



**МОСКОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
(МГУ)**

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ**

Ленинские горы, д.1, Москва, ГСП-2, 119991  
Телефон: 939-12-44, Факс: 939-20-90

**«УТВЕРЖДАЮ»**

И.о. декана механико-  
математического  
факультета МГУ имени  
М.В. Ломоносова,  
д.ф.-м.н., профессор



**ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ**  
федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»  
на диссертацию В.В. Шумиловой «Эффективные динамические  
характеристики микронеоднородных сред с диссипацией»,  
представленную на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 -  
механика деформируемого твёрдого тела

Диссертационная работа Шумиловой В.В. посвящена исследованию динамического поведения микронеоднородных сред с диссипацией, состоящих либо из двух твердых фаз, либо из твердой и жидкой фазы, с помощью построения соответствующих им эффективных (усредненных) моделей.

Микронеоднородные среды, состоящие из фаз с различными физико-механическими свойствами, относятся к числу основных объектов изучения механики гетерогенных сред. Среди них существенный интерес представляют среды с диссипацией, состоящие из разных твердых фаз или из твердой и жидкой фаз. Они могут быть как естественного (горные породы, коллекторы нефти, флюидонасыщенные грунты), так и искусственного происхождения (суспензии, композиционные материалы). В последние десятилетия исследование механического поведения таких сред принимает большую важность в связи с интенсивным развитием акустических методов поиска новых месторождений полезных ископаемых, а также быстро растущими запросами современной промышленности в производстве новых

композиционных полимерных материалов, обладающих оптимальными по тем или иным критериям свойствами. Таким образом, тематика, выбранная соискателем, представляет значительный интерес с фундаментальной точки зрения и имеет широкие перспективы практического использования результатов. Всё сказанное выше свидетельствует об **актуальности** темы данной диссертационной работы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 160 наименований. Общий объем диссертации составляет 272 страницы. Работа содержит 11 таблиц и 13 рисунков.

Во **введении** дан обзор публикаций по теме диссертации, обоснована ее актуальность, сформулированы цель и научная новизна работы, приведена теоретическая и практическая значимость полученных результатов, изложено краткое содержание ее глав.

В **первой** главе выведены усредненные уравнения акустики для микронеоднородных сред, обладающих периодической структурой и состоящих из двух твердых фаз, одна из которых - вязкоупругий материал, а другая - упругий или вязкоупругий материал. Показано, что если вязкоупругие фазы таких сред обладают вязкостью и/или памятью, то указанные уравнения являются интегро-дифференциальными и описывают колебания однородных вязкоупругих материалов с памятью. Установлено, что для нахождения коэффициентов и ядер свертки усредненных уравнений акустики требуется решить ряд вспомогательных стационарных и эволюционных задач на ячейке периодичности. Исследован также вопрос о близости векторов перемещений микронеоднородных и соответствующих усредненных сред, являющихся решениями первоначальных и усредненных уравнений акустики при однородных начальных и граничных условиях.

Во **второй** главе выведены усредненные уравнения акустики для микронеоднородных сред, обладающих периодической структурой и состоящих из твердого материала и сжимаемой жидкости с различными моделями свойств вязкости (вязкая или слабвязкая жидкие фазы). Показано, что они являются интегро-дифференциальными уравнениями и в случае вязкой жидкой фазы описывают колебания однородной вязкоупругой среды, обладающей как вязкостью, так и памятью, а в случае слабвязкой жидкой фазы - колебания однородной модифицированной среды Био. Выведены также усредненные уравнения акустики для частично пористых твердых материалов и вязкой или слабвязкой сжимаемой жидкости, заполняющей поры. Выписаны вспомогательные стационарные и эволюционные задачи на ячейке периодичности для нахождения коэффициентов и ядер свертки усредненных уравнений акустики. Исследован вопрос о близости решений

исходных и усредненных уравнений акустики при однородных начальных и граничных условиях.

В **третьей** главе получены формулы для расчета компонентов тензоров ядер релаксации усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам, состоящим из периодически повторяющихся изотропных слоев. В качестве одной фазы таких сред был взят упругий или вязкоупругий материал, а в качестве другой - вязкоупругий материал или вязкая сжимаемая жидкость. Для вывода формул были выписаны в явном виде решения вспомогательных стационарных и эволюционных задач на ячейке периодичности.

В **четвертой** главе исследованы спектры одномерных собственных колебаний изотропных вязкоупругих материалов, обладающих вязкостью и/или памятью, двухфазных слоистых сред с диссипацией, рассмотренных в третьей главе, и соответствующих им усредненных сред. Показано, что для вязкоупругих и усредненных сред спектры их одномерных собственных колебаний состоят из корней алгебраических уравнений. Найдены условия, при которых “колебательная” (т.е. невещественная) часть указанных спектров отсутствует. Для двухфазной слоистой среды с диссипацией установлено, что если собственные колебания перпендикулярны слоям, то ее спектр состоит из корней трансцендентных уравнений. Проведено сравнение предела этого спектра по Хаусдорфу (при неограниченном уменьшении толщины всех слоев) со спектром одномерных собственных колебаний соответствующей усредненной среды. Численно проанализировано влияние числа слоев на близость точек спектров одномерных собственных колебаний для трех образцов слоистого композита и соответствующего ему усредненного материала.

**Пятая** глава посвящена исследованию распространения плоских звуковых волн через границы раздела однородных сжимаемых сред и двухфазных слоистых сред с диссипацией. Получены формулы для расчета приближенных значений комплексных амплитуд волны, отраженной от границы слоистой среды, и волны, прошедшей через ее границу. Для среды, слои которой перпендикулярны направлению распространения волн, выведена система линейных уравнений для расчета точных значений упомянутых амплитуд. Проведено численное сравнение приближенных и точных значений амплитуды прошедшей волны на примере трех образцов слоистого композита.

В **заключении** сформулированы основные выводы диссертации.

**Научная новизна и теоретическая значимость** работы заключается в выводе и строгом обосновании усредненных уравнений акустики для широкого класса микронеоднородных сред с диссипацией, состоящих из двух твердых фаз или из вязкоупругой и жидкой фаз; в получении явных формул для расчета компонентов тензоров ядер релаксации усредненных сред, соответствующих двухфазным слоистым средам с диссипацией; в исследовании процесса распространения плоских звуковых волн при переходе их через границы двухфазных слоистых сред с диссипацией с помощью усредненных моделей. Впервые исследованы спектры одномерных собственных колебаний двухфазных слоистых сред с диссипацией и установлено, что при неограниченном уменьшении толщины всех слоев пределы этих спектров по Хаусдорфу представляют собой объединения спектров одномерных собственных колебаний соответствующих усредненных сред и дополнительных непустых множеств, состоящих из конечного числа вещественных точек. Тем самым обнаружено, что наличие диссипации качественно меняет поведение спектров при усреднении, так как из результатов исследований других авторов хорошо известно, что для слоистых упругих сред (т.е. сред без диссипации) упомянутых дополнительных множеств не возникает. Следует также отметить единообразный охват широкого семейства композитных материалов периодической структуры и предложенную эффективную классификацию рассматриваемых материалов.

**Практическая значимость** полученных результатов связана с возможностью их применения для расчета эффективных динамических характеристик и исследования напряженно-деформированного состояния горных пород и флюидонасыщенных грунтов, а также композиционных полимерных материалов, широко применяемых в химическом и общем машиностроении, строительстве, авиационной и ракетно-космической технике.

Они с успехом могут найти применение в практике проектных организаций, в научно-исследовательской деятельности таких учреждений, как Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН, Институт прикладной механики РАН, в учебной работе при создании новых спецкурсов в таких вузах как МГУ им. М.В.Ломоносова, МГТУ им. Н.Э.Баумана, МАИ и других.

**Достоверность и обоснованность** результатов диссертации не вызывают сомнений, поскольку они получены с помощью корректных математических моделей и строгих математических методов. В частных случаях они согласованы с признанными результатами исследований других авторов. Пред-

ставлены формулы связи используемых в работе тензорных характеристик механических свойств компонентов композитных материалов с известными характеристиками сред, применяемыми в научной литературе.

Основные **результаты диссертации** отражены в 22 публикациях в ведущих рецензируемых журналах, входящих в Перечень ВАК РФ, и журналах, индексируемых в системах цитирования WoS и Scopus. Они были доложены на многочисленных научных семинарах и всероссийских и международных конференциях. Автореферат соответствует содержанию диссертации и позволяет составить достаточно полное представление о ней.

По тексту диссертации имеются следующие **вопросы, замечания и комментарии.**

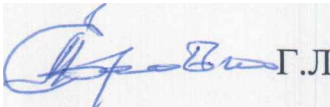
- 1) Вся совокупность рассмотрений, предпринятых в работе, сосредоточена на задачах для тел с закрепленными границами (компоненты вектора перемещений и скоростей их изменения во времени рассматриваются как элементы функциональных пространств вида  $Y_d(O)$ ). Более того, конкретный анализ проводится для тел канонической формы (полупространств, слоев) с каноническим расположением структурных элементов и каноническими направлениями распространения возмущений. В связи с этим название работы могло бы быть соответственно специализировано.
- 2) Способ изложения математически сложного материала свидетельствует о глубокой увлеченности автора предпринятым исследованием и о доверии автора к способности читателя удерживать в памяти элементы изложения, предваряющие формулировку основных этапных результатов работы. Формулировки теорем даны сжато, целенаправленно, однако некоторые подразумевают молчаливый учет предварительных замечаний и построений. Так, в формулировке Теоремы 1 не сведены отмеченные ранее условия на свойства функций - данных задачи. Это же относится к постановкам задач (1.38), (1.49), (1.43), (1.80) (Лемма 1, Теоремы 4 и 5). Не отмечено значение замечательных уточнений (1.88), (1.89) результатов Теоремы 5, повторенных после Теоремы 6. В формулировке Леммы 2 нет напоминания о том, что  $\%$  - характеристическая функция множества. В первой главе не проведен анализ и не отмечено реализованное в дальнейших главах использование решений вспомогательных задач (1.43), а также (1.54)—(1.56) и т.п. Рубрикация изложения в работе могла бы быть более подробной.
- 3) В работе используются модели композитов твердых тел и сжимаемой жидкости, коэффициенты вязкости которой зависят от масштаба ячейки периодичности  $z$  (слабовязкая жидкость). При этом не пояснены физические причины, оправдывающие использование такой модели жидкой фазы.
- 4) Имеются неточности и опечатки. Употреблен термин «ширина» вместо «толщина» (стр. 11, 1-я строка), термин «полоса» вместо «слой» (стр. 235).

Дано несуразное обоснование достоверности результатов работы «сравнением с результатами проведенных в работе численных расчетов» (стр. 17). Даны нечеткие пояснения к областям твердой и жидкой фаз в задаче (2.79). Опечатка в первом предложении второго абзаца на стр. 33. Пропущено слово «решения» в конце первого абзаца стр. 29. Досадная опечатка в предстрочной записи формулы (1.37) Определения 1 (напечатано  $u(x)$  вместо  $u(x,y)$ ). В формулировке Теоремы 2 допущена неуместная запись слабой двухмасштабной сходимости (вместо обычной слабой сходимости) последовательности  $u^\varepsilon(x)$  к функции  $w(x)$ , повторяющаяся впоследствии в других формулах (например, (1.40), первая формульная строка на стр. 93, формула (2.89) и подобные формулы на стр. 98). Неверная ссылка (1.38) на стр. 45 (шестая снизу строка), несуществующая ссылка (2.5.1) на стр. 48 (десятая строка сверху).

Сделанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы. Она выполнена на высоком механико-математическом и физическом уровне, содержит новые результаты и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК России к докторским диссертациям по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твёрдого тела. Её автор, Шумилова Владлена Валерьевна, несомненно, заслуживает присуждение ей искомой степени доктора физико-математических наук.

Результаты диссертации были доложены соискателем 22 мая 2019 г. на научно-исследовательском семинаре им. А.А. Ильюшина кафедры теории упругости МГУ имени М.В. Ломоносова и получили положительные отзывы специалистов. Настоящий отзыв на диссертацию В.В. Шумиловой рассмотрен и одобрен 28 августа 2019 г. (протокол № 11-19) на заседании кафедры теории упругости МГУ имени М.В. Ломоносова.

Профессор кафедры теории упругости  
МГУ имени М.В. Ломоносова,  
доктор физико-математических наук, профессор

 Г.Л. Бровка

Телефоны: 8-495-939-55-39

E-mail: [elast5539@mail.ru](mailto:elast5539@mail.ru)

28 августа 2019 г.