + C_4 \ln r \right) - \frac{\varrho \omega^2 R^4}{D_1} \left[A_1 J_0 \left(\xi_1 \frac{r}{R} \right) + A_0 \right] e^{i\omega t}, \quad (3.31)$$

где $\beta = \frac{R^4}{D} E \delta \left(\frac{\varrho_0 \omega^2}{E} - \frac{1}{RR_1} \right)$. Будем далее полагать, что $C_4 = 0$, чтобы исключить особенность при $r = 0$. Общий интеграл выражения (3.31) будет иметь вид:

$$\dot{w} = C_5 J_0(\beta r) + C_6 Y_0(\beta r) + C_7 I_0(\beta r) + C_8 K_0(\beta r) - \frac{4R^2}{DR_1 \beta^4}, \quad (3.32)$$

где $J_0(\beta r)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка, $Y_0(\beta r)$ — функция Неймана нулевого порядка, $I_0(\beta r)$ — функция Инфельда нулевого порядка, $K_0(\beta r)$ — функция Макдональда нулевого порядка. Будем далее, также чтобы исключить особенность при $r = 0$, полагать $C_6 = C_8 = 0$.

Найдём теперь частное решение. Обозначим

$$\dot{w}^* = D_1 J_0 \left(\xi_1 \frac{r}{R} \right) + D_2 \quad (3.33)$$

Общее однородное уравнение для (3.31) будет иметь вид:

$$\nabla^4 \dot{w} - \beta^4 \dot{w} = 0. \quad (3.34)$$

Обозначим для простоты $\beta_i = \frac{\xi_i}{R}$. Тогда, в частности, для $i = 1$ будем иметь:

$$\nabla^4 J_0(\beta_1 r) = \beta_1^4 J_0(\beta_1 r)$$

и

$$\nabla^4 \dot{w} - \beta^4 \dot{w} = -\frac{\rho \omega^2 R^4}{D} A_1 J_0(\beta_1 r),$$

или, с учётом (3.33)

$$D_1 \left[\beta_1^4 J_0\left(\xi_1 \frac{r}{R}\right) - \beta^4 J_0\left(\xi_1 \frac{r}{R}\right) \right] = -\frac{\rho \omega^2 R^4}{D} A_1 J_0\left(\xi_1 \frac{r}{R}\right),$$

откуда

$$D_1 = -\frac{\rho \omega^2 R^4}{D(\beta_1^4 - \beta^4)}. \quad (3.35)$$

С другой стороны

$$\beta^4 D_2 = \frac{\rho \omega^2 R^4}{D} A_0,$$

откуда

$$D_2 = \frac{\rho \omega^2 R^4}{D \beta^2} A_0. \quad (3.36)$$

Таким образом, будем иметь:

$$\dot{w} = \left\{ -\frac{4R^2}{DR_1 \beta^4} \tilde{C}_2 - \frac{\rho \omega^2 R^4}{D} \left[\frac{A_1 J_0(\beta_1 r)}{(\beta_1^4 - \beta^4)} - A_0 \right] + C_5 J_0(\beta r) + C_7 I_0(\beta r) \right\} e^{i\omega t} \quad (3.37)$$

Выполним теперь кинематическое условие (3.25). С учетом (3.37) и (3.29), получим:

$$\left[C_1 \operatorname{ch}\left(\xi_1 \frac{h_1}{R}\right) + C_2 \operatorname{sh}\left(\xi_1 \frac{h_1}{R}\right) \right] J_0(\xi_1) + C_{20} + C_{10} \frac{h_1}{R} = 0. \quad (3.38)$$

Тогда выражение для потенциала скоростей жидкости Φ_1 примет вид:

$$\Phi_1 = \left(\left\{ -\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\xi_1 \frac{h_1}{R}\right)} \left[C_2 \operatorname{sh}\left(\xi_1 \frac{h_1}{R}\right) + \frac{C_{10} \frac{h_1}{R} + C_{20}}{J_0(\xi_1)} \right] \operatorname{ch}\left(\xi_1 \frac{x}{R}\right) + C_2 \operatorname{sh}\left(\xi_1 \frac{x}{R}\right) \right\} \times \right. \\ \left. \times J_0\left(\xi_1 \frac{x}{R}\right) + C_{10} + C_{20} \frac{x_1}{R} \right) e^{i\omega t}. \quad (3.39)$$

Выполним теперь условие на диафрагме (3.26). Имеем:

$$\left[A_1 \frac{\xi_1}{h_2} \operatorname{sh} \xi_1 + B_1 \frac{\xi_1}{h_2} \operatorname{ch} \xi_1 \right] J_0\left(\xi_1 \frac{r}{R}\right) + B_0 = C_2 \frac{\xi_1}{R} J_0\left(\xi_1 \frac{r}{R}\right) + C_{20},$$

откуда, в частности, получаем:

$$C_{20} = B_0. \quad (3.40)$$

Выполним теперь условие (3.25):

$$-\frac{4R^2}{DR_1\beta^4} \tilde{C}_2 - \frac{\rho\omega^2 R^4}{D} \left(\frac{A_1 J_0(\beta_1 r)}{(\beta_1^4 - \beta^4)} - A_0 \right) + C_5 \left(\sum_i \alpha_{3i} J_0(\beta_i r) \right) + \alpha_{30} + \\ + \alpha_{30} + C_7 \left(\sum_i \alpha_{2i} J_0(\beta_i r) \right) + \alpha_{20} = -B_1 \frac{\xi_1}{R} J_0\left(\xi \frac{r}{R}\right) - \frac{B_0}{R}, \quad (3.41)$$

где

$$\alpha_{3i} = \int_0^R r J_0(\beta r) J_0(\beta_i r) dr = -\frac{R}{\beta^2 - \beta_i^2} [\beta J_0'(\beta R) J_0(\beta_i R) - \beta_i J_0'(\beta_i R) J_0(\beta R)],$$

$$\alpha_{2i} = \int_0^R r I_0(\beta r) J_0(\beta_i r) dr = -\frac{R}{\beta^2 - \beta_i^2} [\beta I_0'(\beta R) J_0(\beta_i R) - \beta_i J_0'(\beta_i R) I_0(\beta R)]$$

Из (3.41), в свою очередь, получаем:

$$B_0 = \frac{4R^3}{DR_1\beta^4} \tilde{C}_2 - A_0 \frac{\rho\omega^2 R^5}{D} - C_5 R \alpha_{30} - C_7 R \alpha_{20}. \quad (3.42)$$

Выполним теперь динамическое условие на диафрагме (3.23):

$$\rho i\omega \left[-C_{20} \frac{h_1}{R} + A_0 + B_0 \frac{h_2}{R} \right] - \gamma \frac{C_{20}}{R} = 0, \quad (3.43)$$

а с учетом (3.40):

$$\varrho i\omega \left[B_0 \left(\frac{h_2}{R} - \frac{h_1}{R} + \frac{\gamma}{R} \right) + A_0 \right] = 0. \quad (3.44)$$

Объединяя (3.41) и (3.44), получим:

$$A_0 = \frac{B_0}{\varrho \beta \omega} \left(\frac{\gamma}{R} + \varrho i\omega \frac{h_1}{R} - \varrho i\omega \frac{h_2}{R} \right). \quad (3.45)$$

Введём теперь вспомогательную функцию:

$$\dot{F} = -\frac{E\delta R^2}{R_1} \nabla^2 \dot{\varphi}, \quad (3.46)$$

или

$$\dot{F} = -\frac{E\delta R^2}{R_1} \left[-\frac{R^2}{DR_1\beta^4} \tilde{C}_2 \cdot r^2 + A_0 \cdot \frac{\varrho\omega^2 R^4}{D} \cdot \frac{r^2}{4} + C_5 \left(-\frac{J_0(\beta r)}{\beta^2} \right) - C_7 \frac{I_0(\beta r)}{\beta^2} \right], \quad (3.47)$$

при этом, для функции \dot{F} будет выполняться условие:

$$\dot{F}'' - \frac{R}{r} \dot{F}' = 0. \quad (3.48)$$

Таким образом, выполнение граничных условий (3.25), (3.26), совместно с условием на днище (3.24) и на разделителе (3.23) приводит к следующей группе уравнений, замкнутой относительно \tilde{C}_2 и C_5 :

$$-\frac{4R^2}{DR_1\beta} \tilde{C}_2 + \frac{\varrho\omega^2 R^4}{D} \varkappa \left[-\frac{4R^2}{DR_1\beta^4} \tilde{C}_2 + C_5 \alpha_{30} + C_7 \alpha_{20} \right] + C_5 J_0(\beta R) + C_7 I_0(\beta R) = 0, \quad (3.49)$$

где $\varkappa = 1 + \frac{\varrho_0 \delta}{h_2 \varrho}$,

$$C_5 J_0'(\beta R) + C_7 I_0'(\beta R) = 0, \quad (3.50)$$

$$\frac{E\delta R^2}{R_1} \left[-\frac{2R^2}{DR_1\beta^4} \tilde{C}_2 + \frac{\varrho\omega^2 R^4}{2D} A_0 - C_5 \cdot \frac{1}{R} \frac{J_0'(\beta R)}{\beta^2} - C_7 \cdot \frac{1}{R} \frac{I_0'(\beta R)}{\beta^2} \right]. \quad (3.51)$$

Или, с учетом (3.50):

$$-\frac{4R^2}{DR_1\beta} \tilde{C}_2 + \frac{\varrho\omega^2 R^4}{D} \varkappa \left[-\frac{4R^2}{DR_1\beta^4} \tilde{C}_2 + C_5 \alpha_{30} - C_5 \frac{J_0'(\beta R)}{I_0'(\beta R)} \alpha_{20} \right] + C_5 J_0(\beta R) - C_5 \frac{J_0'(\beta R)}{I_0'(\beta R)} I_0(\beta R) = 0, \quad (3.52)$$

$$\frac{E\delta R^2}{R_1} \left[-\frac{2R^2}{DR_1\beta^4} \tilde{C}_2 + \frac{\varrho\omega^2 R^4}{2D} A_0 \right] = 0 \quad (3.53)$$

Выразим теперь A_0 :

$$B_0 = \frac{4R^3}{DR_1\beta^4}\tilde{C}_2 - A_0\frac{\rho\omega^2R^5}{D} - C_5R\alpha_{30} - C_7R\alpha_{20} \quad (3.54)$$

$$A_0 = \frac{B_0}{\rho i\omega} \left(\frac{\gamma}{R} + \rho i\omega \frac{h_1}{R} - \rho i\omega \frac{h_2}{R} \right) \quad (3.55)$$

3.2.3. Результаты

Таким образом, полученные выражения (3.52) и (3.53) замыкает систему постоянных на две величины: \tilde{C}_2 и C_5 . Составляя из них детерминант в виде

$$\begin{vmatrix} \tilde{C}_2 a_{11}(\omega) & C_5 a_{12}(\omega) \\ \tilde{C}_2 a_{21}(\omega) & C_5 a_{22}(\omega) \end{vmatrix} = 0, \quad (3.56)$$

где $\omega = \alpha + i\beta$, и раскрывая его, получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \Theta_1(\alpha, \beta, \gamma) \\ \Theta_2(\alpha, \beta, \gamma) \end{cases}, \quad (3.57)$$

позволяющей при заданном γ определять α и β . В нашем случае:

$$\tilde{U}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) + i\tilde{V}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = 0,$$

$$\tilde{U}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = b_1\tilde{\alpha}^3 - 3b_1\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - 2b_2\tilde{\alpha}\tilde{\beta} + b_3\tilde{\alpha} + b_4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}$$

$$\tilde{V}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = 3b_1\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta} - b_1\tilde{\beta}^3 + b_2\tilde{\alpha}^2 + b_3\tilde{\beta} + b_4\tilde{\beta}\tilde{\gamma} + b_0,$$

где

$$b_1 = \frac{R^9\rho\kappa[\alpha_{30}I'_0(\beta R) - \alpha_{20}J'_0(\beta R)]}{D^2R_1\beta^4I'_0(\beta R)},$$

$$b_2 = \frac{-1}{DR_1\beta^4I'_0(\beta R)} \left[-iR^4\rho h_2\alpha_{20}J'_0(\beta R) - iR^4\rho h_1\alpha_{30}I'_0(\beta R) - \right. \\ \left. -iR^4\rho h_1J_0(\beta R)I'_0(\beta R) - iR^4\rho h_2J'_0(\beta R)I_0(\beta R) + \right. \\ \left. iR^4\rho h_2J_0(\beta R)I'_0(\beta R) + iR^4\rho h_1\alpha_{20}J'_0(\beta R) + \right. \\ \left. +iR^4\rho h_1I_0(\beta R)J'_0(\beta R) + iR^4\rho h_2\alpha_{30}I'_0(\beta R) \right],$$

$$b_3 = \frac{R^4}{DR_1\beta^4I'_0(\beta R)} [\alpha_{30}I'_0(\beta R) - \alpha_{20}J'_0(\beta R) - I_0(\beta R)J'_0(\beta R) + J_0(\beta R)I'_0(\beta R)],$$

$$b_4 = \frac{-\alpha_{20}J'_0(\beta R) - I_0(\beta R)J'_0(\beta R) + \alpha_{30}I'_0(\beta R) + J_0(\beta R)I'_0(\beta R)}{R_1\beta^4I'_0(\beta R)}.$$

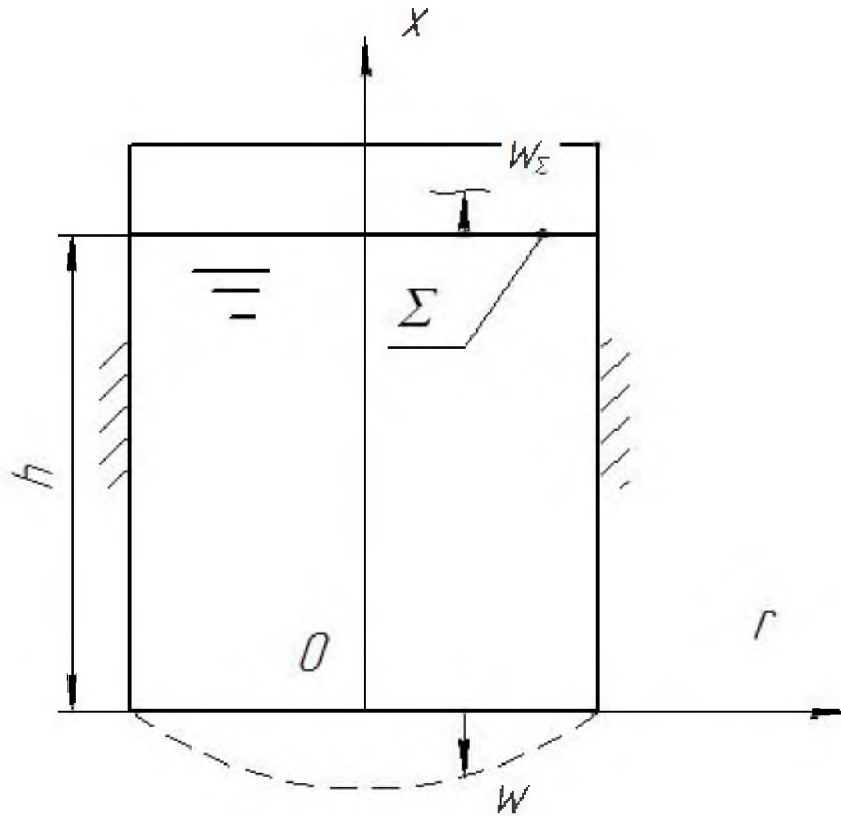


Рис. 3.7. Модель упругого бака с жидкостью

3.3. Параметрические колебания свободной поверхности жидкости в упругом баке

3.3.1. Постановка задачи

Будем рассматривать продольные осесимметричные колебания жидкости, заполняющей на высоту h жесткий цилиндрический бак с упругим плоским дном.

Построим в первом приближении область неустойчивости основного параметрического резонанса, при котором $p = 2\omega$. Здесь p — частота изменения внешнего воздействия, ω — частота первого тона малых симметричных колебаний в упругом баке. Основные допущения:

1. Жидкость считается идеальной и несжимаемой, а её движения — потенциальным, с потенциалом скоростей $\Phi(x, r, t)$. Здесь x — осевая координата (эйлерова), r — радиальная координата, t — время. Σ — свободная

поверхность жидкости в невозмущенном состоянии, w_Σ — вертикальное перемещение свободной поверхности.

2. Днище считается упругим, плоским, в виде мембраны, начальное натяжение которого равно T . Материал днища подчиняется закону Гука [55]
3. Колебания полагаются малыми, для упрощения выкладок инерцией мембраны в дальнейшем будем пренебрегать.

Дифференциальное уравнение малых осесимметричных колебаний мембраны имеет вид [?]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{\tau} p_r(r, t), \quad (3.58)$$

где $p_r(r, t)$ — гидродинамическое давление жидкости, τ — натяжение мембраны. Граничное условие для закрепленной по контуру мембраны будет иметь вид:

$$w(r, t) = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (3.59)$$

Для иллюстрации решения краевой задачи о свободных колебаниях бака с жидкостью воспользуемся результатом, полученным в работе [55] Л.И.Балабуха. Скорость частиц жидкости будет определяться соотношением:

$$\mathbf{v} = -\text{grad}\Phi. \quad (3.60)$$

Тогда, используя интеграл Лагранжа-Коши [55], имеем:

$$p_r(r, t) = \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (3.61)$$

где ϱ — плотность жидкости, постоянная по всему объёму. Потенциал скоростей Φ должен удовлетворять следующим краевым условиям [55]:

$$\varrho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \varrho g \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = h, \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (3.64)$$

3.3.2. Решение краевой задачи

Функцию Φ представим в виде [55]:

$$\Phi = A_0 + B_0 \frac{x}{h} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[A_i \operatorname{ch} \left(\xi_i \frac{x}{R} \right) + B_i \operatorname{sh} \left(\xi_i \frac{x}{R} \right) \right] J_0 \left(\xi_i \frac{r}{R} \right). \quad (3.65)$$

Временной множитель в (3.65) опущен. Здесь $J_0(r)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка [130], ξ_i — корни трансцендентного уравнения [131]:

$$J_1 \left(\xi_i \frac{r}{R} \right) = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad (3.66)$$

в частности, $\xi_1 = 3.8317 \dots$. A_i и B_i , $i = 0, 1, \dots$ — суть неопределенные постоянные. Таким образом, система ортогональных собственных функций рассматриваемой краевой задачи приобретает вид:

$$1, J_0 \left(\xi_1 \frac{r}{R} \right), \dots, J_0 \left(\xi_i \frac{r}{R} \right), \dots \quad (3.67)$$

Удовлетворяя краевым условиям задачи и используя при этом разложение функции $\vartheta(r) = \frac{r^2}{4}$ в ряд по ортогональным функциям Бесселя:

$$\frac{r^2}{4} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i J_0 \left(\xi_i \frac{r}{R} \right) + \beta_0, \quad (3.68)$$

где $\beta_0 = \frac{R^2}{8}$, $\beta_i = \frac{4}{J_0(\xi_i)} \frac{R^2}{\xi_i^2}$, получим трансцендентное уравнение для определения частот собственных колебаний задачи:

$$-\frac{1}{8} + \frac{\tau}{\rho\omega^2} \cdot \frac{1}{R^2 h} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \xi_i}{\xi_i^2 \left[\operatorname{th} \xi_i - \xi_i^3 \left(\frac{\tau}{\rho\omega^2 h^3} \right) \right]} = 0. \quad (3.69)$$

Можно показать, что дифференциальное уравнение для функции $s(t)$ ($s(t)$ — временной множитель) имеет вид:

$$\ddot{s} + \omega^2 [1 \pm \varepsilon \cos(2\omega t + \alpha)] s = 0, \quad (3.70)$$

где ω — частота первого тона осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью, рассмотренного выше, ε — малый параметр [?], α — начальная фаза.

Для построения области неустойчивости по первому приближению воспользуемся способом, применённым в работах Н.М. Беляева и В.Н. Челомея. Решение уравнения (3.70) будем искать в виде

$$s(t) = A \sin \omega t, \quad (3.71)$$

A — произвольная амплитуда. Тогда, уравнение (3.70) примет вид:

$$\ddot{s} = -\lambda^2 [A \sin \omega t \pm \varepsilon A \cos(2\omega t + \alpha) \sin \omega t]. \quad (3.72)$$

Так как, в соответствии с [131], $\cos(2\omega t + \alpha) \sin \omega t = \frac{1}{2} [\sin(3\omega t + \alpha) + \sin(\alpha - \omega t)]$, тогда, с учетом полученного равенства:

$$\ddot{s} = -\lambda^2 \left[A \sin \omega t \pm A \frac{\varepsilon}{2} (\sin(3\omega t + \alpha) - \sin(\omega t - \alpha)) \right]. \quad (3.73)$$

В дальнейшем, слагаемое $\sin(3\omega t + \alpha)$ учитывать не будем. Поскольку $\sin(\omega t - \alpha) = \sin \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \sin \alpha$, то имеем:

$$\ddot{s} = -\lambda^2 \left[s \pm \frac{\varepsilon}{2} (A \sin \omega t \cos \alpha + A \cos \omega t \sin \alpha) \right], \quad (3.74)$$

или

$$\ddot{s} = -\lambda^2 \left[s \pm \frac{\varepsilon}{2} \left(s \cos \alpha + \frac{\dot{s}}{\omega} \right) \right], \quad (3.75)$$

откуда

$$\ddot{s} + \frac{\varepsilon}{2} \lambda^2 \frac{\dot{s}}{\omega} \sin \alpha + \lambda^2 \left(1 \pm \cos \alpha \frac{\varepsilon}{2} \right) s = 0. \quad (3.76)$$

Функция $\sin \alpha$ принимает отрицательные значения на интервале $\pi < \alpha < 2\pi$. В этом случае, будет иметь место отрицательное затухание и, таким образом, возможен параметрический резонанс. При этом:

$$-1 < \cos \alpha < 1. \quad (3.77)$$

Т.к. ε — малая величина, то

$$\lambda^2 \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{2} \cos \alpha \right) \cong \omega^2, \quad (3.78)$$

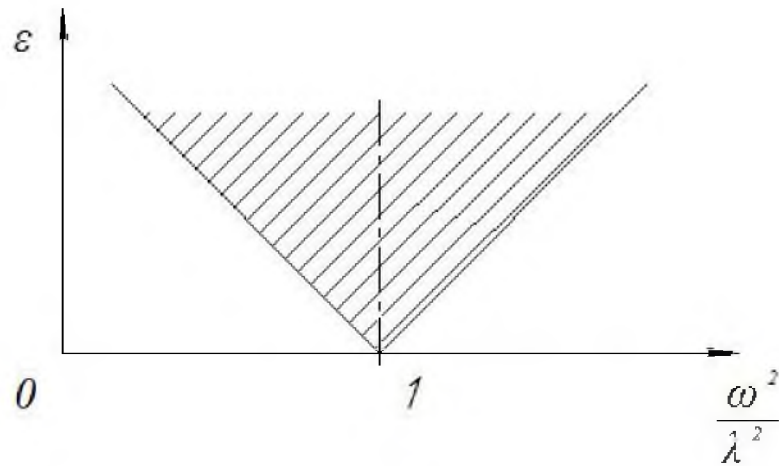


Рис. 3.8. Область неустойчивости системы

откуда

$$1 \pm \frac{\varepsilon}{2} \cos \alpha = \frac{\omega^2}{\lambda^2}, \quad (3.79)$$

или

$$\pm \frac{\varepsilon}{2} \cos \alpha = \frac{\omega^2}{\lambda^2} - 1. \quad (3.80)$$

Т.к. $\varepsilon > 0$, то

$$-\varepsilon < \varepsilon \cos \alpha < \varepsilon, \quad (3.81)$$

и

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \cos \alpha < \frac{\varepsilon}{2} + 1. \quad (3.82)$$

Окончательно получаем:

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\omega^2}{\lambda^2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.83)$$

3.3.3. Результаты

Таким образом, получено аналитическое выражение для границ области неустойчивости системы по первому приближению. Графически, оно будет иметь вид, изображенный на Рис.3.8. Здесь ε — коэффициент модуляции, а $\frac{\omega^2}{\lambda^2}$ — глубина пульсации.

3.4. Выводы по третьей главе

1. Были рассмотрены осесимметричные колебания идеальной жидкости в баке с проницаемым разделителем в случаях
 - Плоского днища
 - Пололого сферического днища
2. Получены зависимости приведенного коэффициента гидравлического сопротивления γ от теоретического значения коэффициента затухания. Постулируя равенство теоретического значения коэффициента затухания, и значения, получаемого в дальнейшем экспериментально для случая плоского днища, мы сможем получить зависимость для коэффициента гидравлического сопротивления γ , которая представляет отдельный интерес для баков с разделителями, выполненными на основе КПСМ.
3. Исследованы параметрические колебания свободной поверхности в баке с жидкостью, установлена величина коэффициента модуляции, при которой в системе становится возможен параметрический резонанс.

Глава 4

Экспериментальное определение коэффициента сопротивления разделителя

4.1. Цели и задачи эксперимента

При разработке и проведении экспериментальных исследований ставились следующие задачи:

- Экспериментальное определение первого тона осесимметричных колебаний;
- Определение численного значения приведенного коэффициента гидравлического сопротивления γ для пористой перегородки;
- Подтверждение гипотезы о возможности представления гидравлического сопротивления пористой перегородки в виде произведения приведенного коэффициента гидравлического сопротивления γ перегородки на скорость частиц жидкости.

В рамках излагаемых исследований, реализуется экспериментальная отработка конструкций баков космических летательных аппаратов с разделителями выполненных на основе пеноматериалов в части определения коэффициента гидравлического сопротивления пористой перегородки. В работе [4] определяется гидродинамическое подобие и рассматриваются методы определения капиллярной удерживающей способности разделителей, выполненных на основе пористых материалов. Далее, определим, аналогично [4], гидродинамическое подобие для приведенного коэффициента гидравлического сопротивления γ . При экспериментальных исследованиях в области гидродинамики, выполняемых на моделях некоторых реальных конструкций, для осуществления корректной интерпретации результатов принято опираться на ряд постулатов теории подобия

[133], в частности, два гидродинамических процесса могут считаться подобными при выполнении следующих условий:

- геометрического подобия, определяемого в соответствии с соотношениями:

$$\frac{l_M}{l_H} = \pi_l, \quad \frac{S_M}{S_H} = \pi_l^2, \quad \frac{V_M}{V_H} = \pi_l^3, \quad (4.1)$$

где π_l — линейный масштаб геометрического моделирования, l_M, l_H — линейные размеры модели и природы соответственно, S_M, S_H — площади модели и природы соответственно, V_M, V_H — объёмы модели и природы соответственно.

- кинематического подобия, достигаемого при условии, что в сходственных точках модели и природы векторные параметры имеют одинаковые направления в сходственные моменты времени, для которых выполняется соотношение:

$$\frac{t_M}{t_H} = \pi_t \quad (4.2)$$

- динамического подобия, достигаемого при условии, что в сходственных точках модели и природы, в сходственные моменты времени для модели и природы, действующие на модель и природу силовые факторы будут отвечать соотношению:

$$\frac{f_M}{f_H} = \pi_f. \quad (4.3)$$

Движение компонент топлив в баках и расходных магистралях космических летательных аппаратов подвержено действию множества различных сил, в частности, среди них можно выделить гравитационные силы, инерциальные, силы поверхностного натяжения, силы давления, силы вязкого трения и т.д., для которых можно получить выражения через некоторые физические величины, характеризующие природу сил и жидкостей.

В соответствии с условиями гидродинамического подобия натурального и модельного процессов [133], необходимо, чтобы все силы в сходственных точках

в сходственные моменты времени удовлетворяли соотношению (4.3), однако, удовлетворить его одновременно для всех сил, ввиду их различной физической природы не представляется возможным. В теории гидродинамического подобия выделяют следующие безразмерные комплексы, характеризующие отношения соответствующих сил:

Число Фруда $Fr = \frac{v^2}{al}$ — отношение конвективных сил инерции к силам тяжести. Здесь v — характерная скорость жидкости, l — характерный размер, a — ускорение, действующее на жидкость.

Число Рейнольдса $Re = \frac{vl}{\mu}$ — отношение конвективных сил инерции к силам вязкого трения, μ — коэффициент кинематической вязкости.

Число Бонда $Bo = \frac{\rho al^2}{\sigma}$ — отношение массовых сил к силам поверхностного натяжения, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости.

Число гомохронности $Ho = \frac{vl}{t}$ — отношение локальных сил инерции к конвективным силам инерции.

Одновременное выполнение условий подобия по числам Фруда, Рейнольдса и Бонда практически невозможно, вследствие чего, на практике стремятся найти условия, отвечающие ситуации приближенного подобия — когда можно пренебречь действием каких-либо сил, а кроме того, когда реализуется режим автомодельности по какому-либо критерию подобия. В первую очередь это касается числа Рейнольдса, поскольку режим опорожнения топливных баков соответствует области так называемой турбулентной автомодельности, то есть натурные значения числа Re существенно больше 10^4 .

4.2. Описание эксперимента

Схематическое изображение экспериментальной установки приведено на Рис. 4.1

На Рис. 4.2 приведена фотография материала разделителя (пеноникель).

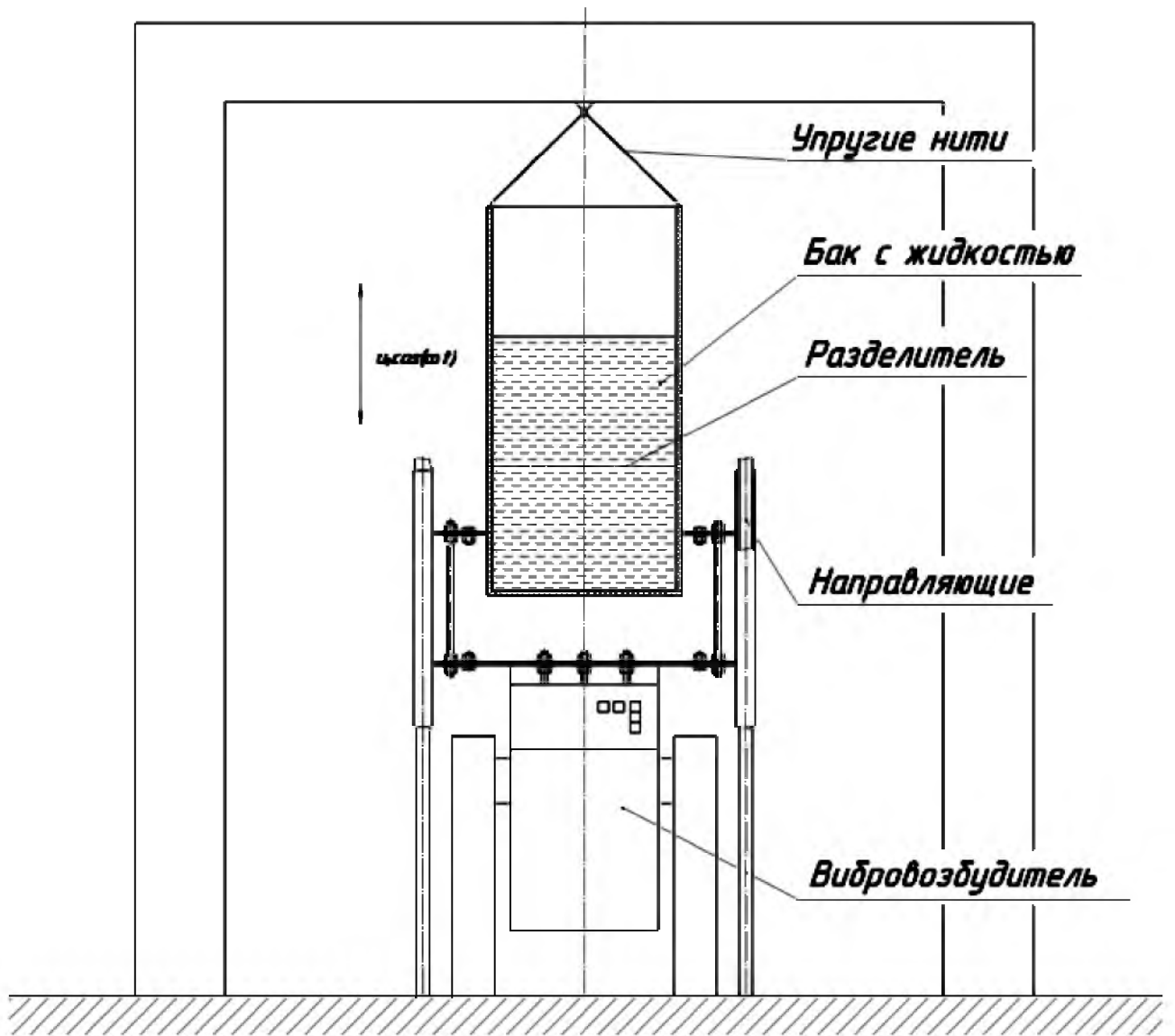


Рис. 4.1. Схема установки. 1 — разделитель; 2 — бак с жидкостью; 3 — направляющие; 4 — вибровозбудитель

Будем рассматривать движение жидкости в баке 1 (Рис. 4.1). Введем системы координат в соответствии с Рис. 4.3. Жидкость считаем идеальной и несжимаемой, ее движение — осесимметричным и потенциальным с потенциалом скоростей $\Phi_i(x_i, r, t)$, $i = 1, 2$. Индекс 1 относится к объему τ_1 , индекс 2 — к объему τ_2 . Полость, заполненную жидкостью, считаем цилиндрической радиуса R и абсолютно жесткой.

Предположим, что изменение давления на разделителе $p_i^{(r)}(r, t)$ подчиняется закону:

$$p_i^{(r)}(r, t) = \gamma \frac{\partial \Phi_i(x_i, r, t)}{\partial x_i} \quad (4.4)$$

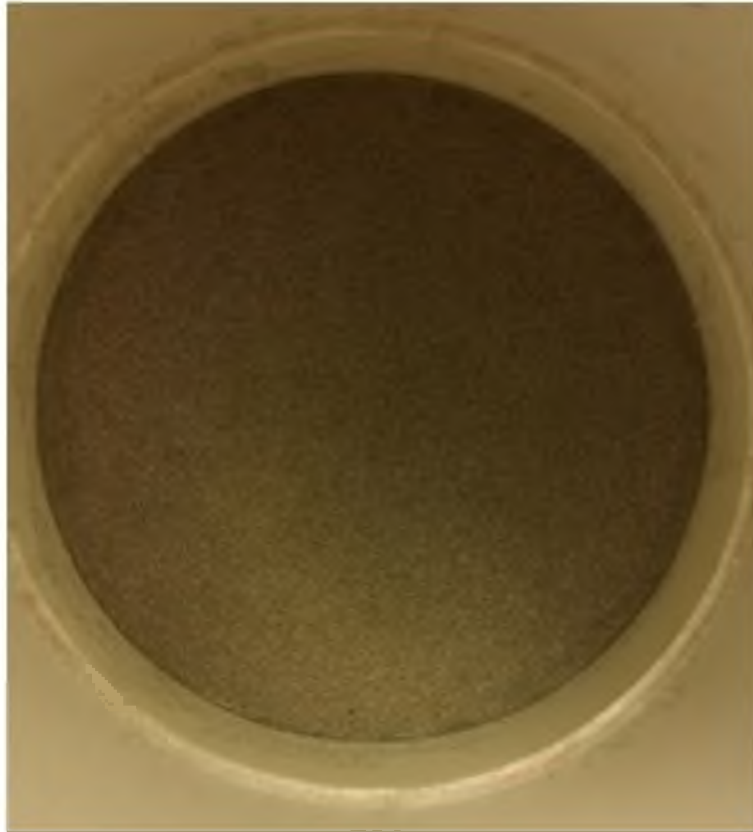


Рис. 4.2. Разделитель из пеноникеля.

Вибровозбудитель задает баку с жидкостью возмущающее перемещение в вертикальном направлении $u(t) = u_0 \cos(pt)$, где u_0 — амплитуда возмущающего воздействия, p — частота. Экспериментальное исследование симметричных свободных колебаний проводится методом вынужденных колебаний.

Эксперимент состоит из двух этапов. На первом разделитель отсутствует. Период этих колебаний — T , его определяем непосредственно по данным, получаемым с ЭВМ, связанной с возбудителем. График колебаний представлен на Рис. 4.4 Здесь $s(t)$ — временной множитель в потенциале скоростей $\Phi_i(x, r, t)$:

$$\Phi_i = A_i ch \left(\lambda \frac{x_i}{R} \right) J_0 \left(\lambda \frac{x_i}{R} \right) s(t) \quad (4.5)$$

Формула (4.5) представляет собой выражение функции Φ для первого тона симметричных колебаний жидкости в баке без разделителя. Сопротивление колебаниям отсутствует. На втором этапе исследуются колебания бака с разделителем. Возбуждаются симметричные колебания жидкости и определяется период T_1 первого тона колебаний системы с сопротивлением. Полагая демпфирование

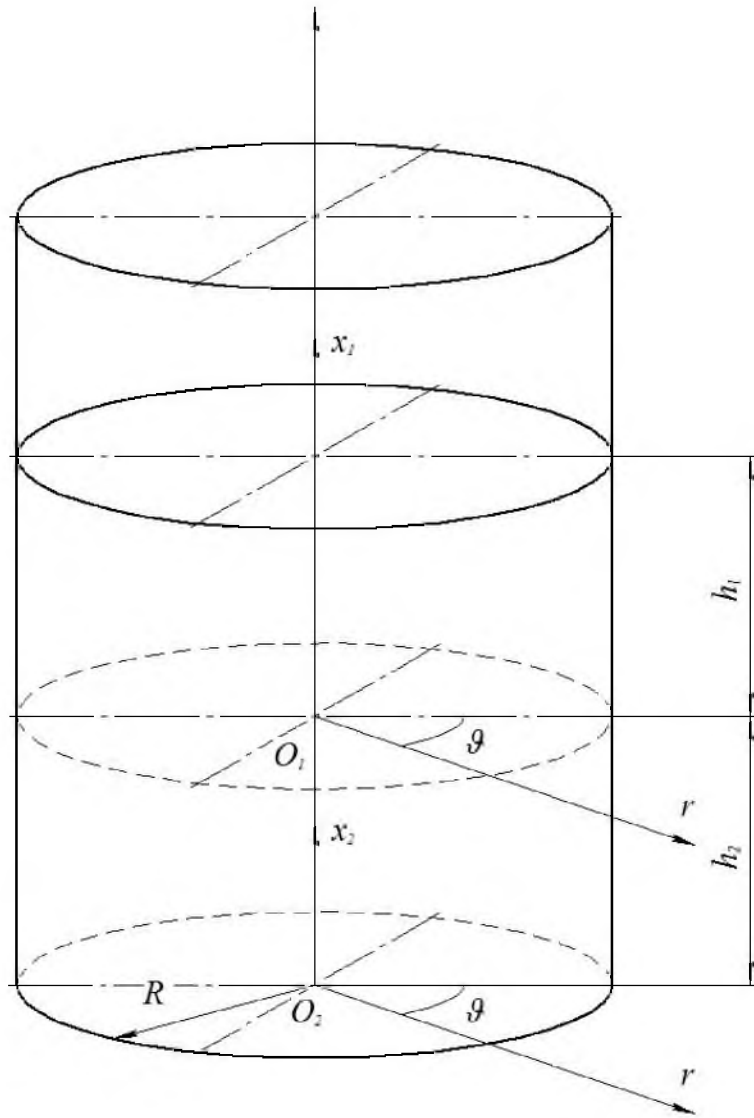


Рис. 4.3. Системы координат, вводимые применительно к баку с жидкостью 1, обозначенному на схеме установки (Рис. 4.1).

в системе линейно-вязким находим коэффициент затухания по известной формуле:

$$n_{exp}^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2, \quad (4.6)$$

здесь n — коэффициент затухания T_1, T — периоды симметричных колебаний жидкости в баке учетом и без учета разделителя соответственно. Таким образом:

$$n_{exp} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 - \left(\frac{1}{T_1}\right)^2}. \quad (4.7)$$

Дифференциальные уравнения движения эквивалентного механического анало-

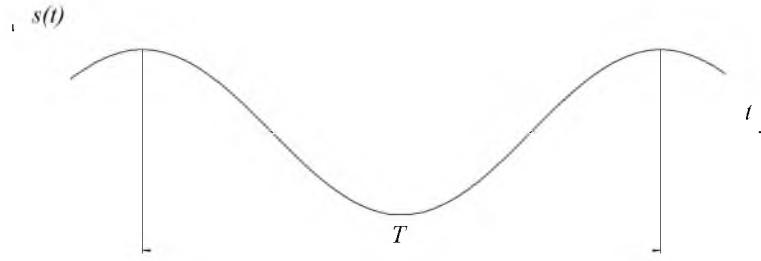


Рис. 4.4. График колебаний

га имеют вид:

$$m^0 \frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + c^0 y = 0. \quad (4.8)$$

В (4.8) речь идет о первом тоне свободных колебаний бака с разделителем, заполненным на высоту $h_1 + h_2$. Приведенную массу m^0 вычисляем по формуле:

$$m^0 = \frac{\rho}{2} \left[\iint_{S_1} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{n}_1} dS_1 + \iint_{S_2} \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}_2} dS_2 \right], \quad (4.9)$$

где ρ — плотность жидкости, Φ_1, Φ_2 — потенциалы скоростей жидкости выше и ниже разделителя соответственно, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ — векторы нормали к смачиваемым цилиндрическим поверхностям выше и ниже разделителя, S_1, S_2 — площади этих поверхностей. Приведем (4.8) к каноническому виду:

$$m^0 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dy}{dt} + \omega_1^2 y = 0, \quad (4.10)$$

где $2n_{exp} = \frac{k}{m^0}$ — коэффициент затухания системы с разделителем. В дальнейшем, будем исходить из постулата

$$n_{exp} = n_1(\gamma), \quad (4.11)$$

где n_{exp} — коэффициент затухания, получаемый из эксперимента, $n_1(\gamma)$ — коэффициент затухания, найденный аналитически. Далее используем результаты, изложенные в [28]. В этой работе принимали частотный параметр p в соответствии с представлением:

$$p = \alpha + i\beta,$$

временной множитель в выражении для потенциала скоростей имел вид:

$$e^{ipt} = e^{-\beta t} \cdot e^{i\alpha t}.$$

Здесь, первый сомножитель временного множителя в выражении для потенциала скоростей Φ характеризует затухание колебаний, а второй — частоту свободных гармонических колебаний. На этом основании можно утверждать, что $n = \beta$. В выражение для β входит величина искомого коэффициента γ . На основании [28] можно получить трансцендентное уравнение, в котором будут присутствовать величины α и β . Для первого тона колебаний это уравнение имеет вид:

$$2\alpha\beta\kappa_1 \operatorname{ch}\left(\lambda_1 \frac{h_2}{R}\right) - \xi_1 (\alpha^2 - \beta^2) \alpha \lambda_1 - 2\alpha\beta^2 \lambda_1 \xi_1 + 2\alpha\beta \operatorname{sh}\left(\lambda_1 \frac{h_1}{R}\right) \operatorname{sh}\left(\lambda_1 \frac{h_2}{R}\right) = 0, \quad (4.12)$$

где λ_1 — корень функции Бесселя I-го рода, первого порядка;

$$\xi_1 = \gamma \frac{\operatorname{sh}\left(\lambda_1 \frac{h_1}{R}\right) \kappa_1}{\varrho R (\alpha^2 - \beta^2)}, \quad \kappa_1 = \operatorname{ch}\left(\lambda_1 \frac{h_1}{R}\right) + g \frac{h_1}{R} \operatorname{sh}\left(\lambda_1 \frac{h_1}{R}\right). \quad (4.13)$$

Подставим в выражение (4.12) вместо α и β их значения, найденные экспериментально, т.е. $\alpha = \omega_1$, $\beta = n_{exp}$. Тогда из (4.12) получим формулу для искомого коэффициента γ , которая после несложных преобразований с учетом (4.13) примет вид:

$$\gamma = -\frac{\varrho R a_{3k}}{2\lambda_k^2 \beta_k} \left[\frac{g a_{1k}}{R a_{3k}} \lambda_k - 8\beta^2 \lambda_k - \frac{g}{R} a_{1k} + \sqrt{\left(\frac{g a_{1k}}{R a_{3k}} \lambda_k - 8\beta^2 \lambda_k - \frac{g}{R} a_{1k} \right)^2 + 8 \frac{\lambda_k^2 \beta_k^2}{a_{3k}} \left(\frac{g}{R} a_{2k} + \beta_k^2 a_{3k} \right)} \right],$$

где β_k — коэффициент затухания, λ_k — корень первой производной функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, получаемый из условий непротекания

на стенке бака, g — ускорение свободного падения, R — радиус бака, кроме того,

$$a_{3k} = \left[\operatorname{sh} \left(\lambda_k \frac{h_2}{R} \right) \operatorname{th} \left(\lambda_k \frac{h_1}{R} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\lambda_k \frac{h_2}{R} \right)} \right], \quad a_{2k} = \left[1 + \frac{\operatorname{th} \left(\lambda_k \frac{h_1}{R} \right)}{\operatorname{sh} \left(\lambda_k \frac{h_2}{R} \right)} \right],$$

$$a_{1k} = \lambda_k^2 \operatorname{th} \left(\lambda_k \frac{h_1}{R} \right).$$

Таким образом, показана связь между аналитической зависимостью коэффициента затухания при симметричных колебаниях жидкости в баке с сопротивлением с коэффициентом затухания определяемым экспериментально, что позволяет осуществить экспериментальное определение значения коэффициента сопротивления γ целью дальнейшего подробного исследования динамики взаимодействия жидкости с разделителем.



Рис. 4.5. Фотография экспериментальной установки по возбуждению колебаний

4.3. Описание системы модальных испытаний PRODERA

Система модальных испытаний состоит из следующих основных блоков:

1. ЭВМ с предустановленной программой P-Win-Modal
2. Блок сбора и обработки данных P-Sys-Modal

3. Усилители мощности
4. Вибровозбудители
5. Акселерометры
6. Усилители заряда

Сигнал управления вибровозбудителями, вырабатываемый в P-Win-Modal, поступает на вибровозбудители, задающие определенные режимы колебаний испытуемой конструкции. Возбужденные колебания замеряются акселерометрами, выходные сигналы которых поступают через усилители заряда в P-Sys-Modal и для дальнейшей обработки программой P-Win-Modal в ЭВМ.

P-Win-Modal — программное обеспечение, работающее под операционной системой Windows и предназначенное для управления системой модального анализа P-Sys-Modal.

При проведении испытаний с гармоническим возбуждением, действительная (real) и мнимая (imaginary) части откликов датчиков вычисляются в реальном времени на плате умножителя (multiplier). Требуемые сигналы получаются в результате умножения сигналов датчиков на синусный или косинусный сигналы генератора. В обоих случаях, результирующие сигналы имеют постоянные составляющие, пропорциональные соответственно действительной и мнимой частям откликов датчиков. Постоянные составляющие вычисляются путем осреднения зарегистрированных значений.

$$A \sin(\omega t + \phi) F \sin(\omega t) = \frac{AF}{2} \cos(\phi) - \frac{AF}{2} \cos(2\omega t + \phi)$$

$$A \sin(\omega t + \phi) F \cos(\omega t) = \frac{AF}{2} \sin(\phi) - \frac{AF}{2} \sin(2\omega t + \phi)$$

При гармоническом возбуждении, воспроизведение в реальном времени фигур Лиссажу от 32-х выбранных датчиков производится в специальном окне (смотрите пункт 5.3.3.) На резонансе, когда отклики всех датчиков находятся в фазе или противофазе с возбуждающими силами, все фигуры Лиссажу должны

быть прямыми линиями. Однако, это верно лишь для датчиков скорости. В других случаях, фигуры Лиссажу должны вычисляться относительно квадратуры (сдвинутых по фазе на $\frac{\pi}{2}$) возбуждающих сил.

P-SYS-Modal включает в себя собственный источник питания, обеспечивающий следующие напряжения: +5 В, +15 В, -15 В. Потребляемая мощность P-SYS-Modal составляет 250 Вт. Для ограничения тока на выходе +5 В источника питания устанавливается резистор номиналом 5 Ом.

Для связи с аппаратной частью компьютера, P-SYS-Modal® использует две платы фирмы National Instruments. Одна из плат предназначена для управления системой (цифровая плата), а вторая используется для сбора различных сигналов (аналоговая плата).

P-Win-Modal® работает под управлением операционной системы Windows™, используя драйвер National Instruments NIDAQ версии 6.7. Этот драйвер должен быть установлен в первую очередь (для более подробной информации обратитесь к руководству National Instruments), а затем платы можно установить в компьютер. Платы должны быть установлены и настроены в соответствии с документацией National Instruments.

Основным блоком P-SYS-Modal® является ультрастабильный синусоидальный и импульсный генератор, специально разработанный для метода подбора сил. Сигнал постоянно генерирует синусоидальный и косинусный сигнал в соответствии с заданной частотой, как в цифровом, так и в аналоговом виде. Сигнал передается на главную шину. Для проведения импульсных испытаний, вместо синусоидального сигнала, могут быть созданы три вида импульсов в соответствии с требуемой шириной полосы.

P-SYS-Modal® специально разработан для обеспечения до 16 различных синхронных сигналов возбуждения (с разными амплитудами, но всегда с одной фазой или противофазой) на основе сигнала SG, поступающего с выхода генератора. Сигналы возбуждения обеспечивают возможность определения моды вибрации. Возбуждение может проходить, как в синусоидальном, так и в им-

пульсном режиме. Кроме того, при гармоническом возбуждении, к сигналу SG (синусоидальному сигналу) можно «прибавить» определенную часть сигнала, сдвинутого на 90° по фазе – SQ (косинусоидальный сигнал) для обеспечения работы метода подбора сил. Часть «прибавляемого» квадратурного сигнала может быть задана в параметре QL – Quadrature Level – Уровень Квадратуры (-1000 до +1000).

В результате получится сигнал S_0 амплитуда которого в конечном итоге определяется Общим коэффициентом усиления GL – General Level – Общий Уровень (-100 до +100). В свою очередь амплитуда сигнала, поступающего на каждый канал возбуждения S_i , определяется собственным коэффициентом усиления – PL_i – Particular Level – Частный Уровень (-1000 до +1000). Таким образом, на отдельный канал возбуждения поступает сигнал, определяемый следующей формулой:

$$S_i = \frac{PL_i}{1000} \frac{GL}{100} \left[SG + j \frac{QL}{1000} SQ \right]$$

Максимальные выходные напряжения платы генератора (для синуса и косинуса) составляет 5 В (пиковое), таким образом, максимальный выходной сигнал для любого частного канала составляет

$$S_{max} = 5 + 5j \approx 7,07V_{peak}$$

Применяется усилитель мощности A651/S1 (совместно с источником питания катушки подмагничивания ABC 107)

Основные характеристики

- Нагрузочная способность до 1000 ВА
- Широкий диапазон рабочих частот
- Работа от 0 Гц
- Воздушное охлаждение
- Индикация пиковых значений выходного тока и напряжения, а также

положения подвижной части вибровозбудителя.

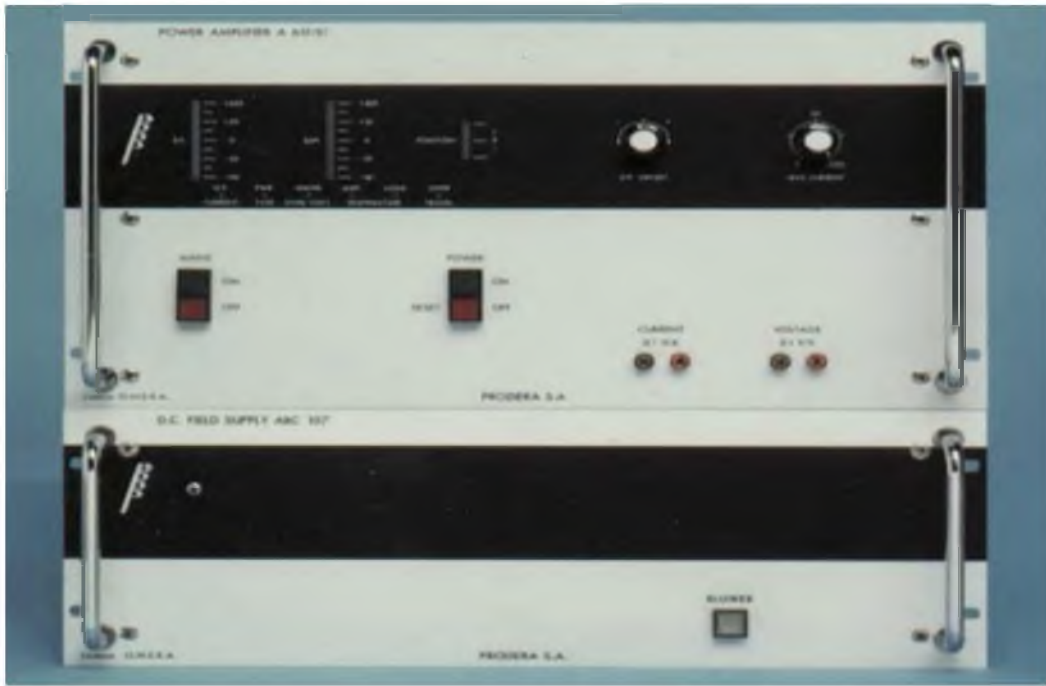


Рис. 4.6. Усилитель мощности A651/S1

- Встроенная электронная защита от: превышения допустимого напряжения в сети питания, перегрева нагрузки или выходных каскадов усилителя, рассогласования нагрузки, превышения предельной амплитуды колебаний вибратора.

Приведение в действие вибровозбудителя EX1060 (1000 Н) в режиме автоматического поддержания постоянной амплитуды развиваемой силы при проведении модальных испытаний с одноточечным и многоточечным возбуждением. При использовании блока расширения A651/S2, обеспечивает работу вибровозбудителя EX2060 с усилием 2000 Н (также для модального анализа). Усилитель мощности общего применения обеспечивает заданную амплитуду и форму тока управления вне зависимости от параметров колебания подвижной части вибратора. Усилитель мощности A651/S1 специально рассчитан на подключение к электродинамическим вибровозбудителям. Характерными чертами усилителя являются: высокое выходное сопротивление (источник тока) и согласованность выходного тока по амплитуде и фазе с входным напряжением. Эти качества делают усилитель мощности A651/S1 оптимальным для задания постоянной силы



Рис. 4.7. Возбудитель EX 220 SC

при измерении механического импеданса. Воздушное охлаждение специально рассчитано на длительную работу усилителя на несогласованную нагрузку при максимальной развиваемой мощности. В усилителе А651/S1 используются современные полупроводниковые элементы (транзисторы и интегральные схемы), обеспечивающие надежную работу в широком температурном диапазоне.

Назначение возбудителя заключается в преобразовании тока, поступающего от усилителя мощности, в пропорциональную силу, обеспечивающую вибрационные колебания исследуемой конструкции.

Магнитная схема цилиндрического постоянного магнита обеспечивает магнитное поле, в котором располагается подвижная катушка, подвешенная на круглой мембране, обеспечивающей значительное продольное и очень малое боковое перемещения. Боковое перемещение ограничено механической защитой с возможностью индикации на усилителе величины трения-скольжения между подвижной катушкой и механизмом центрирования.

Таблица 4.1. Технические характеристики возбудителя EX 220 SC

Номинальная сила	200 Н
Максимальный пиковый ток (с охлаждением)	20 А
Максимальный пиковый ток (без охлаждения)	10 А
Номинальное перемещение	± 10 мм
Максимальное перемещение	± 12 мм
Линейность сила/ток	$> 0,5\%$
Изменение силы в зависимости от положения катушки в воздушном зазоре	50% при ходе: $< 1,5\%$
Максимально допустимая поперечная сила	75 Н
Максимальное сопротивление соединительного жгута	0,1 Ом
Рекомендованный усилитель мощности	A 648 S (400 Вт)
Магнитная цепь	Постоянный цилиндрический магнит
Охлаждение	Вентилятор 220В, 50/60 Гц
Внешние разъёмы	Souriau 840.43.132 Cannon DE 9P
Крепление к подвижной части возбудителя	Шток с наружной резьбой М6
Общая масса	24 кг
Коэффициент силы	10,2 Н/А
Сопротивление катушки при 20°C	0,4 Ом
Диапазон рабочих частот	От DC до 2800 Гц

В состав возбудителя EX 220 SC входит вентилятор, запитываемый от усилителя мощности, для обеспечения воздушного охлаждения подвижной катушки. Индикатор перемещения позволяет в любое время определить статическое положение подвижной катушки при установке на возбудитель испытуемого объекта, а также амплитуду колебания подвижной катушки в процессе проведения



Рис. 4.8. Пьезоэлектрический акселерометр PAC/40/M

испытаний. Показания индикатора одновременно отображаются на лицевой панели усилителя мощности, подключенного к возбудителю.

Благодаря своему объему, весу и техническим характеристикам возбудитель EX 220 SC обеспечивает проведение большинства вибрационных испытаний. При использовании совместно с усилителем мощности А 648 (400 Вт), возбудитель обеспечивает усилие 200 Н и ускорение (без нагрузки) до 650 м/сек² при гармонических искажениях менее 1 процента в диапазоне от DC до 2700 Гц.

Акселерометр типа PAC/40/M представляет собой пьезоэлектрический акселерометр в водонепроницаемом корпусе. Акселерометр представляет собой легкое основание на котором крепится консольная балка, изгиб которой обеспечивает генерацию заряда.

Акселерометр соединяется с усилителем заряда с помощью специального малошумного кабеля длиной 5 метров.

Усилитель сигнала PCA16 содержит 16 идентичных измерительных каналов. Каждый канал содержит усилитель заряда, дифференциальный усилитель с дистанционно управляемым коэффициентом усиления и дистанционно управляемый фильтр нижних частот. Широкий выходной диапазон позволяет использовать усилитель для большинства пьезоэлектрических зарядовых аксе-



Рис. 4.9. Шестнадцатиканальный блок усилителей пьезоэлектрических акселерометров PCA16

лерометров. Дифференциальный выход рассчитан таким образом, что бы подключаться к блоку сбора данных с помощью простой витой пары или плоского кабеля длиной около 30 метров.

4.4. Результаты

При возбуждении колебаний система PRODERA реализует гармоническое воздействие на сосуд с жидкостью, с определенной частотой в течение задаваемого нами промежутка времени при ограничении перемещения. Система меняет частоту гармонического возбуждения в соответствии с задаваемой нами программой изменения. Явление резонанса мы фиксируем визуально, по наибольшей амплитуде перемещений свободной поверхности жидкости. Можно видеть, что амплитудные значения перемещений, получаемые интегрированием данных об ускорении, которые фиксируют пьезодатчики размещенные на днище модельного бака соответствуют переходу фазового угла через 0. Именно частоту, при которой фазовый угол равен нулю мы и будем определять как резонансную. Ниже представлен ФЧХ, выводимых системой PRODERA для различных модельных жидкостей. Полученные значения частот сведены в таб-

Таблица 4.2. Технические характеристики блока усилителей пьезоэлектрических акселерометров PCA16

Входное сопротивление, мОм	>1010
Входной диапазон (в соответствии с выбранной чувствительностью), pC	1000 или 100
Чувствительность при КУ = 1 мВ/pC (установка в соответствии с выбранным датчиком)	20 или 200
Дистанционно устанавливаемые коэффициенты усиления (общие для всех каналов, 2 TTL бита)	x1, x2, x5, x10
Частоты среза дистанционно управляемого ФНЧ (общие для всех каналов, 2 TTL бита)	ФНЧ отключен 200 Гц, 2 кГц
Диапазон выходного напряжения, пиковое значение	± 10 В, 20 В
Выходное сопротивление	150 Ом
Фазовая характеристика в диапазоне от 1 Гц до 20 кГц:	±2°

лицу 4.3, по которым определены осреднённые значения коэффициентов γ для различных жидкостей.

Здесь четвертая строка в таблице 4.3 соответствует измерениям, проведенным с этанолом в качестве модельной жидкости. Как можно видеть, смена модельной жидкости оказывает слабое влияние на частоту. Осредняя, получим значения $\nu = 3,48$ Гц для частоты колебаний без разделителя и $\nu_1 = 2.51$ Гц для частоты колебаний в баке с разделителем. Важно также отметить, что полученный результат $\nu = 3,48$ Гц для частоты колебаний без разделителя хорошо согласуется с теоретическим результатом, получаемым по известной формуле:

$$\nu_{\text{теор}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g \frac{\lambda_k}{R} \operatorname{th} \left(\lambda_k \frac{h_1 + h_2}{R} \right)}, \quad (4.14)$$

для задаваемых параметров бака значение $\nu_{\text{теор}} = 3,54$ Гц и, таким образом, разница с экспериментом составляет величину порядка 2 %.

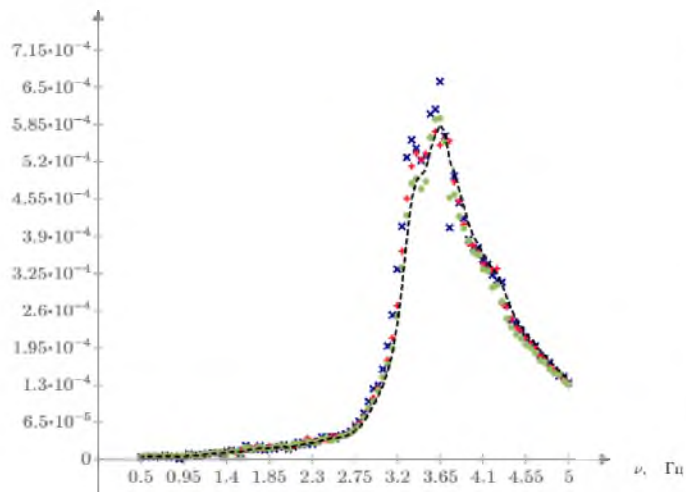


Рис. 4.10. Экспериментальные точки для АЧХ при возбуждении колебаний сосуда без разделителя. Модельная жидкость — вода. Параметры возбуждения: Коэффициент усиления: 0,1; Шаг по частоте: 0,05 Гц

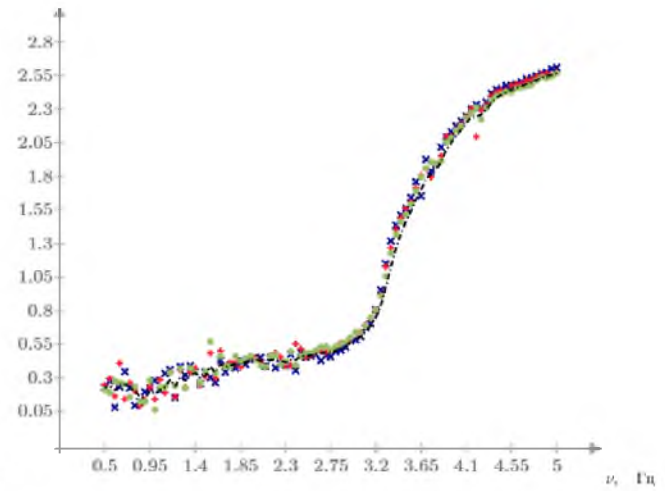


Рис. 4.11. Экспериментальные точки для ФЧХ при возбуждении колебаний сосуда без разделителя. Модельная жидкость — вода. Параметры возбуждения: Коэффициент усиления: 0,1; Шаг по частоте: 0,05 Гц

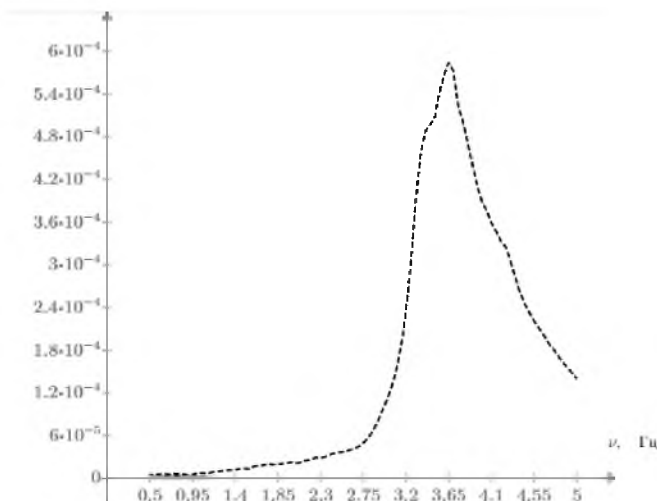


Рис. 4.12. Аппроксимирующая кривая для АЧХ. Колебания без разделителя

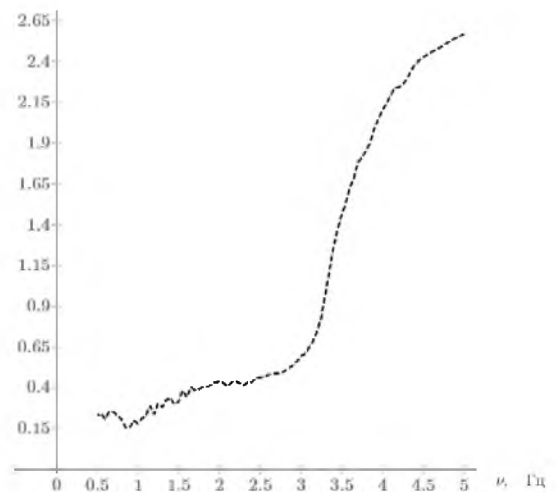


Рис. 4.13. Аппроксимирующая кривая для ФЧХ. Колебания без разделителя

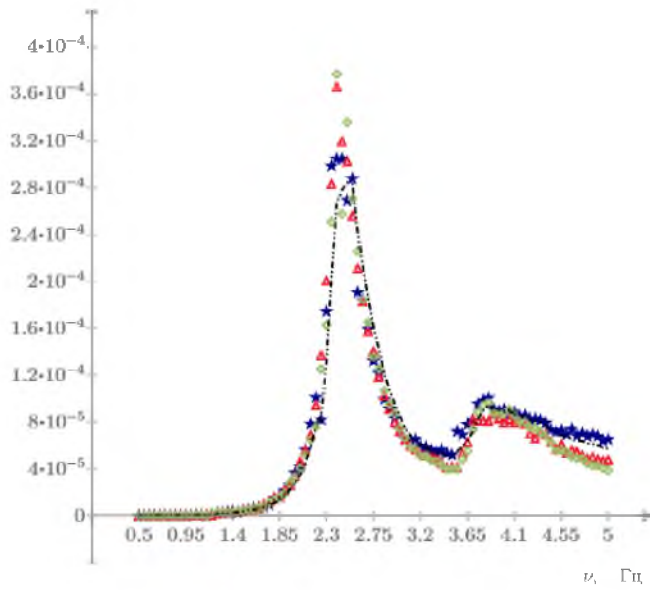


Рис. 4.14. Экспериментальные точки для АЧХ при возбуждении колебаний сосуда с разделителем. Модельная жидкость — вода. Параметры возбуждения: Коэффициент усиления: 0,1; Шаг по частоте: 0,05 Гц

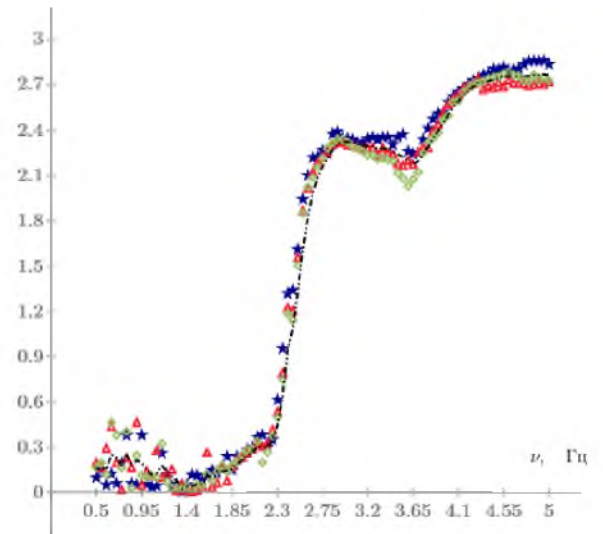


Рис. 4.15. Экспериментальные точки для ФЧХ при возбуждении колебаний сосуда с разделителем. Модельная жидкость — вода. Параметры возбуждения: Коэффициент усиления: 0,1; Шаг по частоте: 0,05 Гц

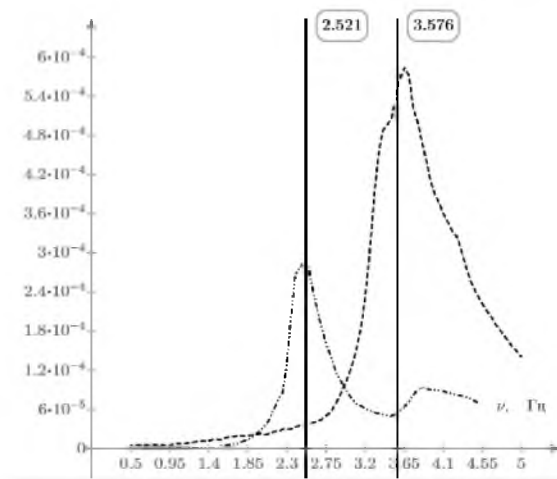


Рис. 4.16. Аппроксимирующие кривые для АЧХ

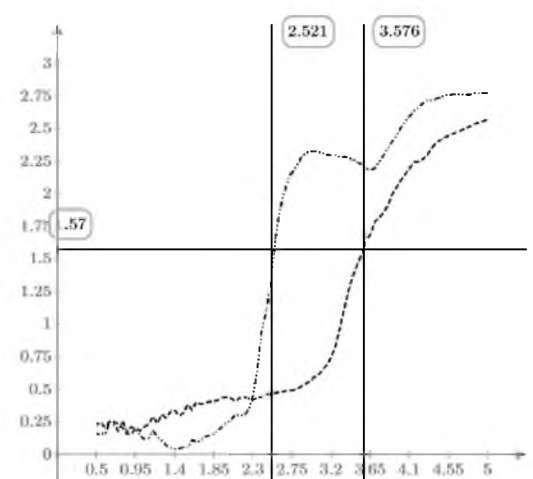


Рис. 4.17. Аппроксимирующие кривые для ФЧХ

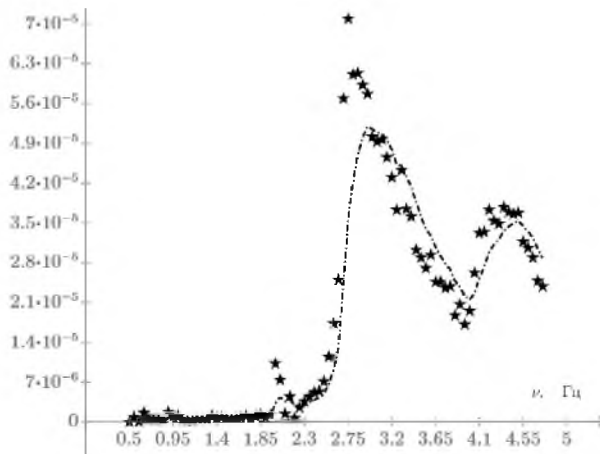


Рис. 4.18. АЧХ для колебаний сосуда без разделителя. Модельная жидкость — этанол. Параметры возбуждения: Коэффициент усиления: 0,1; Шаг по частоте: 0,05 Гц

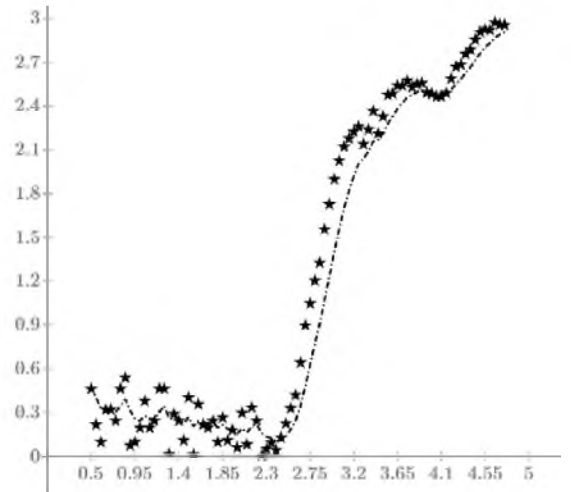


Рис. 4.19. ФЧХ для колебаний сосуда без разделителя. Модельная жидкость — этанол. Параметры возбуждения: Коэффициент усиления: 0,1; Шаг по частоте: 0,05 Гц

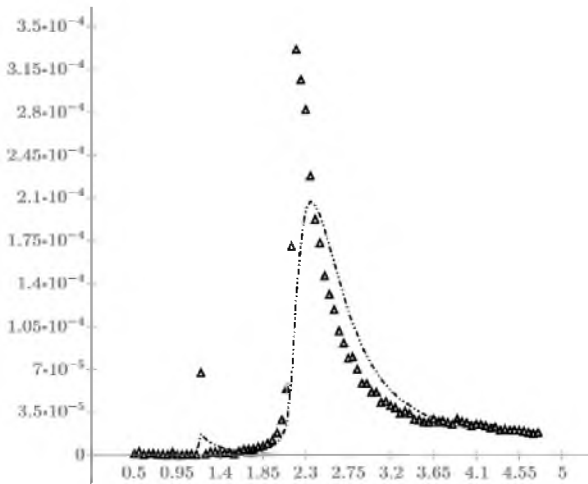


Рис. 4.20. АЧХ для колебаний сосуда с разделителем. Модельная жидкость — этанол. Параметры возбуждения: Коэффициент усиления: 0,1; Шаг по частоте: 0,05 Гц

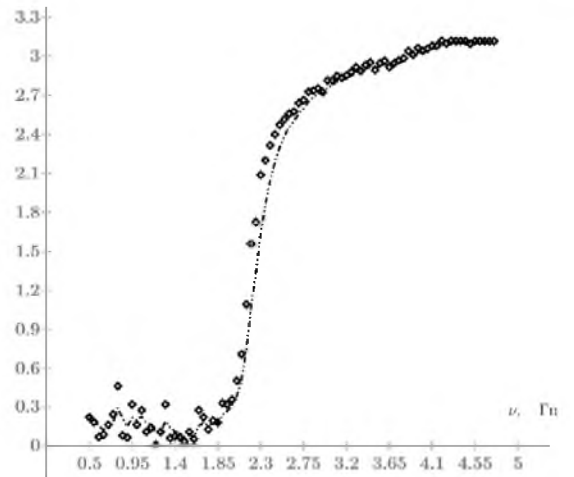


Рис. 4.21. АЧХ для колебаний сосуда с разделителем. Модельная жидкость — этанол. Параметры возбуждения: Коэффициент усиления: 0,1; Шаг по частоте: 0,05 Гц

Таблица 4.3. Результаты измерений

№ п/п	Частота колебаний	
	в баке без разделителя, Гц	в баке с разделителем, Гц
1	3,45	2,48
2	3,49	2,52
3	3,52	2,54
4	3,45	2,5

Полученные величины позволяют определить коэффициент затухания рассматриваемой гидроупругой системы в соответствии с формулой (4.7):

$$n_{exp} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 - \left(\frac{1}{T_1}\right)^2} = 2\pi \sqrt{\nu^2 - \nu_1^2} = 15,14 \text{ с}^{-1}.$$

Значения искомого коэффициента γ определяем в соответствии с соотношением

$$\gamma = -\frac{\rho R a_{3k}}{2\xi_k^2 \beta_k} \left[\frac{g a_{1k}}{R a_{3k}} \xi_k - 8\beta^2 \xi_k - \frac{g}{R} a_{1k} + \sqrt{\left(\frac{g a_{1k}}{R a_{3k}} \xi_k - 8\beta^2 \xi_k - \frac{g}{R} a_{1k}\right)^2 + 8 \frac{\xi_k^2 \beta_k^2}{a_{3k}} \left(\frac{g}{R} a_{2k} + \beta_k^2 a_{3k}\right)} \right],$$

где β_k — коэффициент затухания, ξ_k — корень первой производной функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, получаемый из условий непротекания на стенке бака, g — ускорение свободного падения, R — радиус бака, кроме того,

$$a_{3k} = \left[\text{sh} \left(\xi_k \frac{h_2}{R} \right) \text{th} \left(\xi_k \frac{h_1}{R} \right) + \frac{1}{\text{sh} \left(\xi_k \frac{h_2}{R} \right)} \right], \quad a_{2k} = \left[1 + \frac{\text{th} \left(\xi_k \frac{h_1}{R} \right)}{\text{sh} \left(\xi_k \frac{h_2}{R} \right)} \right],$$

$$a_{1k} = \xi_k^2 \text{th} \left(\xi_k \frac{h_1}{R} \right).$$

4.5. Выводы по четвертой главе

Для определения методом вынужденных колебаний собственных частот модельного бака заполненного жидкостью (в качестве модельных жидкостей применялась вода и этанол) с разделителем и без него был спроектирован и изготовлен рассмотренный в главе стенд. Явление резонанса фиксировалось посредством изменения знака фазового угла, в соответствии с ФЧХ системы и визуально. По найденным частотам собственных колебаний бака заполненного жидкостью с разделителем и без него был определен коэффициент затухания, в предположении, что демпфирование в системе обусловлено в первую очередь наличием разделителя. Такое предположение, видимо, может применяться лишь к маловязким жидкостям. В случае же, когда вязкость жидкости принимает существенные значения, демпфирование в системе будет обусловлено в том числе и вязкостью самой жидкости. В этом случае, определять коэффициент расхода по предложенному методу нельзя. Соотношение (4.14) дает выражение для частоты собственных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом баке в пренебрежении ее вязкостью и мы видим, что для воды погрешность определения частоты в этом случае не превышает 2%, в то время как для этанола, указанная погрешность 11 %.

Заключение

1. Необходимость разработки математических моделей колебаний упругого бака, заполненного двухслойной жидкостью, разделенной проницаемой перегородкой, учитывающей сопротивление этой перегородки, обусловлена работами по созданию новых изделий ракетно-космической техники, в частности, перспективных разгонных блоков, со специфической внутрибаковой конструкцией, обусловленной необходимостью многократного запуска двигательной установки, что подтверждает ряд работ таких авторов как Кононов, Титаренко, Партола и Сапожников, опубликованных в течение последних лет.

Проведенный анализ публикаций свидетельствует о недоработанности вопроса о колебаниях жидкости в баке с проницаемой перегородкой: в ряде работ проницаемостью перегородки пренебрегается вовсе: такой подход излагается в работах Поляева, Бауэра; либо привлекаются модели течения жидкости в пористой среде (так действует, например, Партола), однако, в этом случае возникает вопрос о формулировании соответствующих краевых задач, решение данного вопроса представляется отнюдь не тривиальным.

2. Для поставленных краевых задач, а именно:

- Малые осесимметричные колебания двухслойной жидкости с непроницаемым разделителем.
- Малые осесимметричные колебания двухслойной жидкости с непроницаемым разделителем в условиях слабой гравитации.

Получены, в рамках принятых допущений, точные аналитические решения. Для следующих краевых задач:

- Малые осесимметричные колебания двухслойной жидкости с прони-

цаемым разделителем.

- Малые осесимметричные колебания двухслойной жидкости с проникаемым разделителем и пологой сферической оболочкой в качестве днища.

В рамках принятых допущений, получены зависимости приведенного коэффициента расхода при течении жидкости сквозь проникаемую перегородку от коэффициентов затухания системы. Таким образом, разработана математическая модель малых колебаний двухслойной жидкости в упругом баке с проникаемой перегородкой, позволяющая учитывать сопротивление перегородки.

3. Предложен экспериментально-аналитический метод определения коэффициента расхода жидкости при течении через перегородку. Установленная зависимость коэффициентов расхода от коэффициентов затухания системы позволяет определить искомые расходные коэффициенты по известным коэффициентам затухания. Значения соответствующих коэффициентов затухания определяются экспериментально, посредством определения собственных частот колебаний бака с жидкостью при отсутствии и наличии разделителя. Определение собственных частот проводится методом вынужденных колебаний.
4. Конструктивно проработаны и созданы экспериментальный стенд, модели баков с разделителем и без него, позволившие осуществить экспериментальное определение значений коэффициентов затухания системы, в свою очередь, на основе которых было осуществлено определение приведенного коэффициента расхода жидкости, при течении через перегородку.
5. В практической части, достигнуты следующие результаты:
 - Разработанная модель взаимодействия жидкого топлива с проникае-

мым разделителем позволяет ограничить круг требований к системе обеспечения запуска еще на этапе проектирования космического летательного аппарата.

- Разработана методика экспериментального определения приведенного коэффициента демпфирования на модели бака разгонного блока, что позволяет сократить затраты при создании новой техники.
- Осуществлено внедрение научно-технических результатов работы в рамках НИР №01201355404, выполняемой в ИМАШ РАН в рамках п.№30 Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук «Методы анализа и синтеза многофункциональных механизмов и машин для перспективных технологий и человеко-машинных комплексов. Динамические и виброакустические процессы в технике» на 2013 — 2020 годы.

Полученные результаты, позволяют сделать вывод о том, что при обеспечении предельного давления с некоторой частотой p на свободной поверхности, то давление на заборном устройстве будет гарантированно больше нуля в том случае, если $z = \frac{p}{\omega_1} < \sqrt{2}$, где ω_1 — собственная частота продольных колебаний рассматриваемой системы. Таким образом, мы получаем результат, важный при проектировании соответствующих систем.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям: Пожалостину Алексею Алексеевичу и Шкапову Павлу Михайловичу, чья неоценимая поддержка ощущалась в течение всего времени работы над диссертацией. Автор также выражает искреннюю признательность Зимину Владимиру Николаевичу и Колоскову Игорю Михайловичу за ощутимую поддержку и содействие при планировании и проведении эксперимента.

Список литературы

1. Дьяченко М. И., Орлов В. В., Темнов А. Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических емкостях // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 11. С. 175 – 192. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/623923.html>.
2. Бужинский В.А. Колебания тел с острыми кромками в несжимаемой маловязкой жидкости и некоторые задачи гидродинамики космических аппаратов. 2003.
3. Темнов А.Н., Тейн У. Осесимметричные колебания оболочки, частично заполненной жидкостью, вытекающей через заборное устройства // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. 2008. № 1(70). С. 46 — 59.
4. Сапожников В.Б., Крылов В.И., Новиков Ю.М., Ягодников Д.А. Наземная отработка капиллярных фазоразделителей на основе комбинированных пористо-сетчатых материалов для топливных баков жидкостных ракетных двигателей верхних ступеней ракет-носителей, разгонных блоков и космических аппаратов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 4. С. 1 – 16. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/707.html>.
5. Сапожников В.Б., Меньшиков В.А., Партола И.С., Корольков А.В. Развитие идей профессора в.м.поляева по применению пористо-сетчатых материалов для внутрибаковых устройств, обеспечивающих многократный запуск жидкостных ракетных двигателей // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2006. № 2. С. 78 – 88.
6. Артюхова О.А., Давыдова Е.П., Николаев Д.А., Фадеев А.А. Математическое моделирование обтекания протеза клапана сердца в стационарном потоке // Бюллетень НЦССХ им. А.Н. Бакулева РАМН Сердечно-сосудистые заболевания. 2007. Т. 8, № 56. С. 304.
7. Правдин С.Ф. Математическое моделирование структуры и функции лево-

- го желудочка сердца: Кандидатская диссертация / Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина. 2015.
8. Стурова И.В. Генерация волн колеблющимся погруженным цилиндром при наличии плавающей полубесконечной упругой пластины // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2014. № 4. С. 98 — 108.
 9. Стурова И.В. Движение вертикальной стенки, закрепленной на пружинах, под действием поверхностных волн // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 5(297). С. 132 — 142.
 10. Кононов Ю.Н., Титаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Акустичний вістник. 2003. Т. 3, № 6. С. 44 — 52.
 11. Букреев В.И., Стурова И.В., Чеботников А.В. Сейшевые колебания в бассейне, заполненном двухслойной жидкостью // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2014. № 3. С. 110 — 118.
 12. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со Аунг Наинг. Волны Фарадея в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2015. № 4. С. 83 — 91.
 13. Калиниченко В.А., Коровина Л.И., Нестеров С.В., Со Аунг Наинг. Особенности колебаний жидкости в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 12(36). URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1345.html>.
 14. Стурова И.В. Внутренние сейши в водоеме, заполненном непрерывно стратифицированной жидкостью // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2014. № 6. С. 70 — 79.
 15. Смирнов С.В., Кучер К.М., Гранин Н.Г., Стурова И.В. Сейшевые колебания Байкала // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы

- и океана. 2014. Т. 50, № 1. С. 105.
16. Букреев В.И., Стурова И.В., Чеботников А.В. Сейшевые колебания в прямоугольном канале с резким расширением поперечного сечения // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 4(320). С. 22 — 31.
 17. Поляев В.М., Багров В.В., Курпатенков А.В. Капиллярные системы отбора жидкости из баков космических летательных аппаратов. УНПЦ „Энергомаш“, 1997. 328 с.
 18. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.: ОГИЗ, 1947. 243 с.
 19. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 350с.
 20. В.П. Бушланов, И.В.Бушланов, Е.Н. Сентякова. О коэффициенте проницаемости в законе фильтрации Дарси // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Vol. 54.
 21. Кравцов А.В., Секерж-Зенькович С.Я. О свободных колебаниях маловязкой жидкости в сосуде, частично заполненном пористой средой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 746 — 751.
 22. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
 23. Иванов В.П., Партола И.С. Комбинированная система управления расходом топлива кислородно-водородного разгонного блока // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2011. № 3(27). С. 28 – 34.
 24. Гончаров Д. А. Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2012. № 4. С. URL: <http://elibrary.ru/download/40933053.pdf> (дата обращения: 19.02.2014).
 25. Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости, разделённой упругой

- перегородкой с учётом сил поверхностного натяжения // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. С. DOI:10.7463/1113.0619258.
26. Гончаров Д.А., Пожалостин А.А. Об экспериментальном методе определения коэффициента демпфирования разделителя двухсвязной жидкости в баке // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 4. С. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1342.html>.
 27. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 12. С. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (дата обращения 19.02.2014).
 28. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Малые колебания двухслойной жидкости с учетом проницаемости разделителя // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 5. С. 109 — 116.
 29. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Экспериментально-аналитический метод определения коэффициента сопротивления разделителя слоев жидкости в баке // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журн. 2015. № 4. С. 130 — 140. DOI: 10.7463/0415.0763626.
 30. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями // Известия высших учебных заведений: Авиационная техника. 2015. № 1. С. 31 — 34.
 31. Гончаров Д.А., Пожалостин А.А., Кокушкин В.В. Моделирование осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения посредством механического аналога // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журнал. 2015. № 5. С. DOI: 10.7463/0615.0779724.
 32. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. Free axisymmetric oscillations of a two-

- layer liquid with an elastic separator between layers // Russian Aeronautics. 2015. Vol. 58, no. 1. P. 37 — 41.
33. Goncharov D.A., Pozhalostin A.A. Experimental study of double-layer fluid motions in elastic tank // Fluxes and structures in fluids: Proceedings of International Conference; June 23 — 26, 2015, Kaliningrad. M.: MAKS Press, 2015. P. 85 — 88.
 34. Гончаров Д.А., Пожалостин А.А. Колебания двухслойной жидкости в упругом баке // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20 — 24 августа, 2015). Казань: 2015. С. 1014 — 1016.
 35. Гончаров Д.А., Пожалостин А.А. Методы решения задач динамики фазо-разделяющих элементов, взаимодействующих с жидкостью // XXXVIII академические чтения по космонавтике памяти акад. С.П.Королева (Москва, 28 — 31 января, 2014г): тез. докл. Москва: 2014. С. 44 — 45.
 36. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. Free axisymmetric oscillations of the double-layer liquid with the elastic separator // Fluxes and structures in fluids: Proceedings of International Conference; June 25 — 28, 2013, St.Petersburg. M.: MAKS Press, 2013. P. 244 — 245.
 37. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. К вопросу о малых движениях двухслойной жидкости сквозь сопротивление // 4-ая Международная научная школа молодых ученых (Москва, ИПРИМ РАН, 26 — 29 ноября, 2013 г.): сборник материалов школы. М.: 2013. С. 123 — 125.
 38. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Фундаментальные и прикладные задачи механики: 135 лет кафедре „Теоретическая механика“ имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, 23 — 25 октября, 2013 г.): сб. ст. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. С. 224 — 230.

39. Goncharov D.A., Pozhlostin A.A. Regarding the experimental method for determining the damping factor Separator doubly connected fluid reservoir // Physical and Mathematical Problems of Advanced Technology Development (Moscow, 17 — 19 November, 2014): Abstracts of International Scientific Conference. / BMSTU. Moscow: 2014. P. 16 — 17.
40. Гончаров Д.А., Пожалостин А.А. Экспериментальный метод определения коэффициента демпфирования разделителя двухсвязной жидкости в баке // 5-ая Международная научная школа молодых ученых (Москва, ИПРИМ РАН, 25 — 28 ноября, 2014 г.): сборник материалов школы. М.: 2014. С. 139 — 142.
41. Жуковский Н.Е. Собрание сочинений в 5 т. Ленинград: Госнаутехиздат, 1931. Т. 2. С. 54 — 60.
42. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Прикладная математика и механика. 1956. Т. XX. С. 3 — 20.
43. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 813 с.
44. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics. Cambridge University Press, 2005. 972 pp.
45. Чашечкин Ю.Д. Дифференциальная механика жидкостей: согласованные аналитические, численные и лабораторные модели стратифицированных течений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. „Естественные науки“. 2014. № 6. С. 67 — 95.
46. Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофизические исследования. 1969. № 3(45). С. 87 — 97.
47. Черноусько Ф.Л. Движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при больших числах Рейнольдса // Прикладная математика и механика. 1966. № 3. С. 476 — 494.

48. Черноусько Ф.Л. О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде // Прикладная математика и механика. 1966. № 5. С. 836 — 847.
49. Черноусько Ф.Л. О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью // Прикладная математика и механика. 1966. № 6. С. 977 — 992.
50. Кравцов А.В., Секерж-Зенькович С.Я. Параметрическое возбуждение колебаний вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33, № 4. С. 611 — 619.
51. Секерж-Зенькович С.Я. Собственные колебания вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54, № 1. С. 51 — 58.
52. Кравцов А.В., Секерж-Зенькович С.Я. О свободных колебаниях жидкости в сосуде, частично заполненном пористой средой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 746 — 751.
53. Бушланов В.П., Бушланов И.В., Сентлякова Е.Н. О коэффициенте проницаемости в законе фильтрации Дарси // Прикладная математика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 4. С. 109 — 113.
54. Гавриков А.А. О малых колебаниях эмульсии двух слабвязких сжимаемых жидкостей // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77, № 5. С. 725 — 742.
55. Балабух Л.И. Некоторые точные решения задачи о колебаниях жидкости в упругих оболочках // Труды V Всес. Конф. по теории пластин и оболочек. М.: 1965.
56. Колесников К.С. Жидкостная ракета как объект регулирования. М.: Машиностроение, 1969. 298 с.
57. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твёрдого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наукова думка, 1990. 296 с.

58. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
59. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. 563 с.
60. Микишев Г.Н., Дорожкин Н.Я. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1961. № 4. С. 48 — 56.
61. Ikeda T., Murakami S. Autoparametric resonance in a structure/fluid interaction system carrying a cylindrical liquid tank // Journal of sound and vibration. 2005. no. 285. P. 517 — 546.
62. Akulenko L.D., Nesterov S.V. Influence of Dissipation on Parametric Oscillations // Doklady Physics. 2010. Vol. 55, no. 11. P. 186 — 189.
63. Балабух Л.И. Взаимодействие оболочек с жидкостью и газом // Тр. 6 Всес. конф. по теории пластин и оболочек // Труды VI Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. М.: 1966. С. 935 — 938.
64. Балабух Л.И., Ганичев А. И., Молчанов А. Г. Две задачи о собственных колебаниях упругих систем с жидким заполнением // Расчеты на прочность. 1966. № 12. С. 386 — 392.
65. Балабух Л.И., Молчанов А. Г. Осесимметричные колебания сферической оболочки, частично заполненной жидкостью // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1967. № 5. С. 22 — 26.
66. Пожалостин А. А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 1963. № 3. С. 25 — 32.
67. Пожалостин А. А. Определение параметров механического аналога для осесимметричных колебаний упругого цилиндрического сосуда с жидкостью // Инженерный журнал МТТ. 1966. № 5. С. 157 — 159.
68. Пожалостин А. А. К теории собственных малых осесимметричных колебаний упругих баков, частично заполненных жидкостью // Колебания упру-

- гих конструкций с жидкостью: Доклады I-го все. симп. Новосибирск: 1970. С. 153 — 164.
69. Пожалостин А. А., Каменский О. А. Осесимметричные колебания упругой чечевицеобразной оболочки, частично заполненной жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Сб. научных докладов. симп. Новосибирск: 1974. С. 114 — 117.
70. Пожалостин А. А. Точные решения задачи о колебаниях двусвязных оболочек с жидкостью // Сб. тр. МВТУ. 1979. № 306. С. 20 — 30.
71. Пожалостин А. А., Паншина А. В. Приближенный метод определения логарифмического декремента для малых колебаний упругого сосуда, заполненного жидкостью // Сборник статей 125 лет кафедры теоретической механики МГТУ им. Н. Э. Баумана. 1978. С. 199 — 204.
72. Шмаков В. П. Применение численных методов к задачам о колебаниях упругих оболочек вращения, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Сб. трудов II-го Всес. симп. 1973. С. 15 — 20.
73. Шмаков В. П. О колебаниях непологих сферических оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 177 — 185.
74. Шмаков В. П. О Построение корректирующих функций в методе Бубнова — Галеркина // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 88 — 92.
75. Шмаков В. П. К вычислению собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах // Труды томского университета. 1978. С. 157 — 162.
76. Петренко М.П. Собственные колебания жидкости в жёстком упругом круговом цилиндрическом сосуде с упругим плоским дном // Известия высших учебных заведений. Сер. Авиационная техника. 1963. № 4. С. 25 — 32.
77. Балакирев Ю. Г. Осесимметричные колебания пологой сферической оболочки с жидкостью // Инженерный журнал. МТТ. 1967. № 5. С. 116 — 123.

78. Пожалостин А.А., Каменский О.А. Осесимметричные колебания упругой чечевицеобразной оболочки, частично заполненной жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью. Сб. научных докладов. симп. Новосибирск: 1974. С. 114 — 117.
79. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т. 16, № 8. С. 171 — 174.
80. Ивлена Л. И., Кухто В. А., Лампер Р. Е. О вариационном методе с нелинейным параметром и его приложении к задаче о колебаниях бака с жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Сб. трудов II-го Всес. симпозиума. Новосибирск: 1974. С. 28 — 32.
81. Шклярчук Ф. Н. О параметрических колебаниях цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью. Сб. трудов II-го Всес. симпозиума. Новосибирск: 1973. С. 205 — 208.
82. Докучаев Л. В. О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которого расположена мембрана // Строительная механика и расчет сооружений. 1972. № 1. С. 49 — 54.
83. Докучаев Л. В. Уравнения движения тела с жидкостью, имеющей на свободной поверхности гибкую мембрану // Динамика тел, взаимодействующих с жидкостью: Тр. Всес. семинара. Томск: 1977. С. 31 — 35.
84. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательного аппарата с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 231 с.
85. Aliev I.N., Yurchenko S.O., Nazarova E.V. On the problem of instability of the boundary problem of two media of finite thickness // Journal of Engineering Physics and Thermophysiks. 2007. Vol. 80, no. 6. P. 1199 — 1205.
86. Луковский И.А., Троценко В.А., Усюкин В.И. Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостью в подвижных полостях. Киев: Наукова думка, 1989. 240 с.

87. Балгеймер Г.Л., Левин В.Е. Об учёте особенности течения жидкости на вертикальной стенке // Динамика упругих и твёрдых тел, взаимодействующих с жидкостью // Сб. научных трудов семинара. Томск: 1984. С. 10 — 14.
88. Левин В.Е. Расчёт колебаний сферического бака с учётом особенностей течения жидкости в окрестности угловой точки // Динамика и прочность элементов авиационных конструкций / Межвузовский сборник научных трудов НЭТИ. 1986. С. 66 — 69.
89. Гриднев С.Ю., Будковой А.Н. Использование механического аналога жидкости для моделирования колебаний автоцистерны при разгоне и торможении // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2011. № 1. С. 98 — 106.
90. Гриднев С.Ю., Будковой А.Н. Динамическое воздействие автоцистерн с отсеками на пути при учете гидроудара // Строительная механика и конструкции. 2012. Т. 2, № 4. С. 116 — 121.
91. Дьяченко (Степанова) М.И., Темнов А.Н. Задачи устойчивости движения при перераспределении топлива в ракетах-носителях и космических аппаратах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 320 — 321.
92. Дьяченко (Степанова) М.И., Темнов А.Н. Малые движения жидкости с поверхностной диссипацией энергии // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2011. № 4. С. 99 — 110.
93. Дьяченко (Степанова) М.И., Темнов А.Н. Проблемы динамики перераспределения топлива в крупно-габаритных ракетно-космических объектах // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 8(8). С. 49.
94. Дьяченко (Степанова) М.И., Темнов А.Н. Собственные колебания жидкого топлива в условиях перераспределения // Вестник Московского госу-

- дарственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2012. № 3. С. 31 — 38.
95. Дьяченко (Степанова) М.И., Темнов А.Н. Проблема динамики перераспределения топлива в крупно-габаритных ракетно-космических объектах // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2012. № 3. С. 164 — 172.
96. Дьяченко (Степанова) М.И., Орлов В.В. Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических ёмкостях // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. № 11. С. 175 — 192.
97. Андронов А.В. Колебания идеальной тратифицированной жидкости в контенере с упругим днищем // Вопросы волновых движений жидкости: сб. научн. тр. КубГТУ. 1987. Р. 42 — 51.
98. Нго Зуй Кан. О движении идеальной жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, заполняющей сосуд с плоским днищем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1980. № 3. С. 143 — 154.
99. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран, разделяющих многослойную жидкость в цилиндрическом сосуде с упругим дном // Динамические системы. 2006. № 21. С. 7 — 13.
100. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания многослойной жидкости, разделенной упругими инерционными мембранами // Динамические системы. 2004. № 18. С. 111 — 118.
101. Тейн У. Колебания упругого днища с протекающей жидкостью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. 2008. № 2(71). С. 176 — 178.
102. Грибков В. А. Основные итоги исследования динамических характеристик оболочек, заполненных жидкостью // Сб. научн. трудов симпозиума. Новосибирск: 1992. С. 61 — 66.
103. Калиниченко В.А., Со Аунг Наинг. Экспериментальное исследование связанных колебаний сосуда с жидкостью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные Науки. 2015. № 1(58). С. 14 — 25.

104. Калиниченко В.А., Со Аунг Наинг. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 12(24). URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1138.html>.
105. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. О срыве параметрических колебаний жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2010. № 1. С. 128 — 136.
106. H.N. Abramson. The dynamic behavior of liquids in moving containers: Tech. rep.: NASA, 1966. 464 p.
107. Корольков А.В. Поведение системы жидкость-газ в условиях, близких к невесомости // Вестник Московского государственного университета леса. 2013. № 2(94). С. 145 — 146.
108. Любимов Н.И., Самойлова А.Е. Колебательная устойчивость плоского слоя жидкости со свободной деформируемой поверхностью // Конвективные течения. 2009. № 4. С. 35 — 50.
109. Кибзун А.И., Мирошкин В.П. Об одной математической модели движения КА в декартовых координатах // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 6. С. 17 — 27.
110. Ефименко Г.Г., Кондрашкин И.В., Кривоносова Н.В., Чурилов Г.А. Экспериментальное определение параметров механического аналога жидкости, используемого в математической модели разгонного блока в режиме его вращения // Космонавтика и ракетостроения. 2012. № 2(67). С. 86 — 92.
111. Гудков С.С., Ефименко Г.Г., Клишев О.П., Чурилов Г.А. Особенности механического аналога жидкости в баке с радиальными перегородками в режимах закрутки и торможения относительно продольной оси // Космонавтика и ракетостроение. 2014. № 2(75). С. 147 — 151.
112. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.

113. Kopachevsky N.D. On the spectral criterion of stability in the problem of small motions of an ideal capillary fluid with disconnected free surface // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 206, no. 1. P. 39 — 57.
114. H. F. Bauer. Hydroelastische Schwingungen einer Oberflächenspannungsstruktur in einem Satellitenbehälter // Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung. 1981. H. 5. S. 303 — 313.
115. H. F. Bauer. Flüssigkeitsschwingungen mit freier Oberfläche in keilförmigen Behältern // Acta Mechanica. 1981. H. 38. S. 31 — 34.
116. H. F. Bauer. Liquid surface oscillations in a viscous liquid column induced by temperature fluctuations // Forschung im Ingenieurwesen. 1983. no. 49. P. 58 — 65.
117. H. F. Bauer. Axial response and transient behavior of a cylindrical liquid column in zero gravity // Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung. 1990. no. 14. P. 174 — 182.
118. H. F. Bauer. Natural damped frequencies and axial response of a sloshing rotating finite viscous liquid layer in a cylindrical container // Forsch. Ingenieurwes. — Engineering Research. 1994. no. 60. P. 193 — 205.
119. Сапожников В.Б., Меньшиков В.А., Партола И.С., Корольков А.В. Развитие идей профессора В.М. Поляева по применению пористо-сетчатых материалов для внутрибаковых устройств, обеспечивающих многократный запуск жидкостных ракетных двигателей // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2006. № 2. С. 42 — 57.
120. Filip Finodeyev, Melissa Ghrist, Frederick Best. Development of a Passive Flow Coalescence Device for TwoPhase Phase Separation Under Microgravity // AIP Conference Proceedings 746, 141. 2005. P. DOI: 10.1063/1.1867128.
121. Levi J. Elston, Kirk L. Yerkes, Scott K. Thomas, and John McQuillen. Qualitative Evaluation of a LiquidVapor Separator Concept in MicroGravity Conditions // AIP Conference Proceedings 1103, 3. 2009. P. DOI:

- 10/1063/1/3115546.
122. Logan Gaul, Zachary Papas, Cable Kurwitz, Frederick Best. Equilibrium Interface Position During Operation of a Fixed Cylinder Vortex Separator // AIP Conference Proceedings 1208, 3. 2010. P. DOI: 10.1063/1.3326268.
 123. Dillon J. Saucers, Sathya Gangadharan, James E. Sudermann, Brandon Marsell. CFD Fuel Slosh Modeling of Fluid-Structure Interaction in Spacecraft Propellant Tanks with Diaphragms // 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Orlando, Florida: 2010.
 124. Schlee, K., Gangadharan, S.N., Ristow, J., Sudermann, J., Walker, c., and Hubert. Modeling and Parameter Estimation of Spacecraft Fuel Slosh // 29th Annual AAS Guidance and Control Conference, No. AAS-06-027, American Astronautical Society, Rocky Mountain Section. Breckenridge, Colorado: 2006.
 125. Гончаров Д.А. Проектирование разгонного блока с фазоудерживающим устройством. Дипломная работа. М.: 2011. 78 с.
 126. Тейн У. Разработка уточнённого метода расчета продольных колебаний упругого тела: Кандидатская диссертация / МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2008. 176 с.
 127. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе И.В. Теоретическая гидромеханика ч.1. М.: Физматлит, 1963. 585 с.
 128. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 431 с.
 129. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.
 130. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1962. 249 с.
 131. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.
 132. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.

133. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. М.: Высшая школа, 1973. 152 с.