

*На правах рукописи*

**Дорошин Антон Владимирович**

**РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА  
СПУТНИКОВ-ГИРОСТАТОВ ПРИ ДЕЙСТВИИ  
МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ**

01.02.01 – теоретическая механика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Самара, 2019 г.

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Научный консультант: доктор технических наук, профессор  
Асланов Владимир Степанович

Официальные оппоненты:

- Буров Александр Анатольевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ Информатика и управление РАН;

- Морозов Виктор Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова;

- Овчинников Михаил Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Ведущее предприятие: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Защита состоится “17” октября 2019 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при ИПМех РАН по адресу: 119526 Москва, проспект Вернадского, дом 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН <http://ipmnet.ru>.

Автореферат разослан “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2019 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Д 002.240.01, к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Е.Я. Сысоева

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена решению проблемы реализации регулярных и хаотических режимов динамики возмущенного пространственного движения осевых спутников-гиростатов постоянного и переменного состава, позволяющих осуществлять требуемые эволюции и маневры углового движения за счет использования естественных свойств регулярной динамики и детерминированного хаоса.

Исследования в рамках работы выполняются по сквозной схеме, предполагающей построение математических моделей, поиск аналитических решений с их последующим применением в рамках анализа регулярного и хаотического движения, а также синтез новых методов пространственной переориентации спутников-гиростатов.

**Актуальность работы.** Спутники-гиростаты получили широкое распространение в связи с простотой своей конструкции, позволяющей осуществлять эффективную пассивную гироскопическую стабилизацию за счет быстрого вращения тела-ротора. Спутники-гиростаты хорошо зарекомендовали себя в рамках реализации космических проектов, связанных с задачами дистанционного зондирования, коммуникации, связи, метеорологии и миссий по изучению дальнего космоса. В ряде будущих проектов динамическая схема спутника-гиростата также будет использована как для разработки полноразмерных космических аппаратов, так и для наноспутников. В этой связи диссертационные исследования являются актуальными с точки зрения возможных практических приложений.

Фундаментальная значимость и актуальность исследований связана с развитием классических случаев движения твердого тела введением возмущений различной природы и дополнительной степени свободы за счет относительного движения соосного ротора, а также с подробным описанием возникающих в динамике движения гиростатов хаотических явлений.

**Целью диссертационного исследования** является комплексное изучение регулярной и хаотической динамики пространственного движения спутников-гиростатов, включая получение аналитических решений в случаях действия внешних и внутренних возмущений с проведением на их основе анализа регулярного и хаотического движения с последующим синтезом требуемых динамических свойств, новых схем и методов управления угловым положением спутников-гиростатов постоянного и переменного состава, использующих в том числе естественные свойства детерминированного хаоса.

Для достижения поставленной цели в работе **решены следующие задачи:**

1. Получение шести видов аналитических решений для динамики спутников-гиростатов.
2. Проведение исследования феномена гетероклинического хаоса в динамике движения спутника-гиростата при действии внутренних и внешних возмущений, включая определение условий возникновения и способы подавления хаоса.
3. Разработка на основе новых решений и результатов анализа динамического хаоса методов пространственной переориентации спутников-гиростатов, использующих естественные свойства регулярной динамики и хаоса.

**Методы и подходы,** используемые в рамках диссертационного исследования, базируются на современных методах механики, динамики твердого тела и систем твердых тел постоянного и переменного состава, механики космического полета, развитые в известных работах Акуленко Л.Д., Архангельского Ю.А., Асланова В.С., Белецкого В.В., Бурова А.А., Гантмахера Ф.Р., Жуковского Н.Е., Журавлёва В.Ф., Ишлинского А.Ю., Климова Д.М., Козлова В.В., Космодемьянского А.А., Лещенко Д.Д., Маркеева А.П., Моисеева Н.Н., Морозова В.М., Нейштадта А.И., Овчинникова М.Ю., Охоцимского Д.Е., Румянцева В.В., Садова Ю.А., Сазонова В. В., Сарычева В.А., Сидоренко В.В., Стеклова В.А., Тихонова А.А., Черноусько Ф.Л., а также Andoyer H., Arichandran K., Vainum P.M., Cochran J.E., Deprit A., Elipe A., Hall C.D., Hughes P.C., Iñarrea M., Kuang J.,

Lanchares V., Leung A.Y.T, Mingori D.L., Tan S., Serret J.A., Volterra V., Wittenburg J. В диссертационном исследовании также используются методы качественной теории дифференциальных уравнений, методы хаотической динамики, в частности метод Мельникова В.К. и его модификации Wiggins S., Holmes P.J., Marsden J.E., отображения Н. Poincaré, методы теории динамических систем, развитые в работах таких известных ученых, как Колмогоров А.Н., Арнольд В.И., Moser J., Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С. Д., Кузнецов С.П., Анищенко В.С., Астахов В.В., Леонов Г.А., Лоскутов А.Ю, Guckenheimer J., Holmes P.J., Vocaletti S., Grebogi C., Lichtenberg A.J., Lieberman M.A., Tabor M.

**Теоретическая и практическая значимость работы** характеризуется тем, что результаты диссертационных исследований, включая аналитические модели, методы и решения, будут способствовать развитию *фундаментальных результатов* динамики систем твердых тел и ее *прикладных аспектов* в рамках разработки модифицированных платформ космических аппаратов и спутников с новыми схемами управления угловым движением, парирующими возникновение хаотических режимов, либо, наоборот, инициирующими хаотическую динамику в позитивных целях, например, для решения задачи пространственной переориентации посредством использования естественных свойств динамического хаоса.

По результатам диссертационных исследований получено два патента на изобретение на способы пространственной переориентации космических аппаратов за счет инициации хаоса и переориентации космических аппаратов за счет раскруток и торможений соосных роторов.

**Новизна результатов** диссертационных исследований подтверждается публикациями в ведущих научных журналах РАН и зарубежных изданиях квартилей Q1 и Q2 по проблеме исследования регулярного движения и хаотических явлений в динамике гироскопов. К новым результатам следует отнести полученные аналитические решения для нормальных типов гироскопов в случаях действия внешних и внутренних возмущений, результаты анализа регулярного и хаотического движения, а также новые схемы и методы управления угловым положением спутников-гироскопов постоянного и переменного состава, основанные на использовании естественных свойств регулярной динамики и детерминированного хаоса.

Полученные в работе результаты исследований обладают фундаментальной научной новизной в области теоретической механики, а также являются актуальными с точки зрения их использования для решения прикладных задач динамики космического полета.

**На защиту выносятся следующие результаты:**

1. **Общие и гетероклинические аналитические решения** для динамики одноосных спутников-гироскопов. Полученные решения обобщают решения для свободного гироскопа, а также являются гироскопическим обобщением решений динамики твердого тела, движущегося под действием восстанавливающих моментов:

1.1. Общее решение для намагниченного одноосного спутника-гироскопа с малым переменным дипольным моментом (в  $\omega$ -режиме) при реализации цилиндрических прецессий [17];

1.2. Гетероклиническое решение для намагниченного одноосного спутника-гироскопа с малым переменным дипольным моментом (в  $\omega$ -режиме) при реализации цилиндрических прецессий [17];

1.3. Гетероклиническое решение типа «действие-угол» для вращающейся фазы угла относительного вращения ротора одноосного гироскопа с малым дипольным моментом (в  $\omega$ -режиме) при реализации цилиндрических прецессий [14];

1.4. Общее решение для тяжелого осевого гироскопа с произвольным внутренним моментом сил, приведенное к случаю Лагранжа [3];

1.5. Общее решение в случае намагниченного одноосного динамически симметричного спутника-гироскопа с переменным дипольным моментом (в  $\omega$ -режиме) без ограничений на его величину [16];

1.6. Общее решение для конической прецессии спутника-гиростата в слабом центральном гравитационном поле [19].

2. **Условия возникновения и способы подавления хаоса**, возникающего в динамике движения спутника-гиростата при действии внутренних и внешних гамильтоновых и негамильтоновых возмущений различной природы [10, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20]. Изучена возможность хаотизации и регуляризации динамики спутника-гиростата при движении, близком к цилиндрической прецессии, являющейся главным динамическим режимом функционирования спутников-гиростатов и космических аппаратов с двойным вращением. Проанализированы процессы и найдены условия расщепления многообразий сепаратрисс и рождения гомо-/гетероклинических сетей и хаоса на основе формализма Мельникова-Виггинса, а также разработаны следующие схемы возможного подавления хаотической динамики [15]:

2.1. Диссипативная схема подавления гетероклинического хаоса на основе полученного аналитического условия.

2.2. Импульсная схема подавления гетероклинического хаоса.

2.3. Магнитная схема подавления гетероклинического хаоса.

3. **Новые методы пространственной переориентации**, разработанные на основе аналитических решений и использующие естественные свойства регулярной динамики и хаоса:

3.1. Метод хаотической переориентации спутника-гиростата [18];

3.2. Метод магнитной переориентации спутника-гиростата путем выполнения серий омега-режимов [16];

3.3. Метод синтеза прецессионного движения с уменьшающимся конусом нутации для спутника-гиростата переменного состава [7, 8].

**Обоснованность и достоверность результатов** проведенных исследований определяется корректным применением методов теоретической механики, методов хаотической динамики, теории эллиптических функций и методов численного моделирования. Валидация результатов аналитических и численных исследований проводилась на основе независимых принципов и законов механики и нелинейной динамики.

**Личный вклад автора** в получение результатов, изложенных в диссертации, следует охарактеризовать, как полный. Автором самостоятельно была поставлена проблема исследования регулярных и хаотических режимов движения спутников-гиростатов, которая была решена в ходе выполнения диссертационных исследований. Все представленные в диссертации научные результаты получены лично автором.

В работах [1-6] Дорошин А.В. принимал активное участие в постановке задач и проведении исследований совместно с Аслановым В.С. и Кругловым Г.Е., при этом математические модели, аналитические оценки, условия и ограничения, включенные в диссертацию, получены лично автором.

Работы [7-19, 21, 22, 24-32] выполнены и опубликованы Дорошиным А.В. единолично.

В работах [20, 23], выполненных совместно с Крикуновым М.М., постановки задач и аналитические результаты исследования динамики космических аппаратов с двойным вращением и спутников-гиростатов получены Дорошиным А.В.

**Апробация работы** регулярно проводилась на зарубежных и всероссийских научных конференциях, включая:

1. Doroshin A.V. Computing the Heteroclinic Orbits Splitting in Systems Phase Spaces via the Matricant Method (2018) Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2018, Volume 1, 2018, Hong Kong, pp. 428-433.

2. Doroshin A.V. Attitude Dynamics of Spacecraft with Control by Relocatable Internal Position of Mass Center (2017) Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings

of The International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2017, Volume 2227, 2017, Hong Kong, pp. 231-235.

3. Doroshin A.V. Initiations of chaotic regimes of attitude dynamics of multi-spin spacecraft and gyrostat-satellites basing on multiscroll strange chaotic attractors (2015) SAI Intelligent Systems Conference, 2015, London, United Kingdom, IEEE, pp. 698 – 704.

4. Doroshin A.V. Attitude Control and Angular Reorientations of Dual-Spin Spacecraft and Gyrostat-Satellites Using Chaotic Regimes Initiations, Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering 2015, 1-3 July, 2015, London, U.K., pp. 100-104.

5. Doroshin A.V. Multi-spin spacecraft and gyrostats as dynamical systems with multiscroll chaotic attractors (2014) Proceedings of 2014 Science and Information Conference, SAI 2014, London, U.K., art. no. 6918290, pp. 882-887.

6. Doroshin A.V. Spinup-capture dynamics of multi-rotor nanosatellites and somersaulting robots (2013) Proceedings of 2013 Science and Information Conference, SAI 2013, London, U.K., art. no. 6661802, pp. 613-617.

7. Doroshin A.V. Plenary lecture 4: Attitude dynamics and control of multi-rotor spacecraft and roll-walking robots (2012) Proceedings of the 11th WSEAS international conference on Signal Processing, Robotics and Automation, Cambridge, U.K., February 22 - 24, 2012, p.15.

8. Всероссийские Семинары по управлению движением и навигации летательных аппаратов (Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва: с 2007 по 2018 годы) под эгидой РФФИ, Российской академии космонавтики им. К.Э. Циолковского и РКЦ Прогресс.

9. Дорошин А.В. (2010), Хаотизация движения космического аппарата с двойным вращением в окрестности положения, стабилизированного частичной закруткой // В сборнике: Управление в технических системах. (УТС-2010). ГНЦ РФ ОАО "Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электроприбор" (Санкт-Петербург). 2010. С. 341-344.

10. Дорошин А.В. (2012), Динамика пространственного движения спутника-гиростата при наличии малых полигармонических возмущений // В сборнике: Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах. ГНЦ РФ ОАО "Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электроприбор" (Санкт-Петербург), 2012. С. 119-122.

11. Дорошин А.В. (2014), Реализация режимов мультискрольных хаотических аттракторов в динамике пространственного движения космического аппарата с системой спаренных маховиков // В сборнике: Управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2014). ГНЦ РФ ОАО "Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электроприбор" (Санкт-Петербург), 2014. С. 378-387.

12. Дорошин А.В. (2016), Пространственная переориентация космического аппарата с помощью инициации хаотических режимов // В сборнике: Управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2016). ГНЦ РФ ОАО "Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электроприбор" (Санкт-Петербург), 2016. С. 394-400.

В 2009 году диссертанту была присуждена Медаль Российской академии наук с премиями для молодых ученых по направлению «Проблемы машиностроения, механики и процессов управления» за цикл работ «Динамика пространственного движения неуравновешенных гиростатов и соосных космических аппаратов постоянного и переменного состава».

Исследования по теме диссертации осуществлялись при поддержке выполняемых диссертантом в качестве руководителя пяти проектов РФФИ, четырех персональных гранта Программы Президента Российской Федерации по поддержке молодых российских ученых и ведущих научных школ РФ, а также проекта Программы Госзадания РФ, выполняемого научным коллективом научной лаборатории образовательной организации высшего образования:

1. РФФИ 19-08-00571-а “Анализ и синтез регулярных и хаотических режимов углового движения космических аппаратов с изменяемой конфигурацией и подвижными элементами” (2019-2121).
2. РФФИ 15-08-05934-а “Анализ и синтез регулярных и хаотических режимов углового движения составных космических аппаратов, гиросатов и наноспутников с многороторными гироскопическими комплексами” (2015-2017).
3. РФФИ 12-08-09202-моб\_з “Участие в международной конференции "11th WSEAS International Conference on Signal Processing, Robotics and Automation (ispra'12) - Cambridge, England, UK, February 21-24, 2012" (с пленарным докладом)” (2012).
4. РФФИ 11-08-00794-а “Динамика и управление пространственным движением космических аппаратов и наноспутников с многороторными гироскопическими системами” (2011-2013).
5. РФФИ 06-08-00325-а “Динамические процессы, движение и управление составными космическими аппаратами переменной массы” (2006-2007).
6. МК-1497.2010.8 “Исследование регулярной и хаотической динамики движения неуравновешенных спутников-гиросатов и многороторных мультиосных космических аппаратов с силовыми гироскопическими комплексами” (2010-2011).
7. МК-516.2008.8 “Динамические процессы, пространственное и траекторное движение соосных космических аппаратов с твердотопливными и жидкостными ракетными двигателями” (2008-2009).
8. МК-4704.2006.8 “Динамика движения соосных космических аппаратов и неуравновешенных спутников-гиросатов переменного состава” (2006-2007).
9. МК-2263.2004.8 “Стабилизация частичной закруткой спускаемого аппарата с двойным вращением” (2004-2005).
10. Проект № 9.1616.2017/ПЧ проектной части государственного задания РФ “Разработка фундаментальных основ аналитического синтеза регулярных и хаотических процессов в динамике космических аппаратов” (2017-2019).
11. Научно-исследовательская работа по заказу АО «РКЦ «Прогресс» “Разработка проектного облика системы управления движением космического аппарата с изменяющимися инерционными характеристиками специального аппарата в трехосном подвесе” (2013-2017).

**Публикации.** Результаты диссертационных исследований опубликованы в 32 работах, индексируемых Scopus|WoS, что характеризует полноту изложения материалов диссертации. Перечень основных публикаций, проиндексированных в Scopus|WoS и включающий 7 статей в ведущих журналах РАН [1-7] и 13 статей в международных изданиях квартилей Q1-Q2 [8-20], приведен в конце автореферата и полностью отражает научные результаты диссертации.

**Структура и объем диссертации.** Работа содержит введение, пять глав, заключение и список литературы из 348 наименований. Объем работы составляет 224 страницы.

***Краткое содержание работы.***

**Во введении** обсуждается актуальность работы, формулируется ее цель, дается краткое описание используемых методов и подходов, а также кратко освещаются основные задачи механики космического полета и динамические режимы, в которых конструктивная схема спутника-гиросата обладает функциональными преимуществами по сравнению с другими схемами. В частности, отмечается, что широкое распространение соосной схемы спутника-гиросата определяется простотой конструкции, позволяющей использование эффективного метода пассивной гироскопической стабилизации спутников-гиросатов за счет быстрого вращения одного из соосных тел. Типичным режимом спутников-гиросатов является его движение с гироскопически стабилизированной осью вращения соосных тел по направлению вдоль нормали к плоскости орбиты, когда ротор обеспечивает гироскопическую стабилизацию своим быстрым вращением, а главное соосное тело находится в медленном вращении с орбитальной угловой скоростью, выполняя «лунное» движение с постоянным визированием земной поверхности. В этом случае кинетический

момент спутника-гиростата близок к оси вращения соосных тел и направлен перпендикулярно к плоскости орбиты – такой динамический режим называют цилиндрической прецессией, изучаемый в работе с учетом возмущений различной природы.

Одним из наиболее интересных и мало изученных феноменов в возмущенной динамике спутников-гиростатов является возникновение и реализация хаотических режимов движения, учет которых необходим в рамках разработки реальных космических систем, так как подобные явления могут приводить к непредсказуемым и нежелательным последствиям. В этой связи анализ хаотической динамики является самостоятельной задачей диссертационного исследования, включающая поиск и разработку практически важных методов подавления хаоса. Несмотря на непредсказуемость процессов хаотической динамики, оказывается вполне возможным использовать естественные свойства динамического хаоса в прикладных целях. Отмечается, что в диссертационной работе предлагается метод намеренной инициации хаоса в динамике спутника-гиростата для выполнения пространственных переориентаций спутника.

*Первая глава* посвящена описанию состояния решаемой проблемы и методов исследования. В частности, отмечается широта самого понятия гиростата, а также указываются отличительные черты рассматриваемых систем гиростатов. В этой связи указываются классические *определения и типы гиростатов*, проблема исследования которых берет начало с классических работ по динамике твердого тела, в том числе при его движении в идеальной жидкости и при наличии внутри тела полостей с жидкостью. В рамках классических исследований были обобщены динамические уравнения движения тела вокруг неподвижной точки и сформулированы связи между динамикой тел в жидкости с динамикой движения тел с присоединенными роторами. В этом аспекте необходимо отметить основополагающие работы Г. Кирхгофа, У. Томсона (лорда Кельвина), Н.Е. Жуковского, В. Вольтерра, также последовавшие за ними работы Й. Виттенбурга, А. Грея, Н.Н. Моисеева, В.В. Румянцева, Ф.Л. Черноусько и П.В. Харламова. После этих работ закрепились классические определения гиростатов, среди которых упоминаются “гиростаты Жуковского-Вольтерра”, “гиростаты Кельвина” и некоторые другие.

Понятие гиростата Кельвина используют для описания динамики гиростата с внутренними роторами при условии, что они имеют постоянные относительные компоненты суммарного кинетического момента, вычисленные по отношению к телу-носителю. Это условие представляет собой кинематическую связь и запрещает независимое движение и соответствующие степени свободы роторов. Обеспечить подобное движение возможно при создании специальных внутренних моментов сил, стабилизирующих постоянство относительного кинетического момента роторов.

Понятие гиростата Жуковского-Вольтерра структурно подразумевает систему, образованную телом-носителем с внутренними полостями с циркулирующей в них жидкостью, причем величины этих циркуляций рассматриваются постоянными, что позволяет в итоге записать три динамических уравнения движения системы вокруг неподвижной точки, и что также отрицает наличие независимых внутренних степеней свободы.

С точки зрения прикладных аспектов использования гиростатов в области динамики космического полета, вопрос о самостоятельных степенях свободы роторов является существенно важным, так как он определяет возможность реализации управляемой динамики спутника-гиростата. В этой связи в работе<sup>1</sup> Кана и Фоулера описывается проблема интерпретации уравнений гиростата и условий стабилизации, где рассматриваются системы гиростатов с постоянными скоростями вращения роторов относительно тела-носителя (гиростаты Кельвина) и гиростаты с роторами, являющимися независимыми телами. В развитие поставленного вопроса о конкурентности моделей описания динамики гиростатов

---

<sup>1</sup> Kane T.R., Fowler R.C. (1970), Equivalence of two gyrostatic stability problems. Journal of Applied Mechanics, 37(4), 1970, pp. 1146-1147.



Робертсон в своей работе<sup>2</sup> показал симметрию форм уравнений динамики свободного движения для гиростата Кельвина и *нормального/явного* гиростата (“apparent gyrostat”), имеющего независимые степени свободы для своих роторов. Однако, несмотря на симметрию форм уравнений, аналогичной симметрии их решений не будет, что очевидно объясняется различием требований по наличию внутренних моментов сил, обеспечивающих постоянство относительных скоростей роторов, и различием интегралов энергии и кинетического момента. С этих позиций следует различать типы гиростатов Кельвина и нормальных гиростатов. Важно отметить, что все исследования, проводимые в диссертационной работе, выполнены автором именно для нормальных типов гиростатов.

Со структурной стороны среди нормальных спутников-гиростатов могут быть выделены осевые спутники-гиростаты, в т.ч. именуемые космическими аппаратами с двойным вращением («Dual-Spin Spacecraft Configuration»<sup>3</sup>), а также многороторные конфигурации, именуемые космическими аппаратами с множественным вращением («general Multi-Spin Spacecraft Configuration»<sup>4</sup>).

Далее в главе описываются *аспекты использования спутников-гиростатов* в динамике космического полета и их связь с основными фундаментальными результатами исследований.

С точки зрения решаемых практических задач спутники-гиростаты, как правило, применяются в космических системах телекоммуникаций, метеорологии и дистанционного зондирования. Одним из типовых режимов динамики осевых спутников-гиростатов является цилиндрическая прецессия, соответствующая такому орбитальному движению спутника-гиростата, при котором осуществлена гироскопическая стабилизация его продольной оси (за счет быстрого вращения тела-ротора) в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты.

Среди *реальных космических программ*, использующих спутники-гиростаты, необходимо указать проекты по осуществлению задач орбитальной связи, метеорологии и навигации – это такие проекты, как исторически первый тактический спутник-гиростат навигации и связи TACSAT, спутники связи и метеорологии Hughes HS-333, HS-376, HS-381, HS-393, HS-389 таких космических программ, как Intelsat, Comstar, Anik, Marisat, Geostationary Meteorological Satellites (GMS), Geostationary Operational Environmental Satellites (GOES), Satcom, Arabsat, Aussat, Optus, Brasilsat, Galaxy, Marco Polo, MEASAT, Africasat, Palapa, SBS, Telstar, Westar, AsiaSat, ChinaSat, Sirius, Thor и др.

Высокую востребованность осевых спутников-гиростатов в рамках программ изучения дальнего космоса подтвердили миссии Pioneer-12 (Venera Orbiter), GIOTTO и GALILEO. Среди современных примеров спутников-гиростатов стоит отметить проект “Solar sentinels”, который планируется к запуску в 2020 году, а также наноспутники-гиростаты MicroMAS-1 и MicroMAS-2 (Micro-sized Microwave Atmospheric Satellite), разработанные в Массачусетском институте технологий и выведенные на орбиту 04.03.2015 (MicroMAS-1) и 12.01.2019 (MicroMAS-2A).

Космические аппараты и спутники совершают пространственное движение в условиях действия гравитационных и электромагнитных моментов сил. Наличие соответствующей инерционно-массовой компоновки в сочетании с магнитными системами управления угловым движением позволяет осуществлять стабилизацию пространственного положения, а также выполнять определенные режимы и целевые маневры углового движения, включая цилиндрические/конические прецессии, остановку вращения (сброс кинетического момента), совмещение оси спутника с вектором кинетического момента и т.п. В настоящей работе рассматриваются спутники-гиростаты, имеющие в своем составе магнитные системы управления движения, позволяющие генерировать собственный магнитный дипольный

---

<sup>2</sup> Roberson R.E. (1971), The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats. Journal of Applied Mechanics, 38(3), 1971, pp.707-708.

<sup>3</sup> Junkins John L., Turner J.D. (1986), Optimal spacecraft rotational maneuvers (Studies in astronautics; v.3), Elsevier Science Publishers B.V. 1986.

<sup>4</sup> Hughes Peter C. (1986), Spacecraft attitude dynamics. John Wiley & Sons. New York, 1986.

момент и тем самым взаимодействовать с внешним геомагнитным полем. Магнитный дипольный момент, генерируемый системой магнитных актуаторов может быть, как постоянным, так и переменным вектором в координатных осях тела-платформы.

Важные этапы динамики космического полета связаны с активными участками движения, на которых осуществляется работа ракетных двигателей, и имеет место переменный состав ракетно-космической системы. Применительно к структуре осевого гиростата задача изучения систем переменного состава, исследуемая в работе, возникает в случаях описания динамики выполнения коррекции орбит спутников-гиростатов, а также движения соосных связок разгонных блоков с космическими аппаратами на столах закрутки. Вывод космического аппарата на орбиту с помощью подобного разгонного блока предполагает отрезок движения, на котором осуществляется раскрутка аппарата на столе раскрутки. В этих случаях одновременно имеет место относительное соосное вращение тел и переменность их состава. Примером таких соосных связок является разгонный блок AJ10, производимый Aerojet Rocketdyne (США), который используется в качестве вторых ступеней ракет-носителей Delta II и Titan III. Подобным образом с разгонным блоком AJ-10 были выведены такие известные космические аппараты, как ICESat-2 (15.09.2018), Aquarius (06.10.2011), Mars Odyssey (24.10.2001), Kepler (03.06.2009), Stardust (07.02.1999), Polar Lander (03.01.1999) и другие. В этой связи в работе рассматривается влияние изменения инерционно-массовых параметров на динамику нутационно-прецессионного движения осевых спутников-гиростатов переменного состава с опорой на известные результаты Мещерского И.В, Космодемьянского А.А., Iñarrea M., Lanchares V., Rothos V. M., Salas J.P. и др.

Далее в главе приводится характеристика результатов исследования регулярной динамики спутников-гиростатов. Основные результаты исследования динамики движения спутников-гиростатов имеют широкий охват разнообразных тематических исследований в различных постановках проблем и задач. Так проблема движения гиростатов и спутников изучалась на предмет анализа устойчивости режимов движения, где необходимо отметить работы Гутника С.А., Маркеева А.П., Моисеева Н.Н., Морозова В.М., Рубановского В.Н., Румянцева В.В., Самсонова В.А., Сарычева В.А., Стрыгина В.В., Соболева В.А., Черноусько Ф.Л., Bainum P. M., Fuechsel P. G., Mackison D.L., Cloutier G.J., Crespo da Silva M. R. M., Elmandouh A.A., Santos L., Silva A., Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A., Kane T.R., Mingori D.L., Likins P.W., Longman R.W., Meng Y., Hao R., Chen Q., Nazari M., Butcher E.A., Vera J.A. и др.

Важными результатами являются изучение перманентных вращений, регулярных и других прецессий, полученные в т.ч., в работах Акуленко Л.Д., Анчева А., Гуляева М.П., Лещенко Д.Д., Маркеева А.П., Сазонова В.В., Сидоренко В.В., Узбека Е.К., Черноусько Ф.Л., Cochran J.E., Elmandouh A.A., Kinsey K.J., Mingori D.L., Rand R.H., Yehia H.M.

Динамика движения твердых тел, космических аппаратов и спутников-гиростатов в магнитном поле изучалась ранее в различных постановках такими авторами, как Белецкий В.В., Козлов В.В., Мартыненко Ю.Г., Морозов В.М., Овчинников М.Ю., Пивоваров М.Л., Самсонов В.А., Сидоренко В.В., Тихонов А.А., Avanzini G., Bayat F. и Bolandi H., Jalali A.A., Chen Li-Qun и Liu Yan-Zhu, Cheng G. И Liu Y. Z., Iñarrea M., Lovera M., Astolfi A., Silani E., Shigehara M., Zavoli A., Giulietti F., Matteis G.D., Zhou и многими другими. Управляемое движение спутников с переменным магнитным дипольным моментом, обеспечивающим реализацию конкретного целевого маневра рассматривали Stickler A. Craig и Alfriend K.T., а синтез типовых маневров, например, такого маневра, как “B-dot”, нацеленного на остановку вращения спутника путем взаимодействия с внешним магнитным полем, описано в работах Flatley T., а частная разновидность алгоритма “Y-dot” рассматривалась в работах Zavoli A., Giulietti F., Avanzini G., Matteis G.D.

В диссертационном исследовании изучается динамика гиростата в плоском и центральном полях тяготения, а также при действии восстанавливающих моментов. Эта проблема рассматривалась такими авторами, как Акуленко Л.Д., Анчев А., Асланов В.С.,

Белецкий В.В., Бозюков А.Ю., Буров А.А., Лещенко Д.Д., Морозов В.М., Охоцимский Д.Е., Рачинская А.Л., Сазонов В.В., Сарычев В.А., Степанов С.Я., Тихонов А.А., Черноушко Ф.Л., Cochran J.E., Crespo da Silva M. R. M., Kuang J., Tan S., T. Leung A.Y., Longman R.W., Tong X., Tabarrok B., Rimrott F.P.J. и др.

Вопросы динамики спутников при реализации разнообразных прецессий, в том числе цилиндрических, а также вопросы плоских движений изучали Акуленко Л.Д., Белецкий В.В., Бозюков А.Ю., Гуляев М.П., Лещенко Д.Д., Маркеев А.П., Сазонов В.В., Сидоренко В.В., Узбек Е.К., Черноушко Ф.Л., Cochran J.E., Kinsey K.J., Mingori D.L., Rand R.H., Yehia H.M.

Следует отметить основные исследования по изучению динамики тел в жидкости или с полостями, содержащими жидкость, во многом определившие развитие проблематики гиростата, включающие работы Жуковского Н.Е., Моисеева Н.Н., Румянцева В.В., Стеклова В.А., Харламова П.В., Черноушко Ф.Л.

Нелинейные эволюции движения тел и гиростатов при действии сил различной природы изучались в работах Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноушко Ф.Л., а также в их соавторстве с Зинкевичем Я.С., Козаченко Т.А., Рачинской А.Л. и др.

Вопросы динамики, управления движением и стабилизации спутников, твердых тел и гиростатов рассматривались Акуленко Л.Д., Акимом Э.Л., Амелькиным Н.И., Ананьевским И.М., Аслановым В.С., Баничуком Н.В., Банщиковым А.В., Белецким В.В., Буровым А.А., Виттенбургом Й., Воротниковым В.И., Горром Г.В., Ковалевым А.М., Кошляковым В.Н., Лещенко Д.Д., Овчинниковым М.Ю., Охоцимским Д.Е., Раушенбахом Б.В., Решминым С.А., Румянцевым В.В., Сарычевым В.А., Соколовым Б.Н., Степановым С.Я., Тихоновым А.А., Тхаем В.Н., Черноушко Ф.Л., Энеевым Т.М., Chobotov V.A., Guirao J.L.G., Vera J.A., Hall C.D., Hughes P.C., Likins P.W., Or A.C., McKenna Lawlor S., Santos L.F., Melicio R., Silva A., Shrivastava S.K., Modi V.J.

Отдельно следует указать работы, в которых найдены аналитические решения для параметров свободного движения гиростатов Кельвина и нормальных спутников-гиростатов. Результаты, определяющие общие аналитические решения для свободных гиростатов Кельвина, представлены в работах Wittenburg J., Elipe A., Lanchares V., Basak I., при этом гетероклинические решения записаны Tong X., Tabarrok B., Rimrott F.P.J., Kuang J., Tan S., Arichandran K., Leung A.Y.T., специальные случаи решений описаны в работах Горра Г.В., Ковалева А.М. Аналитические решения для свободных нормальных спутников-гиростатов получены в работах Асланова В.С., Cochran J.E., Shu P.H., Rew S.D.

Далее в главе дается характеристика результатов исследования хаотической динамики движения спутников-гиростатов. Здесь важно выделить проблему обнаружения гомо-/гетероклинического хаоса, возникающего за счет расщепления и бесконечнократного взаимопересечения устойчивых и неустойчивых множеств седловых особых точек, ограничивающих сепаратрисные траектории, приводящих в итоге к генерации так называемых гомо-/гетероклинических сетей. Следующим шагом является поиск условий подавления либо полного избегания хаоса в рамках возмущенной динамики, и здесь, как будет показано в последующих главах работы, имеется целый набор методов и техник подавления хаоса, причем классическим подходом в этом направлении считается использование диссипативных методов, например, использование диссипативных свойств внешней среды с сопротивлением, либо внутреннего трения, что отражено, например, в работах El-Gohary A., Iñarrea M., Lanchares V., Kuang J.L., Leung A.Y.T., Meechan P.A., Asokanthan S.F., Zhou L.

Изучение хаотической динамики опирается на общие фундаментальные результаты в области детерминированного хаоса, включая работы Анищенко В.С., Астахова В.В., Белецкого В.В., Кузнецова С.П., Пивоварова М.Л., Старостина Е.Л., Boccaletti S., Celletti A., Lhotka C., Ge Z.-M., Guckenheimer J., Holmes P.J., Chen Li-Qun, Lin Yiing-Yuh, Meechan P.A., Asokanthan S.F., Meng Y., Nazari M., Pecora L.M., Strogatz S.H., Tabor M., Thompson J.M.T., Stewart H. B., Wiggins S.

Хаотическая динамика спутников-гиростатов в разных постановках исследовалась в работах Bao-Zeng, Cheng, El-Gohary, Ge, Holmes, Iñarra, Lanchares, Leung, Kuang, Meechan, Or, Peng, Shirazi, Tong, Tabarrok, Rimrott; при этом во всех этих работах исследовалась хаотизация гиростатов Кельвина, хаотизация же нормальных спутников-гиростатов изучалась в работах Асланова В.С., Дорошина А.В., Юдинцева В.В. Также в главе отмечено, что несмотря на широкий спектр представленных исследований, проблема анализа/подавления гетероклинического хаоса в динамике спутников-гиростатов не достигла своего завершения и будет решаться в настоящей работе.

Среди методов исследования гомо/гетероклинического хаоса отмечены формализм Мельникова и его последующие модификации, основывающиеся на построении функций, нули которых свидетельствуют о динамических фактах пересечения расщепленных сепаратрис в фазовом пространстве системы и рождении гомо/гетероклинических сетей, что, собственно, является главной причиной хаотизации динамики, как это было отражено в основополагающей работе Анри Пуанкаре. Разработка указанного формализма началась в работах Мельникова В.К., где аналитически впервые был обнаружен факт расщепления и пересечения многообразий гомоклинической сепаратрисы, а также в работе Арнольда В.И., где аналитическая методика была обобщена с помощью так называемых «усатых торов», базирующихся на инвариантных торах и теории возмущений. В рамках многомерных систем анализ расщепления и пересечения гомоклинических многообразий стал возможен после известных работ Р.Дж. Холмса, Дж.Е. Марсдена и С. Виггинса. Необходимо подчеркнуть, что также проблема гомо-/гетероклинических пересечений независимым образом была рассмотрена в работах Козлова В.В., где главным предметом исследований была неинтегрируемость динамических систем, проявляющаяся вследствие расщепления сепаратрис при действии возмущений. Анализ расщепления сепаратрис также проводился Зиглиным С.Л. Успешную иллюстрацию применения методов хаотической динамики, в т.ч. к анализу движения твердых тел, можно найти в известных работах Анищенко В.С., Астахова В.В., Белецкого В.В., Борисова А.В., Козлова В.В., Кузнецова С.П., Лоскутова А.Ю., Мамаева И.С., Пивоварова М.Л., Старостина Е.Л. и др.

Отдельным параграфом в главе описывается специфика применения классического метода<sup>5</sup> Мельникова В.К. и его многомерных модификаций<sup>6</sup> S.Wiggins, включая вопросы применения формализма к исследованию различных типов динамических систем, а также структуры и виды функций<sup>6</sup> Мельникова-Виггинса.

**Во второй главе** приводятся необходимые для последующих исследований математические модели возмущенного движения спутников-гиростатов, описываемые с помощью угловых скоростей и канонических переменных Андуайе-Депри, разработанные и нашедшие свое опубликование в работах диссертанта [14, 15, 16, 17]. На основе представленных моделей в следующих главах будут получены новые общие и гетероклинические аналитические решения, которые будут использованы далее для исследования хаотической динамики спутников-гиростатов на основе методологии Мельникова-Виггинса.

Вводятся геометрические и инерционно-массовые параметры асимметричного спутника-гиростата, а также используемые системы координат и взаимные переходы между ними. В рамках исследований предполагается наличие комплексной асимметрии соосной системы твердых тел (рис.1), включающей следующие факторы асимметрии и соответствующие им малые параметры:

- малые отклонения тензора инерции тел от главной формы ( $\varepsilon_1$ ), определяемые посредством двух малых углов поворотов в собственную главную систему координат ( $\alpha_i, \beta_i$ );

---

<sup>5</sup> Мельников В.К. (1963), Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Московского математического общества, № 12. 1963. С. 1–56.

<sup>6</sup> Wiggins S. (1988), Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods (Applied mathematical sciences : vol. 73), Springer-Verlag. 1988.

- малая динамическая асимметрия тела-ротора, определяемая главными центральными моментами инерции ( $\varepsilon_B = (\bar{A}_1 - \bar{B}_1)/\bar{A}$ );

- малые линейные смещения осей тел от общей оси вращения ( $l = \sup\{l_x^{(1)}, l_y^{(1)}, l_x^{(2)}, l_y^{(2)}\}$ ;  $l_x^{(1)} = \varepsilon_l l_{1x}$ ;  $l_y^{(1)} = \varepsilon_l l_{1y}$ ;  $l_x^{(2)} = \varepsilon_l l_{2x}$ ;  $l_y^{(2)} = \varepsilon_l l_{2y}$ ;  $\varepsilon_l = l/PP_2$ ).

Осуществляется масштабирование по ведущему фактору асимметрии с введением единого малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \max\{\varepsilon_I, \varepsilon_B, \varepsilon_l\}; \quad \varepsilon_I = e_I \varepsilon; \quad \varepsilon_B = e_B \varepsilon; \quad \varepsilon_l = e_l \varepsilon$$

где  $e_I, e_B, e_l$  - есть постоянные масштабирующие параметры. Далее записываются основные динамические величины и уравнения движения спутника-гиростата относительно центра масс в Эйлеровой форме в компонентах угловой скорости тела-платформы  $\boldsymbol{\omega} = [p, q, r]^T$  с учетом дополнительной степени свободы вращения тела-ротора относительно тела-платформы на угол  $\delta$  [1, 14]:

$$[\delta] \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{K}_{C\zeta'\eta'\zeta'}^{(1)} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{K}_{C\zeta'\eta'\zeta'}^{(1)} \right] + \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{K}_{C\zeta\eta\zeta}^{(2)} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_{C\zeta\eta\zeta}^{(2)} \right] = \mathbf{M}_{C\zeta\eta\zeta}^{(e)} \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_{C\zeta'}^{(1)} = \mathbf{M}_{C\zeta',1}^{(e)} + \mathbf{M}_{\delta}^{(i)} \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{M}_{C\zeta\eta\zeta}^{(e)}$  - есть вектор внешних моментов сил, приложенный к системе,  $\mathbf{M}_{C\zeta',1}^{(e)}$  - момент внешних сил, приложенного к телу-ротору (по направлению относительного вращения),  $\mathbf{M}_{\delta}^{(i)}$  - внутренний момента сил, действующий между соосными телами. Кинематические уравнения движения соосных тел полностью соответствуют классической кинематике углов Эйлера с дополнением уравнения для угла относительного вращения  $\dot{\delta} = \sigma$ .

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{1}{\sin \theta} (p \sin \varphi + q \cos \varphi); & \dot{\theta} = p \cos \varphi - q \sin \varphi; \\ \dot{\varphi} = r - \operatorname{ctg} \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi); & \dot{\delta} = \sigma \end{cases} \quad (2.3)$$

Вводятся канонические переменные  $\{l, L\}, \{\varphi_2, I_2\}, \{\varphi_3, I_3\}, \{\delta, \Delta\}$  (рис.2) Серрета-Андуайе-Депри<sup>7</sup> (далее переменные Андуайе-Депри), для чего предварительно преобразуются основные геометрические, инерционные и кинематические параметры с учетом их линейных частей разложений по малому параметру в предположении отсутствия смещения центра масс тела-ротора с общей оси вращения. Процедура введения канонических переменных требует записи «союзных» выражений, связывающих компоненты угловых скоростей с переменными Андуайе-Депри, которые после группировки членов по степеням малого параметра можно записать:

$$\begin{cases} p = \hat{p}(l, L, \delta, \Delta, I_2) = \hat{p}_0(l, L, \delta, \Delta, I_2) + \varepsilon \hat{p}_1(l, L, \delta, \Delta, I_2); \\ q = \hat{q}(l, L, \delta, \Delta, I_2) = \hat{q}_0(l, L, \delta, \Delta, I_2) + \varepsilon \hat{q}_1(l, L, \delta, \Delta, I_2); \\ r = \hat{r}(l, L, \delta, \Delta, I_2) = \hat{r}_0(l, L, \delta, \Delta, I_2) + \varepsilon \hat{r}_1(l, L, \delta, \Delta, I_2); \\ \sigma = \hat{\sigma}(l, L, \delta, \Delta, I_2) = \hat{\sigma}_0(l, L, \delta, \Delta, I_2) + \varepsilon \hat{\sigma}_1(l, L, \delta, \Delta, I_2), \end{cases} \quad (2.4)$$

<sup>7</sup> Serret J.A. (1866), Mémoire sur l'emploi de la méthode de la variation des arbitraires dans la théorie des mouvements de rotation. Mémoires de l'Academie des Sciences de Paris, Vol. 55, 1866, pp. 585-616.

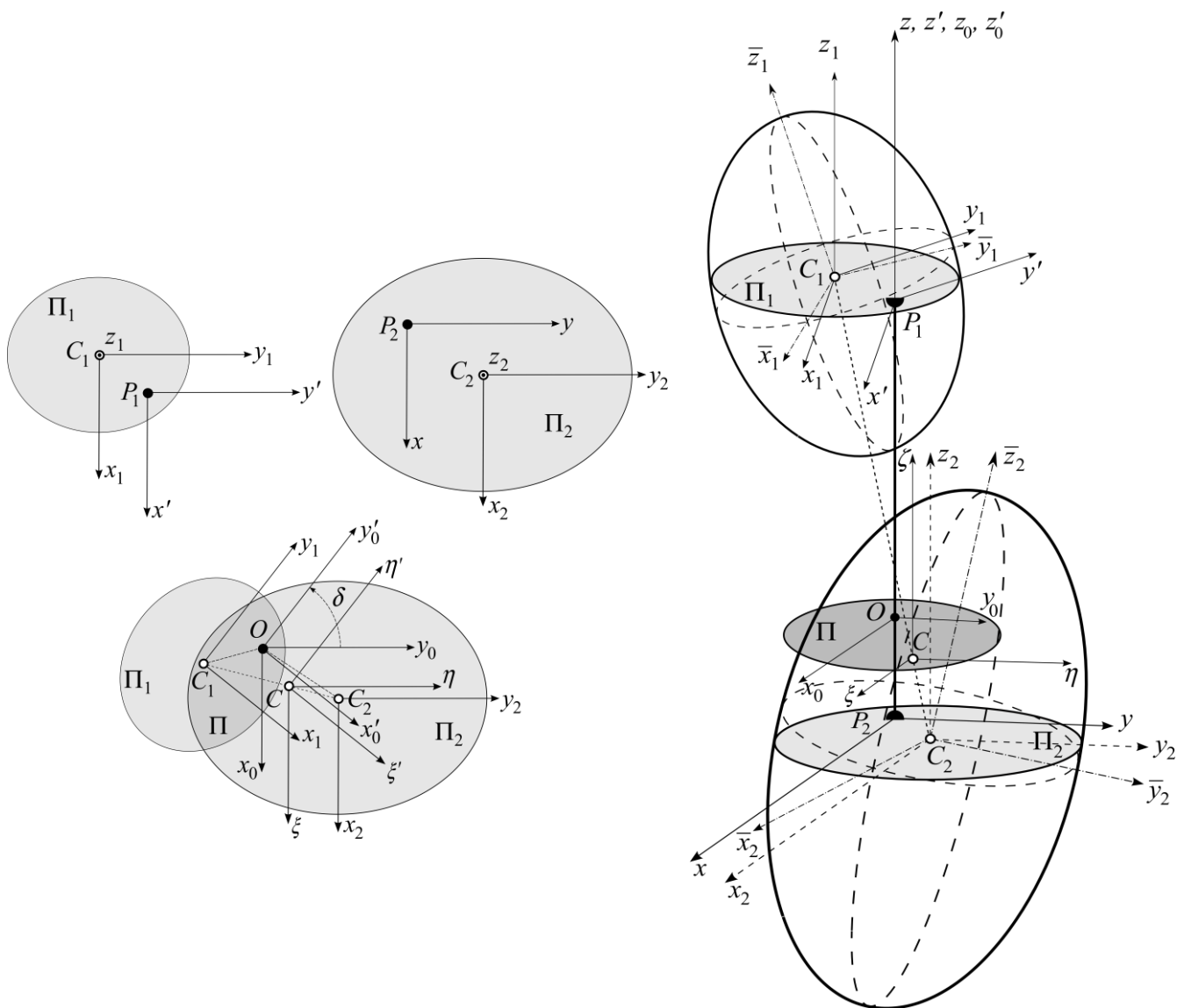


Рис.1. Механическая модель (тела представлены своими эллипсоидами инерции)

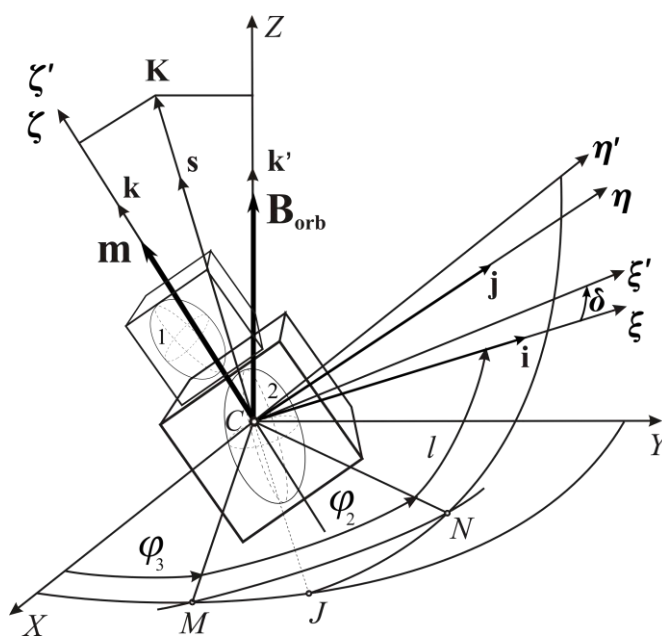


Рис. 2. Расположение осей систем координат и углы Андруайе-Депри

В союзных выражениях выполнено выделение главных «невозмущенных» ( $\hat{p}_0, \hat{q}_0, \hat{r}_0, \hat{\sigma}_0$ ) и «возмущенных» ( $\hat{p}_1, \hat{q}_1, \hat{r}_1, \hat{\sigma}_1$ ) частей [14]:

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{A} \sqrt{I_2^2 - L^2} \sin l; \quad \hat{q}_0 = \frac{1}{B} \sqrt{I_2^2 - L^2} \cos l; \quad \hat{r}_0 = \frac{L - \Delta}{\bar{C}_2}; \quad \hat{\sigma}_0 = \frac{(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)\Delta - \bar{C}_1 L}{\bar{C}_1 \bar{C}_2}; \quad (2.5)$$

$$\hat{p}_1 = e_1 \hat{p}_1 + e_l \hat{p}_l + e_B \hat{p}_B; \quad \hat{q}_1 = e_1 \hat{q}_1 + e_l \hat{q}_l + e_B \hat{q}_B; \quad \hat{r}_1 = e_1 \hat{r}_1 + e_l \hat{r}_l + e_B \hat{r}_B; \quad \hat{\sigma}_1 = e_1 \hat{\sigma}_1 + e_l \hat{\sigma}_l + e_B \hat{\sigma}_B;$$

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{A \bar{C}_1 \bar{C}_2} \left( \bar{\beta}_2 \bar{C}_1 (\bar{A}_2 - \bar{C}_2) (\Delta - L) - [\bar{\beta}_1 \cos \delta + \bar{\alpha}_1 \sin \delta] \bar{C}_2 (\bar{A}_1 - \bar{C}_1) \Delta \right);$$

$$\hat{p}_B = \bar{A}_1 \sqrt{I_2^2 - L^2} \left( \frac{1}{A^2} \sin l \sin^2 \delta - \frac{1}{AB} \cos l \cos \delta \sin \delta \right);$$

$$\hat{p}_l = \frac{1}{A \bar{C}_1 \bar{C}_2} \left( (\Delta - L) \bar{C}_1 M_2 OP_2 l_{2x} \right);$$

$$\hat{q}_1 = \frac{1}{B \bar{C}_1 \bar{C}_2} \left( \bar{\alpha}_2 \bar{C}_1 (\bar{C}_2 - \bar{B}_2) (\Delta - L) - [\bar{\beta}_1 \sin \delta - \bar{\alpha}_1 \cos \delta] \bar{C}_2 (\bar{A}_1 - \bar{C}_1) \Delta \right);$$

$$\hat{q}_B = \bar{A}_1 \sqrt{I_2^2 - L^2} \left( \frac{1}{B^2} \cos l \cos^2 \delta - \frac{1}{AB} \sin l \cos \delta \sin \delta \right);$$

$$\hat{q}_l = \frac{1}{B \bar{C}_1 \bar{C}_2} \left( (\Delta - L) \bar{C}_1 M_2 OP_2 l_{2y} \right);$$

$$\hat{r}_1 = -\frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{\bar{C}_2} \left( \frac{\bar{\beta}_2}{A} (\bar{A}_2 - \bar{C}_2) \sin l + \frac{\bar{\alpha}_2}{B} (\bar{C}_2 - \bar{B}_2) \cos l \right); \quad \hat{r}_B = 0;$$

$$\hat{r}_l = \frac{M_1 M_2 OP_2 \sqrt{I_2^2 - L^2}}{M \bar{C}_2} \left( \frac{\cos l}{B} l_{2y} - \frac{\sin l}{A} l_{2x} \right);$$

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{I_2^2 - L^2} \left( \left[ \frac{(\bar{C}_1 - \bar{A}_1)}{B \bar{C}_1} \bar{\beta}_1 \sin \delta - \frac{(\bar{C}_1 - \bar{A}_1)}{B \bar{C}_1} \bar{\alpha}_1 \cos \delta + \frac{\bar{\alpha}_2 (\bar{C}_2 - \bar{B}_2)}{B \bar{C}_2} \right] \cos l + \right. \\ \left. + \left[ \frac{(\bar{C}_1 - \bar{A}_1)}{A \bar{C}_1} \bar{\alpha}_1 \sin \delta + \frac{(\bar{C}_1 - \bar{A}_1)}{A \bar{C}_1} \bar{\beta}_1 \cos \delta + \frac{\bar{\beta}_2 (\bar{A}_2 - \bar{C}_2)}{A \bar{C}_2} \right] \sin l \right); \quad \hat{\sigma}_B = 0;$$

$$\hat{\sigma}_l = -\frac{M_1 M_2 (OP_1 \bar{C}_2 - OP_2 \bar{C}_1) \sqrt{I_2^2 - L^2}}{M \bar{C}_1 \bar{C}_2} \left( \frac{\cos l}{B} l_{2y} + \frac{\sin l}{A} l_{2x} \right),$$

где  $A = M_2 OP_2^2 + \bar{A}_2 + M_1 OP_1^2 + \bar{A}_1$ ;  $B = M_2 OP_2^2 + \bar{B}_2 + M_1 OP_1^2 + \bar{A}_1$ ;  $C = \bar{C}_1 + \bar{C}_2$ .

Записано выражение для кинетической энергии с декомпозицией слагаемых по типам асимметрии в возмущенной части:

$$\begin{cases} T(l, L, \delta, \Delta, I_2) = \hat{T}_0(l, L, \delta, \Delta, I_2) + \varepsilon \hat{T}_1(l, L, \delta, \Delta, I_2); \\ \hat{T}_0(l, L, \delta, \Delta, I_2) = \frac{I_2^2 - L^2}{2} \left[ \frac{1}{A} \sin^2 l + \frac{1}{B} \cos^2 l \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta^2}{\bar{C}_1} + \frac{(L - \Delta)^2}{\bar{C}_2} \right]; \\ \hat{T}_1 = T_1 + T_B + T_l \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$T_B = \frac{1}{2} e_B \bar{A}_1 (I_2^2 - L^2) \left( \frac{1}{A} \sin l \sin \delta - \frac{1}{B} \cos l \cos \delta \right)^2; \quad (2.7)$$

$$T_I = -e_1 \sqrt{I_2^2 - L^2} \left\{ \frac{L - \Delta}{\bar{C}_2} \left( \bar{\beta}_2 (\bar{A}_2 - \bar{C}_2) \frac{\sin l}{A} + \bar{\alpha}_2 (\bar{C}_2 - \bar{B}_2) \frac{\cos l}{B} \right) + \right. \\ \left. + (\bar{A}_1 - \bar{C}_1) \frac{\Delta}{\bar{C}_1} \left[ \frac{\sin l}{A} (\bar{\beta}_1 \cos \delta + \bar{\alpha}_1 \sin \delta) + \frac{\cos l}{B} (\bar{\beta}_1 \sin \delta - \bar{\alpha}_1 \cos \delta) \right] \right\}; \quad (2.8)$$

$$T_l = -e_l \sqrt{I_2^2 - L^2} \left[ \frac{\sin l}{A} l_{2x} + \frac{\cos l}{B} l_{2y} \right] \frac{M_1 M_2}{\bar{C}_2 M} \left\{ L \cdot OP_2 + \frac{\Delta (OP_1 \bar{C}_2 - OP_2 \bar{C}_1)}{\bar{C}_1} \right\}; \quad (2.9)$$

В целях рассмотрения движения намагниченных спутников-гиростатов в магнитных полях вводится потенциальная энергия магнитного взаимодействия спутника с собственным дипольным магнитным моментом  $\mathbf{m}$  и внешнего магнитного поля с постоянным в инерциальном пространстве вектором магнитной индукцией  $\mathbf{B}_{orb}$ , что соответствует динамике пространственного движения спутника-гиростата либо на коротком участке его орбитального движения (когда вектор магнитной индукции изменяется мало), либо при длительном орбитальном движении на круговых экваториальных орбитах.

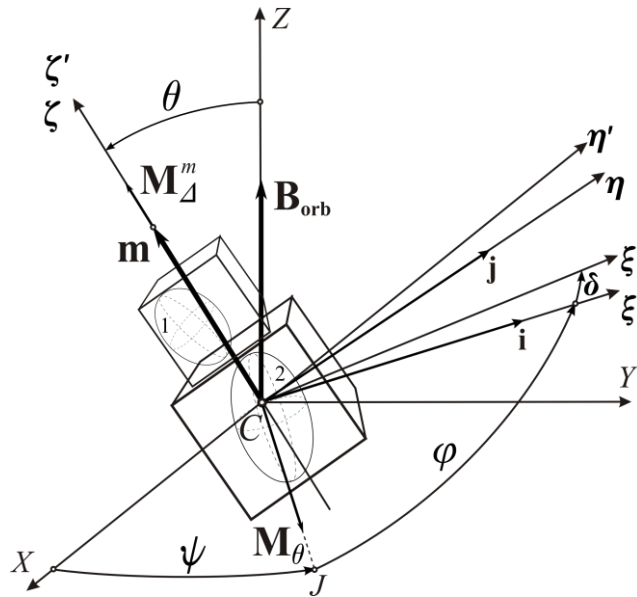


Рис.3. Углы Эйлера, восстанавливающая и вращающая части магнитного момента при выборе оси CZ вдоль направления вектора  $\mathbf{B}_{orb}$

После преобразований выражения для моментов сил магнитного взаимодействия и потенциальной энергии  $P$  записываются для произвольного случая размещения в соосных телах магнитных актуаторов, создающих собственный дипольный магнитный момент спутника-гиростата  $\mathbf{m}$  [14]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{orb}; \\ M_\theta = M_m^\xi \cos \varphi - M_m^\eta \sin \varphi = \\ = B_{orb} \left( -m \sin \theta + m_\perp \cos \theta \left[ (c_\chi \sin \delta + s_\chi \cos \delta) \cos \varphi + (c_\chi \cos \delta - s_\chi \sin \delta) \sin \varphi \right] \right); \\ M_\Delta^m = M_m^\zeta = m_\perp B_{orb} \sin \theta \left( (c_\chi \cos \delta - s_\chi \sin \delta) \cos \varphi - (c_\chi \sin \delta + s_\chi \cos \delta) \sin \varphi \right); \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$P = -m B_{orb} \cos \theta - m_\perp B_{orb} \sin \theta \left[ (c_\chi \sin \delta + s_\chi \cos \delta) \cos \varphi + (c_\chi \cos \delta - s_\chi \sin \delta) \sin \varphi \right], \quad (2.11)$$



где  $m_{\perp}, c_{\chi}, s_{\chi}$  – малый поперечный компонент вектора дипольного магнитного момента и параметры углового эксцентриситета его расположения относительно тела, причем если магнитный актуатор расположен внутри ротора, то в выражениях (2.12) и (2.10)  $\delta = \delta(t)$ , а если внутри тела-платформы, то  $\delta \equiv 0$ .

В рамках рассмотрения в работе важного динамического случая движения спутника-гиростата в стандартном для него режиме реализации цилиндрической прецессии. Если при этом рассматривать экваториальные круговые орбиты Земли, то в соответствии со структурой геомагнитного поля вектор его магнитной индукции  $\mathbf{B}_{orb}$  можно считать постоянным как по направлению, так и по величине (т.к. на круговой орбите расстояние до геомагнитного диполя не изменяется).

Выбором инерциальной оси  $CZ$  вдоль вектора нормали к экваториальной круговой орбите будет обеспечиваться постоянство и сонаправленность вектора геомагнитной индукции  $\mathbf{B}_{orb}$  с вектором кинетического момента свободного спутника-гиростата  $\mathbf{K}$  в режиме цилиндрической прецессии ( $\mathbf{K} \uparrow\uparrow \mathbf{B}_{orb}$ ). В качестве возмущения магнитный момент будет стремиться изменять вектор кинетического момента, однако, если величины магнитного момента и кинетического момента окажутся в определенном своем отношении, то изменением кинетического момента можно пренебречь и считать его постоянным вектором. Для оценки такого отношения следует ввести безразмерные величины для кинетического момента, времени

$$\mathbf{k} = \mathbf{K}/K; \quad \tau = tK/A$$

и записать в них динамическое уравнение ( $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{orb}$ ) в инерциальных осях:

$$\frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = \frac{A|\mathbf{m}||\mathbf{B}_{orb}|}{K^2} \mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_{CZ} \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{k}$  – безразмерный нормированный кинетический момент системы,  $K$  – величина кинетического момента при свободном движении,  $A$  – экваториальный момент инерции системы (может быть взят и иной момент инерции),  $\tau$  – безразмерное время,  $\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{CZ}$  – единичный вектор вдоль направления собственного дипольного момента и орт оси  $CZ$ , соответственно. Из уравнения (2.13) следует, что влияние магнитного момента не будет существенно изменять величину и направление вектора кинетического момента при выполнении следующего ограничения на величины:

$$A|\mathbf{m}||\mathbf{B}_{orb}|/K^2 \ll 1 \quad (2.14)$$

При выполнении условия (2.14) можно считать, что кинетический момент будет практически постоянным вектором совпадающим с направлением постоянного вектора магнитной индукции ( $\mathbf{K} \cong \text{const}, \mathbf{K} \uparrow\uparrow \mathbf{B}_{orb} \uparrow\uparrow CZ$ ), что позволяет найти направляющие косинусы оси  $CZ$  путем вычислений отношений компонент кинетического момента:

$$\gamma_1 = Ap/K; \quad \gamma_2 = Bq/K; \quad \gamma_3 = (C_b r + \Delta)/K, \quad (2.15)$$

а также записать связи углов Эйлера и переменных Андуайе-Депри:

$$I_2 = K = \text{const}; \quad \cos \theta = L/I_2; \quad \sin \theta = \sqrt{I_2^2 - L^2}/I_2; \quad l = \varphi \quad (2.16)$$

Выражение для потенциальной энергии (2.17) перепишется в виде:

$$P = -B_{orb} \left[ \frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{I_2} (m_x \sin l + m_y \cos l) + m_z \frac{L}{I_2} \right] \quad (2.18)$$

При допущении, что собственный дипольный момент направлен предпочтительно вдоль продольной оси спутника-гиростата ( $m_z = m$ ), но имеет относительную малость поперечной

составляющей ( $m_{\perp}$ ), то можно ввести следующий малый параметр:

$$\varepsilon_m = m_{\perp}/m \ll 1 \quad (2.19)$$

и выполнить соответствующее его масштабирование:

$$\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_B, \varepsilon_l, \varepsilon_m\}; \quad \varepsilon_m = \varepsilon e_m; \quad m_{\perp} = \varepsilon e_m m; \quad e_m \leq 1$$

Тогда выражение (2.18) приобретёт вид, включающий главную и возмущенную части:

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \varepsilon P_1^m; \quad P_0 = -mB_{orb} \frac{L}{I_2}; \\ P_1^m &= -mB_{orb} e_m \frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{I_2} \left[ (c_{\chi} \sin \delta + s_{\chi} \cos \delta) \cos l + (c_{\chi} \cos \delta - s_{\chi} \sin \delta) \sin l \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Также для последующего исследования динамики движения нормальных спутников-гиростатов вводится ряд неконсервативных внутренних возмущающих моментов. Это, прежде всего, внутренний момент сил, действующий между соосными телами по степени свободы угла  $\delta$ , соответствующий силам «вязкого» и «сухого» трения:

$$M_{\Delta}^{fl} = -\nu\sigma; \quad M_{\Delta}^{fd} = -\text{sign}(\sigma)\kappa = -\kappa \frac{\sigma}{|\sigma|}; \quad M_{\Delta}^f = M_{\Delta}^{fl} + M_{\Delta}^{fd} = -\varepsilon\sigma [e_{\nu} + e_{\kappa}/|\sigma|], \quad (2.21)$$

где  $e_{\nu}$ ,  $e_{\kappa}$  - безразмерные масштабирующие факторы величин жидкостного и сухого типов трения ( $\nu = e_{\nu}\varepsilon$ ,  $\kappa = e_{\kappa}\varepsilon$ ). В переменных Андуайе-Депри момент внутреннего трения можно представить в форме [14]:

$$\begin{cases} m_{\Delta}^f = -\frac{e_{\nu}}{\bar{C}_1\bar{C}_2} \left[ (\bar{C}_1 + \bar{C}_2)\Delta - \bar{C}_1 L \right] + e_{\kappa} F(t) = -e_{\nu}\sigma(t) + e_{\kappa} F(t), \\ F(t) = -\text{sign} \left( \frac{e_{\nu}}{\bar{C}_1\bar{C}_2} \left[ (\bar{C}_1 + \bar{C}_2)\Delta - \bar{C}_1 L \right] \right) = -\text{sign}(\sigma(t)) \end{cases} \quad (2.22)$$

Вводится также момент раскрутки ротора электродвигателем, действующий между соосными телами спутника-гиростата, связывающий величину момента сил с силой тока ( $I$ ), напряжением ( $U$ ), сопротивлением ( $R$ ) и величиной противо-электродвижущей силы, возникающей вследствие вращения ротора и создающей «обратное» напряжение ( $E_B$ ):

$$M_{\Delta}^{DC} = k_I I; \quad E_B = k_B \sigma; \quad U = IR + E_B, \quad (2.23)$$

который после преобразований принимает вид

$$m_{\Delta}^{DC} = -e_{\mu}\sigma(t) + e_U F(t), \quad F(t) = U(t) \quad (2.24)$$

Помимо момента раскрутки ротора электродвигателем, управляемого подачей на него напряжения  $U(t)$  в виде управляющего сигнала, на тело-ротор посредством электродвигателя может передаваться вторичный паразитный сигнал, например, следующий со стороны контура обратной связи угловой скорости ротора при наличии запаздывания и ошибок в цепи. Для описания подобных ситуаций осуществлен учет *малого полигармонического возмущающего момента*, соответствующего некому конечному разложению сигнала/напряжения в электродвигателе в ряд Фурье по углу относительного вращения ротора  $\delta$  при сохранении конечного числа гармоник  $N$  [13, 15]. Полигармонический момент сил и соответствующая потенциальная энергия имеют вид:

$$M_{\Delta}^{\delta} = \varepsilon m_{\Delta}^{\delta}; \quad m_{\Delta}^{\delta} = e_{\delta} \sum_{n=1}^N [\bar{a}_n \sin(n\delta) + \bar{b}_n \cos(n\delta)]; \quad \bar{b}_0 = 0 \quad (2.25)$$

$$P_1^{\delta} = -\int m_{\Delta}^{\delta} d\delta = e_{\delta} \sum_{n=1}^N \left[ a_n \sin(n\delta) + b_n \cos(n\delta) \right]; \quad a_n = -\frac{\bar{b}_n}{n}; \quad b_n = \frac{\bar{a}_n}{n}, \quad (2.26)$$

где  $\bar{a}_n$ ,  $\bar{b}_n$  - есть коэффициенты разложения в ряд Фурье, а величина  $e_{\delta}$  представляет собой масштабирующий фактор полигармонического момента сил по отношению к главному

малому параметру. Отдельно подчеркнем, что введенный полигармонический момент может соответствовать общему виду разложения в ряд Фурье произвольного действующего между соосными телами возмущающего момента сил, зависящего от позиционной фазы  $\delta$ .

В итоге в главе формируется полная математическая модель движения нормальных спутников-гиростатов при действии внешних и внутренних возмущений различной природы, которая может быть представлена как в Эйлеровой форме, так и гамильтоновой форме в переменных Андуайе-Депри [14, 15]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1; \quad \mathcal{H}_0 = T_0 + P_0; \quad \mathcal{H}_1 = T_1 + P_1; \quad (2.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = \frac{I_2^2 - L^2}{2} \left[ \frac{1}{A} \sin^2 l + \frac{1}{B} \cos^2 l \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta^2}{\bar{C}_1} + \frac{(L - \Delta)^2}{\bar{C}_2} \right]; \quad P_0 = -mB_{orb} \frac{L}{I_2}; \\ T_1 = T_I + T_B + T_l; \quad P_1 = P_1^m + P_1^\delta \end{array} \right. \quad (2.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l} = f_L + \varepsilon g_L; \quad \dot{l} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} = f_l + \varepsilon g_l; \\ \dot{\Delta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \delta} = f_\Delta + \varepsilon g_\Delta; \quad \dot{\delta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Delta} = f_\delta + \varepsilon g_\delta; \\ \dot{I}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_2} = 0; \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_2}; \\ \dot{I}_3 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_3} = 0; \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_3} = 0; \end{array} \right. \quad (2.29)$$

с функциями правых частей канонических уравнений (2.30) с выделением главных и возмущающих членов:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_L = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial l}; \quad f_l = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L}; \quad f_\Delta = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \delta} = 0; \quad f_\delta = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \Delta}; \\ g_L = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial l}; \quad g_l = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L}; \quad g_\Delta = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \delta} + m_\Delta^f + m_\Delta^{DC}; \quad g_\delta = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \Delta}, \end{array} \right. \quad (2.31)$$

включая негамильтоновы возмущения  $(m_\Delta^f, m_\Delta^{DC})$  в динамическом уравнении для импульса относительного вращения  $\Delta$ . Из вида гамильтониана (2.27), определяющегося выражениями (2.28), и из системы (2.29) следует, что уравнения для двух пар переменных  $\{\{L, l\}, \{\Delta, \delta\}\}$  могут быть формально проинтегрированы отдельно от циклических пар координат  $\{\{I_2, \varphi_2\}, \{I_3, \varphi_3\}\}$ , что позволяет редуцировать систему с четырьмя степенями свободы до системы с двумя степенями свободы  $\{\{L, l\}, \{\Delta, \delta\}\}$  и двух циклических степеней  $\{\{I_2, \varphi_2\}, \{I_3, \varphi_3\}\}$ , интегрируемых отдельно после определения позиционных.

Таким образом, во второй главе представлены механические и математические модели, описываемые с помощью угловых скоростей и канонических координат Андуайе-Депри [14-17]. На основе полученных моделей в следующих главах находятся новые общие и гетероклинические аналитические решения, которые будут использованы далее для исследования хаотической динамики и синтеза методов управления пространственным движением и переориентацией спутников-гиростатов.

**В третьей главе** представлены аналитические решения для различных случаев движения спутников-гиростатов, полученные и опубликованные в работах диссертанта [3, 14, 16, 17]. Изучаются следующие *три класса движений* нормальных спутников-гиростатов и осуществляется параметрическое обобщение соответствующих им классов аналитических решений:

- I. *Класс движений Эйлера* для спутника-гиростата при малых возмущениях магнитной природы с требованием сонаправленности начального кинетического момента и вектора внешней магнитной индукции [17];
- II. *Класс движений Лагранжа* для тяжелого динамически симметричного спутника-гиростата при действии между его соосными телами произвольного внутреннего момента [3], а также намагниченного спутника-гиростата [16], обобщающих случай Лагранжа движения твердого тела;
- III. Движение спутника-гиростата при малых возмущениях от центрального поля тяготения в режиме конической прецессии [19], *обобщающее случай В.А. Стеклова* движения твердого тела в центральном поле.

Указанные классы движения спутников-гиростатов исследуются в отдельных параграфах главы с целью записи параметрических обобщений и получения новых решений в соответствии со следующей структурой:

I. В параграфе 3.2 исследуется первый класс движения, соответствующий движению спутника-гиростата в режиме цилиндрической прецессии с переменными компонентами собственного магнитного дипольного момента, пропорциональными компонентам угловой скорости тела-платформы, и при выполнении ограничений на величину магнитного момента сил, определяющихся условиями (2.14). Этот режим актуален на экваториальных круговых орбитах или на малых сегментах произвольных орбит при обеспечении сонаправленности векторов кинетического момента и индукции геомагнитного поля.

В рамках изучения I-го класса движений:

- I.1. В пункте 3.2.1 выполняется *параметрическое обобщение общего решения* класса Эйлера<sup>8</sup> для общего вида полюдий.
- I.2. В пункте 3.2.2 выполняется параметрическое обобщение гетероклинического решения<sup>8</sup> класса Эйлера для гетероклинических полюдий (частное решение). В том числе выполняется параметрическое обобщение гетероклинического решения Эйлера для твердого тела на случай нормального осевого гиростата при взаимной компенсации гироскопического момента стабилизации и влияния магнитных моментов сил.
- I.3. В пункте 3.2.3 находится новое гетероклиническое решение для вращающейся фазы угла относительной закрутки ротора в переменных типа действие-угол (необходимо для анализа хаотической динамики спутника-гиростата).

II. В параграфе 3.3 изучается II-й класс движений с разбиением на два подкласса:

II.1. В пункте 3.3.2 исследуется движение динамически симметричного спутника-гиростата в плоском поле сил тяжести с произвольным внутренним моментом сил между соосными телами, в т.ч.:

II.1.1. Выполняется *сведение к общему решению Лагранжа* с его обобщением на случай осевого гиростата с произвольным внутренним моментом сил.

II.1.2. Определяются особые случаи динамики, включая «лунное» движение и другие специальные виды прецессий Лагранжевого типа.

II.2. В пункте 3.3.2 исследуется движение динамически симметричного спутника-гиростата с переменными компонентами собственного магнитного дипольного момента, пропорциональными компонентам угловой скорости тела-платформы, без ограничений на величину магнитного момента сил, в т.ч.:

II.2.1. Находятся *новые общие аналитические решения* для движения в магнитном поле нормального осевого динамически симметричного гиростата при наличии у него переменных компонент дипольного момента, пропорциональных компонентам угловой скорости тела-платформы.

<sup>8</sup> - Cochran J.E., Shu P.H., Rew S.D. (1982), Attitude motion of asymmetric dual-spin spacecraft. Journal of Guidance, Control, and Dynamics 5 (1), 1982, pp. 37-42;

- Aslanov V.S. (2012), Integrable cases in the dynamics of axial gyrostats and adiabatic invariants, Nonlinear Dynamics, Volume 68, Issue 1, 2012, pp. 259-273.

III. В параграфе 3.4 исследуется III-й класс движения спутника-гиростата, соответствующий движению в центральном поле гравитации в режиме конической прецессии при сонаправленности вектора кинетического момента и вектора градиента центрального поля (локальной вертикали). Режим актуален на коротком интервале орбитального движения.

III.1. Находится *параметрическое обобщение* (модификация) решения<sup>8</sup> для свободного нормального осевого гиростата в случае конической прецессии в слабом центральном поле тяготения, гиростатически обобщающее случай В.А. Стеклова движения твердого тела в центральном поле.

Связи указанных классов движения с параметрами спутника-гиростата и динамическими режимами определяются таблицей (табл.1). Связи новых решений с классическими случаями описываются таблицей (табл.2), характеризующей вырождения к известным решениям для гиростата и твердого тела. Указанные взаимосвязи позволяют расширить применимость известных и новых решений на совокупность задач изучения динамики систем тел.

Далее в соответствии с указанной выше структурой приводятся шесть видов аналитических решений.

**1. Общие решения для движения осевого спутника-гиростата под действием переменного магнитного момента.** Решения [17] характерны для движения спутника-гиростата в режиме цилиндрической прецессии с переменными компонентами собственного магнитного дипольного момента, пропорциональными компонентам угловой скорости тела-платформы, при выполнении ограничений на величину магнитного момента сил, определяющихся условиями (2.14). Этот первый вид решений актуален на экваториальных круговых орбитах или на малых сегментах орбит общего вида при обеспечении сонаправленности вектора кинетического момента и вектора индукции геомагнитного поля. При этом собственный дипольный момент формируется спутником-гиростатом по линейному закону пропорционально компонентам угловой скорости тела-носителя:

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}) = k\boldsymbol{\omega} + \mathbf{d} \quad (3.1)$$

где  $k = \text{const}$  и  $\mathbf{d} = [0, 0, \tilde{m}_z]^T$  – постоянный вектор в связанной системе координат. Закон формирования компонент дипольного момента (3.1) предложено именовать, как « $\omega$ -режим». Движение рассматривается при выполнении условия (2.14), что позволяет рассматривать действие магнитного момента сил, как возмущающее, а сонаправленность  $\mathbf{K} \uparrow \uparrow \mathbf{V}_{orb}$  отвечает либо орбитальному движению по круговой экваториальной орбите в режиме цилиндрической прецессии, либо движению по части орбиты, где силовые линии внешнего магнитного поля коллинеарны вектору кинетического момента (рис.4).

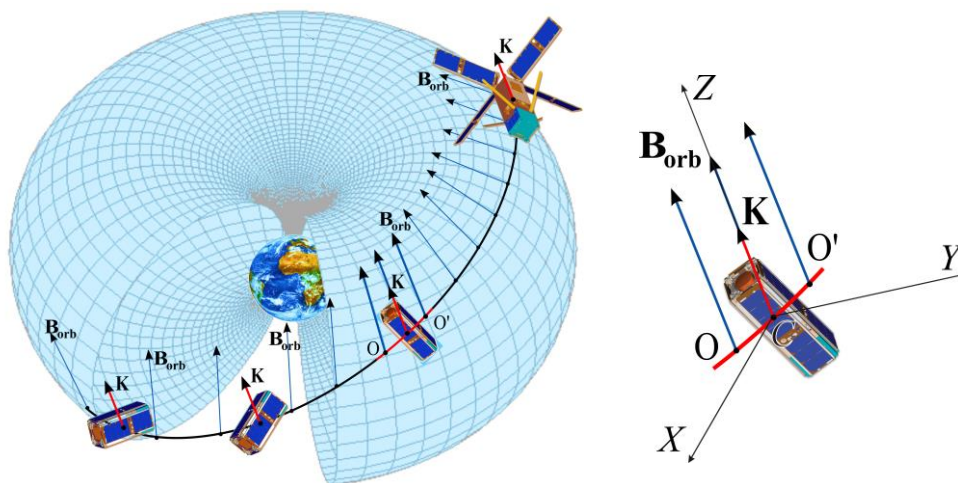


Рис.4. Модель магнитного поля Земли (одна из силовых поверхностей) и «скользящие» вектора его магнитной индукции  $\mathbf{V}_{orb}$  вдоль орбиты спутника-гиростата

Таблица 1. Связи общих решений и классов изучаемых движений

Класс	Моменты инерции	Силовые параметры	Требование к направлению кинетического момента	Режимы движения	Типы решений	Случай обобщения
I (Эйлера)	Трехосный тензор инерции тела-платформы и динамически симметричный ротор: $A_b > B_b > C_b$ $A_r = B_r$	Движение при действии малых магнитных моментов в случае (2.14) с переменным дипольным моментом вида: $\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}) = \nu \boldsymbol{\omega} + \mu \mathbf{e}_z$	$\mathbf{K} \uparrow \uparrow \mathbf{V}_{orb}$ $\mathbf{K} \cong \text{const}$	I.1. Цилиндрическая прецессия, $\omega$ -режим	Общее	Параметрические обобщения решения <sup>8</sup> Эйлера для осевого гиростата
		условие (2.14), дипольный момент вида: $\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}) = \nu \boldsymbol{\omega} + \mu \mathbf{e}_z$ при условии $\Delta(1-\nu) = -C_b \mu$		$\mathbf{K} \uparrow \uparrow \mathbf{V}_{orb}$ $\mathbf{K} \cong \text{const}$	I.2. Цилиндрическая прецессия, $\omega$ -режим	
	I.3. Цилиндрическая прецессия, $\omega$ -режим	Гетероклиническое для действующего угла для фазы $(\Delta, \delta)$				
	I.4. Взаимная компенсация гироскопической стабилизации и магнитных моментов	Гетероклиническое				
II (Лагранжа)	динамически симметричный спутник-гиростат: $A_b = B_b$ $A_r = B_r$	Плоское поле тяжести, нет магнитного момента	Нет	II.1.1. Общий режим	Общее	<i>решение Лагранжа с обобщением на случай произвольного внутреннего момента сил</i>
		отсутствие сил тяжести с переменным дипольным моментом: $\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}) = k \boldsymbol{\omega}$ без ограничения на величину магнитного момента сил	Нет	II.2.1. $\omega$ -режим	Общее	Запись новых аналитических решений
III (Стеклова в центральном поле)	Трехосный тензор инерции тела-платформы и динамически симметричный ротор: $A_b > B_b > C_b$ $A_r = B_r$	Центральное поле гравитации при $\mu_g \ll \frac{K^2}{A^2}$	$\mathbf{K} \uparrow \uparrow \mathbf{g}_{orb}$ $\mathbf{K} \cong \text{const}$	III.1. Коническая прецессия	Общее	Параметрическая модификация обобщения решения Эйлера <sup>8</sup> с гиростатическим обобщением <i>случая Стеклова</i> движения тела в центральном поле

Таблица 3.2. Вырожденные случаи решений

Класс	Наименование решений/ режимов	Типы решений	Ограничения на силовые параметры	Случаи вырождения
I (Эйлера)	I.1. Цилиндрич. прецессия, $\omega$ -режим	Общее	Движение при действии малых магнитных моментов в случае (2.14) с переменным дипольным моментом вида: $\mathbf{m}(\omega) = v\omega + \mu e_z$	1. $v=\mu=0$ : <b>решения класса Эйлера<sup>8</sup></b> для осевого нормального гиростата  2. $v=\mu=\Delta=0$ : <b>решения класса Эйлера<sup>8</sup></b> для свободного твердого тела
	I.2. Цилиндрич. прецессия, $\omega$ -режим	Гетероклиническое		
	I.3. Цилиндрич. прецессия, $\omega$ -режим	Гетероклиническое для переменных типа действие-угол для вращающейся фазы ( $\Delta, \delta$ )		
	I.4. Взаимная компенсация гироскопической стабилизации и влияния магнитных моментов	Гетероклиническое	Движение при действии малых магнитных моментов в случае (2.14) с переменным дипольным моментом вида: $\mathbf{m}(\omega) = v\omega + \mu e_z$ при условии $\Delta(1-v) = -C_b \mu$	
II (Лагранжа)	II.1.1. Общий режим	Общее	Плоское поле тяжести, нет магнитного момента	$\Delta=0$ : <b>решение Лагранжа</b> для тяжелого твердого тела
	II.2.1. $\omega$ -режим	Общее	Движение в отсутствии сил тяжести с переменным дипольным моментом: $\mathbf{m}(\omega) = k\omega$ без ограничения на величину внешнего магнитного момента сил и других ограничений	<b>нет случаев естественного вырождения к известным решениям (т.к. изученный случай является новым)</b> ----- при принципиальном изменении постановки задачи и вида переменного дипольного момента на постоянный $\mathbf{m}(\omega) = k\omega \Rightarrow \mathbf{m}(\omega) = k e_z$ технически последует вырождение к задаче движения тела в случае Лагранжа
III (Стеклова в центральном поле)	III.1. Коническая прецессия	Общее	Центральное поле гравитации при $\mu_g \ll \frac{K^2}{A^2}$	1. $\mu_g=0$ : <b>решения класса Эйлера<sup>8</sup></b> для осевого нормального гиростата 2. $\Delta=0$ : <b>решения Стеклова</b> для тела в центральном поле 3. $v=\mu=\Delta=0$ : <b>решения класса Эйлера<sup>8</sup></b> для свободного твердого тела

Динамические уравнения движения в рассматриваемом случае, могут быть записаны в следующей векторной и скалярной форме [17]:

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \mathbf{K} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\text{orb}} = [\nu \boldsymbol{\omega} + \mu \mathbf{e}_z] \times \mathbf{K} \quad (3.2)$$

$$\nu = kB_{\text{orb}}/K; \quad \mu = \tilde{m}_z B_{\text{orb}}/K$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + [(C_b - B)qr + q\Delta](1-\nu) = -B\mu q \\ B\dot{q} + [(A - C_b)pr - p\Delta](1-\nu) = A\mu p \\ C_b\dot{r} + \dot{\Delta} + pq(B - A)(1-\nu) = 0; \quad \dot{\Delta} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Первые интегралы системы имеют вид [17]:

$$Ap^2 + Bq^2 + C_b r^2 + \frac{\Delta^2}{C_r} - \frac{2\mu}{(1-\nu)} [C_b r + \Delta] = 2\tilde{T} \quad (3.4)$$

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + [C_b r + \Delta]^2 = \text{const} = K^2 = 2D\tilde{T} \quad (3.5)$$

После выполнения интегрирования следуют явные аналитические решения для всех компонент угловых скоростей [17]:

$$\begin{cases} q(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{B(A-B)} [H - C_b(A-C_b)(x(t) + \Delta\beta)^2]}; \\ p(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{A(A-B)} [C_b(B-C_b)x^2(t) - F]}; \\ r(t) = \frac{\Delta}{A-C_b} \pm \left( x(t) + \Delta\beta - \frac{\mu}{(1-\nu)} \alpha \right); \\ x(t) = e \frac{R/P + \tilde{c}^2 \text{sn}^2 [\pm (N(1-\nu)(t-t_0) + I_0), k]}{R/P - \tilde{c}^2 \text{sn}^2 [\pm (N(1-\nu)(t-t_0) + I_0), k]}; \end{cases} \quad (3.6)$$

Графики зависимостей (рис.5) демонстрируют положительный результат верификации аналитического решения (3.6) для следующего набора параметров:  $A_b=15$ ,  $B_b=10$ ,  $C_b=7$ ,  $A_r=5$ ,  $C_r=4$  [kg·m<sup>2</sup>];  $p_0=0.60$ ,  $q_0=2.31$ ,  $r_0=1.86$  [1/s];  $\Delta=3$ ,  $K=40$  [kg·m<sup>2</sup>/s];  $Q=10$  [kg·m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>];  $\mu=-0.25$  [1/s];  $\nu=0.30$ .

Из полученных решений (3.6) следуют решения<sup>8</sup> для свободного нормального осевого гиростата при  $\nu=\mu=0$ , а также решения для твердого тела в случае Эйлера при  $\Delta=\nu=\mu=0$ .

**2. Гетероклиническое решение в случае переменного магнитного момента.** Для анализа хаотической динамики движения спутника-гиростата получен явный вид гетероклинических решений, следующих из общих решений (3.6) при вырождении эллиптических функций в гиперболические (когда коэффициент эллиптичности  $k=1$ ). Эти решения соответствуют движению вдоль сепаратрисс в фазовом пространстве системы и определяют динамику образования гетероклинических расщеплений при действии возмущений [17]:

$$\begin{cases} \bar{p}(t) = \pm \sqrt{\frac{C_b(B-C_b)}{A(A-B)} \bar{x}(t)}; & \bar{r}(t) = \bar{x}(t) + \frac{\Delta - EB/(1-\nu)}{B-C_b}; \\ \bar{q}(t) = \pm \sqrt{\zeta^2 - \chi^2 \left( \bar{x}(t) + \Delta\beta + \frac{E}{(1-\nu)} \alpha \right)^2}; & \bar{\sigma}(t) = \frac{\Delta}{C_r} - \bar{r}(t); \end{cases} \quad (3.7)$$

где



$$\bar{x}(t) = \frac{4a_0\Phi_0 \exp\left(\mp \frac{\tilde{M}\sqrt{a_0}}{\chi^2}(1-\nu)t\right)}{\left[\Phi_0 \exp\left(\mp \frac{\tilde{M}\sqrt{a_0}}{\chi^2}(1-\nu)t\right) - a_1\right]^2 - 4a_2a_0}; \quad a_i = \text{const}_i$$

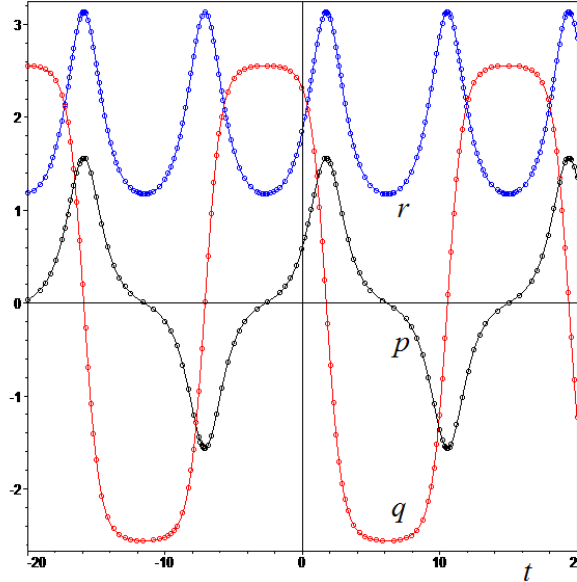


Рис.5. Результаты численного интегрирования (линии) и аналитические (точки) решения (3.6)

Аналитические решения (3.7) обобщают соответствующие гетероклинические решения<sup>9</sup>, полученные для случая свободного нормального осевого гиристора (при  $\mu=\nu=0$ ) и свободного твердого тела ( $\Delta=\mu=\nu=0$ ).

Из выражения (3.7) для относительной скорости вращения ротора следует гетероклиническое решение для угла относительного вращения тела-ротора  $\delta$  [14]:

$$\bar{\delta} = \int \bar{\sigma}(t) dt = \int \left[ \frac{\Delta}{C_r} - \bar{r}(t) \right] dt = \left[ \frac{\Delta}{C_r} - \frac{\Delta - EB/(1-\nu)}{B - C_b} \right] t - \int \bar{x}(t) dt; \quad (3.8)$$

или в переписанной форме:

$$\bar{\delta} = \sigma_* t - \bar{v}_\delta(t) + \delta_0; \quad (3.9)$$

$$\sigma_* = \left[ \frac{\Delta}{C_r} - \frac{\Delta - EB/(1-\nu)}{B - C_b} \right] \quad (3.10)$$

$$\bar{v}_\delta(t) = \Theta(t) - \Theta(0); \quad (3.11)$$

$$\Theta(t) = \int \bar{x}(t) dt = \frac{2}{g} \sqrt{\frac{a_0}{|a_2|}} \arctg \left[ \frac{\Phi_0 \exp(\mathcal{G}t) - a_1}{2\sqrt{a_0|a_2|}} \right]; \quad \mathcal{G} = \mp \frac{\tilde{M}\sqrt{a_0}}{\chi^2}(1-\nu) \quad (3.12)$$

**3. Гетероклиническое решение в переменных действие-угол для вращающейся фазы ротора.** В целях корректного применения формализма Виггинса<sup>10</sup> для обнаружения фактов

<sup>9</sup> - Асланов В.С., Дорошин А.В. (2010), Хаотическая динамика неуровновешенного гиристора // Прикладная математика и механика, т.74, вып.5, 2010. С. 734-750.

- Aslanov V.S. (2012), Integrable cases in the dynamics of axial gyrostats and adiabatic invariants, Nonlinear Dynamics, Volume 68, Issue 1, 2012, pp. 259-273.

<sup>10</sup> Wiggins S. (1988), Global Bifurcations and Chaos : Analytical Methods (Applied mathematical sciences : vol. 73), Springer-Verlag. 1988.

пересечения расщепленных многообразий гомо-/гетероклинических фазовых траекторий необходимо обеспечить переход от картезианских импульсов и переменных для вращающихся фаз к их соответствующим формам типа «действие-угол». Путем канонических преобразований найден вид гетероклинических решений [14] для вращающейся фазы и импульса  $\{\delta, \Delta\}$  к соответствующей угловой переменной и действия  $\{w_\delta, I_\Delta\}$ , а также их связи друг с другом:

$$\begin{cases} \bar{\delta}(t) = \delta(\bar{w}_\delta(t), \bar{l}(t)) = \bar{w}_\delta(t) - \bar{v}_\delta(t); \Leftrightarrow \bar{w}_\delta(t) = \bar{\delta}(t) + \bar{v}_\delta(t); \\ \bar{\delta}(t) = \bar{\omega}_\delta t - \bar{v}_\delta(t) + \delta_0; \quad \bar{w}_\delta(t) = \bar{\omega}_\delta t + w_0; \\ \bar{\omega}_\delta = \sigma_* = \Delta / \bar{C}_1 - (\Delta - EB) / (B - \bar{C}_2); \\ \stackrel{df}{w_0} = \delta_0; \quad \bar{I}_\Delta = \bar{\Delta} = \Delta; \end{cases} \quad (3.13)$$

Выражения (3.13) с дополнением (3.7) и (3.11) представляют собой гетероклиническое решение для переменных действие-угол для вращающейся фазы угла относительного вращения ротора.

**4. Общее решение для тяжелого осевого гиростата с произвольным внутренним моментом сил, приводимое к случаю Лагранжа.** Рассматривается движение тяжелого осевого динамически симметричного гиростата с произвольным моментом внутреннего взаимодействия [3]. Ось вращения ротора совпадает с осью динамической симметрии  $Oz$  гиростата и точка  $O$  принадлежит этой оси.

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr + C_r q\sigma &= Pa\gamma_2 \\ A\dot{q} + (A - C)pr - C_r p\sigma &= -Pa\gamma_1 \\ C\dot{r} + C_r \dot{\sigma} &= 0, \quad C_r (\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r \end{aligned} \quad (3.14)$$

где  $P$  - вес гиростата,  $a$  - расстояние от центра тяжести гиростата до неподвижной точки  $O$ ,  $\gamma_i$  - направляющие косинусы единичного вектора вертикальной неподвижной оси  $OZ$  в подвижной системе  $Oxyz$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $A = A_n + A_r$ ,  $C = C_n + C_r$  - моменты инерции гиростата в системе  $Oxyz$ ;  $A_n = B_n$ ,  $C_n$  - главные моменты инерции тела-носителя;  $A_r = B_r$ ,  $C_r$  - моменты инерции ротора;  $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$  - угловая скорость несущего тела,  $\sigma$  - относительная угловая скорость вращения ротора,  $M_r$  - внутренний момент сил между соосными телами.

Первые три интеграла имеют вид, совпадающий с интегралами случая Лагранжа:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (3.15)$$

$$A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + (Cr + C_r \sigma)\gamma_3 = K_z \quad (3.16)$$

$$Cr + C_r \sigma = K_z \quad (3.17)$$

Четвертый первый интеграл следует из теоремы об изменении кинетической энергии

$$\frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + C_n r^2 + C_r (r + \sigma)^2] - T_0 = -Pa\gamma_3 + \int_0^\delta M_r d\delta \quad (3.18)$$

Из последних двух уравнений (3.19) следует

$$\int_0^\delta M_r d\delta = \frac{1}{2} [C_n r^2 + C_r (r + \sigma)^2] + const, \quad (d\delta = \sigma dt)$$

Поэтому первый интеграл (3.18) имеет вид

$$\frac{A}{2} (p^2 + q^2) + Pa\gamma_3 = const, \quad (3.20)$$

совпадающий по виду с интегралом энергии для тяжелого твердого тела с учетом того, с тем отличием, что в случае тяжелого динамически симметричного твердого тела продольная угловая скорость является постоянной ( $r = \text{const}$ ).

Из показанного совпадения первых интегралов движения для тяжелого тела в случае Лагранжа и тяжелого осевого гиростата с произвольным внутренним моментом взаимодействия соосных тел вытекает симметрия и аналогия аналитических решений и динамики систем. Динамически симметричный осевой тяжелый гиростат с произвольным внутренним моментом взаимодействия соосных тел совершает движение, подобное движению тяжелого осесимметричного твердого тела в случае Лагранжа.

В отличие от тела в случае Лагранжа, для тяжелого осевого гиростата с произвольным внутренним моментом взаимодействия соосных тел продольная угловая скорость является функцией времени, определяемой видом этого момента:

$$r(t) = -\int_0^t \frac{M_r(t, \omega(t), \sigma(t), \gamma(t), \delta(t))}{C_n} dt, \quad (3.21)$$

что отразится на явном виде зависимости от времени для угла собственного вращения, который будет отличаться от соответствующего вида в классическом случае Лагранжа:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^t (r(t) - \dot{\psi} \cos \theta) dt = \int_0^t \left( r(t) - \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \theta \right) dt \quad (3.22)$$

Более того, можно синтезировать вид внутреннего момента для реализации специальных случаев прецессионного движения гиростата. Например, можно обеспечить "лунное" движения, при котором несущее тело всегда обращено одной стороной к неподвижной вертикальной оси  $OZ$ , или, что тоже самое, когда  $\dot{\varphi} \equiv 0$ . Так из (3.22) и (3.21) следует, что для реализации «лунного» движения необходимо реализовывать следующий закон для внутреннего момента:

$$\begin{aligned} M_r &= -C_n \dot{r} = -C_n \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \cos \theta) = -C_n \frac{d}{dt} \left( \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \theta \right) = \\ &= -\frac{2R \cos \theta - G \cos^2 \theta - G}{\sin^3 \theta} \dot{\theta} C_n \end{aligned} \quad (3.23)$$

Можно также обеспечить такое прецессионное движение, для которого будет отсутствовать вращение тела-платформы вокруг продольного направления в абсолютном пространстве т.е., когда угол собственного вращения компенсирует поворот по углу прецессии ( $\varphi(t) = -\psi(t) + \text{const}$ ), что, как следует из (3.22), будет реализовываться при назначении внутреннего момента в виде:

$$M_r = -C_n \dot{r} = -C_n \frac{d}{dt} \left[ \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta} (\cos \theta - 1) \right] \quad (3.24)$$

Возможен синтез и других специальных режимов движения тяжелого осевого гиростата за счет назначения вид момента внутреннего взаимодействия соосных тел.

Таким образом, в случае тяжелого осевого гиростата актуальным является Лагранжев класс решений с модификациями, касающимися временной зависимости продольной угловой скорости (3.21) и угла собственного вращения.

**5. Общее решение для класса движений динамически симметричного спутника-гиростата с переменным дипольным магнитным моментом.** Рассматривается пространственное движение динамически симметричных спутников-гиростатов при выполнении  $\omega$ -режимов [16]. Пусть движение спутника-гиростата рассматривается в геомагнитном поле в предположении постоянства его магнитной индукции ( $\mathbf{B}_{orb}$ ), т.е. рассматривается короткий участок орбитального движения, либо долговременное движение по круговой экваториальной орбите. Инерциальная ось  $CZ$  направляется вдоль вектора  $\mathbf{B}_{orb}$

(рис.6). Собственный дипольный момент спутника-гиростата создается магнитными актуаторами пропорционально компонентам угловой скорости тела-носителя.

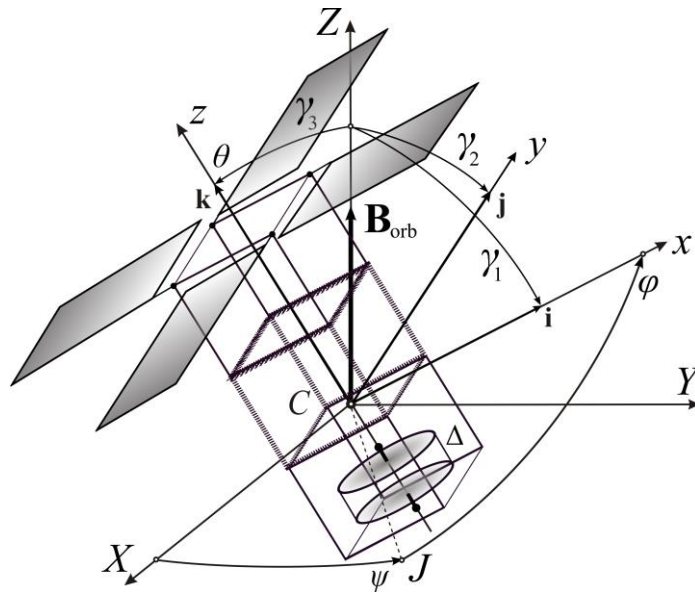


Рис.6. Спутник-гиростат и системы координат

В связанной системе координат  $S_{xyz}$  будет иметь место следующее покомпонентное представление векторов внешней магнитной индукции и собственного дипольного момента:

$$\mathbf{B}_{orb} = B_{orb} [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T; \quad \mathbf{m} = k [p, q, r]^T \quad (3.25)$$

В рассматриваемом случае динамические и кинематические уравнения движения примут вид [16]:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C_b - A)qr + q\Delta = kB_{orb}(q\gamma_3 - r\gamma_2) \\ A\dot{q} + (A - C_b)pr - p\Delta = kB_{orb}(r\gamma_1 - p\gamma_3) \\ C_b\dot{r} + \dot{\Delta} = kB_{orb}(p\gamma_2 - q\gamma_1) \\ \dot{\Delta} = M_{\Delta} \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3 \\ \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1 \\ \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{cases} \quad (3.27)$$

где  $A = A_b + A_r$ ,  $C = C_b + C_r$ ;  $\{A_b, A_r, C_b\}$  есть осевые моменты инерции главного динамически симметричного тела;  $\{A_r, A_r, C_r\}$  - осевые моменты инерции динамически симметричного ротора;  $M_{\Delta}$  - момент внутреннего взаимодействия соосных тел. Пусть в изучаемом случае внутреннее взаимодействие соосных тел гиростата отсутствует ( $M_{\Delta}=0$ ) и, следовательно, имеет место постоянство кинетического момента тела-ротора  $\Delta = \text{const}$ .

Для рассматриваемого случая имеются следующие первые интегралы движения:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (3.28)$$

$$Ap\gamma_1 + Aq\gamma_2 + (C_b r + \Delta)\gamma_3 = K_Z = \text{const} \quad (3.29)$$

$$A(p^2 + q^2) + C_b r^2 = h = \text{const} \quad (3.30)$$

Из динамических и кинематических уравнений следует [16]:

$$\frac{d}{dt}(C_b r + \Delta) = kB_{orb}(-\dot{\gamma}_3), \quad (3.31)$$

что позволяет записать четвертый первый интеграл:

$$C_b r + \Delta = -k B_{orb} \gamma_3 + D \quad (3.32)$$

После преобразований, ряда замен и интегрирования можно окончательно записать аналитическое решение для угла нутации [16]:

$$\cos \theta = s = \gamma_3(t) = \frac{\alpha + \beta a \operatorname{dn}(x(t)|m)}{1 + a \operatorname{dn}(x(t)|m)} \quad (3.33)$$

Показано, что могут иметь место еще четыре случая аналитических решений, выражаемых в эллиптических функциях Якоби  $\operatorname{sn}(\cdot)$ ,  $\operatorname{sn}(\cdot)$ ,  $\operatorname{nc}(\cdot)$ ,  $\operatorname{sc}(\cdot)$ .

Решение для компоненты угловой скорости  $r(t)$  имеет вид [16]:

$$r(t) = \left[ -k B_{orb} \gamma_3(t) + D - \Delta \right] / C_b \quad (3.34)$$

Для получения решений для оставшихся компонент угловой скорости выполняется замена переменных:

$$p = G \cos F; \quad q = G \sin F \quad (3.35)$$

Решение для амплитуды экваториальной угловой скорости имеет вид:

$$G(t) = p^2 + q^2 = \left[ h - C_b r^2(t) \right] / A \quad (3.36)$$

Для фазы угловой скорости записывается следующая формальная квадратура [16]:

$$F(t) = \int \left[ \frac{1}{A} \left[ \Delta - (A - C_b) r(t) - k B_{orb} \gamma_3(t) \right] + \frac{k B_{orb} r(t) \left[ K_z - (C_b r(t) + \Delta) \gamma_3(t) \right]}{A \left[ h - C_b r^2(t) \right]} \right] dt + \text{const} \quad (3.37)$$

Решения для направляющих косинусов  $\gamma_1(t)$  и  $\gamma_2(t)$  [16]:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{q(t)} \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha + \beta a \operatorname{dn}(x(t)|m)}{1 + a \operatorname{dn}(x(t)|m)} \right) + \frac{p(t)}{q(t)} \gamma_2; \\ \gamma_2 = \left[ \left[ K_z - (C_b r(t) + \Delta) \gamma_3(t) \right] / A - \frac{p(t)}{q(t)} \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha + \beta a \operatorname{dn}(x(t)|m)}{1 + a \operatorname{dn}(x(t)|m)} \right) \right] / \left[ \frac{p^2(t)}{q(t)} + q(t) \right]. \end{cases} \quad (3.38)$$

Таким образом, получены аналитические решения для всех динамических параметров движения спутника-гиростата в  $\omega$ -режиме. Полученные решения могут быть использованы не только для анализа, но и для синтеза динамики движения намагниченных гиростатов, а также на их основе в пятой главе разрабатывается метод пространственной переориентации спутника-гиростата из любого стартового положения в положение, соответствующее реализации цилиндрической прецессии, когда продольная ось совмещена с направлением вектора его кинетического момента.

**6. Общее решение для движения осевого гиростата в случае конической прецессии в слабом центральном поле тяготения.** Приводятся решения [19] для движения осевого спутника-гиростата в центральном поле сил тяготения в частном случае расположения начального вектора кинетического момента (рис.7) вдоль вектора градиента центрального поля (локальной вертикали) при условии относительной малости возникающего момента от сил центрального тяготения. Подобные динамические условия реализуются в рамках режимов «конических прецессий» спутников вокруг локальной вертикали.

Динамические уравнения движения запишутся в виде:

$$\begin{cases} A \dot{p} + (C_b - B) q r + q \Delta = \mu_g (C - B) \gamma_2 \gamma_3 \\ B \dot{q} + (A - C_b) p r - p \Delta = \mu_g (A - C) \gamma_3 \gamma_1 \\ C_b \dot{r} + \dot{\Delta} + (B - A) p q = \mu_g (B - A) \gamma_1 \gamma_2 \\ \dot{\Delta} = M_\Delta \end{cases} \quad (3.39)$$

где  $A = A_b + A_r$ ,  $B = B_b + A_r$ ,  $C = C_b + C_r$ ;  $A_b, B_b, C_b$  - главные моменты инерции основного тела,  $A_r, A_r, C_r$  - моменты инерции динамически симметричного ротора, причем будем

считать, что выполняются следующие ограничения  $A > B > C$ , характерные для «продольного» (по оси  $z$ ) типа конструкции спутника-гиростата,  $\mu_g$  – гравитационный параметр ( $\mu_g = 3g_{orb}/R_{orb}$ ). Система (3.40) дополняется системой Пуассона (3.41).

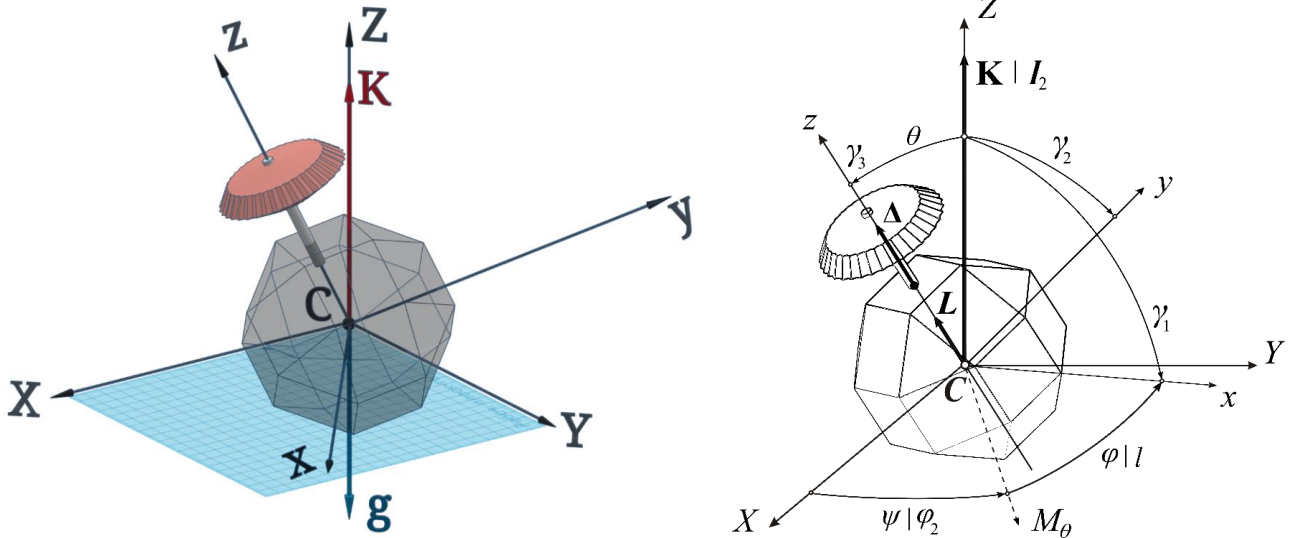


Рис.7. Спутник-гиростат в случае сонаправленности локальной вертикали  $\mathbf{g}$  с начальным вектором кинетического момента ( $\mathbf{K}$ ) и системы координат

Динамическое уравнение для безразмерного кинетического момента в инерциальной системе координат  $\mathbf{k}$ , аналогичное (2.13):

$$\frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = \frac{A}{K^2} \mathbf{M}_g \quad (3.42)$$

позволяет записать седующую оценку для величины момента сил гравитации (считая, что  $A > B > C$ ):

$$|\mathbf{M}_g| < \mu_g \frac{A}{K^2} |A - C| < \mu_g \frac{A^2}{K^2} \quad (3.43)$$

Поэтому, можно считать, что безразмерный нормированный кинетический момент не будет изменять своего модуля и направления, если будет выполняться следующее ограничение на динамические величины:

$$\mu_g \ll \frac{K^2}{A^2} \quad (3.44)$$

С учетом ограничения (3.44) и начальной параллельности вектора кинетического момента с вектором градиента центрального поля тяготения  $\mathbf{g}$  направляющие косинусы «вертикальной» оси инерциальной системы координат  $CZ$  (рис.7) можно определить в следующем виде:

$$\gamma_1 = Ap/K; \quad \gamma_2 = Bq/K; \quad \gamma_3 = (C_b r + \Delta)/K \quad (3.45)$$

Подстановка выражений (3.45) в уравнения (3.39) позволяет записать следующую замкнутую их форму (при  $M_\Delta=0$ ):

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C_b - B)qr + q\Delta = \frac{\mu_g}{K^2} (C - B)Bq(C_b r + \Delta) \\ B\dot{q} + (A - C_b)pr - p\Delta = \frac{\mu_g}{K^2} (A - C)Ap(C_b r + \Delta) \\ C_b \dot{r} + (B - A)pq = \frac{\mu_g}{K^2} (B - A)ABpq \end{cases} \quad (3.46)$$

В диссертационной работе обосновывается, что получаемое далее решение уравнений (3.46) можно рассматривать, как частичное обобщение случая Стеклова на случай движения

нормального осевого гиростата в центральном поле тяготения.

Для уравнений (3.46) записаны следующие первые интегралы:

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + (C_b r + \Delta)^2 = \text{const} = K^2 \quad (3.47)$$

$$Ap^2 \left(1 + \frac{\mu_g A^2}{K^2}\right) + Bq^2 \left(1 + \frac{\mu_g B^2}{K^2}\right) + C_b r^2 + \frac{\Delta^2}{C_r} + \frac{\mu_g C (C_b r + \Delta)^2}{K^2} = 2h \quad (3.48)$$

После ряда подстановок и замен следуют аналитические решения, записываемые в эллиптических функциях [19]:

$$\left\{ \begin{array}{l} p(t) = \pm \sqrt{\frac{cx^2 - G}{A \left( A - B \frac{K^2 + \mu_g A^2}{K^2 + \mu_g B^2} \right)}}; \quad q(t) = \pm \sqrt{\frac{H - a(x(t) + b)^2}{B \left( A \frac{K^2 + \mu_g B^2}{K^2 + \mu_g A^2} - B \right)}}; \\ r(t) = \frac{1}{C_b} \left[ x(t) + \frac{\beta \Delta}{b_\beta C_b} - \Delta \right]; \quad x(t) = e \frac{R/P + \tilde{c}^2 \text{sn}^2 \left[ \pm (N(t - t_0) + I_0), k \right]}{R/P - \tilde{c}^2 \text{sn}^2 \left[ \pm (N(t - t_0) + I_0), k \right]} \end{array} \right. \quad (3.49)$$

Таким образом, в третьей главе представлены общие и гетероклинические аналитические решения для *трех классов движения* нормальных спутников-гиростатов, включая *класс движений Эйлера* при малых возмущениях магнитной природы с требованием сонаправленности начального кинетического момента и вектора внешней магнитной индукции [17], *класс движений Лагранжа* для тяжелого динамически симметричного спутника-гиростата [3] и намагниченного спутника-гиростата [16], а также класс движений спутника-гиростата при малых возмущениях от центрального поля тяготения в режиме конической прецессии [19], *обобщающий случай В.А. Стеклова* движения твердого тела в центральном поле.

**В четвертой главе** изучаются хаотические процессы, возникающие в динамике движения спутников-гиростатов при действии внутренних и внешних возмущений разной природы. Исследования, посвященные анализу хаотизации и устранению хаоса, нашли свое опубликование в работах диссертанта [10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20].

**Хаос при малых полигармонических внутренних возмущениях.** Рассматривается случай, когда между соосными телами спутника-гиростата присутствуют малые возмущающие полигармонические моменты  $M_\Delta$ , моделирующие гармонические ошибки и паразитные сигналы в контуре внутреннего электродвигателя системы гироскопической стабилизации и разложимые в ряд Фурье (с удержанием  $N$  членов разложения):

$$\dot{\Delta} = M_\Delta = \varepsilon \cdot \text{polygarm}(t) \quad (4.1)$$

и следовательно

$$\Delta = \bar{\Delta} + \varepsilon \sum_{n=0}^N \left[ \bar{a}_n \sin nt + \bar{b}_n \cos nt \right] \quad (4.2)$$

Динамическая система уравнений может быть сведена к системе с одной степенью свободы, описываемой переменными Андуайе-Депри  $\{l, L\}$ :

$$\begin{aligned} \dot{L} &= f_L(l, L) + \varepsilon g_L(t); \quad \dot{l} = f_l(l, L) + \varepsilon g_l(t); \\ f_L(l, L) &= \alpha (I_2^2 - L^2) \sin l \cos l; \quad f_l(l, L) = L \left[ \frac{1}{C_b} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B} \right] - \frac{\bar{\Delta}}{C_b}; \\ g_L(t) &= 0; \quad g_l(t) = -\frac{1}{C_b} \sum_{n=0}^N \left[ \bar{a}_n \sin nt + \bar{b}_n \cos nt \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

С учетом наличия явных гетероклинических решений (3.7) функция Мельникова приводится к виду [15]:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_L(\bar{l}(t), \bar{L}(t)) g_l(t+t_0) dt = \frac{\alpha}{C_b} \sum_{n=0}^N J_s^{(n)} \{ \bar{a}_n \cos nt_0 - \bar{b}_n \sin nt_0 \} \quad (4.4)$$

$$J_s^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(t) \sin(nt) dt \neq 0; \quad J_c^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(t) \cos(nt) dt = 0; \quad (4.5)$$

На основании полигармонического вида функции Мельникова можно заключить, что она имеет бесчисленное множество простых корней, что доказывает наличие взаимных пересечения расщепившихся гетероклинических многообразий сепаратрис и возникновение локальных хаотических режимов, что можно проиллюстрировать на сечениях Пуанкаре (рис. 8), выполняемых по условию  $(\Omega t \bmod 2\pi) = 0$  в фазовом пространстве  $\{l, L/I_2\}$ .

Также примером хаотического поведения является динамика отдельной фазовой траектории, стартующей близко к невозмущенной сепаратрисе. На рис. 9. представлена фазовая траектория в пространстве  $\{l, L/I_2\}$  для невозмущенного случая и при действии возмущений.

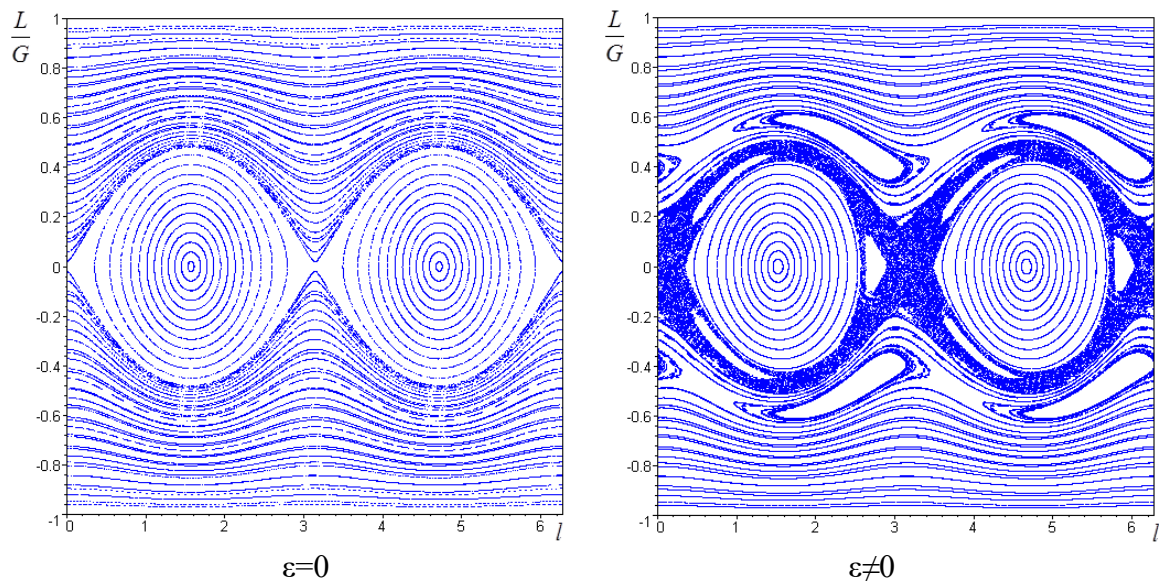


Рис.8. Сечение Пуанкаре системы при внутреннем гармоническом возмущении

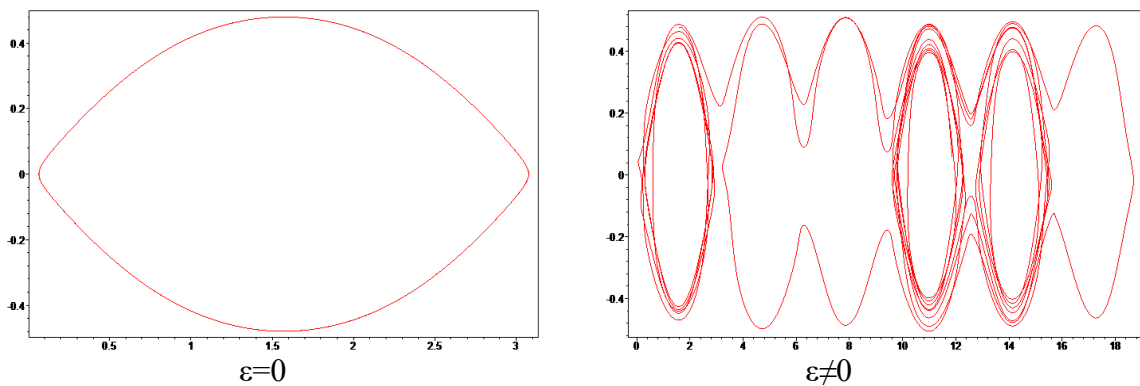


Рис.9. Регулярная и хаотическая фазовые траектории

Также в главе анализируются другие случаи хаотизации динамики спутника-гиростата, включая случаи наличия малых внешних магнитных возмущениях при полигармоническом изменении собственного дипольного момента.

Далее на основе формализма Мельникова проведено детальное исследование **хаотизации динамики в слабом центральном гравитационном поле**, когда динамическая систем приводится к виду [19]:



$$\begin{cases} \dot{l} = L \left[ \frac{1}{C_b} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B} \right] - \frac{\Delta}{C_b} + \mu_g \frac{\gamma_3}{\sqrt{I_2^2 - L^2}} \left[ (C - B)\gamma_2 \cos l - (A - C)\gamma_1 \sin l \right]; \\ \dot{L} = \frac{A - B}{2AB} (I_2^2 - L^2) \sin 2l + \mu_g (B - A)\gamma_1 \gamma_2; \\ \dot{I}_2 = \frac{\mu_g}{I_2} \left\{ \sqrt{I_2^2 - L^2} \left[ (C - B)\gamma_2 \sin l + (A - C)\gamma_1 \cos l \right] \gamma_3 + L(B - A)\gamma_1 \gamma_2 \right\}; \end{cases} \quad (4.6)$$

из которого следует, что главной причиной хаотизации в этом случае будет являться наличие колебательных полигармонических зависимостей для направляющих косинусов локальной вертикали. Иллюстрация хаотизации фазового портрета приведена на рис. 10, где видно интенсивное перемешивание фазовых траекторий в сепаратрисной зоне.

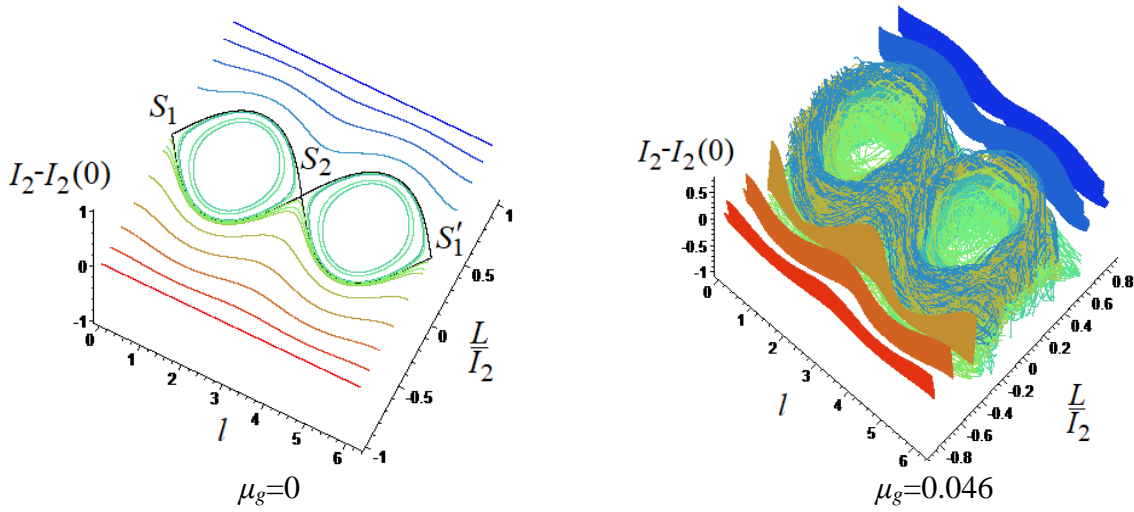


Рис. 10. Хаотизация при действии моментов сил гравитации

Отдельным случаем является **хаотизация динамики асимметричных гиросатов**, для которого характерна многомерная динамическая система, хаотизация которой анализируется на основе формализма С. Виггинса. Связывая типы систем Виггинса (детально описаны в параграфе 1.5) и параметры динамики спутника-гиросата, отмечается, что исследуемый случай будет описываться двумя вариантами систем Виггинса<sup>6</sup> при  $n=m=k=1$  при следующих соответствиях:

$$\begin{cases} x \leftrightarrow (l, L); & I \leftrightarrow \Delta = I_\Delta; & w \leftrightarrow \delta(w_\delta); \\ g^x(x, I, w, \mu; \varepsilon) = \{g_l(l, L, I_\Delta, \delta(w_\delta)), g_L(l, L, I_\Delta, \delta(w_\delta))\}; \\ g^l(x, I, w, \mu; \varepsilon) = g_\Delta(l, L, I_\Delta, \delta(w_\delta)); & g^w(x, I, w, \mu; \varepsilon) = g_\delta(l, L, I_\Delta, \delta(w_\delta)); \\ \Omega(x, I) = D_l \mathcal{H}_0(x, I) = f_\delta(l, L, I_\Delta). \end{cases} \quad (4.7)$$

где все возмущения  $g_l, g_L, g_\delta, g_\Delta$  (4.7) являются  $2\pi$ -периодическими функциями угла относительного вращения  $\delta$ . В рамках исследования динамики асимметричного спутника-гиросата выделено два варианта систем Виггинсового типа<sup>6</sup>:

**Вариант 1.** Если рассматривать движение спутника-гиросата при действии общего вида возмущений (2.31) в присутствии их негамильтоновых частей  $(m_\Delta^f, m_\Delta^{DC})$ , тогда будет характерна система<sup>6</sup> типа “System I” будет иметь место монокомпонентная функцию Мельникова-Виггинса  $M_1^{\bar{l}}(w_0, \alpha; \mu)$ :

$$M_1^{\bar{l}}(w_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [D_l \mathcal{H}_0 \cdot g_l + D_L \mathcal{H}_0 \cdot g_L + D_\Delta \mathcal{H}_0 \cdot g_\Delta] \Big|_{q_0^{\bar{l}}(t)} dt - D_\Delta \mathcal{H}_0 \Big|_{\gamma(\bar{\Delta})} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g_\Delta \Big|_{q_0^{\bar{l}}(t)} dt; \quad (4.8)$$

или, принимая во внимание (2.31), имеем:

$$M_1^{\bar{I}}(w_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_l \cdot g_L - f_L \cdot g_l + f_\delta \cdot g_\Delta] \Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt - f_\delta \Big|_{\gamma(\bar{\Delta})} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g_\Delta \Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt; \quad (4.9)$$

$$q_0^{\bar{I}}(t) = \left\{ \bar{l}(t), \bar{L}(t), \bar{\Delta}, \int^t f_\delta(s) ds + w_0 \right\},$$

где в составе вектора гомо-/гетероклинических решений  $q_0^{\bar{I}}(t)$  последний компонент представляет собой гетероклиническое решение для картезианского угла относительного вращения, которое может быть записано посредством соответствующей угловой переменной с помощью «союзных» соответствий (3.13):

$$\int^t f_\delta(s) \Big|_{\bar{l}(s), \bar{L}(s), \bar{\Delta}} ds = \bar{\delta}(t) = \bar{w}_\delta(t) - \bar{v}_\delta(t) \quad (4.10)$$

В результате будет иметь место следующий вектор гетероклинических решений, включающий выражения (3.7), (3.9):

$$q_0^{\bar{I}}(t) = \left\{ \bar{l}(t), \bar{L}(t), \bar{I}_\Delta, \int^t f_\delta(s) ds + w_0 = \bar{\delta}(t) + w_0 \right\} = \quad (4.11)$$

$$= \left\{ \bar{l}(\bar{p}(t), \bar{q}(t), \bar{r}(t), \bar{\sigma}(t)), \bar{L}(\bar{p}(t), \bar{q}(t), \bar{r}(t), \bar{\sigma}(t)), \bar{\Delta}, \bar{\delta}(\bar{w}_\delta(t)) + w_0 = \bar{w}_\delta(t) - \bar{v}_\delta(t) + w_0 \right\}$$

**Вариант 2.** Если исследуемая система вместе со своими возмущениями имеет чистый гамильтонов вид (т.е.  $m_\Delta^f \equiv m_\Delta^{DC} \equiv 0$ ), тогда необходимо использовать второй тип<sup>б</sup> системы “System III” и монокомпонентную функцию Мельникова-Виггинса  $M_2^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu)$ , которая вычисляется учитывая (2.27) и (2.28):

$$M_2^{\bar{I}}(w_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} D_\delta \mathcal{H}_1 \Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt, \quad (4.12)$$

где вектор гетероклинических решений полностью совпадает с (4.11).

Далее осуществлено детальное исследование различных случаев хаотизации асимметричного спутника-гиростата и показано, что в случае гамильтоновых типов возмущений возникающий в системе хаос будет являться неустранимым. В случае же негамильтоновых возмущений можно обеспечить выполнение условий подавления хаоса.

Например, в случае наличия угловых и линейных асимметрий ( $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0$ ) и ( $l_{2x} \neq 0, l_{2y} \neq 0$ ) тела-платформы без аналогичных смещений относительно тела-ротора ( $\alpha_1 = \beta_1 = l_{1x} = l_{1y} = 0$ ) при действии магнитных (2.20) и бигармонических (2.26) возмущений, в главе аналитически показано, будет иметь функция Мельникова-Виггинса в форме тригонометрического полинома

$$M_2^{\bar{I}}(w_0) = e_B J_B \sin 2w_0 + e_m J_m \sin w_0 + \quad (4.13)$$

$$+ e_\delta \left[ J_\delta^{(a_1)} \cos w_0 + J_\delta^{(b_1)} \sin w_0 + J_\delta^{(a_2)} \cos 2w_0 + J_\delta^{(b_2)} \sin 2w_0 \right],$$

имеющая бесчисленное множество простых корней, что доказывает факт наличия неустранимого хаоса в динамике спутника-гиростата.

В случае же наличия негамильтоновых возмущений, включая (2.22) и (2.24), можно записать функцию Мельникова-Виггинса (4.9) в форме с разделением на две части:

$$M_1^{\bar{I}}(w_0) = M(w_0) + W(w_0), \quad (4.14)$$

$$M(w_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_l \cdot g_L - f_L \cdot g_l] \Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt; \quad (4.15)$$

$$W(w_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( f_\delta \Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} - f_\delta \Big|_{\gamma(\bar{\Delta})} \right) \cdot g_\Delta \Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt \quad (4.16)$$

Функция  $M(w_0)$  соответствует классической части (классической функции В.К. Мельникова), а функция  $W(w_0)$  представляет собой дополненную часть С.Виггинса. Виггинсова часть функции Мельникова-Виггинса запишется:

$$W(w_0) = W_{\mathcal{H}}(w_0) + W_{\mathcal{NH}} \quad (4.17)$$

$$W_{\mathcal{H}}(w_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\sigma}(t) - \sigma_*) \cdot g_{\Delta}^{\mathcal{H}} \Big|_{q_0^{\mathcal{H}}(t)} dt; \quad (4.18)$$

$$W_{\mathcal{NH}} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\sigma}(t) - \sigma_*) \cdot m_{\Delta}(\bar{\sigma}(t), t) dt = J_{\mathcal{NH}} = \text{const} \quad (4.19)$$

В работе аналитически доказано, что несобственные интегралы (4.18) и (4.19) гарантированно сходятся, а функция Мельникова-Виггинса всегда представляется в полигармонической форме с ненулевой аддитивной константой  $J_{\mathcal{NH}}$ :

$$M_1^{\bar{}}(w_0) = M(w_0) + W_{\mathcal{H}}(w_0) + J_{\mathcal{NH}} = P_{\text{irig}}(w_0) + J_{\mathcal{NH}} \quad (4.20)$$

Далее в главе рассматриваются **методы подавления хаоса**. В случае действия негамильтоновых возмущений из вида функции (4.20) непосредственно следует условие отсутствия простых ее корней в виде неравенства, смысл которого обеспечить за счет постоянного аддитивного члена смещение графика функции вдоль оси ординат так, чтобы избежать наличие его пересечений с осью абсцисс, что выражается простым ограничением на амплитудные значения тригонометрического полинома:

$$Am(P_{\text{irig}}(w_0)) \leq |J_{\mathcal{NH}}| \quad (4.21)$$

где функция  $Am(\bullet)$  означает установление максимальной амплитуды колебаний. Простой геометрический смысл условия (4.21) состоит в форме пересечения/касания/отсутствия контакта линии графика функции  $f(w_0) = P_{\text{irig}}(w_0) \mp |J_{\mathcal{NH}}|$  и оси абсцисс:

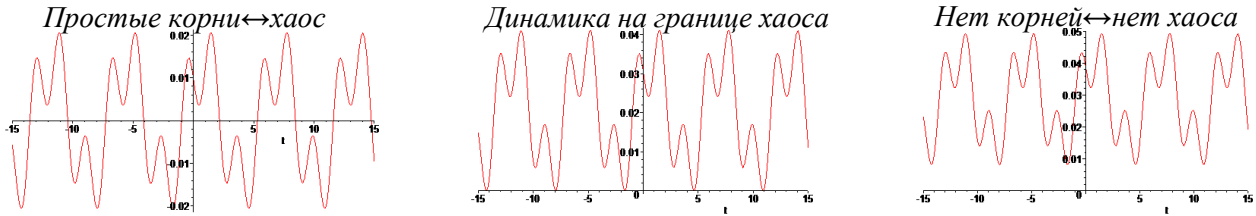


Рис.11. Геометрическая интерпретация (4.21)

**Диссипативный принцип подавления гетероклинического хаоса** соответствует обеспечению значения аддитивного члена  $J_{\mathcal{NH}}$ , превышающего амплитуду полигармонической части функции Мельникова-Виггинса. Например, в случае внутреннего диссипативного взаимодействия (жидкостное трение, либо противо-ЭДС в моментах сил, характеризующих относительное вращение соосных тел спутника-гиростата):

$$m_{\Delta} = -e_{\sigma} \sigma(t) \quad (4.22)$$

Соответствующий интеграл (4.19) принимает форму:

$$J_{\mathcal{NH}} = e_{\sigma} \bar{J}_{\mathcal{NH}}; \quad \bar{J}_{\mathcal{NH}} = - \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\sigma}(t) - \sigma_*) \bar{\sigma}(t) dt = \text{const} \quad (4.23)$$

Таким образом, определяются “критические” значения для параметра диссипации  $e_{\sigma}$ , при которых в системе подавляется хаос:

$$\bar{e}_{\sigma} = Am(P_{\text{irig}}(w_0)) / |\bar{J}_{\mathcal{NH}}| \quad (4.24)$$

**Импульсное подавление гетероклинического хаоса** основывается на использовании импульсных негамильтоновых воздействий, «накапливающих» в итоге необходимую величину аддитивного члена  $J_{\mathcal{NH}}$ . Основным инструментом создания таких

негамильтоновых воздействий будем считать создание кратковременных импульсных значений во внутреннем моменте сил раскрутки тела-ротора, что например, может быть легко реализовано кратковременной подачей напряжения на электродвигатель раскрутки ротора.

Пусть, например, простейший прямоугольный импульс стартует в момент времени  $T_s$  и финиширует в момент времени  $T_f$ :

$$\begin{cases} m_{\Delta} = m_{\Delta}(t) = e_F F(t); \\ F(t) = e_F [H(t-T_s) - H(t-T_f)] \end{cases} \quad (4.25)$$

где  $H(t)$  - есть функция Хевисайда. Тогда можно аналитически вычислить несобственный интеграл (4.19):

$$J_{\mathcal{NH}} = e_F \bar{J}_{\mathcal{NH}}; \quad \bar{J}_{\mathcal{NH}} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\sigma}(t) - \sigma_*) F(t) dt = - \int_{T_s}^{T_f} y(t) dt = \bar{v}_{\delta}(T_s) - \bar{v}_{\delta}(T_f) \quad (4.26)$$

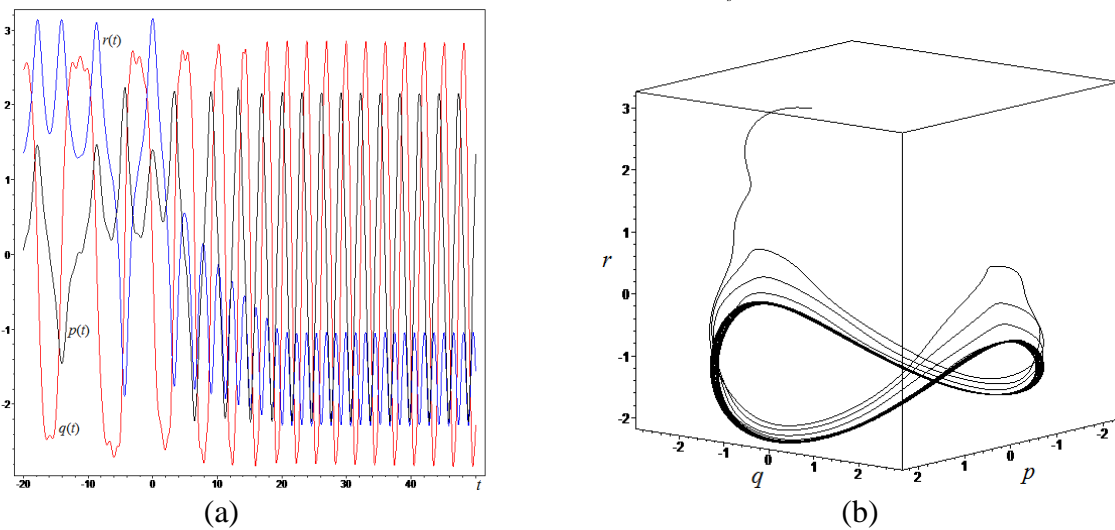


Рис.12. Процесс локальной регуляризации динамики при импульсном подавлении хаоса

**Магнитное подавление гетероклинического хаоса** отличается от двух предыдущих схем тем, что не использует методологию Мельникова-Виггинса. Эта схема использует глобальное изменение самого типа фазового портрета, «перебрасывая» тем самым режим в другую качественную область динамики. Таким образом, начальный режим движения мог стартовать в окрестности сепаратрисс, подвергаясь возмущению, и выполнять сложную хаотическую эволюцию при движении по гетероклинической сети, и если теперь каким-либо образом осуществить «подмену» самого фазового пространства, то продолжающийся в реализации динамический режим, оказавшись в иных динамических условиях, далее будет развиваться по другому; особенно важно выполнить такую «подмену» фазового пространства, чтобы существенно смещалась область сепаратрисс со всеми своими предпосылками к хаотизации. Т.е. предлагаемая схема подавления хаоса предполагает локальное устранение самих причин его существования.

Такая возможность изменения структуры фазового пространства может быть реализована, например, за счет включения/отключения продольного дипольного магнитного момента. Так в случае реализации режима цилиндрической прецессии на экваториальной орбите форму фазового портрета можно изменять за счет параметров  $\Delta$  and  $E$  [22], перемещая зону сепаратрисс вверх или вниз в пространстве переменных Андуайе-Депри, причем конкретное положение сепаратриссного региона зависит от величины  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \Delta\beta + E\alpha, \quad (4.27)$$

$$E = -\frac{\tilde{m}_z B_{orb}}{K}; \quad \beta = \frac{A-B}{(B-C_b)(A-C_b)}; \quad \alpha = \frac{(B-A)C_b}{(B-C_b)(A-C_b)}$$

При положительных растущих значениях динамического параметра  $\Lambda$  сепаратрисный регион на фазовом портрете в пространстве Андуайе-Депри перемещается вверх, при  $\Lambda=0$  занимает центральное место, а при убывающих отрицательных значениях – перемещается вниз. Если есть возможность переключить продольный дипольный момент на достаточно большую величину на какой-то интервал времени, то это сразу бы отразилось на всем фазовом портрете, при этом сепаратрисный регион мгновенно изменил бы свое расположение вместе с окружающим его хаотическим слоем, а фазовая траектория перешла бы на регулярную эволюцию. Однако, после отключения магнитного момента система может вернуть изначальную форму фазового портрета и динамический режим снова окажется в зоне хаотического слоя. Иллюстрация интервального включения магнитного момента приедена на рис.13.

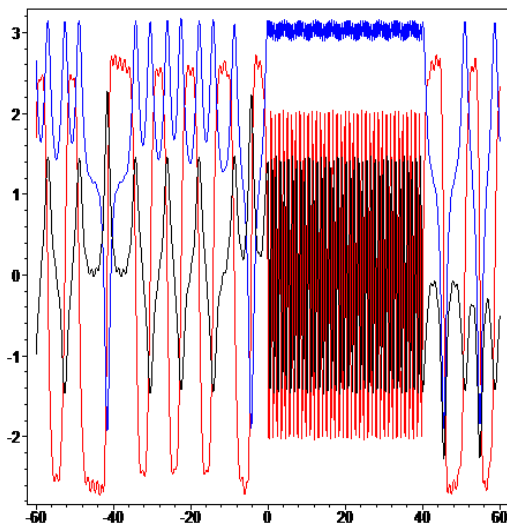


Рис.13. Интервальное подавление хаоса

Таким образом, в четвертой главе проведено исследование хаотизации возмущенной динамики движения спутников-гиростатов при действии внешних и внутренних возмущений различной природы, включая гамильтоновы и негамильтоновы типы возмущений. Изучена возможность хаотизации и регуляризации динамики спутника-гиростата в при выполнении им режимов движения, близких к цилиндрической прецессии, являющейся главным динамическим режимом функционирования спутников-гиростатов и космических аппаратов с двойным вращением. Проанализированы процессы расщепления многообразий сепаратрис и

рождения гомо-/гетероклинических сетей и хаоса на основе формализма Мельникова-Виггинса, а также разработаны различные схемы подавления хаотической динамики.

**В пятой главе** рассматриваются прикладные аспекты динамики спутников-гиростатов постоянного и переменного состава и представляются три метода пространственной переориентации спутников-гиростатов, разработанные на основе полученных аналитических решений и изученных свойств регулярной динамики и хаоса. Указанные методы нашли свое опубликование в работах диссертанта [18, 16, 7, 8, 21, 23].

**Метод переориентации спутников-гиростатов с помощью инициации гетероклинического хаоса.** В противоположность рассмотрению хаоса, как негативного феномена, в параграфе 5.1 пятой главы он используется в своем позитивном аспекте, как инструмент изменения качественных свойств движения спутников-гиростатов. Метод переориентации спутника-гиростата за счет вовлечения его в хаотический режим [18] включает следующие шаги:

1. Выполнение исходного динамического режима.
2. Переход в окрестность гетероклинического региона путем включения внутреннего момента сил раскрутки ротора и изменения продольно угловой скорости тела-платформы до уровня вхождения в окрестность гетероклинического региона (приближения к сепаратрисе за счет изменения уровня энергии текущей фазовой траектории и деформации самого фазового портрета).
3. Включение хаотизации динамики путем инициации гармонических моментов сил в двигателе ротора, либо в дипольном магнитном моменте, т.е. преднамеренная инициация возмущений, порождающих в окрестности гетероклинического региона

гетероклиническую сеть и динамический хаос.

4. Выполнение хаотического режима с мониторингом текущих величин компонент угловой скорости и анализом выполнения критериев достижения необходимой качественной зоны фазового пространства (будут описаны ниже).

5. Остановка гармонических возмущений при достижении выполнения критериев и «выключение» хаоса с переходом спутника-гиростата на новый регулярный динамический режим в заданной зоне фазового пространства.

Другими словами в рамках предлагаемого метода переориентация спутника-гиростата выполняется посредством ухода из стартового регулярного динамического режима в хаос и выхода из хаоса на новый нужный регулярный динамический режим, т.е. хаос может быть проинтерпретирован, как некий динамический «хаб», объединяющий выходы на доступные регулярные режимы движения спутника-гиростата.

Невозмущенную динамику спутника-гиростата в его свободном пространственном движении определяют, как известно, четыре главные зоны (рис. 14), разделенные четырьмя гетероклиническими сепаратрисами: **А**, **Б**, **В**, **Г**. При «включении» возмущений сепаратрисный регион хаотизируется и формирует хаотический слой (зона **Д**), внутри которого фазовая траектория совершает движение, проходя участки фазового пространства, принадлежащие всем четырем невозмущенным зонам. Поэтому при остановке возмущений фазовая точка может оказаться в любой из четырех целевых зон, а значит совершить переход из стартовой зоны в новую целевую зону с изменением качества движения и переориентацией спутника-гиростата в пространстве. Наиболее адекватной зоной, обеспечивающей функционирование спутников-гиростатов в предпочтительном для них режиме цилиндрической прецессии (с малым нутационным отклонением продольной оси от направления вектора кинетического момента и предпочтительным вращением вокруг собственной продольной оси), является зона **А**. Зона **В** соответствует «антиподу» зоны **А**, а зоны **В** и **Г** соответствуют высокоамплитудным нутационным колебаниям и являются наихудшими в функциональном смысле для спутника-гиростата. Отметим, что в рамках второго шага алгоритма переход в окрестность гетероклинической зоны осуществляется путем раскрутки ротора моментом сил:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= M_{spin} \cdot (H(t - t_{ini}) - H(t - t_{hetero})), \\ \{t \rightarrow t_{hetero}\} & \text{ if } \left\{ \left\| r(t) - \frac{\Delta(t)}{B - C_b} \right\| - \left| p(t) \cdot \sqrt{\frac{A(A-B)}{C_b(B-C_b)}} \right\| \leq \xi \right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $M_{spin}$  – постоянная величина момента сил,  $H(t)$  – функция Хевисайда,  $t_{ini}$  – значение момента времени старта раскрутки ротора,  $t_{hetero}$  – момент времени достижения скорости ротора, соответствующей гетероклинической области, где  $\xi$  – есть некоторая удовлетворительная заданная неточность ( $0 < \xi < 1$ ) приближения фазовой траектории к гетероклинической сепаратрису.

В рамках третьего шага алгоритма хаотизация динамики осуществляется за счет включения малого гармонического возмущающего момента сил, создаваемого тем или иным актуатором, в качестве которого можно, например, использовать тот же самый внутренний силовой момент раскрутки ротора, либо силовые катушки магнитной системы управления с изменяемым дипольным моментом:

$$\begin{cases} m_i(t) = \mu_i [H(t - t_{start}) - H(t - t_{finish})] \sin(\Omega_i t); \\ M_{internal}(t) = \mu_{\Delta} [H(t - t_{start}) - H(t - t_{finish})] \cos(\Omega_{\Delta} t), \end{cases} \quad (5.2)$$

где  $\mu_i$ ,  $\mu_{\Delta}$  есть малые амплитуды возмущающих факторов ( $i=x, y, z$ );  $\Omega_{\Delta}$  и  $\Omega_i$  есть частоты гармонических возмущений;  $t_{start}$  и  $t_{finish}$  – моменты времени «включения» и «отключения» возмущающих силовых моментов.

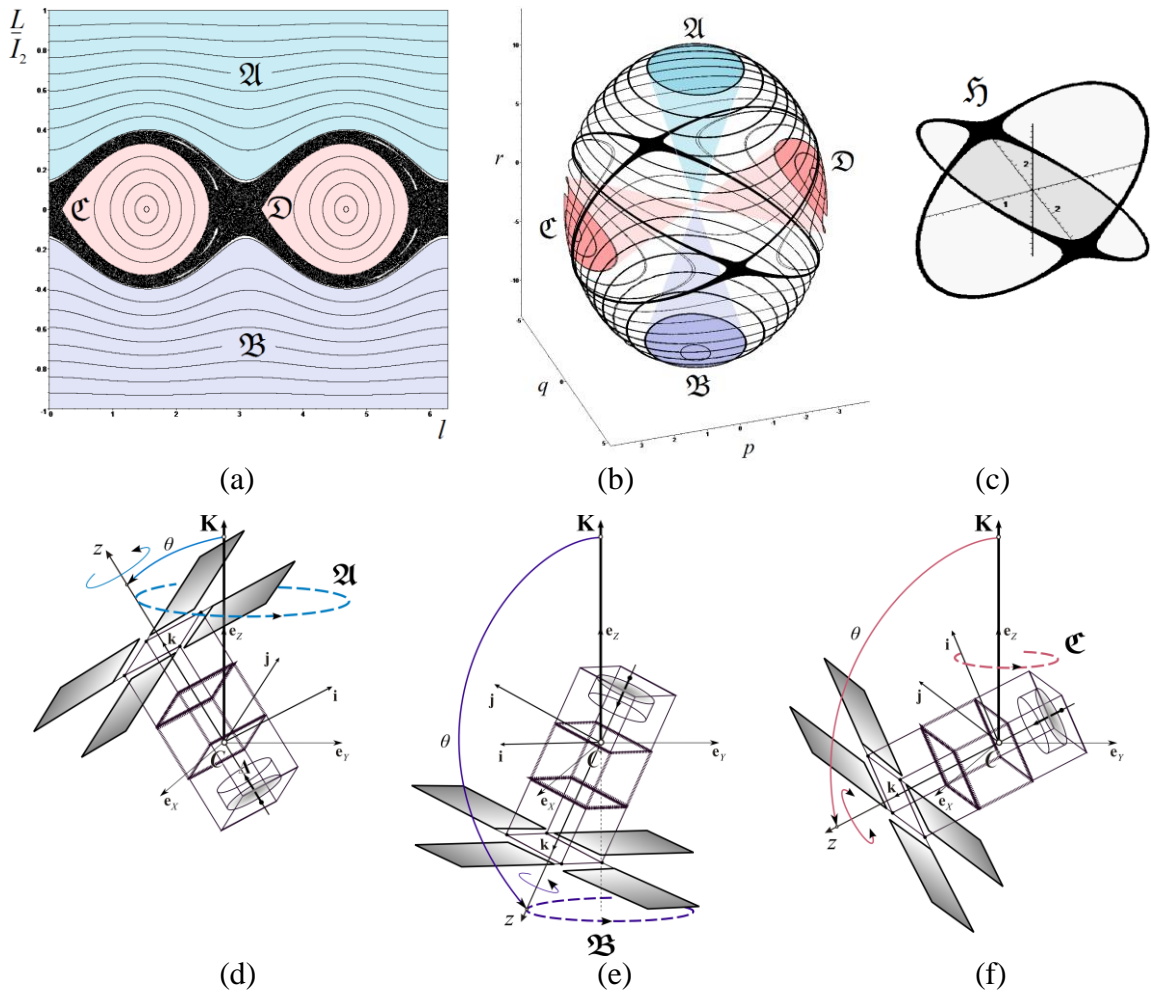


Рис. 14. Главные зоны фазового пространства и динамические режимы

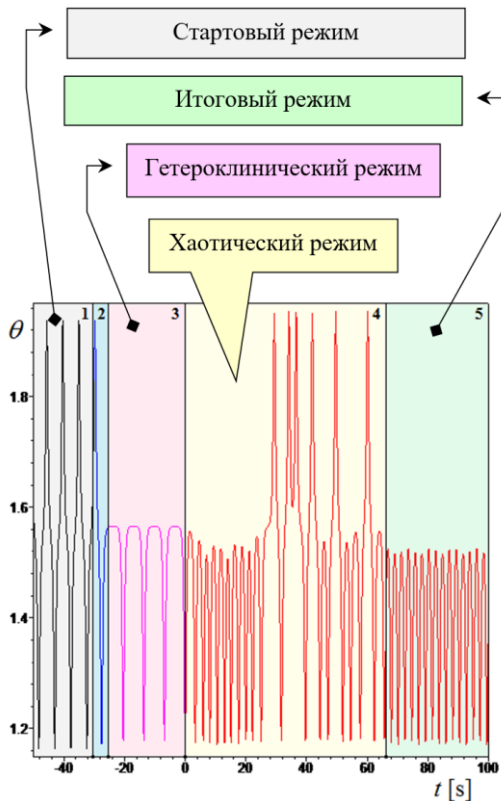


Рис. 15. Эволюция угла нутации в рамках алгоритма хаотической переориентации

В рамках 3-го шага алгоритма на временном интервале  $[t_{start}, t_{finish}]$  выполняется хаотическая динамика спутника-гиростата в зоне гетероклинического хаоса (зона  $\mathfrak{H}$ ). На четвертом шаге осуществляется остановка действия возмущения (5.2) в момент  $t_{finish}$ , который заранее не известен и определяется системой управления путем мониторинга параметров и проверки выполнения одного из критериев, определяющих достижение целевой зоны. Например, критерий достижения зоны  $\mathfrak{A}$  имеет вид:

$$\begin{cases} \left| r(t) - \frac{\Delta(t)}{B - C_b} \right| > \left| p(t) \cdot \sqrt{\frac{A(A-B)}{C_b(B-C_b)}} \right|; \\ r(t) - \frac{\Delta(t)}{B - C_b} > 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

а критерий достижения зоны  $\mathcal{E}$ :

$$\begin{cases} \left| r(t) - \frac{\Delta(t)}{B - C_b} \right| < \left| p(t) \cdot \sqrt{\frac{A(A - B)}{C_b(B - C_b)}} \right|; \\ p(t) > 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

При выполнении критерия считается достигнутым момент времени  $t = t_{finish}$ , осуществляется отключение возмущающего актуатора и выход из хаоса на новый регулярный режим в целевой зоне.

**Метод переориентации с использованием омега-режимов** основан на полученных в 3-ей главе аналитических решениях (3.33)-(3.37) и описывается в параграфе 5.2. Метод основывается на выполнении серии омега-режимов с последовательным приближением продольной оси спутника-гиростата к вектору кинетического момента и финальное совпадение с ним, что означает переход к реализации финального режима движения, соответствующего цилиндрической прецессии. Основная идея пространственной переориентации, использующей динамические свойства омега-режима, состоит в переключении-чередовании интервалов свободного движения и интервалов движения с включенными магнитными актуаторами, реализующими омега-режим на интервале времени, соответствующем полупериоду роста продольной компоненты угловой скорости  $r(t)$ , что определяется решением (3.34). Такие интервалы полупериода прироста  $r(t)$  именуется в работе, как «интервалы роста» (рис. 16). Для интервалов роста времена их старта (фаза) и период/полупериод колебаний точно вычисляются по аналитическим решениям.

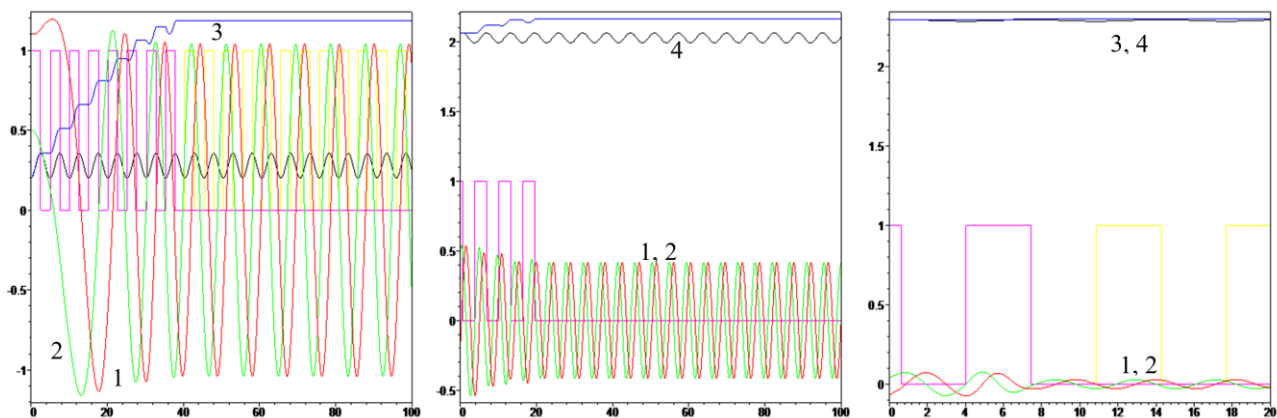


Рис. 16. Результаты моделирования серии омега-режимов:

малиновые импульсы соответствуют включенным интервалам роста;  $p(t)$  – красный (1);  $q(t)$  – зеленый (2);  $r(t)$  – синий (3);  $r(t)$  при свободном движении – (4)

Как видно из моделирования (рис.16), на интервалах роста происходит последовательный кусочный рост величины  $r(t)$  и падение амплитуд экваториальных компонент угловой скорости. Серией омега-режимов можно предельно максимизировать величину продольной компоненты угловой скорости  $r(t)$  и минимизировать (до близкой к нулю величины) компоненты экваториальной угловой скорости, а значит перевести весь кинетический момент на продольную ось спутника-гиростата, что и обеспечит его гироскопическую стабилизацию с нулевым углом нутации. Таким образом, серия омега-режимов может использоваться как для выполнения маневра по переключке кинетического момента на продольную ось, так и для коррекции режима цилиндрической прецессии, когда гасится выросший по каким-либо причинам угол нутации до своего «нулевого» значения.

**Синтез углового движения спутников-гиростатов переменного состава.** В параграфе 5.3 рассматривается динамика динамически симметричного спутника-гиростата, одно из соосных тел которого обладает переменностью состава (массы). Подобная конфигурация актуальна для таких ракетно-космических систем, как, например, космические аппараты с двойным вращением, имеющие в своем составе ракетные двигатели для



изменения/коррекции орбит, связки разгонных блоков с выводимыми космическими аппаратами, соединенные посредством «столов закрутки», для реализации гироскопической стабилизации аппарата после его отделения от разгонного блока. Уравнения движения соосных тел переменного состава и анализ их динамики представлены в статьях [2, 6, 7, 8]. Целью исследований в рамках параграфа 5.3 является построение метода синтеза динамики спутника-гиростата переменного состава, обеспечивающей естественное повышение эффективности гироскопической стабилизации пространственного положения путем монотонного уменьшения величины нутации прецессионного движения в процессе изменения массы. Пространственное движение динамически симметричного осевого спутника-гиростата, одно из соосных тел которого обладает переменностью массы (ракетный двигатель) описывается следующими динамическими уравнениями:

$$\begin{cases} A(t)\dot{p} + (C(t) - A(t))qr + C_r(t)q\sigma = M_{C,x}^e + M_x^R; \\ A(t)\dot{q} - (C(t) - A(t))pr - C_r(t)p\sigma = M_{C,y}^e + M_y^R; \\ C(t)\dot{r} + C_r(t)\dot{\sigma} = M_{C,z}^e + M_z^R; \\ C_r(t)(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_{\Delta} + M_z^R + M_{r,Oz}^e \end{cases} \quad (5.5)$$

где  $A(t) = A_r(t) + A_b - m(t)\rho_C^2(t)$ ,  $C(t) = C_r(t) + C_b$ ;  $A_r(t)$ ,  $A_b$ ,  $C_r(t)$ ,  $C_b$  – экваториальные и продольные моменты инерции тел, вычисленные относительно осей, проходящих через полюс  $O$ ;  $m(t)$  – масса спутника-гиростата;  $\rho_C$  – изменяющееся в процессе изменения массы расстояние от неподвижного полюса  $O$  до текущего положения центра масс  $C$ ;  $M_{C,\{x,y,z\}}^e$  – компоненты момента внешних сил относительно центра масс системы;  $M_{\{x,y,z\}}^R$  – компоненты момента реактивных сил относительно центра масс.

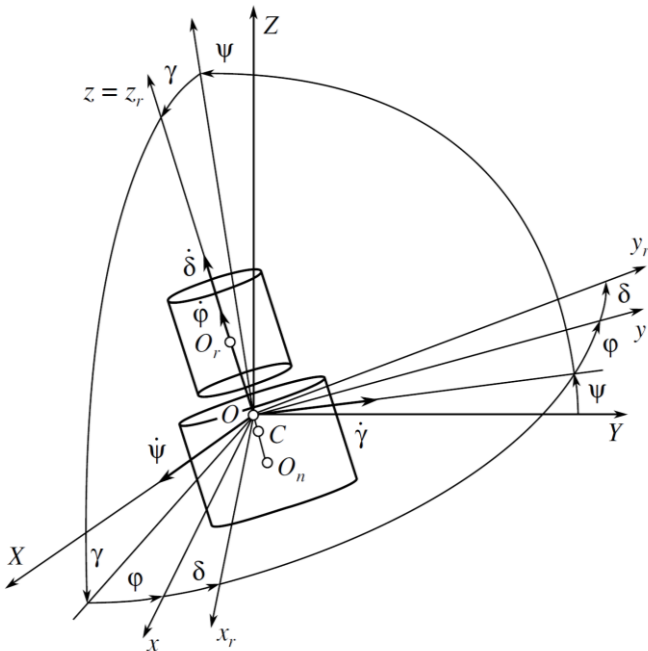


Рис. 17. Соосные тела переменного состава

Кинематические уравнения, описывающие угловое положение главного тела-носителя имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = p \sin \varphi + q \cos \varphi; \\ \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \gamma} (p \cos \varphi - q \sin \varphi); \\ \dot{\varphi} = r - \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} (p \cos \varphi - q \sin \varphi); \\ \dot{\delta} = \sigma; \end{cases} \quad (5.6)$$

где  $\{\psi, \gamma, \varphi\}$  – углы Крылова,  $\delta$  – угол относительной закрутки ротора. Если перейти к переменным типа амплитуда-фаза:

$$p = G(t) \sin F(t), \quad q = G(t) \cos F(t) \quad (5.7)$$

то уравнения (5.5) в новых переменных запишутся:

$$\begin{cases} \dot{F} = -\frac{1}{A(t)} [(C(t) - A(t))r_2 + C_r(t)\sigma + f_F(G, F)], \\ \dot{G} = \frac{f_G(G, F)}{A(t)}, \quad \dot{r} = \frac{M_{b,Oz}^e - M_{\Delta}}{C_2}, \\ \dot{\sigma} = \frac{C(t)M_{\Delta}}{C_r(t)C_b} + \frac{M_z^R + M_{r,Oz}^e}{C_r(t)} - \frac{M_{b,Oz}^e}{C_b}. \end{cases} \quad (5.8)$$

где  $f_G(G, F) = (M_{C,x}^e \sin F + M_{C,y}^e \cos F)$ ;  $f_F(G, F) = \frac{1}{G} (M_{C,x}^e \cos F - M_{C,y}^e \sin F)$ .

В предположении малости углов  $\gamma$  и  $\psi$  кинематические уравнения в первом приближении можно записать:

$$\dot{\gamma} \cong G \cos \Phi(t), \quad \dot{\psi} \cong G \sin \Phi(t), \quad \dot{\phi} \cong r, \quad \dot{\delta} = \sigma, \quad \Phi(t) = F(t) - \varphi(t). \quad (5.9)$$

Прецессионное движение в рассматриваемом случае можно описывать движением фазовой точки на плоскости  $\{\gamma, \psi\}$ , что характеризует движение апекса продольной оси  $Oz$ . Скорость и ускорение фазовой точки на плоскости  $\{\gamma, \psi\}$  можно представить, как:

$$V_\gamma = \dot{\gamma}, \quad V_\psi = \dot{\psi}, \quad W_\gamma = \ddot{\gamma}, \quad W_\psi = \ddot{\psi}.$$

Тогда кривизну фазовой траектории ( $k$ ) можно формально вычислить с помощью (5.9) в следующем виде:

$$k^2 = (\dot{\gamma}\ddot{\psi} - \ddot{\gamma}\dot{\psi})^2 / (\dot{\gamma}^2 + \dot{\psi}^2)^3 = \dot{\Phi}^2 / G^2. \quad (5.10)$$

Далее можно руководствоваться следующей идеей. Если кривизна фазовой траектории есть монотонно увеличивающаяся величина, то фазовая траектория представляет собой скручивающуюся спираль (рис. 18-а), а если убывающая – то раскручивающуюся спираль. Таким образом, по тренду величины кривизны, то можно определить тренд развития фазовой траектории. Для скручивающихся спиралей, например, будет справедливо условие:

$$|k| \uparrow \Rightarrow k\dot{k} > 0 \Rightarrow \dot{\Phi}\ddot{\Phi}G - \dot{G}\dot{\Phi}^2 > 0. \quad (5.11)$$

Поэтому для анализа фазовых траекторий можно использовать «функцию эволюции»:

$$P(t) = \dot{\Phi}\ddot{\Phi}G - \dot{G}\dot{\Phi}^2. \quad (5.12)$$

Знаки и корни функции эволюции  $P(t)$  будут отвечать изменению трендов развития фазовых траекторий, т.е. будут описывать чередование скручивающихся и раскручивающихся фаз (рис. 18). Так, например, всегда положительной не имеющей простых корней на изучаемом интервале времени движения  $t \in [0, T]$  функции эволюции будет соответствовать спирально скручивающаяся фазовая траектория (рис. 18-а). Если на рассматриваемом временном интервале функция эволюции имеет один корень (т.е. произошло изменение тренда кривизны), то фазовая траектория также изменит тренд. Например, на рис. 18-б показан случай, когда функция эволюция была отрицательной, проходила свое нулевое значение (простой корень) и становилась положительной, при этом фазовая траектория сначала раскручивалась, а затем скручивалась к другой точке, образуя кривую Корню (клотоиду). Если же функция эволюция имеет множество корней, то и соответствующая ей фазовая траектория будет иметь сложный вид, чередующий участки скручивания и раскручивания, допуская при этом точки самопересечения (рис. 18-с).

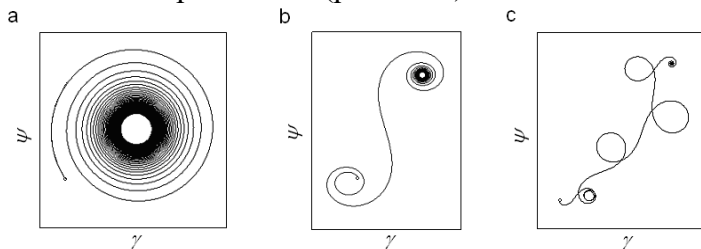


Рис. 18. Случаи поведения фазовых траекторий

С точки зрения выполнения целей гироскопической стабилизации космических аппаратов и спутников необходимо обеспечивать как можно более точную ориентацию осей вращения вдоль вектора кинетического момента, т.е. обеспечивать наименьшие величины углов нутации. Если при этом спутник обладает переменностью состава, то в динамическом смысле эффективность гироскопической стабилизации будет повышаться, если в процессе изменения массы угол нутации будет естественным образом уменьшать свои значения. Подобное повышение эффективности гироскопической стабилизации будет выполняться в

случае, когда реализуется движение апекса продольной оси внутрь конуса нутации, а следовательно необходимо обеспечивать такие моменты сил и законы изменения инерционно-массовых параметров во времени, чтобы функция эволюции была положительна и не имела корней, что будет соответствовать скручивающейся внутрь спиральной фазовой траектории (рис. 18-а). Далее в параграфе дается ряд случаев синтеза условий движения с уменьшающимися углами нутации, например, при действии внутреннего постоянного момента сил ( $M_{\Delta} = \text{const}$ ) и постоянного реактивного момента ( $M_z^R = \text{const}$ ) в случае линейных законов изменения массы и моментов инерции тела-ротора:

$$m_r(t) = m_r - kt, \quad A_r(t) = \alpha m_r(t), \quad C_r(t) = \beta m_r(t), \quad A_b = \text{const}, \quad C_b = \text{const}, \quad (5.13)$$

где  $m_r$  - есть начальная масса ротора,  $k_m$  - есть скорость изменения массы,  $\alpha, \beta$  - есть постоянные. Рассмотрен случай, когда  $r_0 = 0$ ,  $\sigma_0 > 0$ ,  $M_z^R > 0$ , и найдены условия:

$$\sigma_0(cA - aC_r) < AM_z^R, \quad c/C_r > a/A \quad (5.14)$$

$$\sigma_0 \left( c - \frac{C_r k_m^2 l^2}{2am} \right) < M_z^R; \quad 3M_z^R - \frac{(M_z^R)^2}{c\sigma_0} < c\sigma_0 - M_{\Delta}. \quad (5.15)$$

Рис. 19 иллюстрирует полученные результаты для эволюции фазовой траектории. На фрагментах рис. 19-а и 19-б продемонстрировано выполнение (5.14) и (5.15), а на рис. 19-с показан противоположный случай. Условия (5.14) и (5.15) получены путем разложения функции эволюции в степенной ряд с учетом первых двух членов разложения, поэтому являются работоспособными на начальном участке движения, а для более точных условий требуется учет большего числа членов разложения, либо прямой анализ исходного выражения для функции эволюции. Так в случае “а” полная функция эволюции имеет два корня, поэтому фазовая траектория выполняет три последовательные эволюции: скручивающаяся-раскручивающаяся-скручивающаяся. В случае “б” функция вообще не имеет корней и фазовая траектория является спирально скручивающейся.

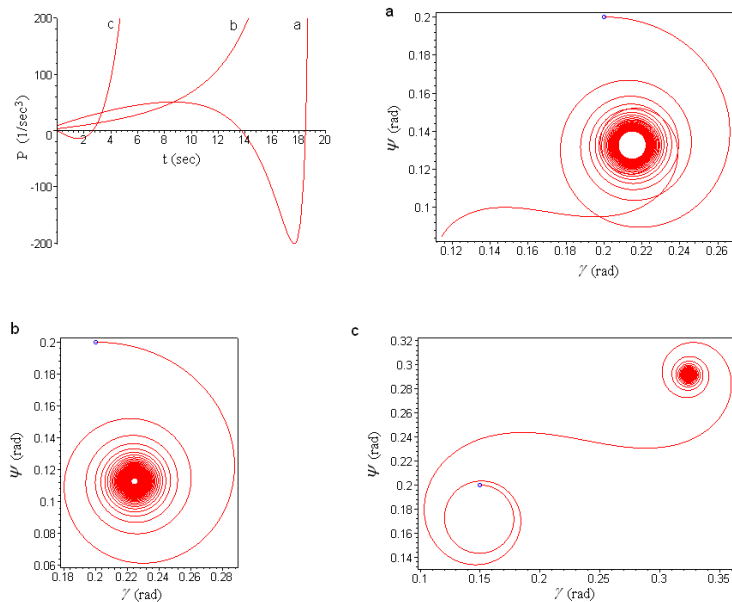


Рис. 19. Функция эволюции и соответствующие фазовые траектории:

В случае отсутствия внутреннего и реактивного моментов сил условие спиральной скручиваемости имеет простейший вид:

$$c/C_r < a/A, \quad (5.16)$$

что соответствует такой геометрии выгорания топлива, когда в инерционно-массовом смысле обеспечивается переход «от цилиндра к шайбе», т.е. относительный поперечный момент инерции ( $A$ ) уменьшается быстрее, чем продольный ( $C$ ). Также получены условия

движения гиростата с переменным составом в присутствии внешних диссипативных моментов сил ( $\mu$  и  $\nu$  – параметры диссипации), и с гармоническими законами изменения моментов инерции (моделирование упругих колебаний тела), опубликованные в [7, 8]. В частности для случая диссипации получены условия уменьшения нутации в виде:

$$C(t)/A(t) > \dot{C}(t)/\dot{A}(t), \quad C(t)/A(t) > \mu/\nu. \quad (5.17)$$

### Основные результаты диссертации.

Получены аналитические решения для нормальных типов гиростатов в случаях действия внешних и внутренних возмущений. На основе этих решений проведен анализ регулярного и хаотического движения и разработаны новые схемы и методы управления угловым положением спутников-гиростатов постоянного и переменного состава, основанные на использовании естественных свойств регулярной динамики и детерминированного хаоса:

1. **Получены шесть видов аналитических решений** для динамики одноосных спутников-гиростатов. Полученные решения обобщают решения для свободного гиростата, а также являются гиростатическим обобщением решений динамики твердого тела, движущегося под действием восстанавливающих моментов:

1.1. Общее решение для намагниченного спутника-гиростата с малым переменным дипольным моментом (в  $\omega$ -режиме) при реализации цилиндрических прецессий [17];

1.2. Гетероклиническое решение для намагниченного одноосного спутника-гиростата с малым переменным дипольным моментом (в  $\omega$ -режиме) при реализации цилиндрических прецессий [17];

1.3. Гетероклиническое решение типа «действие-угол» для вращающейся фазы угла относительного вращения ротора одноосного гиростата с малым дипольным моментом (в  $\omega$ -режиме) при реализации цилиндрических прецессий [14];

1.4. Общее решение для тяжелого динамически симметричного гиростата, приведенное к решению Лагранжа [3];

1.5. Общее решение в случае намагниченного одноосного динамически симметричного спутника-гиростата с переменным дипольным моментом (в  $\omega$ -режиме) без ограничений на его величину [16];

1.6. Общее решение для конической прецессии спутника-гиростата в слабом центральном гравитационном поле [19].

2. **Изучен феномен гетероклинического хаоса** в динамике движения спутника-гиростата при действии внутренних и внешних возмущений, в т.ч. определены условия возникновения и способы подавления хаоса [10, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20]. Проведено исследование хаотизации возмущенной динамики движения спутников-гиростатов при действии внешних и внутренних возмущений различной природы, включая гамильтоновы и негамильтоновы типы возмущений. Изучена возможность хаотизации и регуляризации динамики спутника-гиростата при выполнении им режимов движения, близких к цилиндрической прецессии, являющейся главным динамическим режимом функционирования спутников-гиростатов и космических аппаратов с двойным вращением. Проанализированы процессы расщепления многообразий сепаратрис и рождения гомо-/гетероклинических сетей и хаоса на основе формализма Мельникова-Виггинса, а также **разработаны схемы возможного подавления хаотической динамики**, в том числе [15]:

2.1. Диссипативная схема подавления гетероклинического хаоса на основе аналитического условия (4.21);

2.2. Импульсная схема подавления гетероклинического хаоса;

2.3. Магнитная схема подавления гетероклинического хаоса.

3. **Разработаны новые методы пространственной переориентации** спутников-гиростатов, использующие естественные свойства регулярной динамики и хаоса:

3.1. Метод хаотической переориентации спутника-гиростата [18];

3.2. Метод магнитной переориентации спутника-гиростата путем выполнения серий омега-режимов [16];

3.3. Метод синтеза прецессионного движения с уменьшающимся конусом нутации для спутника-гиростата переменного состава [7, 8].

Полученные в работе результаты исследований обладают фундаментальной научной новизной в области теоретической механики, а также являются актуальными с точки зрения их использования для решения прикладных задач динамики космического полета.

### **Работы автора по теме диссертации**

#### **Статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в Перечень ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus**

1. Асланов В.С., Дорошин А.В. (2002), Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска в атмосфере // Космические исследования. Т. 40. № 2, 2002. С. 193-200.

2. Асланов В.С., Дорошин А.В. (2004), Движение системы соосных тел переменной массы // Прикладная математика и механика. Т.68, вып.6, 2004. С. 999-1009.

3. Асланов В.С., Дорошин А.В. (2006), О двух случаях движения неуравновешенного гиростата// Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, №4. 2006. С.42-55.

4. Асланов В.С., Дорошин А.В. (2008), Влияние возмущений на угловое движение СГ на активном участке спуска // Космические исследования. Т.46, № 2, 2008. С. 168-173.

5. Асланов В.С., Дорошин А.В. (2010), Хаотическая динамика неуравновешенного гиростата // Прикладная математика и механика, т.74, вып.5, 2010. С. 734-750.

6. Асланов В.С., Дорошин А.В., Круглов Г.Е. (2005), Движение соосных тел переменного состава на активном участке спуска // Космические исследования. Т.43, № 3, 2005. С. 224-232.

7. Дорошин А.В. (2008), Эволюции прецессионного движения неуравновешенных гиростатов переменного состава//Прикладная математика и механика, 72(3), 2008. С.385-598.

8. Doroshin A.V. (2010), Analysis of attitude motion evolutions of variable mass gyrostats and coaxial rigid bodies system. International Journal of Non-Linear Mechanics, 45(2), 2010, pp.193-205.

9. Doroshin A.V. (2011), Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16 (8), 2011, pp. 3188-3202.

10. Doroshin A.V. (2012), Heteroclinic dynamics and attitude motion chaotization of coaxial bodies and dual-spin spacecraft. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17 (3), 2012, pp. 1460-1474.

11. Doroshin A.V. (2013), Exact solutions for angular motion of coaxial bodies and attitude dynamics of gyrostat-satellites. International Journal of Non-Linear Mechanics, 50, 2013, pp.68-74.

12. Doroshin A.V. (2014), Chaos and its avoidance in spinup dynamics of an axial dual-spin spacecraft. Acta Astronautica, 94 (2), 2014, pp. 563-576.

13. Doroshin A.V. (2014), Homoclinic solutions and motion chaotization in attitude dynamics of a multi-spin spacecraft. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 19 (7), 2014, pp. 2528-2552.

14. Doroshin A.V. (2016), Heteroclinic chaos and its local suppression in attitude dynamics of an asymmetrical dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites. The Part I-Main models and solutions. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 31 (1-3), 2016, pp. 151-170.

15. Doroshin A.V. (2016), Heteroclinic chaos and its local suppression in attitude dynamics of an asymmetrical dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites. The Part II-The heteroclinic chaos investigation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 31 (1-3), 2016, pp. 171-196.

16. Doroshin A.V. (2017), Analytical solutions for dynamics of dual-spin spacecraft and

gyrostat-satellites under magnetic attitude control in omega-regimes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 96, 2017, pp. 64-74.

17. Doroshin A.V. (2017), Attitude dynamics of gyrostat–satellites under control by magnetic actuators at small perturbations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 49, 2017, pp. 159-175.

18. Doroshin A.V. (2018), Chaos as the hub of systems dynamics. The part I—The attitude control of spacecraft by involving in the heteroclinic chaos. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 59, 2018, pp. 47-66.

19. Doroshin A.V. (2019), Regimes of regular and chaotic motion of gyrostats in the central gravity field. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 69, 2019, pp.416-431 (Available online 12 October 2018).

20. Doroshin A.V., Krikunov M.M. (2014), Attitude dynamics of a spacecraft with variable structure at presence of harmonic perturbations. *Applied Mathematical Modelling*, 38 (7-8), 2014, pp. 2073-2089.

21. Doroshin A.V. (2008), Synthesis of attitude motion of variable mass coaxial bodies. *WSEAS Transactions on Systems and Control*, 3 (1), 2008, pp. 50-61.

22. Doroshin A.V. (2013), Exact solutions in attitude dynamics of a magnetic dual-spin spacecraft and a generalization of the Lagrange top. *WSEAS Transactions on Systems*, 12 (10), 2013, pp. 471-482.

23. Doroshin A.V., Krikunov M.M. (2014), Dynamical analysis and synthesis of inertia-mass configurations of a spacecraft with variable volumes of liquids in jet engine tanks. *WSEAS Transactions on Systems*, 13, 2014, pp. 690-698.

24. Doroshin A.V. (2018), Some properties of gyrostats dynamical regimes close to new strange attractors of the Newton-Leipnik type. *Studies in Computational Intelligence*, 751, pp. 156-176.

25. Doroshin A.V. (2007), Phase Space Research of One Non-autonomous Dynamic System, *Proceedings of the 3rd WSEAS/IASME International Conference on DYNAMICAL SYSTEM and CONTROL*. Arcachon, France, pp. 161-165.

26. Doroshin A.V. (2009), Attitude Control of Spider-type Multiple-rotor Rigid Bodies Systems *Proceedings of the World Congress on Engineering 2009, Vol. II, WCE 2009, London, U.K.*, pp.1544-1549.

27. Doroshin A.V. (2010), Hamiltonian dynamics of spider-type multirotor rigid bodies systems. *AIP Conference Proceedings*, 1220, pp. 27-42.

28. Doroshin A.V. (2013), Spinup-capture dynamics of multi-rotor nanosatellites and somersaulting robots. *Proceedings of 2013 Science and Information Conference, SAI 2013*, art. no. 6661802, pp. 613-617.

29. Doroshin A.V. (2014), Multi-spin spacecraft and gyrostats as dynamical systems with multiscroll chaotic attractors. *Proceedings of 2014 Science and Information Conference, SAI 2014*, art. no. 6918290, pp. 882-887.

30. Doroshin A.V. (2015), Attitude control and angular reorientations of dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites using chaotic regimes initiations. *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*, 2217, pp. 100-104.

31. Doroshin A.V. (2015), Initiations of chaotic regimes of attitude dynamics of multi-spin spacecraft and gyrostat-satellites basing on multiscroll strange chaotic attractors. *IntelliSys 2015 - Proceedings of 2015 SAI Intelligent Systems Conference*, art. no. 7361217, pp. 698-704.

32. Doroshin A.V. (2018), Computing the heteroclinic orbits splitting in systems phase spaces via the matricant method. *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*, 1, pp. 428-433.