

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. П.Г. ДЕМИДОВА»

На правах рукописи

Ширяев Александр Александрович

**Аналитическое исследование закономерностей реализации
неустойчивости заряженной капли во внешних
электростатических полях**

Специальность 01.02.05

«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

ГРИГОРЬЕВ АЛЕКСАНДР ИВАНОВИЧ

ЯРОСЛАВЛЬ – 2019

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Обзор	11
1.1. Обзор экспериментов по распаду капель	11
1.1.1. Первые эксперименты по распаду жидкостей	11
1.1.2. Распад заряженной капли в работах 60-70х годов	15
1.1.3. Распад заряженных капель в электродинамическом подвесе. Часть 1. 1960-1970е года.	22
1.1.4. Распад заряженных капель в электродинамическом подвесе. Часть 2. 1980-1990е года.	27
1.1.5. Современные эксперименты по распаду заряженных капель	31
1.1.6. Исследования капель в неоднородных полях	47
1.2. Обзор теоретических подходов к анализу капель	54
1.2.1. Методика Рэлея для анализа устойчивости заряженной капли	54
1.2.2. Методика Тейлора для анализа устойчивости сфероидальной капли	57
1.2.3. Решение уравнений движения жидкости.	60
1.2.4. Анализ поверхности капли в неоднородных полях	64
1.2.5. Другие подходы к анализу устойчивости капель	69
Глава 2. Заряженная капля в полях простых конфигураций	78
2.1. Заряженная капля в однородном поле	78
2.2. Заряженная капля в поле точечного заряда	103
2.3. Заряженная капля в поле точечного диполя	130
Глава 3. Заряженная капля в полях сложной формы	152
3.1. Капля в поле тонкой заряженной нити	152
3.2. Капля в поле стержня конечной толщины, поддерживаемого при постоянном потенциале	178

Глава 4. Устойчивость капли в полях различной неоднородности	193
Результаты и выводы	199
Список литературы	201
Приложение	214

Введение

Актуальность темы и объект исследования. Исследование гидродинамической неустойчивости капиллярных осцилляций заряженных капель, находящихся во внешних электростатических полях и закономерностей реализации их неустойчивости актуально в связи с многочисленными технологическими и техническими приложениями капиллярного распада жидкостей. Так, в жидкостной масс-спектрометрии и в термоядерном синтезе электрогидродинамическая неустойчивость поверхности заряженной капли используется для создания высоко заряженных капельных пучков трудно летучих веществ. Также капиллярный распад заряженных капель применяется в жидкометаллических источниках ионов, в ионных реактивных двигателях космической техники, для создания электрических аэрозолей и рассеяния оптически плотных аэродисперсных систем, для повышения качества атомизации горюче-смазочных материалов. Капли, подвергаемые воздействию внешних электрических полей используются для технических применений диспергирования жидкостей, таких как каплеструйная печать, распыление сельскохозяйственных аэрозолей, лаков и красок, а также генерации капель для эффективной работы электростатических осадителей. Электроэмульсификация жидкостей применяется в гомогенизаторах, используемых в пищевой, фармацевтической и химической промышленности. В биотехнологии при диспергировании отдельные молекулярные структуры могут инкапсулироваться жидкостью и затем направляться электрическим полем.

Гидродинамическая неустойчивость заряженных капель и явление их распада используется для толкования атмосферных явлений на основе подходов механики жидкости и представляет интерес в области изучения механизмов разделения зарядов в грозовых облаках и перемещения и рекомбинации зарядов вблизи разрядов молний.

Долгое время в работах по механике жидкости исследовались капиллярные осцилляции и их устойчивость на поверхности капель, находящихся в однородном электростатическом поле. Исследования показали, что в некоторых ситуациях заряженные капли намного быстрее распадаются в присутствии внешнего электрического поля. Так как форма поля существенно влияет на условия распада капли, возникает необходимость системного анализа устойчивости такой капли. Необходимость анализа поведения и электрогидродинамической устойчивости заряженных капель в неоднородных электрических полях возникла после начала использования квадрупольных ловушек для стабилизации капли. В дальнейшем неоднородные электрические поля стали применяться для совершенствования методик контролируемого получения заряженных жидких частиц. Теоретические методы механики сплошной среды использовались для анализа электрогидродинамической устойчивости заряженной капли в простейших конфигурациях внешнего электростатического поля – однородного и квадрупольного. Эксперименты, проведённые J.G. Kim, S.Mhatre и R.Thaoakar показали интерес к практическому применению неоднородных электростатических полей для реализации электрогидродинамической неустойчивости заряженной капли. Теоретический анализ устойчивости таких капель способствует развитию как экспериментальных исследований, так и прикладных областей, связанных с электродиспергированием и жидкокапельными ионами. Стоит отметить, что исследования осцилляций и неустойчивости поверхности жидкости не ограничиваются рассмотрением капель, и работы по данной тематике активно ведутся до сих пор. Так, неустойчивость осцилляций свободной поверхности жидкости, исследовалась теоретически и экспериментально В.А. Калиниченко и А.В. Кравцовым. Экспериментальные исследования электрогидродинамической неустойчивости жидкости проведены В.Л. Бычковым, а неустойчивость заряженной жидкости в электрических полях исследовалась теоретически С.В. Нестеровым. Отметим также, что осцилляции, динамика распада капель под воздействием различных факторов и сопутствующие эффекты экспериментально

исследуются Ю.Д. Чашечкиным, а также А.Н. Рожковым и другими. Теоретический анализ самого процесса развития неустойчивости поверхности жидкости связан с решением сильно нелинейных задач. Здесь стоит отметить аналитические решения, полученные Н.М. Зубаревым, описывающие процесс развития электрогидродинамической неустойчивости и формирования эмиссионных конусов на свободной поверхности жидкости.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Тема настоящей диссертационной работы соответствует паспорту специальности 01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы», а именно соответствует области исследований, указанных в пункте №13 «Гидродинамическая устойчивость», в пункте № 14 «Линейные и нелинейные (стоячие) волны в жидкостях», в пункте № 16 «Гидромеханика сред, взаимодействующих с электромагнитным полем (внешнее электростатическое поле)», в пункте № 18 «Аналитические, асимптотические методы исследования уравнений континуальных моделей однородных сред (методы прямого моделирования)». Данная диссертационная работа соответствует формуле научной специальности: изучение на основе идей и подходов механики сплошной среды процессов и явлений, сопровождающих течения однородных сред при механических, тепловых и электромагнитных воздействиях; исследование математических моделей для описания параметров потоков движущихся сред (осцилляций заряженных капель) с целью контроля технологических процессов и прогнозирования природных явлений.

Предметом исследования являются капиллярные осцилляции заряженных капель идеальной жидкости в однородном и неоднородных электростатических полях и устойчивость таких объектов на основе идей и подходов электрогидродинамики.

Целью данного диссертационного исследования является исследование электрогидродинамической устойчивости капиллярных осцилляций заряженных капель во внешнем однородном и неоднородных электростатических полях различных конфигураций.

Для достижения заданной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Построить электрогидродинамическую математическую модель капиллярных осцилляций заряженной капли во внешних однородном и неоднородных электростатических полях различных конфигураций и аналитическим путем обсчитать ее.

2. Исследовать равновесные формы заряженной капли во внешних однородном и неоднородных электростатических полях различных конфигураций.

3. Исследовать спектры гармоник, возбуждающихся в заряженной капле за счет взаимодействия с выделенной гармоникой, в зависимости от степени неоднородности внешнего электростатического поля.

4. Найти критические условия реализации электрогидродинамической неустойчивости фиксированной гармоники осцилляций заряженной капли во внешних электростатических полях в зависимости от номера гармоники.

5. Исследовать влияние степени неоднородности внешнего электростатического поля на критические условия реализации неустойчивости осцилляций произвольной гармоники.

6. Изучить влияние геометрических размеров стержня, создающего внешнее неоднородное электростатическое поле при подаче на него электрического потенциала, на критические условия реализации электрогидродинамической неустойчивости заряженной капли.

Научная новизна.

1. Аналитическим асимптотическим методом в рамках электрогидродинамики выполнено исследование закономерностей устойчивости капиллярного волнового движения на поверхности заряженной проводящей капли во внешних однородном и неоднородных электростатических полях.

2. С использованием классической модели электрогидродинамики идеальной жидкости получены аналитические выражения равновесной формы заряженной проводящей капли в неоднородных осесимметричных электростатических полях различных конфигураций.

3. В рамках механики сплошной среды с использованием теоретического аналитического подхода обнаружено, что с увеличением номера гармоники осцилляций критические для реализации гидродинамической неустойчивости значения зарядовый или полевой параметр монотонно повышаются и стремятся к некоторым постоянным значениям.

4. Показано, что критические условия реализации неустойчивости заряженной капли снижаются по мере увеличения степени неоднородности внешнего электростатического поля.

5. Из полученных в работе аналитических зависимостей установлено, что во внешнем электростатическом поле возбуждаются осцилляции гармоник, связанных линейным взаимодействием с выделенной гармоникой.

6. Установлено, что при потере устойчивости некоторой гармоникой осцилляций, одновременно с ней теряет устойчивость весь спектр связанных с ней гармоник, даже если критические условия реализации электростатической неустойчивости выполняются не для всех связанных взаимодействием гармоник.

7. Показано, что снижение критических условий реализации электростатической неустойчивости заряженной капли в поле проводящего стержня, поддерживаемого при постоянном электростатическом потенциале зависят от геометрии стержня.

Практическая значимость.

Результаты теоретического анализа устойчивости капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли, находящейся во внешнем электростатическом поле, представляют практический интерес в процессах электродиспергирования, электроэмульсификации и могут быть использованы при совершенствовании оборудования для масс-спектрометрии, жидкокапельной печати и коллоидных реактивных двигателей. Полученные закономерности распада аэрозольных капель применимы также и для развития теории грозowego электричества.

Методология и методы исследования. Аналитическое исследование закономерностей реализации и устойчивости капиллярного волнового движения поверхности осциллирующих в однородном и неоднородных электростатических

полях заряженных капель проведено в рамках методов механики сплошной среды, электрогидродинамики, гидродинамики. Используются аналитические асимптотические методы математического моделирования.

Научные положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Электрогидродинамическая модель неустойчивости капиллярных осцилляций идеально проводящей заряженной во внешних однородных и неоднородных электрических полях различных конфигураций: поля точечного заряда, точечного диполя, тонкого стержня, и стержня конечной толщины.

2. Дисперсионное соотношение для капиллярных волн и аналитические решения для амплитуд отдельных гармоник осцилляций на начальной стадии развития электрокапиллярной неустойчивости.

3. Выражения для равновесных форм заряженных капель, находящихся во внешних неоднородных электрических полях полученные аналитическими методами в рамках электрогидродинамики.

4. Аналитические зависимости критических условий реализации неустойчивости поверхности заряженных капель в зависимости от напряжённости внешнего поля и заряда капли в рассмотренных электростатических полях различных конфигураций.

5. Исследование влияния степени неоднородности электростатического поля на критические для реализации неустойчивости n -й гармоники осцилляций заряженной капли значения полевого и зарядового параметров, стремящихся к постоянным пределам при $n \rightarrow \infty$.

6. Исследование влияния геометрии стержня, создающего электростатическое поле в окрестности заряженной капли при подаче на него электростатического потенциала на устойчивость капиллярных осцилляций этой капли.

Степень достоверности.

Полученные результаты являются достоверными, так как обусловлены использованием строгих математических моделей, соответствующих классическим представлениям механики сплошной среды,

электродинамики, математической физики и согласуются с экспериментальными данными других авторов.

Апробация результатов.

Результаты настоящей работы докладывались и обсуждались на: «Всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием». (Ярославль, ЯГТУ, 2014, 2016); Международных молодежных научно-практических конференциях «Путь в науку», секция «Физика. Электродинамика» (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019); «Математика и естественные науки. Теория и практика.» (Ярославль ЯГТУ, 2016г); XI Международной научной конференции «Волновая электродинамика проводящей жидкости. Долгоживущие плазменные образования и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере» (Ярославль, ЯрГУ им П.Г. Демидова, 2015, 2019); Международных молодежных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014, 2015 2016, 2017, 2019); XIV Всероссийской школе-семинаре «Волновые явления в неоднородных средах» имени профессора А.П. Сухорукова («Волны-2014») (Можайск, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014); «Четвёртая Всероссийская конференция Глобальная электрическая цепь» (Борок, Геофизическая обсерватория «Борок» – филиал Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, 2019).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 11 работах, из них 6 статей – в рецензируемых журналах, входящих в список изданий, рекомендованных ВАК или индексируемых базами данных «Сеть науки» (Web of Science) или «Скопус» (Scopus). Список работ приведен в конце диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, раздела «Результаты и выводы», списка литературы и приложения. Полный объем диссертации составляет 215 страниц, в том числе 66 рисунков и 4 таблицы. Список литературы состоит из 132 наименований, включая работы диссертанта по теме исследования.

Глава 1. Обзор

1.1 Обзор экспериментов по распаду капель

1.1.1. Первые эксперименты по распаду жидкости

К первым экспериментам, касающихся вопросов устойчивости поверхности жидкости под воздействием собственных или индуцированных зарядов относятся работы по электродиспергированию J. Zeleny [1-2], а также эксперименты Wilson и Taylor [3] с мыльными пузырями. В первых экспериментальных работах по распаду жидких капель исследовался распад незаряженных капель. Краткие обзоры наиболее значимых из них будут представлены ниже. Рисунки и таблицы, представленные далее по тексту главы 1 приведены из текстов соответствующих работ, рассматриваемых в обзоре.

Одной из первых таких работ, была работа J. J. Nolan 1926 года [4]. В работе исследовались свободно падающие капли воды в однородном электростатическом поле. Установка представляла из себя заземлённую капльницу с водой, расположенную над двумя электродами, подключенными к электрофорной машине. Пластины, служившие электродами, были загнуты по краям, что позволяло избегать разрядов, при влетании капли в область, где создавалось поле. Капли собирались в коллектор, подключенный к электрометру. Распад капель наблюдался невооружённым глазом.

Автор наблюдал два типа распада капли – первый, который можно условно назвать “взрывной распад” происходил для капель всех размеров при высоких напряженностях внешнего поля. При этом капля формировала веероподобную структуру на поверхности, откуда вырывались мелкие капли.

Для капель радиусом больше 2 мм наблюдался “развал” капли на несколько дочерних. К примеру для капли радиусом 2.11 мм напряженность поля для “развала” капли составляла 8.22 кВ/см, а для “взрывного распада” – 8.5 кВ/см.

На Рисунке 1.1.1.1. Представлены результаты замеров и кривые, соответствующие законам $E\sqrt{R} = 3880 \text{ В} \cdot \text{см}^{1/2}$ для сплошной линии и $ER^{5/3} = 606 \text{ В} \cdot \text{см}^{2/3}$, где E - напряженность поля, а R - радиус капли.

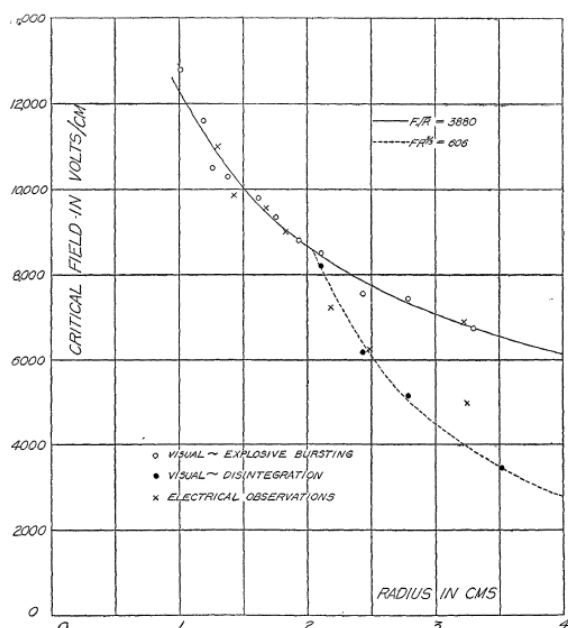


Рисунок 1.1.1.1. Результаты эксперимента.

Зависимость критического значения напряжённости поля (в В/см) от радиуса капли (в см).
Белые точки – “взрывной распад”, черные точки – “развал”, крестики – регистрация распада капли при помощи электрометра.

Автор отмечает, что измерения радиуса капли могут быть неточными ввиду проблематичности создания потока капель идентичного размера. В то же время, критерий Тейлора [3], соответствующий сплошной линии, выполняется.

Нужно отметить, что в данной работе рассматриваются капли, с размерами, близкими к капиллярной постоянной для воды, равной $3.3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, поэтому влияние гравитационных и аэродинамических сил может вносить некоторую погрешность в результаты данного опыта.

Аналогичные капли исследовались и в экспериментальной работе W.A. Masky 1931 года [5] исследовались деформации и распад поверхности капель воды, свободно падающих в сильных электрических полях.

Установка для экспериментов с вертикальным полем состояла из двух медных дисков 32 см диаметром разделённых тремя эбонитовыми стержнями. К дискам были прикреплены металлические пластины в форме раковин. Капли падали вертикально через отверстия диаметром 2 см, сделанные в дисках и раковинах. Края отверстий в раковинах были сделаны настолько гладкими, насколько это возможно, чтобы избежать возникновения разрядов.

Установка для горизонтально направленного поля была аналогичной, но поле создавалось двумя алюминиевыми дисками диаметром 31 см, расположенными вертикально на деревянном основании между медными дисками. К верхнему медному диску крепилась стеклянная капельница через резиновую прокладку, чтобы капли влетали в поле незаряженными. К нижнему диску прикреплялась ёмкость для сбора жидкости. В исследовании рассматривалось влияние сильных электрических полей на капли воды, радиусом от 0.085 до 0.26 см. При полях величиной меньше 5кВ/см значительных искажений формы поверхности даже самых крупных из рассматриваемых капель не наблюдалось.

В работе представлены фотографии (Рисунок 1.1.1.2) формы поверхности капли радиусом 0.25 см в «положительном» поле (вертикальное поле, создаваемое положительно заряженной верхней пластиной и отрицательно заряженной нижней) величиной 8700 В/см.

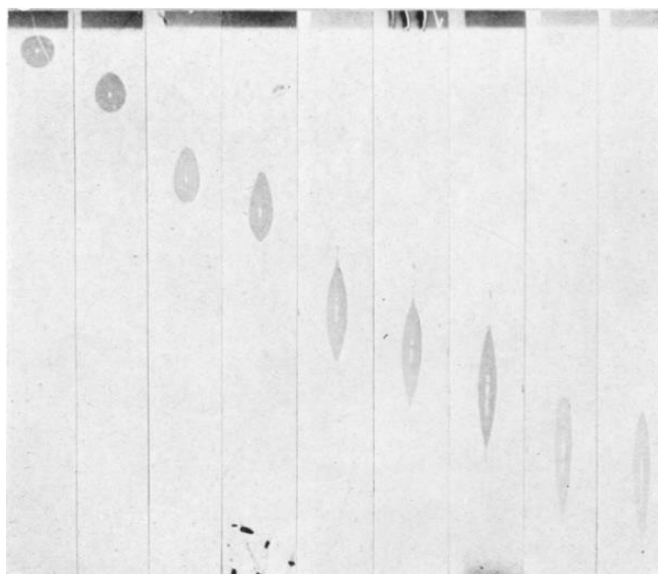


Рисунок 1.1.1.2 Фотографии распадающейся капли

Наблюдения авторов показали, что капля вытягивается в направлении поля, формируя конические выступы из которых вырывается поток частичек жидкости, образующий «сияние» в виде расходящегося от капли конуса. Отмечено, что с положительно заряженного конца капли наблюдается более крупный выступ и более яркое «сияние». Однако в работе сам же автор, после проведённого сравнения с кусочком металла, деформированного аналогично капле, связывает эту асимметрию с особенностями реализации положительного и отрицательного разряда в атмосфере, а не с особенностями неустойчивости поверхности жидкой капли. Исходя из того, что возникающее «сияние» приводило к быстрому уменьшению размера капли автор предположил наличие максимального размера капли, которая может существовать в поле заданной величины. Серия экспериментов при пониженном давлении показала, что величина поля, необходимая для распада капли практически не изменяется с уменьшением атмосферного давления до тех пор, пока давление не достигает значения, при котором в установке происходит пробой в отсутствие капель.

Наблюдались также представленные на Рисунке 1.1.1.3 искажения формы поверхности капли, вызванные её осцилляциями при прохождении через каплю разряда. Эту фотографию можно рассматривать, как иллюстрацию формы

поверхности капли с возбуждённой единичной седьмой модой осцилляций, вызванной прохождением разряда.

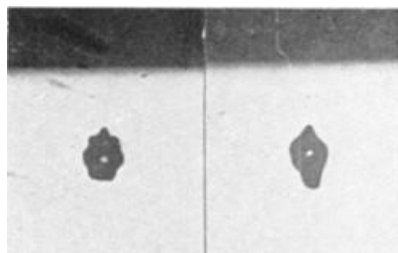


Рисунок 1.1.1.3 Фотографии осциллирующей поверхности капли

В период с 1940х по 1960е годы публикуется ряд работ Gunn и др., [6,7] касающихся измерений зарядов и размеров атмосферных капель. В работе [8] представлены результаты теоретического и экспериментального исследования по распаду незаряженных капель вязкой жидкости в вязкой среде под влиянием набегающего потока и внешнего поля.

1.1.2. Распад заряженной капли в работах 60-70х годов

Перейдём к рассмотрению экспериментальных работ, посвящённых распаду заряженных капель.

В 1964 году была опубликована работа Doyle, Moffett и Vonnegut [9], посвящённая распаду испаряющихся заряженных капель в электростатическом подвесе. Установка для исследований представляла собой две горизонтальные медные пластины размерами 36 на 40 см, помещённые в камеру с очищенным воздухом.

Вертикальное электростатическое поле, необходимое для создания подвеса, контролировалось величиной подаваемого на верхнюю пластину потенциала, в то время как нижняя пластина оставалась заземлённой. Заряженные капли создавались в камере путём распыления их из капилляра, поддерживаемого при

постоянном потенциале величиной 30 кВ. В экспериментах использовались различные жидкости. В целях улучшения условий наблюдения камера была изнутри отделана тёмным материалом и подсвечивалась 300-ваттным проектором. Наблюдения проводились в тёмной комнате невооружённым глазом, через окно в стенке камеры. Определение размеров капель производилось путём измерения диаметров отпечатков, оставляемых ими после падения на белую бумагу для фильтров, и дальнейшей калибровки этой зависимости.

Авторами показано, что напряжённости поля, создаваемые в установке, существенно меньше напряжённостей, создаваемых на поверхности капли её собственным зарядом. Поэтому в данной работе влиянием величины внешнего поля на условия распада капли пренебрегалось, то есть предполагалось, что напряжённость поля на поверхности капли полностью определяется величиной её собственного заряда. Исходя из малых размеров диспергируемых при распаде дочерних капелек, авторами вводится допущение о незначительном изменении массы исходной капли при распаде. Недостатком данного эксперимента можно считать то, что замер величины поля и расчёт её собственного заряда происходил в момент распада капли, а радиуса – после. Можно заметить согласование экспериментальных замеров (Рисунок 1.1.2.1) с критерием Рэлея (Рисунок 1.1.2.1, точечная и пунктирные линии), несмотря на большой (порядка 25-30%) разброс экспериментальных значений, связанный, вероятнее всего с неточным определением радиуса капель.

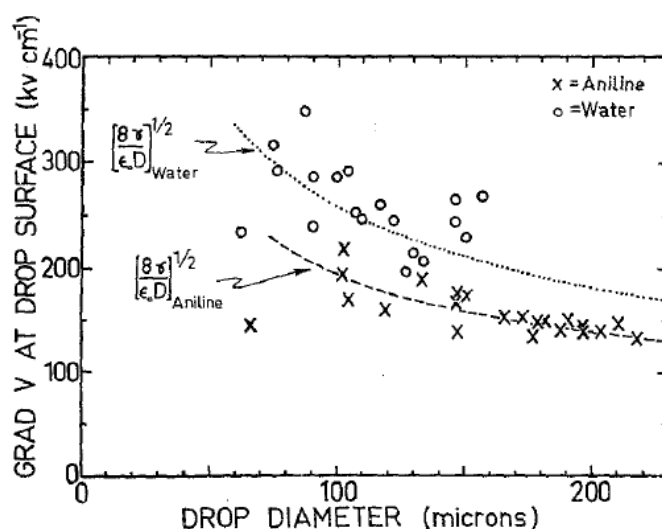


Рисунок 1.1.2.1 График экспериментальных зависимостей градиента потенциала на поверхности капли от её диаметра.

По наблюдениям авторов, более крупные капли преимущественно распадались с образованием эмиссионного выступа и диспергируемого вверх облака микрокапель, а мелкие выпускали несколько дочерних капелек, разлетавшихся в разных направлениях. Можно предположить, что размеры дочерних капелек связаны с большей степенью влияния вязкости на поверхности малой капли, направление эмиссии – определяется большей величиной поверхностной плотности заряда на её верхнем конце. В экспериментах показано существенное влияние коэффициента поверхностного натяжения жидкости на критические значения напряжённости поля на её поверхности. Значимым наблюдением в данной работе является и то, что авторы добивались нескольких последовательных распадов капли, своевременно корректируя величину поля, таким образом поддерживая каплю в состоянии электростатического подвеса.

Стоит упомянуть серию работ Abbas, Latham, Azad и др. [10-16] по распаду заряженных капель и пар таких капель. Продолжаются исследования устойчивости незаряженных капель: Ausman и Brook проводят эксперименты [17] по распаду переохлаждённых капель, Richards и Dawson [18] исследуют устойчивость капель падающих с максимальной скоростью в вертикальном

однородном поле. Проводятся замеры зарядов капель воды [19], непосредственно находящихся в облаках.

Остановимся подробнее на работе 1969 года [10] по определению критических значений величины внешнего однородного электростатического поля, необходимого для распада свободно падающей капли. Теоретический подход бы аналогичен подходу, использованному Тейлором [20]. Форма поверхности капли предполагалась сфероидально искажённой. Критическим для распада капли значением поля считалось такая его величина, для которой не существовало соответствующей равновесной деформации.

Теоретические значения критической величины поля F от собственного заряда капли Q представлены на Рисунке 1.1.2.2. Линия под номером 1 соответствует критическим условиям распада на нижнем конце капли, а линия 2 – на верхнем. Видно, что для заряженной капли критическая величина внешнего поля существенно снижается с ростом величины собственного заряда капли, на том её конце, где знаки собственного и индуцированного зарядов совпадают.

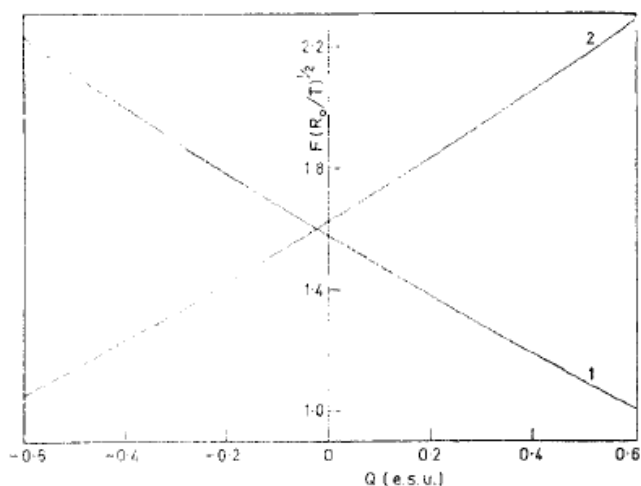


Рисунок 1.1.2.2 График теоретической зависимости критических значений величины поля от величины собственного заряда Q .

Для проверки полученной теоретической зависимости авторами была поставлена серия экспериментов по распаду свободно падающих заряженных капель в однородном поле. В эксперименте (Рисунок 1.1.2.5) капли воды

определённой температуры создавались заземлённой капельницей, с резервуаром под постоянным давлением. Капли получали заряд, при падении касаясь тонкой иглы, поддерживаемой при постоянном потенциале. Заряженная таким образом капля пролетала через область, в которой двумя горизонтальными (вертикальными) пластинами создавалось вертикальное (горизонтальное) однородное электрическое поле, где и происходил её распад. Далее капля попадала в ёмкость, подключенную к электрометру, позволявшему измерять её оставшийся после распада заряд.

В экспериментах распад происходил на нижнем конце капли, а полученные результаты хорошо согласовывались с теоретической кривой (Рисунок 1.1.2.3, Рисунок 1.1.2.2, линия 1). Распад на верхнем конце капли (Рисунок 1.1.2.2, линия 2) не происходил, по предположениям авторов вследствие неприменимости сфероидального приближения для верхнего конца капли.

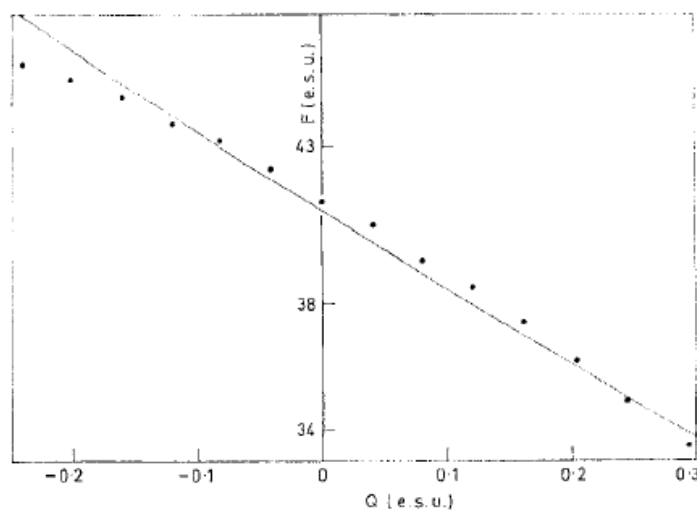


Рисунок 1.1.2.3 Экспериментальная зависимость критической величины поля от величины собственного заряда капли

Согласно проведённым мной расчётам, критическая величина поля должна снижаться вне зависимости от знака заряда. Однако в рассматриваемом мной приближении форма поверхности капли также получается приближённо сфероидальной, что, согласно предположениям авторов, не соответствует условиям эксперимента. Можно предположить, что это расхождение является

результатом неучёта влияния аэродинамического давления на формы поверхности вблизи концов капли. В работе также не указаны методы учёта скорости падения капли, которые, очевидно, будут различны для капель, несущих разноимённый заряд.

В более поздней работе Latham и Myers [15] рассматривались заряженные капли, свободно падающие в сильных электрических полях, выявлялась зависимость между изменением массы и заряда капли при их распаде под действием электрических сил. Установка представляла собой капельницу, поддерживаемую при известном потенциале, две пластины (одна под напряжением, вторая заземлена), создававшие однородное поле – вертикальное или горизонтальное, в зависимости от расположения пластин, и собирающее приспособление, позволявшее измерять массу и заряд капель. Установка находилась в холодильнике и позволяла поддерживать температуры порядка -15..+20 градусов Цельсия. Прикладываемые поля были величинами 0-30 кВ с расстоянием между пластинами 1.5-4.5 см. Исследовались капли радиусами от 1 до 2.2 мм, с собственными зарядами Q , величиной до $Q \leq 0.48$ статкулон. Авторами говорится, что многими исследователями подтверждается наличие на дождевых каплях зарядов, близких к критическим условиям реализации неустойчивости капли в однородном электростатическом поле, полученным Abbas и Latham [10]: $E(R/T)^{1/2} = 1.60 - 0.35Q(R^3/T)^{-1/2}$.

В экспериментах капли принимали форму, близкую к сфероидальной. Распад капли происходил путём формирования эмиссионного конуса на одной из сторон капли, из которого диспергировались высоко заряженные микрокапли. То есть, в процессе распада неустойчивая капля массой M с собственным зарядом Q , переходила в новое, устойчивое состояние, характеризуемое массой $M - \Delta M$ и зарядом $Q - \Delta Q$. В исследованиях Doyle [9] и Abbas and Latham [10] наблюдалось, что капли могли претерпевать несколько распадов подряд. Авторами, на основе эмпирически полученного критерия устойчивости [10] была

теоретически получена минимальная величина относительной потери заряда $\Delta Q / \Delta M$, при котором капля, находящаяся чуть выше границы устойчивости, вследствие распада переходит в устойчивое состояние, близкое к критическому. Такой распад даёт возможность капле претерпеть вторичный распад при попадании в область чуть более сильного поля. В экспериментах авторов наблюдались распады с существенно различившимися потерями массы капли $\Delta M / M$. Однако, в работе приводятся результаты только тех замеров, в которых капля после распада была близка к критическим условиям реализации неустойчивости. Результаты таких измерений (Рисунок 1.1.2.4) показали, что относительные величины потери заряда $\Delta Q / (\Delta M / M)$ (где $\Delta M / M$ - относительное изменение массы капли) близки к полученному в статье теоретическому минимуму.

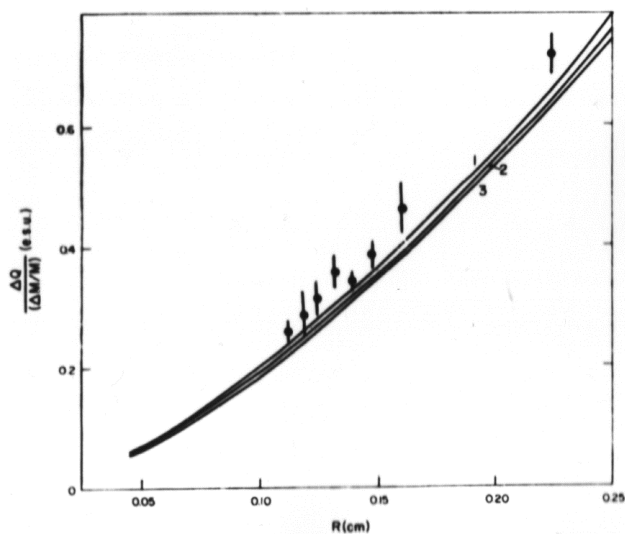


Рисунок 1.1.2.4 Величина относительной потери заряда от радиуса капли.

Таким образом, авторами была экспериментально доказана возможность многократных последовательных распадов заряженных капель в грозовых облаках.

1.1.3. Распад заряженных капель в электродинамическом подвесе.

Часть 1. 1960-1970е года.

Начиная с конца шестидесятых годов публикуется ряд работ [21-25], посвящённых исследованию распада заряженной капли в электродинамическом подвесе. Установки в экспериментальных работах и методики измерения величин несколько отличаются, однако их объединяет общая концепция – подвешивание капли в вертикальном однородном электростатическом поле и её стабилизация переменным неоднородным. Рассмотрим наиболее показательные из них.

Одной из первых таких работ является статья Berg и др. 1970 года [23], посвящённая изучению неустойчивости заряженных капель. Авторы использовали фиксацию положения капли при помощи её подвешивания в однородном электростатическом поле и её стабилизацию неоднородным электрическим полем частотой 60 Гц. Положение и амплитуда осцилляций капли определялись её удельным зарядом, а также, величиной и формой поля. Важной особенностью и недостатком работы можно считать то, что параметр, характеризующий неоднородность поля определялся калибровкой по капле с известным зарядом, исходя из критерия Рэля. Размер наблюдаемых капель измерялся по фотографиям.

В работе использовались установки двух конфигураций. Первая собой закрытый цилиндр с двумя сферическими электродами и использовалась для экспериментов в очищенном воздухе. Вторая являлась открытой системой с кольцевыми электродами.

На графиках экспериментальных замеров (Рисунок 1.1.3.1) линиями (сверху вниз, по порядку) представлены временные зависимости основных параметров

капли: заряда Q , квадрата диаметра d^2 , и зарядового параметра $W = \frac{Q^2}{2\pi\sigma d^3}$.

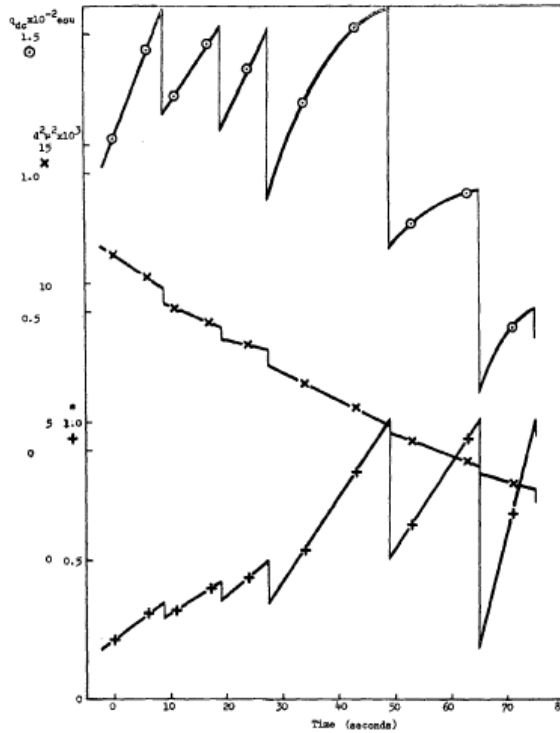


Рисунок 1.1.3.1. Временные зависимости основных параметров капли.

Рост величины собственного заряда капли между распадами авторы связывают с эффектами зарядки капли в среде, т.к. эксперимент проводился в неочищенном лабораторном воздухе. Явления распада, по словам авторов, характеризуются резким уменьшением диаметра и собственного заряда капли. Последние три происходили при $W \approx 1$ и наблюдались явно, как явления распада. Авторы отмечают, что для крупных капель диаметром более 100 мкм происходили распады и при значениях заряда, существенно меньших критического (первые три распада на Рисунке 1.1.3.1). Как видно из представленных результатов, для точного отслеживания заряда капли в момент распада требуется большее временное разрешение оборудования. Тем не менее, для предполагаемых авторами распадов капель при $W < 1$ наблюдается следующая тенденция – с уменьшением капли в размерах, распад наблюдался при всё больших значениях полевого параметра.

Подобной работой по проверке критерия Рэлея для заряженных капель является эксперимент Schweizer and Hanson 1971 года [24]. Были проведены

измерения масс и зарядов капель *n*-октанола диаметром 15-40 мкм, претерпевавших рэлеевский распад в электрическом подвесе.

Заряженная капля стабилизировалась при помощи постоянного вертикального поля, создаваемого двумя плоскими параллельными пластинами. Между стабилизирующими пластинами находилась параллельная им третья, имевшая широкое двухдюймовое отверстие, и подключённая к источнику переменного напряжения. Исследуемая капля вбрызгивалась вертикально вверх в область отверстия в третьей пластине через маленькое отверстие в нижней пластине.

Постепенно испаряясь, капля приближалась к критическим по Рэлею условиям распада и в некоторый момент начинался распад с эмиссией дочерних микрокапель. Факт распада фиксировался косвенно, по перемещению капли, вызванному импульсом от эмиссии, и резкому увеличению необходимой для подвеса капли напряжённости вертикального поля. Число и размер диспергируемых микрокапель в эксперименте не фиксировались ввиду отсутствия хороших оптических приборов для явного их наблюдения.

Отношение заряда капли к её массе определялось из условия электростатического подвеса, в котором находилась капля. Для независимого определения заряда и массы использовалось переменное поле, создаваемое третьей пластиной. Так, при некоторой частоте синусоидального сигнала генератора осцилляции капли под воздействием поля значительно увеличивались в амплитуде, становясь заметными невооружённым глазом. Исходя из теоретической зависимости, описывающей данное явление, авторы определяли массу капли, а затем и заряд. Большую часть времени наблюдения переменное поле отсутствует, включаясь только для проведения замеров критической частоты, или возврата наблюдаемой капли в центр наблюдаемой области в случае её смещения в сторону.

При анализе данных авторы предполагают, что изменения заряда капли при испарении не происходило, хотя, как сами же и отмечают, в большинстве случаев наблюдалось обратное. Отмечается наличие случаев как постепенного утечки заряда с капли в окружающую среду, так и его увеличения. По предположениям авторов, заряд капли мог увеличиваться из-за столкновений с ионами, которые могут присутствовать вследствие распада мелких ненаблюдаемых капелек, диспергируемых в установке попутно с исследуемой. Для несколько более точного учёта изменения заряда капли проводились несколько замеров критической частоты переменного поля и величины постоянного в процессе её испарения.

На графике экспериментальной зависимости удельных зарядов капель перед их распадом (Рисунок 1.1.3.2) сплошной линией показана теоретическая кривая, соответствующая критерию Рэля. Среднее значение величины удельного заряда на капле составляло 1.01 от критического по Рэлею значения, при среднеквадратичном отклонении в 0.04.

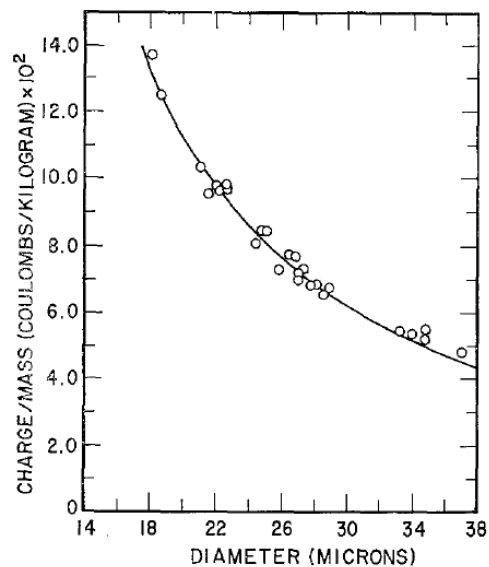


Рисунок 1.1.3.2. Удельные заряды капель перед распадом.

Отмечу, что в данной работе были использованы непрямые измерения массы и заряда капли, а также отсутствовал учёт влияния внешних полей на

форму капли, что в совокупности могло существенно повлиять на точность результатов эксперимента.

Эксперименты по распаду заряженных капель в электростатическом подвесе также представлены в работах Roulleau и Desbois 1972 года [25]. Авторами рассматривались капли воды диаметрами 50–200 мкм. Установка была аналогична установке в экспериментах Owe Berg [23] и представляла собой трубку с размещёнными в ней электродами, создающими стабилизирующее переменное и поддерживающее постоянное электрическое поле.

Отличие установки состояло в наличии потока воздуха, подаваемого в камеру с каплей снизу вверх. Относительная влажность нагнетаемого в установку воздуха составляла 80-98%, благодаря чему удалось снизить скорость испарения капли. Диаметр капли измерялся по фотографиям, а величина заряда рассчитывалась из условия электростатического подвеса с учётом давления набегающего потока воздуха.

Экспериментальные зависимости собственного заряда капли Q (Рисунок 1.1.3.3, верхняя кривая) и её зарядового параметра (Рисунок 1.1.3.3, нижняя кривая) от времени показали результаты, аналогичные [23] за исключением отсутствия «распадов» при зарядах, существенно меньших критического по Рэлею. Для величины зарядового параметра сплошной линией отмечено критическое по Рэлею значение $W = 1$.

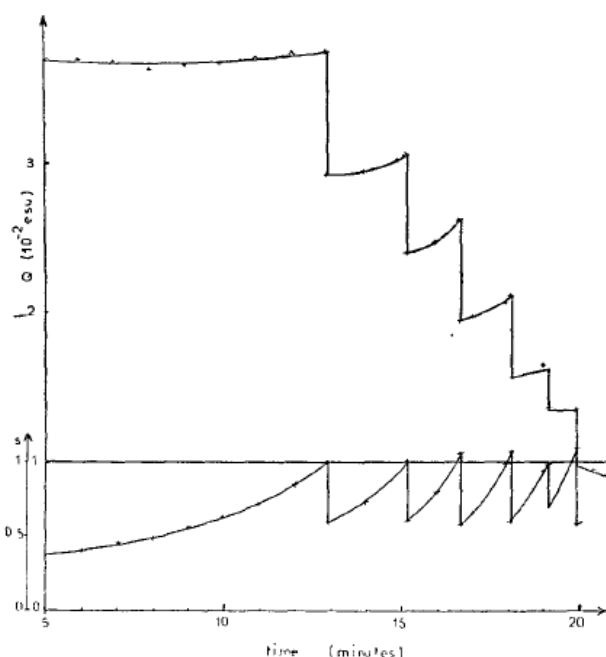


Рисунок 1.1.3.3. Временные зависимости заряда и зарядового параметра.

Для проверки критерия Рэля авторами было проведено 50 замеров в которых наблюдался большой разброс значений $0.83 \leq W \leq 1.10$.

1.1.4. Распад заряженных капель в электродинамическом подвесе.

Часть 2. 1980-1990е года.

В рассмотренных выше экспериментальных работах по распаду капли в электродинамическом подвесе присутствовала общая проблема, связанная с недостаточно точным по мнению авторов измерением радиуса капли, а также с точным определением калибровочной константы для поля. В последующих экспериментальных работах [26-31] авторы попытались устранить эти недостатки.

В 1989 году публикуется работа Taflin et.al. [30] в которой изучались распады испаряющихся заряженных капель в электродинамическом подвесе.

Капля жидкости радиусом 10-20 мкм подвешивалась с помощью электростатического поля и стабилизировалась переменным неоднородным

полем. Неоднородность поля учитывалась с помощью калибровочной константы, зависящей от размеров и расположения электродов. Константа определялась по условиям, нестабильности микрокапли в переменном поле. Авторы утверждают, что ошибка в определении величины собственного заряда капли из условия электростатического подвеса не превышала 3%. Важной отличительной особенностью данного эксперимента является то, что для точного определения радиуса капли использовался метод резонансной оптической спектроскопии, позволявший определять размер наблюдаемых капель с разрешением 1 к 10⁴.

Из результатов экспериментов в деионизированной среде чистого азота (Таблица 1.1.4.1), авторами получено, что распады происходили при зарядах ниже критических по Рэлею. В среднем распад происходил при величинах собственного заряда капли, составлявшего порядка 80% от Рэлеевского, что видно из последней колонки таблицы. Радиусы капель убывали на величину порядка 0.6%.

Table I. Droplet Explosion Data

liquid	$a_-,$ μm	$q_-, \times 10^{13},$ C	$\gamma_{\text{calc}},$ mN/m	$\gamma_{\text{meas}},$ mN/M	$\Delta a/a_-,$	$\Delta m/m_-,$	$\Delta q/q_-,$	q_-/q_{RL}
bromododecane	21.74	-9.47	15.6	30.5			0.12	0.715
dibromooctane	19.237	-10.03	25.3	34.0 ^a	0.005 20	0.015 5	0.14	0.863
	17.490	-8.63	24.9		0.006 35	0.018 9	0.18	0.856
	15.366	-7.10	24.8		0.005 66	0.016	0.14	0.854
	13.861	-6.09	24.9		0.007 50	0.022 3	0.18	0.856
dibutyl phthalate	9.960	3.24	19.0	34.09				0.747
dodecanol	17.78	8.13	21	29.14	0.006 7	0.020	0.13	0.849
	16.13	7.10	21.5				0.17	0.859
hexadecane	16.583	6.15	14.8	27.44	0.005 25	0.016	0.18	0.734
	14.560	5.06	14.8		0.005 01	0.01 5	0.18	0.734
	32.58	17.11	15.1				0.14	0.742
heptadecane	18.072	7.51	17.1	27.9	0.007 86	0.023	0.13	0.783
	16.363	6.51	17.3		0.007 03	0.02 1	0.10	0.787
	17.047	-7.09	18.1		0.003 29	0.0098	0.095	0.805
	15.963	-6.41	18.1		0.005 01	0.01 50	0.14	0.805
	14.536	-5.51	17.7		0.004 61	0.01 38	0.14	0.796

^a Estimated surface tension.

Таблица 1.1.4.1. Сводка результатов экспериментов.

Были также проведены эксперименты с распадом капли дибутилфталата в воздушной среде. Жидкость содержала радиоактивный изотоп углерода C¹⁴, бета-распад которого вызывал частичную ионизацию газа. Ионы газа

противоположного заряду капли знака притягивались к её поверхности, тем самым снижая величину заряда на капле. Благодаря этому капля приближалась к критическому значению заряда существенно медленнее (время до распада составило 830 минут). Величина заряда, при которой случился распад также оказалась существенно ниже критического по Рэлею значения (Рисунок 1.1.4.1). Для серии таких экспериментов авторами получено, что капли распадались при зарядах, составлявших в среднем 73% от критического по Рэлею.

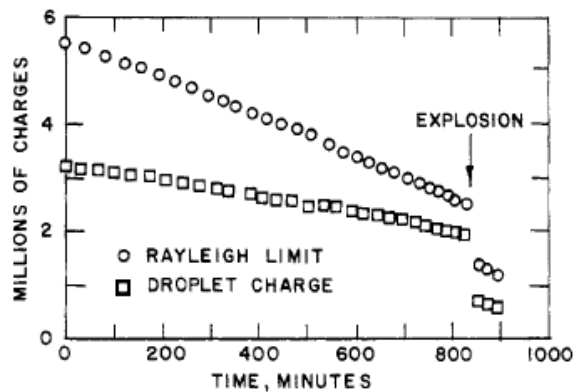


Рисунок 1.1.4.1 Распад в ионизированной среде

Подобная конфигурация экспериментальной установки используется и в работе Richardson этого же года [29], однако электродинамический левитатор состоял из двух колец, подключенных к источнику переменного напряжения и создавал стабилизирующее переменное квадрупольное поле. Постоянное поддерживающее поле отсутствовало, поэтому вследствие гравитации капля находилась чуть ниже центра ловушки, в которой величина поля была наименьшей. Как видно из результатов экспериментов (Таблица 1.1.4.2, последний столбец), критерий Рэля авторами подтверждается, но присутствуют большие ошибки измерений, связанные с погрешностью определения калибровочной константы поля. Для регистрации размера капли также использовался спектральный анализ рассеянного света, дающий точность порядка $1 \text{ к } 10^4$.

(The numbers in parentheses are uncertainties resulting from the uncertainty in K .)

Liquid	$\Delta v/v$ (%)	$\Delta q/q$ (%)	$q^2/(16\pi r^3 \gamma)$
dioctylphthalate	2.25 ± 0.96	15.0 ± 3.9	$1.02 (0.10) \pm 0.06$
no. of values	51	59	16
sulphuric acid	< 0.1	49.4 ± 8.3	$0.84 (0.08) \pm 0.21$
no. of values	11	28	16

Таблица 1.1.4.2. Сводка результатов эксперимента

Ошибки измерения заряда и размера капли в данной работе не учитываются, вероятно в силу их существенно меньшей величины, по сравнению с погрешностью определения калибровочной константы поля. Для диэлектрической жидкости - диоктилфталата, получено значение в 102%, а для электролита - серной кислоты – 84%, что может свидетельствовать о различиях в условиях распада капли в зависимости от её диэлектрической проницаемости.

В экспериментальной работе Davis и др. 1994 года [31] используется суперпозиция постоянного и переменного полей для удержания капли, как и в большинстве работ с каплями, удерживаемой посредством электродинамического баланса. Характерные размеры капель – 4-15 мкм для водного раствора и 10-20 мкм для 1-додеканола.

Измерение заряда капли производилось из условия электростатического подвеса. Необходимая для этого калибровочная константа, отвечавшая за неоднородность поля, определялась из сравнения экспериментально наблюдаемой и теоретической зависимости осцилляций капли в переменном поле. Расхождения с теоретической моделью составили 8% и 20% для двух используемых конфигураций, поэтому калибровочная константа для расчёта заряда была подобрана для максимального соответствия теоретической кривой. Авторы утверждают, что капли воды и додеканола распадались при зарядах порядка 90% от критических по Рэлею. Наблюдались также двух-трёхкратные последовательные распады одной и той же капли. Для капель додеканола напряжённость поля составляла порядка 1кВ/м.

1.1.5. Современные эксперименты по распаду заряженных капель

Работы [29-31], а также сходные наблюдения Wildmann [32] использовавшие более совершенные методики наблюдения, чем [23-25], тем не менее, дали неоднозначные результаты относительно справедливости критерия Рэлея, чем вызвали дополнительную потребность в его проверке. Далее перейдём к рассмотрению относительно новых работ, использующих различные конфигурации установок и методики измерений. К таким работам можно отнести работы Duft [33], Li [34], Grimm и Beauchamp [35,36], и других авторов [37-39]

Принципиально новый подход был применён к проверке критерия Рэлея в работе Duft и др. [33]. Авторы отказались от независимого определения характеристик капли и исследовали амплитуду и фазу квадрупольных осцилляций, как функцию зарядового параметра W . Капля этиленгликоля данной работе рассматривалась, как осциллятор, совершающий вынужденные колебания под действием внешнего переменного поля. Теоретический анализ таких осцилляций в приближении малых амплитуд колебаний показал, что при величинах зарядового параметра W , близких к единице, должно происходить резкое нарастание амплитуды осцилляций и смещение фазы колебаний на четверть периода (Рисунок 1.1.5.1, а). Замеры позволяли определять с высокой точностью минимальный и максимальный диаметры поперечника капли, из соотношения которых рассчитывалась амплитуда колебаний. По временным зависимостям отражённого света, путём сопоставления их с колебаниями напряжённости внешнего поля определялся момент смещения фазы. Из сравнения теоретической и экспериментальной (Рисунок 1.1.5.1, б) зависимостей авторами получено, что все наблюдаемые распады происходили при значениях зарядового параметра, не меньших 95% от рэлеевского.

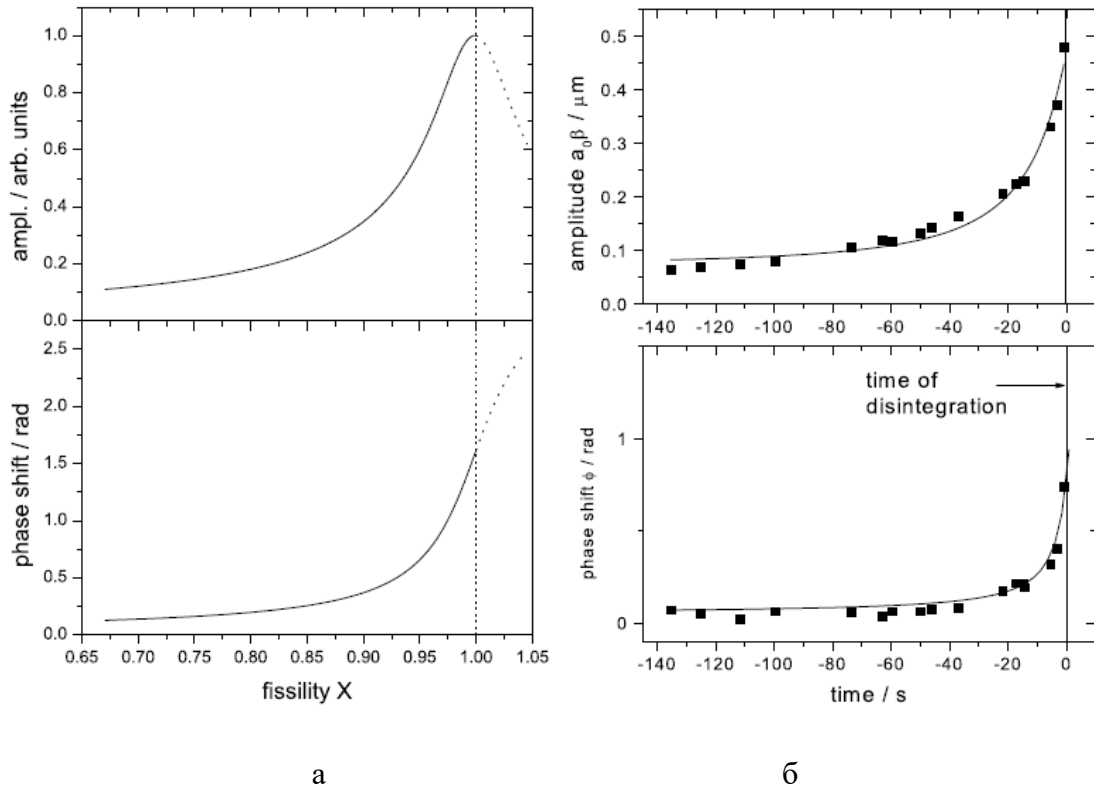


Рисунок 1.1.5.1 Теоретическая и экспериментальная зависимости.

Авторами также проведены измерения, аналогичные предыдущим исследованиям, то есть определялись радиус, заряд капли и с использованием табличных значений коэффициента поверхностного натяжения рассчитаны зарядовые параметры капли, максимально близкой к критическим условиям. Результаты такого подхода показали значения $W \approx 0.7$, что свидетельствует о том, что коэффициент поверхностного натяжения для заряженных микрокапель существенно отличается от табличных значений. Причиной тому, по словам авторов, может являться зависимость поверхностного натяжения от кривизны, влияние поверхностного заряда на межмолекулярные связи и нестабильность состава капли ввиду изменения концентрации примесей в процессе испарения.

В работе Grimm и Beauchamp 2002 года [35] проводились исследования распада сильно заряженных капель летучих углеводородов во внешнем однородном электрическом поле. В работе рассматривались капли трёх типов жидкости (октан, гептан, пара-ксилол) и диаметром 10-60 мкм.

Экспериментальная установка (Рисунок 1.1.5.4), являлась закрытым баком, в котором создавалось вертикальное однородное поле.

Капли исследуемой жидкости получали методом электродиспергирования жидкости с конца иглы, подключённой к источнику напряжением 800-1200 В. Капли диспергировались вертикально вверх и проходили через отверстия, отсеивавшие те капли, которые существенно отклонялись от вертикали. Размеры и скорости движения капель регистрировались доплеровским анемометром. Для удержания капель в области наблюдения использовался метод, называемый авторами “ring-pong” метод: как только капля регистрировалась, а затем покидала область наблюдения – автоматическая схема меняла полярность напряжения на обкладках, генерировавших внешнее поле. Капля начинала двигаться в обратном направлении и снова влетала в область наблюдения. Такое движение продолжалось до тех пор, пока капля не переставала регистрироваться ввиду малости размеров или её смещения вбок от исследуемого объёма. Величина заряда капель рассчитывалась из баланса сил тяжести, электрического взаимодействия и силы сопротивления среды.

Как видно из временных зависимостей заряда (Рисунок 1.1.5.2) регистрировались последовательные резкие снижения собственного заряда капли, что интерпретировалось как серия рэлеевских распадов капли по мере её испарения.

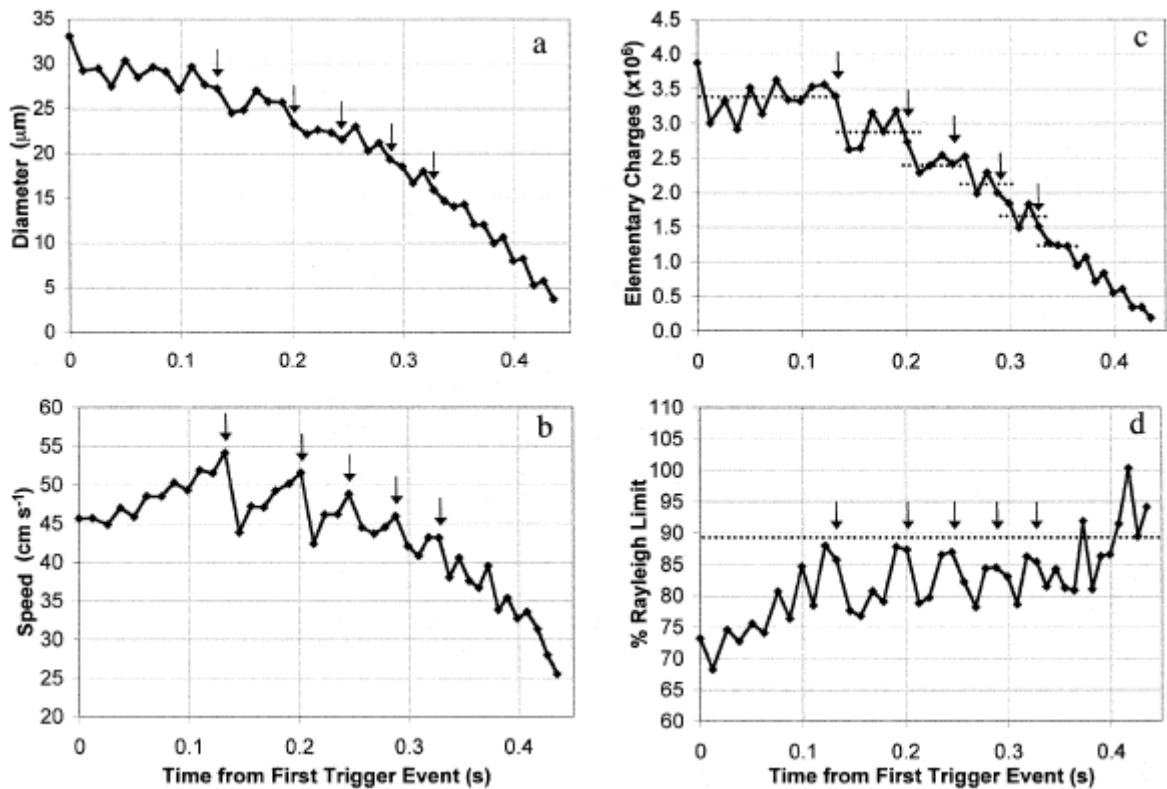


Рисунок 1.1.5.2 Временные зависимости диаметра (а), скорости (б), собственного заряда (с), и текущего значения параметра Рэля для наблюдаемой капли пара-ксилола (д). Предполагаемые акты распада капли отмечены стрелочками.

Во всех наблюдаемых в экспериментах распадах снижение величины заряда капли составляло порядка 18%. Существенного изменения размера капли при распаде не регистрировалось, т.к. погрешность измерения радиуса капли составляла порядка 4%. Скорость частицы при распадах резко снижалась, что косвенно указывает на асимметрию распада. Это можно объяснить, предположив, что распад капли происходил на том её конце, где знаки собственного и поляризационного зарядов совпадали. Асимметрией задачи, связанной с наличием давления силы тяжести, в данном случае, вероятно, можно пренебречь в виду малости её вклада по сравнению с электрическим и капиллярным давлениями.

Из экспериментальных результатов для пара-ксилола (Рисунок 1.1.5.3) видно, что для капель большого диаметра наблюдался распад при величинах собственного заряда, меньших критического по Рэлею (Рисунок 1.1.5.3, сплошная линия).

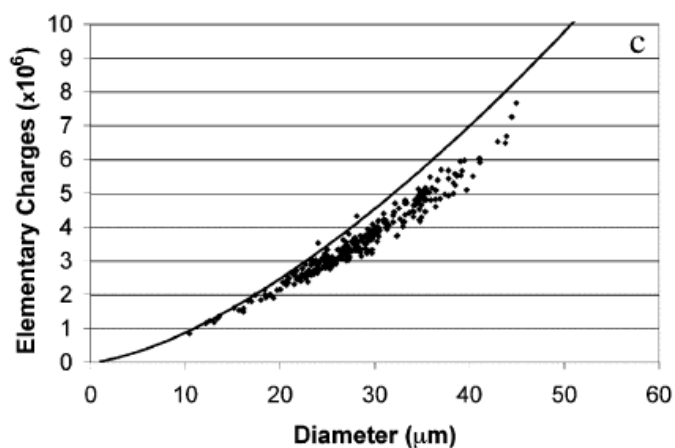


Рисунок 1.1.5.3 Критические величины заряда на капле.

Распад капли, несущий заряды меньший критического по Рэлею наблюдался и в работах [40-41] При этом с увеличением диаметра капли расхождение между критическим и экспериментальным значением увеличиваются. Данное наблюдение можно связать с нахождением капли во внешнем поле, величина которого больше, чем у поля электростатического подвеса, использовавшегося в более ранних работах.

Более поздняя работа этих авторов [42], посвящена распаду капель, свободно падающих во внешнем однородном электрическом поле. Были проведены исследования распадов как заряженных, так и незаряженных капель и получены качественные фотографии процесса распада. Экспериментальная установка состояла из вибрационного аэрозольного генератора, создававшего поток монодисперсных капель метанола. Собственный заряд капель создавался путём поддержания постоянного напряжения между системой подачи жидкости и заземлённым противоэлектродом. Приложенное напряжение 0-600В линейно изменяло собственные заряды капель в пределах 0-13% от критического по Рэлею значения.

Далее капли пролетали между двумя электродами, создававшими горизонтальное однородное электрическое поле, в котором и происходил распад. Изначально оба электрода поддерживались при высоком напряжении (2.8-3.4 кВ), благодаря чему капля влетала в область между электродами в отсутствие поля.

Далее один из электродов замыкался на землю и разряжался, благодаря чему за времена порядка 1 микросекунды в межэлектродном пространстве генерировалось однородное поле, в котором и проводились наблюдения капель. Величина заряда капель измерялась цифровым пикоамперметром, подключенным к металлическому коллектору, в который падали капли. Фиксация формы капли производилась с помощью высокоскоростной камеры. Отметим что приведённые в работе фотографии развёрнуты на 90 градусов и поэтому электрическое поле на них направлено вертикально.

На фотографиях (Рисунок 1.1.5.4) хорошо видны осцилляции второй моды колебаний сфероидально вытянутой формы равновесной поверхности капли, характерной для капель, помещённых во внешнее поле, меньшее критического по Тейлору. Авторы отмечают, что с увеличением внешнего поля величина деформации также увеличивается, а период осцилляций уменьшается.

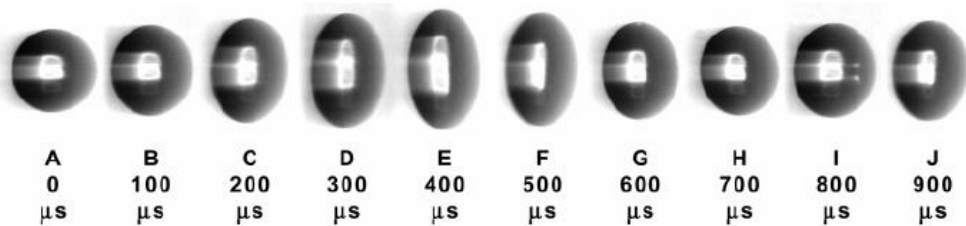


Рисунок 1.1.5.4 Осцилляции незаряженной капли в поле, величиной меньше критического значения по Тейлору. Диаметр капли - 225мкм, напряжённость поля – 2.00 МВ/м

При превышении величиной поля критического значения наблюдалось формирование характерных остроконечных выступов и эмиссия потоков микрокапель (Рисунок 1.1.4.5).

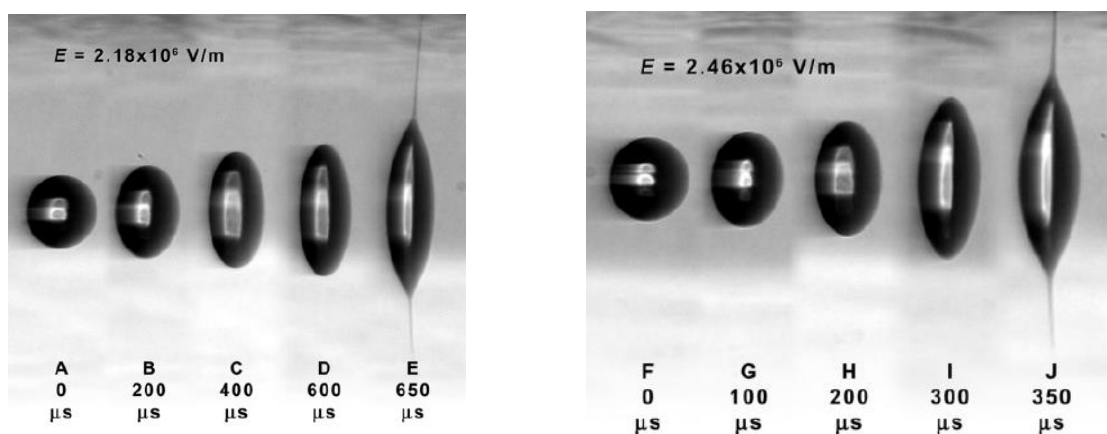


Рисунок 1.1.5.5 Распад незаряженной капли диаметром 225 мкм.

Увеличение поля по наблюдениям авторов приводило к существенному увеличению скорости формирования эмиссионных выступов.

Распад заряженных капель (Рисунок 1.1.5.6), в отличие от незаряженных происходил с одного конца, того, на котором находился индукционный заряд, совпадающий по знаку с собственным зарядом капли. Увеличение заряда так же приводило к уменьшению времени, необходимого для формирования эмиссионных конусов.

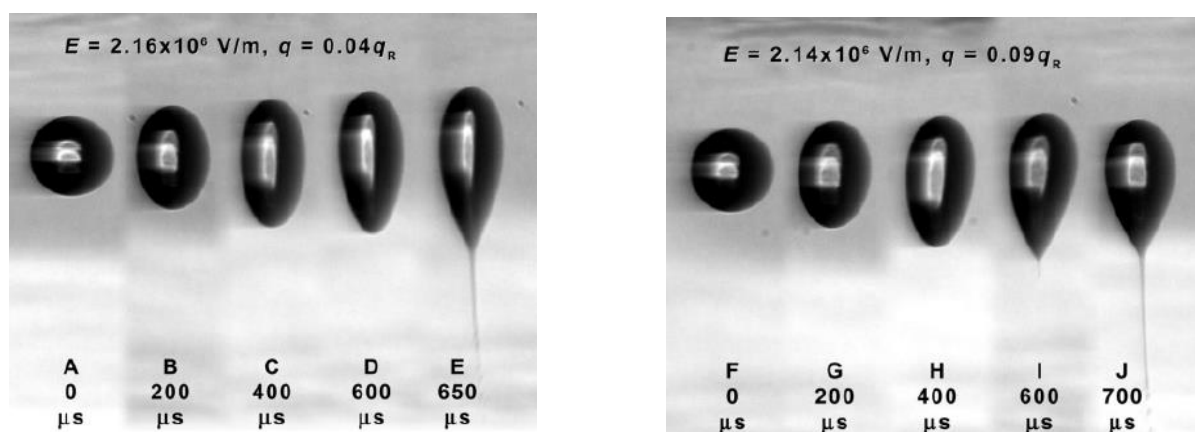


Рисунок 1.1.5.6 Распад заряженной капли диаметром 225 мкм.

При распаде капли с существенно закритической комбинацией величин собственного заряда капли и напряжённости поля (Рисунок 1.1.5.7) наблюдались последовательные эмиссии микроструек с противоположных концов капли (Рисунок 32, кадры 375-750 мкс), что свидетельствует о перезарядке капли.

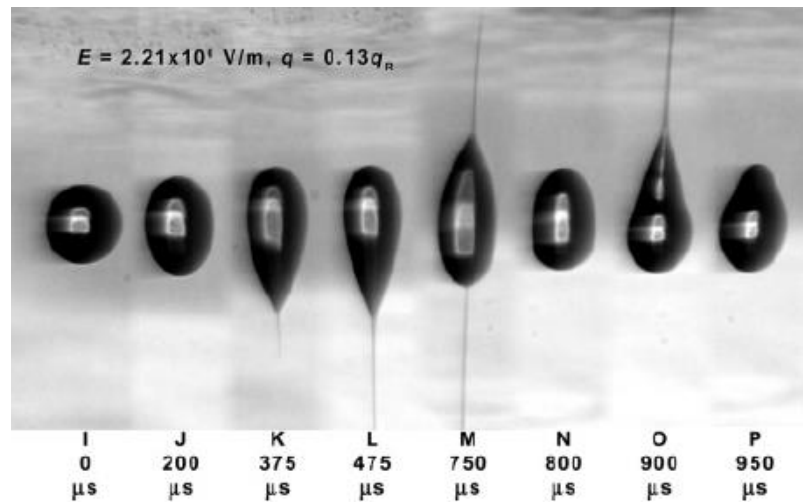


Рисунок 1.1.5.7 Распад высоко заряженной капли в сильном поле.

Можно предположить механизм данного явления, исходя из общефизических соображений. Заряженная капля претерпевает классический распад с образованием одного эмиссионного выступа (Рисунок 5, 375-475 мкс). Так как условия распада капли существенно превышают критические, скорость эмиссионного потока высока и по инерции происходит сброс не только собственного, но и индуцированного заряда капли. Это хорошо видно на нижнем конце капли (Рисунок 5, 750 мкс), где фактически отсутствует остроконечный выступ, но эмиссия продолжается. В этот момент времени капля уже имеет заряд обратного знака и образует эмиссионный выступ на верхнем конце. Повторная эмиссия (Рисунок 5, 900 мкс) связывается авторами в том числе и с наложением высокомодовых осцилляций поверхности, вызванных асимметричными потоками жидкости в теле капли.

Наблюдавшиеся авторами равновесные формы капель в однородном электростатическом поле и типы их распада качественно представлены на Рисунке 1.1.5.8. Для незаряженной капли характерна симметричная деформация (Рисунок 1.1.5.8, А) и распад с синхронным образованием двух конических эмиссионных выступов (Рисунок 1.1.5.8, В). Для заряженных капель характерна несимметричная яйцеподобная равновесная форма (Рисунок 1.1.5.8, С), и распад с образованием одного эмиссионного выступа (Рисунок 1.1.5.8, D), при полях,

меньших критического значения по Тейлору. При распадах заряженных капель в закритических по Тейлору полях (Рисунок 1.1.5.8, E) наблюдались также последовательные эмиссии с разных концов капли.

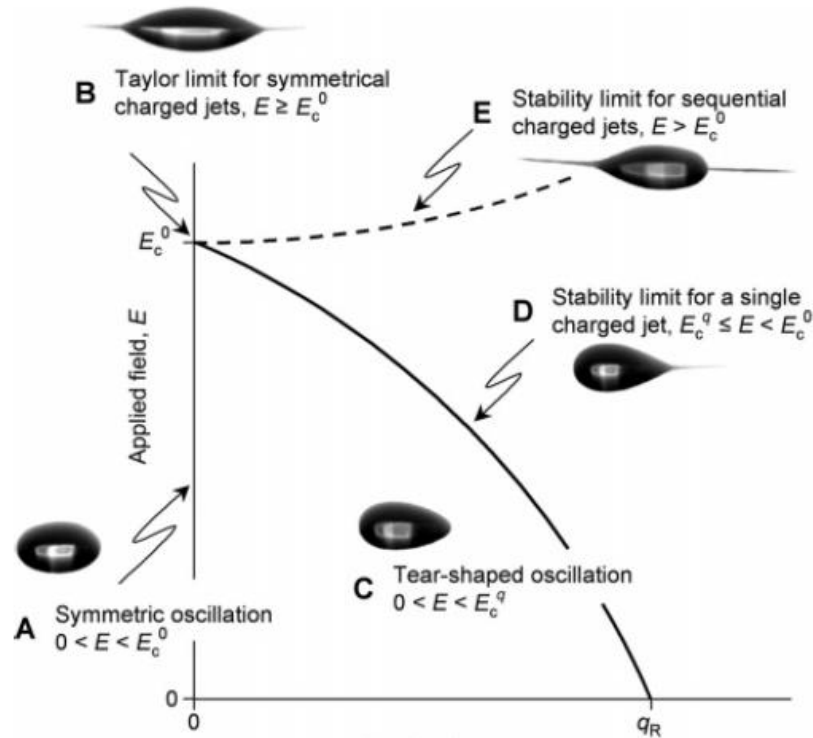


Рисунок 1.1.5.8 Качественная схема формы поверхности и типов распада капли.

Одной из новейших работ, включающих в себя попытку проверки критерия Рэлея является эксперимент Li [34], результаты которого опубликованы в 2005 году.

В экспериментах использовались совмещённые постоянное и переменное поле, создававшие электродинамический подвес. Установка поддерживалась при температуре 25 градусов Цельсия с помощью жидкостного охлаждения. В качестве среды использовался очищенный воздух, чтобы уменьшить влияние примесей на свойства капли.

Для определения размера капли использовался спектральный анализ рассеянного излучения известной длины волны λ . Величина внешнего поля по словам авторов составляет порядка 5% от величины поля, создаваемого собственным зарядом капли, а поэтому не учитывается в данной работе. Для

устранения проблемы, возникающей с неточностью определения коэффициента поверхностного натяжения жидкости критерий был упрощён с учётом условия электростатического подвеса, и сведён к условию $x^{3/2}/V_{dc} = const$, где $x = 2\pi R/\lambda$ - приведённый радиус капли, а V_{dc} - напряжение подвеса. Две величины, измерение которых представляло наибольшую сложность – коэффициента поверхностного натяжения жидкости и калибровочной константы неоднородного поля предполагаются постоянными и находятся в правой части уравнения. Результаты замеров данной величины (Рисунок 1.1.5.9) показывают достаточно хорошее согласование с теорией.

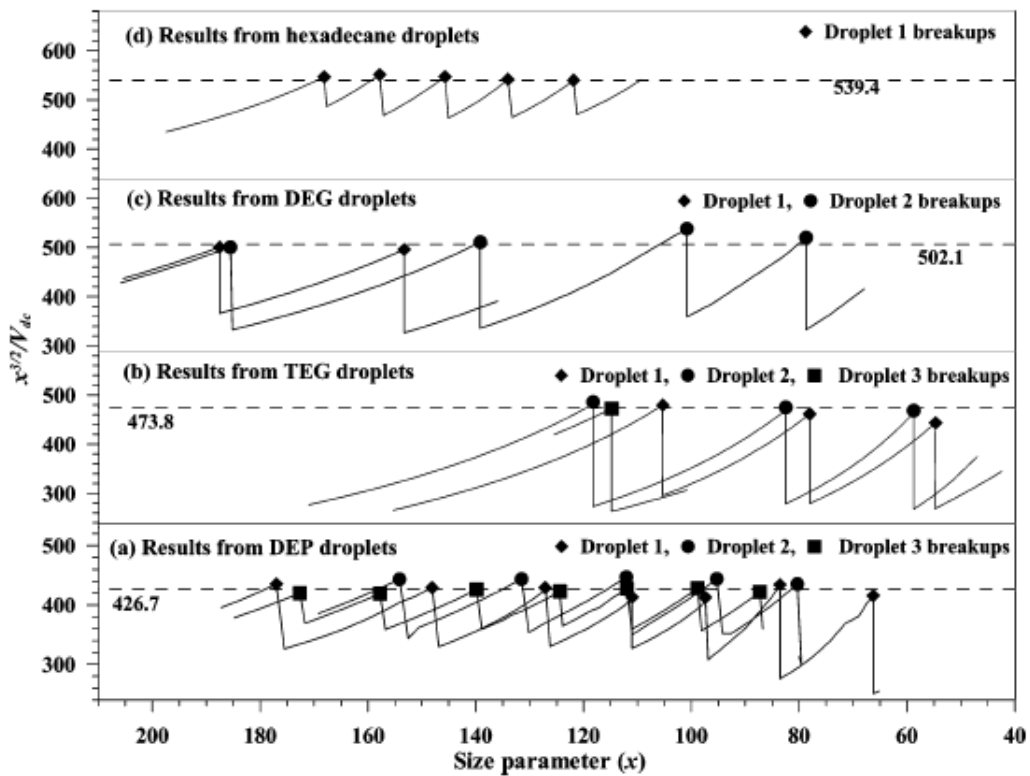


Рисунок 1.1.5.9 Результаты замеров

Для проверки критерия Рэлея напрямую были использованы данные из усреднённых значений замеров и экспериментально определённая калибровочная константа поля. Результаты расчётов (Таблица 1.1.5.1) показывают подтверждение критерия для всех рассматриваемых жидкостей с расхождением порядка 4%.

Table 2. Summary of Experimental Results on Droplet Breakup^a

compound	no. of breakups	observed charge limit as fraction of Rayleigh limit, $q_b^-/8\pi\sqrt{\epsilon_0\gamma(a_b^-)^3}$	% mass lost at breakup, $(\Delta m/m_b^-) \times 100$	% charge lost at breakup, $(\Delta q/q_b^-) \times 100$
diethyl phthalate	29	0.96 (± 0.06)	2.28 (± 0.45)	20.8 (± 4.9)
triethylene glycol	14	1.00 (± 0.05)	<0.03	41.1 (± 5.3)
diethylene glycol	8	1.04 (± 0.07)	<0.03	37.7 (± 2.0)
hexadecane	10	0.97 (± 0.06)	1.48 (± 0.37)	15.3 (± 2.3)

^a The parenthetical values indicate standard deviations.

Таблица 1.1.5.1 Результаты проверки критерия Рэля.

Однако из работы видно, что точность измерения только калибровочной константы составляет порядка 8% и данная погрешность не учитывается в приведённых результатах (Таблица 1.1.5.1). Авторы связывают возникающее расхождение с критерием Рэля с погрешностями в определении калибровочной константы для данной конфигурации неоднородного поля электродинамического подвеса и примесями в жидкости капли, влияющими на поверхностное натяжение.

Распад проводящих капель в диэлектрической среде исследовался Кагуарра и др. В работе 2014 года [43] рассматривалось влияние соотношения вязкостей среды и вещества проводящей незаряженной капли на её распад во внешнем однородном электрическом поле. Установка, состояла из источника постоянного напряжения, высокоскоростной камеры с оптическим стерео зумом, ванночки с двумя плоскими проводящими пластинами, заполненной касторовым или силиконовым маслом, оптоволоконной подсветки и компьютера.

Авторами утверждалось, что равновесная форма капли не зависит от отношения вязкостей капли и среды $\kappa = \mu_i / \mu_e$. Однако, то, как происходит распад капли при превышении величиной внешнего электростатического поля критического значения сильно зависело от κ . Авторами выделялись три характерные формы поверхности капли перед распадом (Рисунок 1.1.5.10, а) и соответствующие режимы распада (Рисунок 1.1.5.10, б). Разделение на режимы не имеет чётких границ и поэтому можно считать его условным, т.к. режимы плавно перетекают друг в друга при изменении параметров эксперимента.

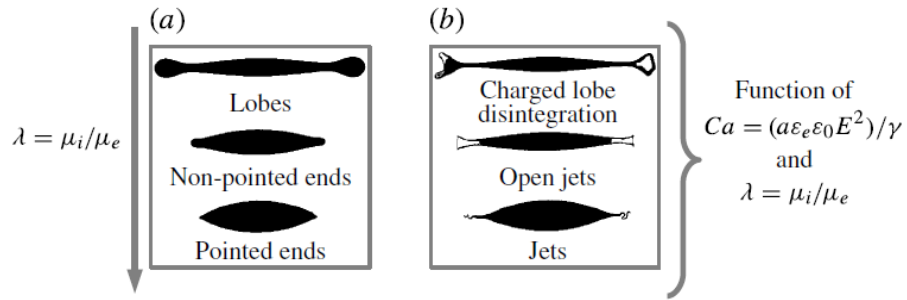


Рисунок 1.1.5.10 Типы форм поверхности капли

При $0.001 < \kappa < 0.1$ как правило, наблюдались гантелевидные формы поверхности капли, характеризовавшиеся формированием двух шарообразных выступов на концах капли. Капли такой формы распадались путём развала выступов на мелкие капельки. При $0.1 < \kappa < 0.5$ капли преимущественно формировали ненаправленные (округлые) выступы, которые при распаде создавали широкие открытые потоки жидкости. С дальнейшим увеличением отношения вязкостей $0.5 < \kappa < 2$ на концах капли преобладали острые конические выступы, из которых при распаде эмитировались струи, распадавшиеся вследствие изгибной неустойчивости.

Также авторами было проведено численное моделирование форм поверхности капли, предшествующих распаду (Рисунок 1.1.5.11).

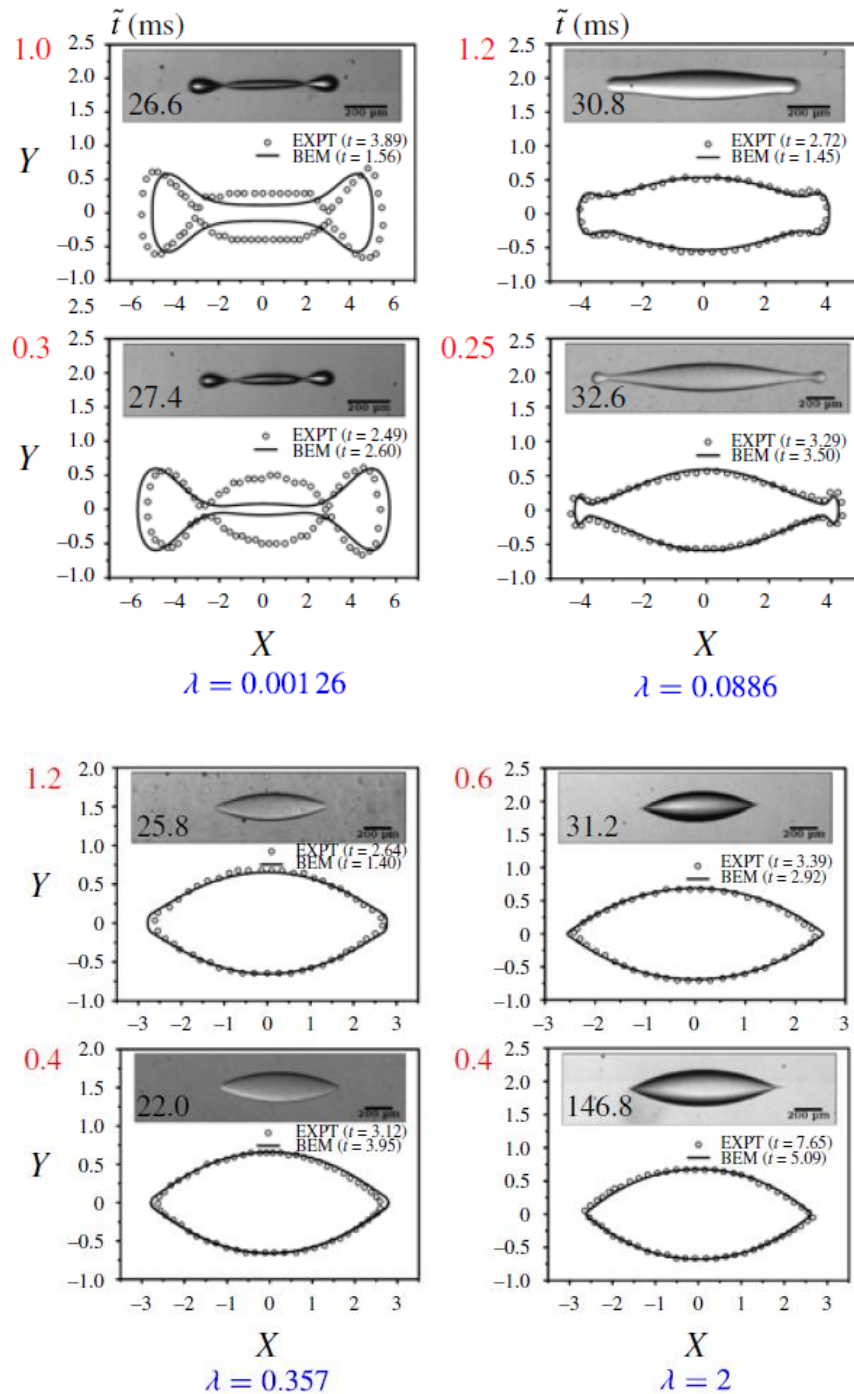


Рисунок 1.1.5.11 Численное моделирование формы поверхности капли

Моделирование проводилось методом граничных элементов (BEM) и показывало хорошее согласование с экспериментом в большинстве случаев. Процесс распада капли модельно не исследовался, авторы ограничились численным анализом поля скоростей на концах капли в момент времени, предшествующий распаду.

Рассматривая подробнее распад капли гантелевидной формы, можно заметить, что неустойчивость развивается на выступах шарообразных формы на концах капли (Рисунок 1.1.5.10, “lobes”). Можно предположить, что внешнее электрическое поле создаёт на данных выступах (Рисунок 1.1.5.12) высокую поверхностную плотность поляризационного заряда, и механизм распада данного образования сходен с распадом высокозаряженной капли в вязкой среде.

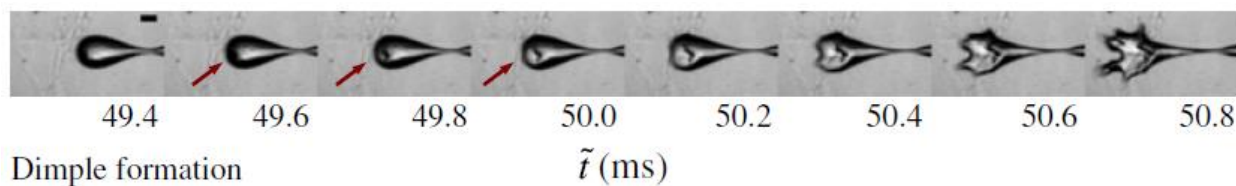


Рисунок 1.1.5.12 Распад формирования на конце капли (“lobe”)

Из детальных фотографий распада (Рисунок 1.1.5.12) видно, что резко образуется большое число эмиссионных выступов, которые и приводят к развалу поверхности капли. Образование такого рода выступов можно объяснить, как одновременное резкое нарастание амплитуд целого спектра неустойчивых мод осцилляций поверхности капли.

Одной из работ, наглядно показывающей особенности поведения групп заряженных капель во внешнем поле является работа Karyappa et. al., опубликованная в 2015 году [44]. В работе исследуются механизмы электроэмульсификации капель воды, взвешенных в масле, под воздействием внешнего однородного электрического поля, и характер получающейся в результате мелкодисперсной эмульсии.

Экспериментальная установка полностью аналогична использованной в работе Karyappa, 2014 [43], однако в кювету помещается не отдельная капля, а заливается водно-масляная эмульсия, полученная механическим перемешиванием жидкостей. Плотности среды и капли так же были подобраны как можно более близкими, благодаря чему влияние силы тяжести и выталкивающей силы практически полностью взаимокompенсировались. Капли оставались практически

неподвижны в среде, т.к. характерные времена смещения капель на расстояния порядка их собственных размеров были порядка 30-40с, а характерное время распада – порядка 60 миллисекунд. По мере увеличения напряжённости внешнего поля и длительности его воздействия за счёт распадов капель получалась всё более мелкодисперсная эмульсия до тех пор, пока невозможно было наблюдать отдельные капли. Как видно из фотографий (Рисунок 1.1.5.13). наблюдались также устойчивые осцилляции основной, второй моды колебаний (а) с периодом колебаний 14 мс (b).

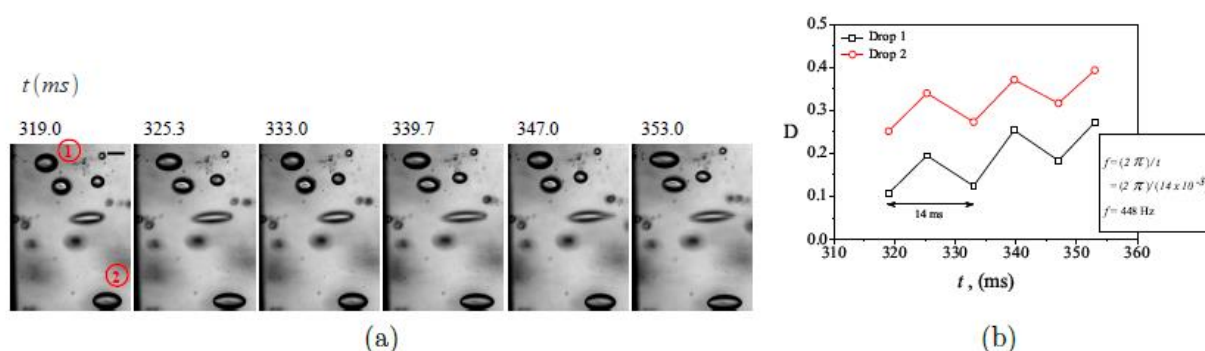


Рисунок 1.1.5.13 Устойчивые осцилляции капель: (а) – фотографии осцилляций двух помеченных маркерами капель, (b) – графики рассчитанных по фотографиям тейлоровских степеней деформации.

В работе представлены фотографии нескольких механизмов распада капель: распад нейтрально заряженных капель гантелеобразной формы, подробно рассмотренный в работе Кагуарра 2014 года [43]; рэлеевский распад заряженных капель во внешнем поле с формированием острого эмиссионного выступа и распадающейся струи высоко заряженной жидкости. Также наблюдался механизм распада с формированием на конце капли электроспрея – полидисперсного факела распыления. На экспериментальных фотографиях (Рисунок 1.1.5.14), видна пара капель, которые вытягиваются, принимая гантелеобразную форму, характерную для незаряженных капель в однородном поле.

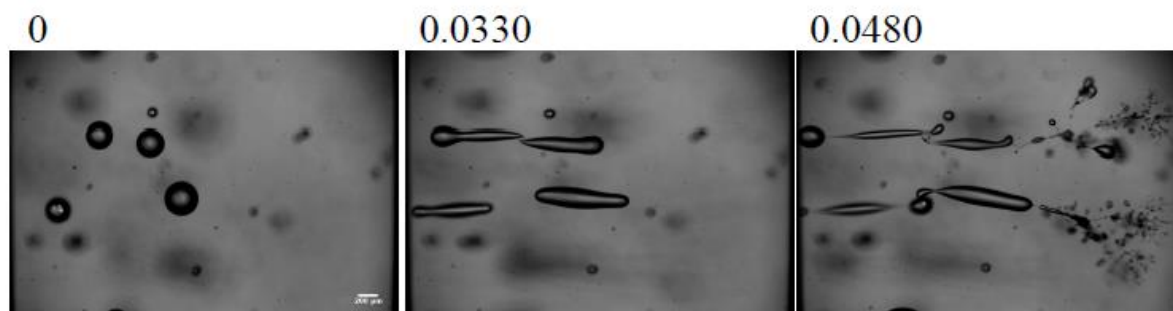


Рисунок 1.1.5.14 Распад близкорасположенных капель.

На концах капель, направленных друг к другу, образуются острые выступы, что, по-видимому, является результатом взаимодействия зарядов капель, вносящих искажение во внешнее по отношению к каплям однородное поле. Это приводит к тому, что распад на противоположных концах одной и той же капли может происходить по-разному, в зависимости от локальных условий в их окрестности. При этом условия распада концов взаимодействующих капель, находящихся на противоположных сторонах, тоже различаются. От левой капли отрывается шарообразный выступ, образуя устойчивую (с докритическим зарядом) дочернюю каплю. От правой капли аналогичный выступ отрывается и формирует каплю, несущую закритический заряд, вследствие чего последняя сразу же разрывается на серию дочерних капелек. Из представленных результатов эксперимента можно сделать вывод, что распад капли в облаке нельзя описывать только распадом в однородном поле, т.к. электрическое взаимодействие соседних капель между собой существенно меняет локальные условия распада. Разделение на типы распадов весьма условно, т.к., как отмечено выше, разные механизмы распада могут реализовываться одновременно на разных концах одной и той же капли.

Как следует из работ [43,44] критические условия реализации распада поверхности капли не зависят от вязкостей среды и капли.

1.1.6. Исследования капель в неоднородных полях

Наиболее интересным направлением, на мой взгляд, является поведение капель в неоднородных полях, которому в настоящее время посвящено не так много работ [45-47].

В 2010 году была опубликована экспериментальная работа О.В. Kim и Р.Ф. Dunn [46] в которой изучались капли, свободно падающие в неоднородном электрическом поле, а также заряды и размеры микрокапелек, диспергируемых при распаде материнских капель.

Установка состояла из размещённых на оптическом столе электродов в форме иглы и пластины, создающих неоднородное поле. Капли создавались размещённым над электродами резервуаром с заземлённой капельницей. Размеры, форма и характер движения капель фиксировались высокоскоростной камерой и лазерным доплеровским анемометром. Заряд диспергируемых капелек регистрировался электрометром, подключенным к электроду в форме пластины.

Авторами получены фотографии (Рисунок 1.1.6.1, Рисунок 1.1.6.2) капель диаметром 2.21 мм, падающих в полях с напряжением 0-50 кВ при расстоянии между электродами в 8 см.

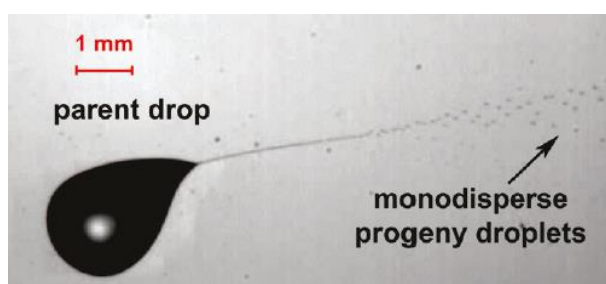


Рисунок 1.1.6.1 Распад капли



Рисунок 1.1.6.2 Фотографии свободно падающих капель

Как видно из фотографий, сделанных высокоскоростной съёмкой (Рисунок 1.1.6.1, Рисунок 1.1.6.2), капля распадается путём формирования эмиссионного выступа на одном конце. Причём в экспериментах выступ формировался на том конце капли, где величина внешнего неоднородного меньше. По словам авторов, это связано с тем, что в окрестности электрода-иглы создавался коронный разряд и происходила зарядка капли в поле, т.е. происходил распад уже заряженных капель (о чём свидетельствует смещение капель до распада, т.к. незаряженная капля должна втягиваться в область большей неоднородности поля). Эмиссионный выступ формировался с того конца, где суммарная локальная плотность заряда поверхности капли выше – суммировались собственный и поляризационный заряды. Влияние неоднородности поля в данном случае

оказывалось существенно меньше, т.к. характерные расстояния до конца иглы на порядок превышали радиус капли.

Развитие неустойчивости капли путём формирования эмиссионного выступа согласуется с экспериментами, проведёнными другими авторами ([5], [43]). Однако на представленных в данной работе фотографиях (Рисунок 1.1.6.2) эмиссионный выступ формируется только на одной стороне капли, а другая сторона капли сохраняет форму, близкую к сферической. По всей видимости это связано с малой величиной локальной плотности заряда поверхности капли на недеформированной стороне, что может быть следствием примерного равенства величин поверхностной плотности собственного и поляризационного зарядов капли.

Авторами работы был проведён численно-аналитический анализ подвижности получаемых при диспергировании микрокапель. Поле в окрестности потока микрокапель принималось величиной постоянной, гравитационной и инерционными силами пренебрегалось ввиду их незначительного вклада в баланс сил, который был сведён к балансу электрической силы взаимодействия собственного заряда капли с внешним электрическим полем и силы сопротивления среды. Сопоставление аналитических оценок с результатами экспериментальных измерений подвижности микрокапель, показал, что их собственный заряд пропорционален диаметру в степени $3/2$.

В 2013 году S.Mhatre и R.Thaoкар опубликовали работу [47], в которой исследовались формы и движение капель в диэлектрической жидкой среде под воздействием внешнего неоднородного электрического поля.

Экспериментальная установка состояла из кюветы с диэлектрической жидкостью, в которой располагались электроды конфигурации игла-пластина, создающие неоднородное поле.

Пластина была квадратом 15×15 см с закруглёнными краями, а расстояние между электродами составляло 2,6 мм. Кювета, в которую помещалась

исследуемая капля, подсвечивалась и наблюдалась с помощью высокоскоростной камеры с микроскопом, подключенной к компьютеру. Отсутствие собственного заряда на капле проверялось переключением полярностей на электродах и проверкой того, что капля в обоих случаях “притягивается” к электроду-игле. Однако, такой метод подтверждает лишь то, что сила взаимодействия собственного заряда с полем меньше силы взаимодействия поляризованного заряда с неоднородностью поля $Q \cdot E < \frac{\partial E}{\partial r} \cdot a \cdot \frac{E}{4\pi}$. Таким образом величина

собственного заряда не превышает величины порядка $Q < \frac{\partial E}{\partial r} \frac{a}{4\pi}$. Плотность

капли была немного выше плотности среды, поэтому требовалось создавать поле величиной выше некоторого критического значения, чтобы привести её в движение. По наблюдениям авторов неоднородность поля вызывает асимметричные деформации поверхности незаряженной капли. Как видно из фотографий (Рисунок 1.1.6.3) вблизи электрода в форме иглы, капля формировала острый выступ, направленный к электроду.

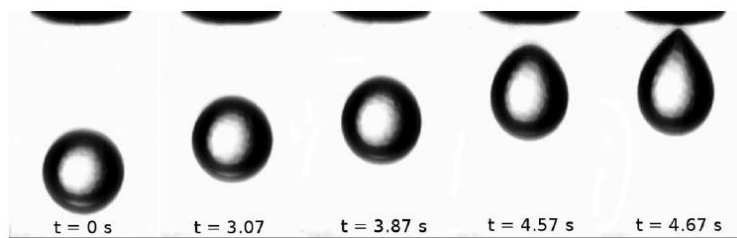


Рисунок 1.1.6.3 Фотографии капли в неоднородном электростатическом поле

Для сравнения с теоретическими результатами авторами была выбрана простейшая модель неоднородного поля $\Phi = -E_0 \left[r P_1(\cos \theta) + \Lambda r^2 P_2(\cos \theta) \right]$. Где

$E_0 = -\partial \varphi / \partial z$ - напряжённость, а $\Lambda = -\frac{1}{2} \partial^2 \varphi / \partial z^2$ - коэффициент, показывающий степень неоднородности поля в точке центра масс капли. Моделирование показало, что в условиях эксперимента вклад неоднородности поля в степень деформации поверхности капли находится в пределах 3-10%, увеличиваясь по

мере приближения капли к игольчатому электроду. В экспериментах с каплями воды в касторовом масле существенного влияния проводимости капли на её деформацию при $3 \cdot 10^7 < \frac{\sigma_m}{\sigma_d} < 5 \cdot 10^{10}$ не обнаружено, вероятно из-за того, что вода во всех рассматриваемых случаях оставалась хорошим проводником (σ_m , σ_d - проводимости среды и капли). Движение капли моделировалось, исходя из баланса силы тяжести и выталкивающей силы, действующих на каплю, а также силы сопротивления среды и силы диэлектрического взаимодействия капли с полем, записанных для сферической капли во внешнем квадрупольном поле. Сравнение с экспериментом (Рисунок 1.1.6.4) показало достаточно хорошее согласование даже таких грубых оценок.

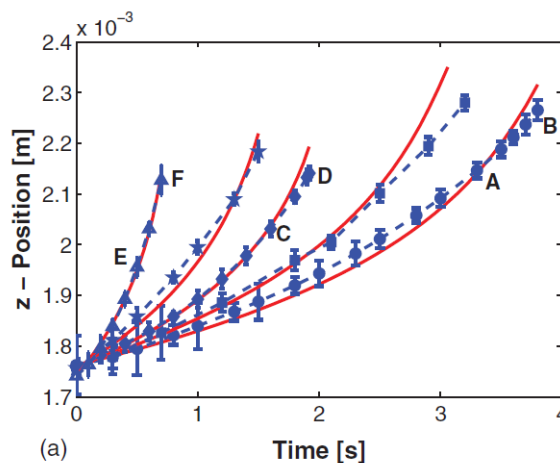


Рисунок 1.1.6.4 Графики смещения центра масс капли с течением времени. Сплошные линии соответствуют результатам моделирования, а пунктирные – экспериментальным замерам.

В работе также рассматривается отрицательный диэлектрофорез, когда капля силиконового масла движется в касторовом масле из области с большей напряжённостью. Это возможно при отрицательном значении фактора Клаузиуса-

Мозотти $K = \frac{\kappa_d - \kappa_m}{\kappa_d + 2\kappa_m}$, где κ_d и κ_m - электрические проницаемости капли и

среды соответственно. В случае положительного диэлектрофореза (капля касторового масла в силиконовом) наблюдался интересный эффект – капля масла, аналогично проводящей капле, приближалась к электроду, деформируясь, однако

в силу низкой проводимости не набирала заряда, достаточного для её отталкивания от электрода и оставалась на нём. При увеличении потенциала, подаваемого на электрод – жидкость формировала струю, распадавшуюся на микрокапли (Рисунок 1.1.6.5).

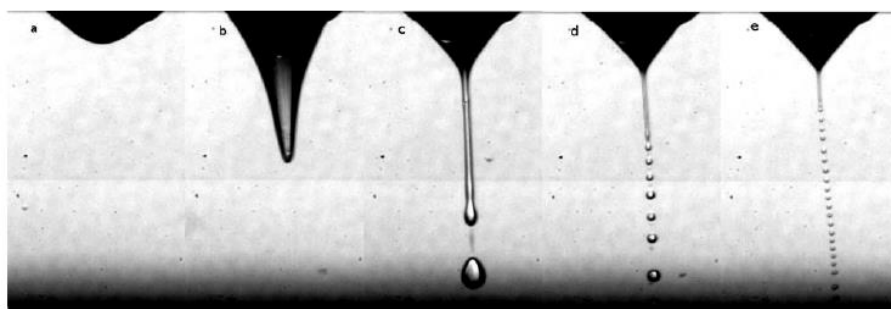


Рисунок 1.1.6.5 Фотографии электродиспергирования жидкости с электрода

В работе Mharte 2015 года [48] аналогичная установка была применена к исследованию поведения капель в переменном неоднородном поле. В целом, изучение взаимодействия и устойчивости проводящих капель в электрическом поле представляет практический интерес в связи с его использованием в жидкокапельной печати [40,50-51]. Отметим также смежное и более современное направление, касающиеся электрогидродинамики жидких капель – электроэмульсификация жидкостей, а также сопутствующее контролируемое перемещение капель посредством диэлектрофореза. По данной тематике опубликована работа S. Mhatre [49] а так же большое число работ других авторов [52-66] в которых проводятся эксперименты по производству и численные моделирования поведения таких капель. Подробнее останавливаться на работах из этого списка не будем, отметив лишь то, что они показывают высокий интерес к взаимодействию жидких капель с внешним электрическим полем и применимость таких исследований в медицинской и химических отраслях.

Другой областью, где используются проводящие капли и их взаимодействие с внешним электростатическим полем является металлургия, а именно жидкометаллические капли, чему посвящено немало экспериментальных работ

[64-70], к которым применяются гидродинамические методы описания капель [74-77].

Отметим также, что современные работы, исследующие капли в неоднородных электростатических полях [47, 78-82] полагаются на численное моделирование для интерпретации результатов эксперимента, ввиду недостаточной проработанности данной тематики теоретическими аналитическими методами.

Представленный обзор показывает, что тема исследования электростатической и электродинамической устойчивости капель не является принципиально новой, однако интерес к ней в научной среде стабилен в течение длительного времени. Основные методики анализа и теории устойчивости нашли своё подтверждение в многочисленных экспериментах. Развитие данной тематики продолжается и по настоящее время, в частности исследование совокупного влияния собственного и индуцированного заряда на распад капли. Множество современных работ не имеет подходящего теоретического обоснования и для сравнения своих результатов используют методы компьютерного моделирования.

1.2. Обзор теоретических подходов к анализу капель

1.2.1. Методика Рэля для анализа устойчивости заряженной капли

В 1882 году лорд Рэлей опубликовал работу [83], в которой рассмотрел устойчивость капли радиусом R и коэффициентом поверхностного натяжения σ , несущую собственный заряд Q по отношению к малому возмущению поверхности капли. В самой работе [83] подход описан очень кратко, суть метода Рэля состояла в решении уравнения Лагранжа с составлением Лагранжиана, для чего было задано малое возмущение сферической поверхности в виде бесконечного ряда Лапласа. В работе рассчитывалась потенциальная энергия зарядов на поверхности капли, потенциальная энергия капиллярных сил и кинетическая энергия движения частиц жидкости. Предположив, что компоненты возмущения пропорциональны стоячим волнам на поверхности капли $\sim \cos(\omega t + \varphi)$, Рэлей вывел соотношение для частот осцилляций ω . Отрицательные значения квадрата частоты интерпретировались как состояние неустойчивости поверхности капли. Из условия, разделяющего реальные и мнимые частоты автор теоретически вывел

условие устойчивости заряженной капли $\sigma = \frac{Q_{cr}^2}{16\pi\epsilon_0 R^3}$.

Позднее, в 1963 году Hendricks и Schneider [84] публикуют работу, в которой подробно описывают методику Рэля, описанную ранее [83]. Форма поверхности записывается в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$ с коэффициентами разложения a_n :

$$r = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad (1.2.1.1)$$

Все энергии, присутствующие в данной системе, рассчитываются и выражаются через коэффициенты разложения (1.2.1.1)

$$\text{Энергия капиллярных сил: } E_{\sigma} = 2\pi\sigma \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2) \frac{a_n^2}{2n+1}$$

$$\text{Электростатический потенциал: } E_E = - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{Q^2}{2R^3} \frac{a_n^2}{2n+1}$$

Кинетическая энергия движения частиц жидкости со скоростями U :

$$E_K = \iiint_V \rho v^2 dV = 2\pi R^3 \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_n^2}{n(2n+1)}$$

Записывается функция Лагранжа $L = E_K - E_{\sigma} - E_E$ и решается независимо от других при каждом n , так как как перекрёстные слагаемые в выражениях кинетической и потенциальной энергий отсутствуют.

$$L = 2\pi R^3 \rho \sum_n \frac{\dot{a}_n^2}{n(2n+1)} - 2\pi\gamma \sum_n \frac{(n-1)(n+2)}{2n+1} a_n^2 + \sum_n \frac{(n-1)}{2n+1} \frac{Q^2}{2R^2} a_n^2$$

Составляется уравнение Лагранжа $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_n} - \frac{\partial L}{\partial a_n} = 0$, где приводится к следующему виду:

$$2\pi R^3 \rho \frac{\ddot{a}_n}{n} + 2\pi\gamma(n-1)(n+2)a_n - (n-1) \frac{Q^2}{2R^2} a_n = 0$$

Авторы получают собственные частоты ω осцилляций n -й моды и формулируют критическое значение собственного заряда Q_{cr} на капле в виде:

$$\omega_n^2 = \frac{n(n-1)}{\rho R^3} \left[(n+2)\sigma - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right]$$

$$Q_{cr}^2 = 16\pi\epsilon_0 R^3 \sigma.$$

Здесь ε_0 - диэлектрическая постоянная, ρ - плотность жидкости.

Torza и др. в статье 1971 года [85] рассматривают осцилляции капли в однородном переменном поле. Авторы находят решение краевой задачи на потенциал поля вне капли, вычисляют давление электрических сил на поверхность капли. Из решения краевой задачи на гидродинамический потенциал определяется поле скоростей и компоненты гидродинамического давления. Полагая деформацию капли слабо сфероидальной в любой момент времени (т.е. деформация капли пропорциональна второму полиному Лежандра), авторы рассчитывают форму поверхности из баланса давлений электрических, капиллярных и гидродинамических сил.

Работа Morisson [86] расширила подход Рэлея на случай незаряженных вязких капель в однородном электростатическом поле. Форма поверхности капли представлялась в виде разложения по полиномам Лежандра. Далее рассчитывались потенциальная энергия капиллярных сил, кинетическая энергия течения жидкости, функция рассеяния энергии вязкостью жидкости, и решалось уравнение Лагранжа. Для учёта внешнего однородного поля решалась краевая задача на электрический потенциал в окрестности капли и рассчитывалась энергия электрического поля, которой была дополнена функция Лагранжа.

Многочисленные работы по проверке критерия устойчивости, полученного по методике Рэлея, подтвердили его справедливость и позволяют предположить применимость метода к задачам такого рода. Недостатком данного подхода можно считать рассмотрение сфероидальной формы поверхности, что существенно ограничивает его применимость к условиям экспериментов. Вторым недостатком подхода можно назвать существенный объём расчётов даже для простейшего случая.

1.2.2. Методика Тейлора для анализа устойчивости сфероидальной капли

В работах Taylor 1964 года [20] была предложена сфероидальная аппроксимация формы незаряженной капли в однородном поле, что соответствовало наблюдаемым в первых экспериментах по распаду капель и пузырей результатам. Форма капли исходного радиуса R предполагалась вытянутым сфероидом вращения с большой полуосью a и малой полуосью b . В самой работе Тейлора в балансе давлений на поверхности капли учитывались только капиллярное (с коэффициентом поверхностного натяжения σ), гидростатическое p и электрические давления E_A , E_B , на поверхности идеальной, идеально проводящей жидкости.

$$\begin{cases} 2ab^{-2}\sigma - p = E_A \\ \sigma(ab^{-2} - b^{-1}) - p = E_B \end{cases}$$

Представленная система уравнений решалась путём исключения из неё гидростатического давления и получения уравнения, связывающего степень деформации капли (величина a/b) и приведённую величину напряжённости внешнего поля $E/\sqrt{R\sigma}$. Величина поля, для которой не существовало равновесной деформации, трактовалась как критическая для наступления неустойчивости.

Метод, описанный Тейлором [20] был достаточно прост и хорошо описывал наблюдения [87-95], поэтому во многих последующих работах он расширялся учётом дополнительных эффектов.

В частности, в работе Abbas и Latham 1969 года [13] по определению критических значений величины внешнего однородного электростатического поля, необходимого для распада заряженной, свободно падающей капли теоретический подход был аналогичен подходу, использованному Taylor [20]. Форма

поверхности капли предполагалась сфероидально искажённой. В двух точках поверхности капли (Рисунок 1.2.2.1) – на одном из концов (верхнем или нижнем) и на экваторе, выписывался баланс давлений. В данной работе [13] в систему уравнений (1.2.2.1), входили условия баланса давлений, записанных для конца капли (Рисунок 1.2.2.1, точка А) и на её экваторе (Рисунок 1.2.2.1, Точка В).

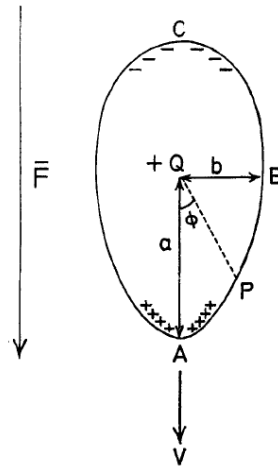


Рисунок 1.2.2.1 Постановка задачи

$$\begin{cases} 2ab^{-2}\sigma - p = E_A + g\rho(R_0 + a) - 0.5Dv^2 \\ \sigma(ab^{-2} - b^{-1}) - p = E_B + 0.5g\rho(R_0 + a) \end{cases} \quad (1.2.2.1)$$

В уравнения вошли давления: капиллярных сил с коэффициентом поверхностного натяжения σ , гидростатическое p , давление силы тяжести, электрических давлений E_A , E_B , создаваемых как внешним полем, так и собственным зарядом капли и давления аэродинамических сил для капли, падающей с постоянной скоростью v , в воздушной среде с коэффициентом сопротивления D .

Из данной системы уравнений путём исключения гидростатического давления получается уравнение, связывающее величину внешнего поля, заряда, деформацию капли и остальные параметры задачи. По полученному соотношению строилась зависимость отношения полуосей сфероиды от безразмерной величины поля. Критическим для распада капли значением поля

считалось такая его величина, для которой не существовало соответствующей равновесной деформации.

В работе 1970 года Dawson использует подход Taylor [20], Abbas и Latham [13], для анализа капли в электростатическом подвесе. Автор делает вывод, что несмотря, на то, что в экспериментальных условиях поля на поверхности капли, необходимые для её подвеса, существенно меньше напряжённостей, создаваемых собственным зарядом капли, эксперименты с электростатическим подвесом не могут быть использованы для прямой проверки критерия Рэлея.

Теоретический подход, в котором предполагалась сфероидально искажённая поверхность капли был использован и в работе Zrníc 1984 года [96]. В работе исследовалась заряженная капля радиуса a_0 и плотностью ρ , падающая через вертикальное однородное электрическое поле. Из уравнения для баланса давлений на экваторе капли $T(ba^{-2} + b^{-1}) = \frac{2T}{a_0} + \rho ga - \Delta p_i + p_e$, где T - коэффициент поверхностного натяжения, a и b - большая и малая полуоси сфероида соответственно, p_e - электрическое давление на поверхность капли, Δp_i - изменение внутреннего давления в капле под совокупным воздействием внешнего поля и заряда. Автор делает вывод, что величины полей, наблюдаемые в атмосфере будут оказывать незначительное влияние на деформацию капли, однако собственный заряд капли может существенно увеличить степень деформации до значений, поддающихся экспериментальному наблюдению.

Cheng, опубликовавший работу [97] об осцилляциях сфероидальной капли во внешнем поле, делает вывод, что влияние сфероидальности капли во внешнем поле существеннее изменения самой величины поля на её поверхности. сфероидальное приближение формы капли присутствует и в более ранних работах [98,99].

Резюмируя рассмотренные в этой главе работы, можно сказать, что методика Тейлора [20] применима к описанию незаряженных или слабо

заряженных капель [100-102], несмотря на попытки расширить её действие на капли, несущие существенный собственный заряд. Фотографии распадающихся заряженных капель показывают что их формы отличны от сфероидально вытянутой.

1.2.3. Решение уравнений движения жидкости

Подход к решению задач гидродинамики путём решения уравнений описывающих движение сплошных сред, дополненных системой граничных, начальных и других условий неоднократно применялся исследователями для различных задач. Для упрощения такой системы уравнений зачастую применяются асимптотические методы.

В частности, в работах Tsamopolus и др. [103-105] авторы используют методику Линдштедта-Пуанкаре для анализа системы уравнений, включающих в себя уравнение Лапласа и уравнение Бернулли на гидродинамический потенциал внутри капли с системой дополнительных условий. Авторы исследуют осцилляции мод колебаний сферической незаряженной [103] и заряженной [104] капли идеальной, невязкой жидкости. В работе [105] авторы исследуют поверхность капли, несущий околоскритический по величине заряд и проводят сравнения с результатами численного анализа методом конечных элементов.

В работе [104] система уравнений, описывающих заряженную каплю записывается в следующем виде:

Гидродинамическая задача на гидродинамический потенциал ψ :

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad 2p + \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right] = G(t)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad \Delta p_0 + 2p + \frac{1}{4\pi} (T_2^E - T_1^E) = -2H \int_0^\pi F^3(\theta, t) \sin \theta d\theta = 2.$$

Краевая задача на электрический потенциал V :

$$\nabla^2 V = 0, \quad V = 0, \quad -\mathbf{n} \cdot \nabla V = 4\pi q(\theta, t), \quad t \cdot \nabla V = 0$$

$$2\pi \int q F \left(F^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{1/2} \sin \theta d\theta = Q$$

Задача решается по методике Линдштедта-Пуанкаре, с использованием в качестве малого масштаба величину отклонения формы поверхности капли от сферической. Используя такой подход, авторы получили выражение для собственных частот осцилляций, совпадающее с Рэлеем, а также исследовали резонансное взаимодействие мод и перекачку энергии от одной моды к другой.

В работе 1990 года [106] Feng и Beard рассмотрели осцилляции поверхности капли идеальной жидкости с зарядом Q , находящейся в электростатическом подвесе. Был использован аналитический подход с многопараметрическими возмущениями. Авторы решали систему уравнений, включавшую в себя: краевые задачи на электрический потенциал вне капли и гидродинамический потенциал внутри неё, уравнение Навье-Стокса, а также интегральных условий сохранения заряда, объёма и неподвижности центра масс жидкости. Задача рассматривалась в сферических координатах (r, θ, φ) в осесимметричной по углу φ постановке. Постановка формулировалась в безразмерных единицах с характерными масштабами R - радиус капли, ρ - плотность жидкости, σ - коэффициент поверхностного натяжения, где

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad \nabla^2 V = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} < \infty, \quad V = -E_0 r \cos \theta;$$

$$p + \frac{\partial \psi}{\partial t} + B_0 r \cos \theta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \Delta p_0;$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad p + N_E = \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} \cdot \nabla V = 0;$$

$$-2\pi \int_0^\pi (\mathbf{n} \cdot \nabla V) \left(F^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{1/2} F \sin \theta d\theta = Q$$

$$\int_0^\pi F^3(\theta, t) \sin \theta d\theta = 2, \quad \int_0^\pi F^4(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0.$$

В приведённой постановке задачи ψ - гидродинамический потенциал, V - потенциал внешнего поля подвеса, F - функция, описывающая поверхность капли, \mathbf{n} - вектор нормали к поверхности капли, p - гидродинамическое давление внутри капли, N_E - давление электрических сил на её поверхности.

Авторами применялся метод возмущений, в котором величины в уравнениях раскладывались по двум малым параметрам - величине внешнего однородного поля ε_1 и амплитуде осцилляций капли ε_2 . Равновесная форма капли исследовалась до задачи порядка $\varepsilon_1^3 \varepsilon_2^0$, в которой получены основные свойства равновесной формы - её удлинение вдоль направления поля и нарушение симметричности формы из-за перераспределения заряда. Осцилляции капли исследовались в задаче, учитывающей слагаемые до $\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^1$. Авторами получено, что частоты осцилляций убывают с увеличением напряженности однородного поля (Рисунок 1.2.3.1).

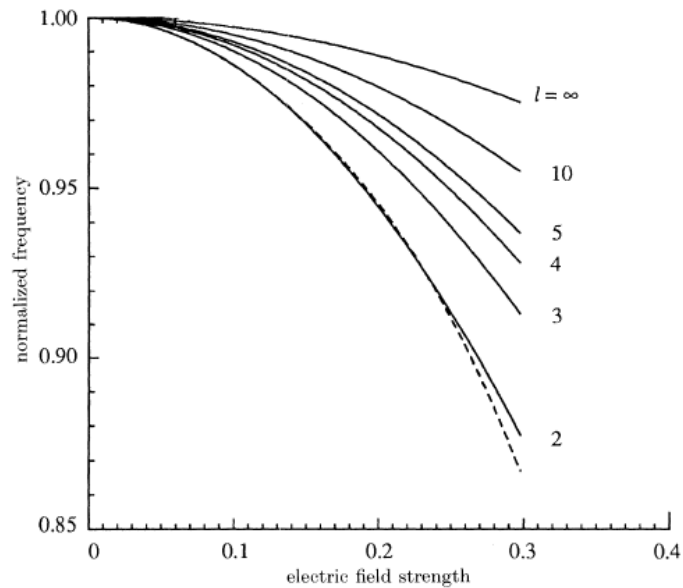


Рисунок 1.2.3.1 Зависимость относительной величины частоты осцилляций моды с номером l от безразмерной величины поля.

Сравнение (Таблица 1.2.3.1) результатов асимптотического подхода в этой работе с численными оценками других авторов [107], выполненных методом конечных элементов показывают хорошее согласование критического значения собственного заряда капли, особенно при малых величинах напряжённости внешнего поля.

Table 2. Comparison of critical values of Q and E_0 for the stability limit

E_0	Q	
	current result	finite element ^a
0.000	25.133($Q_c^{(2)}$)	25.998
0.025	24.941	25.273
0.050	24.721	24.549
0.100	24.201	23.150
0.150	23.586	21.125
0.200	22.889	19.099

^a Calculated by Adornato & Brown (1983).

Таблица 1.2.3.1. Сравнение результатов теоретического и численного анализа.

В более поздних работах [108, 109] аналогичный метод был применён к задаче о капле в потоке жидкости и о капле с конечной проводимостью в однородном поле. Асимптотические решения системы уравнений гидродинамики широко

используются и для исследования устойчивости заряженных капель и по настоящее время [110-113].

Из представленных работ видно, что уравнения гидродинамики поддаются решению в случаях использования асимптотического анализа, однако такой подход требует большого объёма вычислений и описывает лишь условия распада и малые отклонения поверхности капли от сферической.

1.2.4. Анализ поверхности капли в неоднородных полях

В работе Lee и Kang 1999 года [114] аналитически решается трёхмерная задача об осцилляциях поверхности пузыря в неоднородном поле. Авторы решали систему уравнений электрогидродинамики асимптотическим методом. Задача формулируется в безразмерных переменных, с характерными масштабами радиуса капли, плотности жидкости и коэффициента поверхностного натяжения.

Неоднородное поле рассматривается в самом грубом приближении

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}(0) + \mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}$$

Используется асимптотическое разложение величин в ряд по малому параметру W , характеризующее величину давления электрических сил по сравнению с давлением капиллярных сил.

$$W = \varepsilon E_0^2 R / \sigma$$

Из краевой задачи на потенциал поля в окрестности капли вычисляется напряжённость электрического поля у поверхности капли. Авторами рассчитываются: величина электрической силы, действующей на сферическую каплю, исходя из модели, описывающей реальные диэлектрики, но в пренебрежении величиной тока через поверхность капли. Из условия баланса сил

на поверхности капли рассчитана форма поверхности капли в неоднородном поле которая теряет зеркальную симметрию, по сравнению с каплей в однородном поле. Рассматриваются малые осцилляции поверхности капли в приближении идеально проводящего пузыря. Особенностью данной работы можно считать исследование трёхмерной постановки и отдельный анализ влияния однородной и неоднородной компонент поля на характер осцилляций капли.

В 2007 году была опубликована работа О.В. Kim и др. [43] в которой исследовался механизм перемещения жидкой капли в жидкой среде под действием кулоновских сил. Формы поверхности капли и её движение в неоднородном поле изучались аналитически с использованием метода возмущений.

Рассматривалась капля радиуса R вязкой, идеально проводящей жидкости с собственным зарядом величиной Q , помещённая в вязкую диэлектрическую жидкость с диэлектрической проницаемостью ε . Форма капли, задаваемая уравнением $r = F(\theta, t)$ и скорость её движения рассчитывались в линейном приближении по безразмерному параметру $W = \frac{\varepsilon E_0^2 R}{\sigma}$, где E_0 - величина однородной составляющей внешнего поля, а σ - коэффициент поверхностного натяжения капли. Это соответствует линейному приближению по деформации равновесной формы капли.

Неоднородное поле моделировалось приближённо в виде суперпозиции однородного поля и изменяющейся с расстоянием добавки согласно [114]

$$\mathbf{E}_\infty(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_0 + \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}.$$

Силой инерции ввиду малости размеров капли, пренебрегалось. Система уравнений включала в себя краевую задачу на электрический потенциал V в окрестности капли:

$$\nabla^2 V = 0, \quad \iint_S \gamma dS = - \iint_S \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} dS = Q$$

$$r \rightarrow \infty: V = V_\infty = -E_0 \cdot r - \frac{1}{2} r \cdot G \cdot r,$$

$$r = F(\theta, t): \quad -\varepsilon \mathbf{n} \cdot \nabla V = \gamma$$

и систему уравнений, описывающей потенциальные течения в среде и капле, а также гидродинамических условий на её поверхности:

$$\nabla u_{1,2} = 0, \quad -\nabla p_{1,2} + \mu_{1,2} \nabla^2 u_{1,2} = 0$$

$$r \rightarrow \infty: \quad u_1 = U$$

$$r = F(\theta, t): \quad u_{1,2} \cdot n = 0, \quad u_1 \cdot t = u_2 \cdot t, \quad \tau_1 = \tau_2$$

В приведённых уравнениях γ - поверхностная плотность заряда капли, S , \mathbf{n} \mathbf{t} - площадь поверхности капли и орты нормали и тангенциального направления к поверхности, $u_{1,2}$ - скорости течений, а $\tau_{1,2}$ - тензоры касательных гидродинамических напряжений в окружающей среде и капле, U - скорость течения внешней среды.

Равновесная форма поверхности определялась из условия баланса давлений на поверхности капли $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot T) - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot T) = \sigma \nabla \mathbf{n}$, где T - тензор напряжений, включавший как гидродинамические, так и электрические напряжения.

Авторами была рассчитана электрическая сила, действующая на поверхность сферической капли через тензор электрических напряжений Максвелла. Из баланса нормальных напряжений на поверхности возмущённой капли была определена равновесная форма капли, представленная в виде

разложений по полиномам Лежандра, и содержащая слагаемые до четвертого полинома включительно (Рисунок 1.2.4.1).

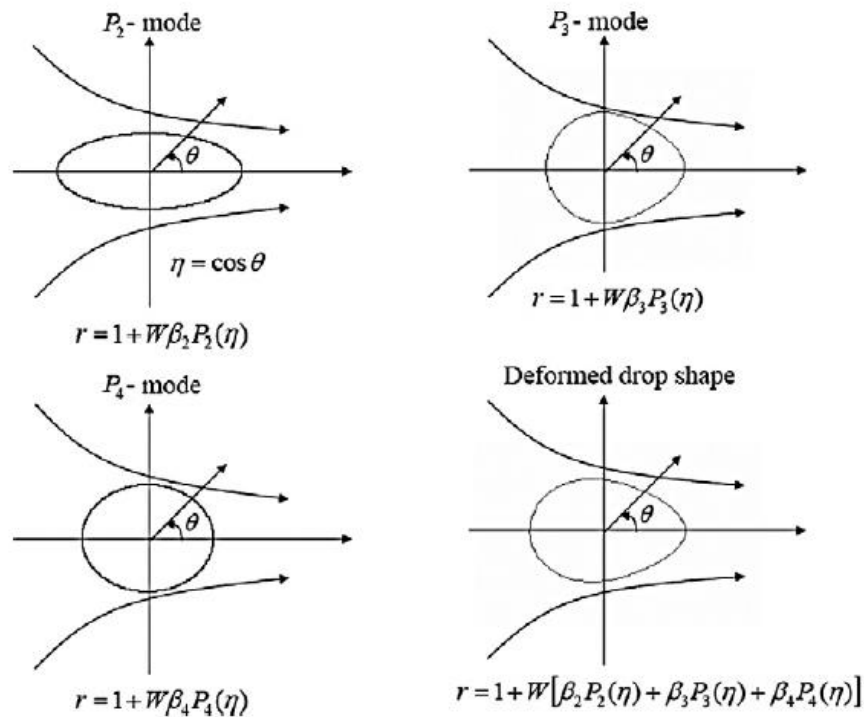


Рисунок 1.2.4.1 Равновесные формы капли в неоднородном электростатическом поле

В статье утверждается, что для однородного поля характерна деформация равновесной формы капли, определяемая второй модой. Неоднородность внешнего поля приводит к появлению в разложении для равновесной формы поверхности капли более высоких мод деформации (Рисунок 1.2.4.1).

Далее авторы учли изменение электрического потенциала, связанное с деформацией равновесной поверхности капли, т.е. из краевой задачи для потенциала на поверхности деформированной капли определялась поправка порядка W .

Раскладывая максвелловский тензор напряжений по порядкам параметра W , авторы вычислили линейную по W компоненту действующей на каплю электрической силы, обусловленную изменением поля и формы поверхности капли. Для того, чтобы определить влияние неоднородности поля и деформации капли на скорость движения капли авторами рассчитывалась сила сопротивления

среды. Для этого решается гидродинамическая задача о движении деформированной вязкой капли в вязкой жидкости. Рассмотрение также проводилось в линейном по деформации формы и параметру W приближении. Из баланса действующих на каплю электрической силы и силы сопротивления среды была найдена скорость перемещения капли в линейном по W приближении. Согласно полученным авторами статьи результатам скорость перемещения вытянутой капли тем больше, чем больше её деформация. Кроме того, скорость перемещения капли в область большей неоднородности поля превышает таковую при движении капли в обратном направлении.

В статье говорится, что влияние собственного заряда капли на её форму (в использованном авторами приближении) ограничивалось деформацией, пропорциональной второму полиному Лежандра P_2 . Эта деформация увеличивала силу электрического взаимодействия капли с полем при движении капли в область поля большей напряжённости, и уменьшала силу в случае её движения в сторону меньшего поля. Качественно это соответствует характеру наложения силы кулоновского взаимодействия поля с собственным зарядом капли и силы дипольного взаимодействия её поляризационного заряда с неоднородным полем. Деформация формы поверхности капли (а именно вторая мода деформации) оказывала также влияние на силу сопротивления среды, уменьшая её.

Авторами получено, что асимметричная мода деформации поверхности капли, пропорциональная P_3 , формировала выступ в направлении большей неоднородности поля.

Работа Ниа 2010 года [115] посвящена исследованию поведения капель проводящих жидкостей в неоднородном квадрупольном поле. Особенностью анализа в данной работе является учёт распределения заряда проводящей капли не по поверхности, а в тонком слое, а также учётом неоднородности поля в самой простой его форме.

В данной работе использовался подход, аналогичный описанному в работе [114], расчёт необходимых величин из динамического граничного условия на поверхности капли. Искомые величины раскладывались в ряд по малой величине напряжённости внешнего поля. В первой части работы авторы получили решение для формы поверхности сферической капли идеально проводящей жидкости в неоднородном поле, а во второй получили поправку, вызванную распределением заряда в приповерхностном слое жидкости конечной толщины. Авторы считают, что полученные ими поправки требуется учитывать при рассмотрении капель малого диаметра или участков капли с большой кривизной поверхности.

Подытоживая вышесказанное, стоит отметить, что в существенной доле современных работ, исследующих поведение капель в неоднородных полях используется анализ уравнений электрогидродинамики асимптотическими методами. Что неудивительно, так как методики Рэлея и Тейлора мало применимы к решению задач, в которых равновесная форма капли не является приближённо сферической или сфероидально вытянутой. Недостатком данного подхода является ограниченность применимости полученных решений для описания самого процесса распада капли. Для описания последнего применяются численные методы анализа.

1.2.5. Другие подходы к анализу устойчивости капель

В 2008 году опубликована работа Фонтелоса и др., [116] в которой проводился численный анализ формы поверхности капли вязкой идеально проводящей жидкости в вязкой диэлектрической среде во внешнем однородном электростатическом поле. В расчётах авторы использовали метод граничных элементов. Оценки проводились в безразмерных переменных, с тремя безразмерными параметрами: отношением вязкостей среды и вещества капли

$\kappa = \mu_i / \mu_e$, величиной зарядового параметра Рэлея X и безразмерной величины напряжённости внешнего поля $E_\infty = E_\infty \sqrt{\varepsilon_0 V^{1/3} / \gamma}$. Здесь ε_0 - диэлектрическая постоянная, V - объём капли, γ_0 - коэффициент поверхностного натяжения жидкости. При записи всех основных уравнений и формул авторы использовали международную систему единиц СИ. Сравнение проводилось с аналитическими результатами из работы Taylor [20] и экспериментами Grimm и Beauchamp [35].

Авторами получена кривая критических значений (Рисунок 1.2.5.1) напряжённости внешнего поля в координатах (X, E_∞) и расчётные формы поверхности капли в однородном поле. $X = Q^2 / 24\pi\gamma\varepsilon_0 V$ ($0 \leq X < 1$ для устойчивых капель) – величина Рэлеевского зарядового параметра. Отношение вязкости капли к веществу среды $\kappa = \mu_i / \mu_e = 2,5$.

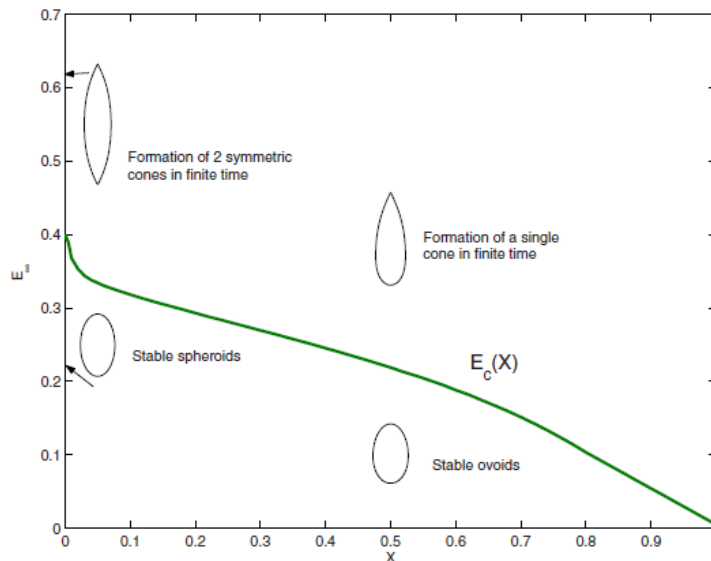


Рисунок 1.2.5.1 Зависимость критических значений напряжённости от зарядового параметра

Результаты численного моделирования предсказывали сфероидальную форму поверхности незаряженной капли в однородном поле, и формирование двух эмиссионных выступов при превышении критического значения величины поля. При наличии на капле существенного заряда равновесная поверхность капли принимала форму овоида (т.е. яйцеобразную), а при превышении

величиной поля критического значения на капле формировался один эмиссионный выступ.

Сравнения с результатами эксперимента [35] (Рисунок 37) показали, что моделирование хорошо согласуется с экспериментом, как в случае заряженной (Рисунок 1.2.5.2, слева) так и незаряженной (Рисунок 1.2.5.2, справа) капли.

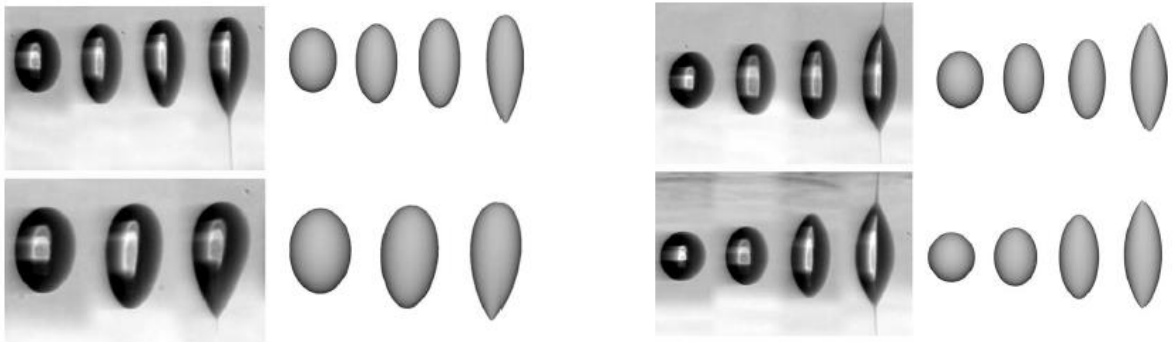


Рисунок 1.2.5.2 Сравнение результатов численного моделирования с экспериментом

На представленных фотографиях заряженной капли величина заряда составляет $Q = 0.04Q_{cr}$ (т.е. 0.04 от величины заряда, критической по Рэлею $Q_{cr} = \sqrt{24\pi\gamma\epsilon_0 V}$) для верхней пары изображений и $Q = 0.09Q_{cr}$ для нижней. Величины полей $E = E_{cr}$ и $E = 0.99E_{cr}$ соответственно, где E_{cr} - критическая по Тейлору величина поля (т.е. величина поля, приводящая к распаду незаряженной капли).

Для изображений незаряженной капли величины внешних полей $E = 1.01E_{cr}$ и $E = 1.14E_{cr}$ для верхней и нижней пары изображений соответственно.

Работа Levine [117] посвящена расширению критерия Рэлея для капли во внешнем поле. Автор совместил критерии неустойчивости капли – критерий Рэлея [1] $Q^2 > 4(n+2)\pi\sigma r^3$ и Тейлора [20] $E\sqrt{r/\sigma} = 1.63$, представив напряжённость поля в окрестности капли в виде суперпозиции напряжённостей заряженной сферы и незаряженной сферы во внешнем поле. Однако, в работе Рэлея предполагалась сферическая форма капли в околоскритическом состоянии, а

в работе Тейлора – сфероидально искажённая. Критерий (1), полученный в данной работе, для соответствия асимптотикам Тейлора и Рэлея корректировался введением масштабированной величины напряжённости поля $E^* = KE$ в предположении, что наименьшей неустойчивой модой всё так же будет являться вторая $n = 2$ мода.

$$(1.45E)^2 r^4 - \frac{16\pi\sigma}{9} r^3 + \frac{2}{3}(1.45E) Q r^2 + \frac{Q^2}{9} = 0 \quad (1.2.5.1)$$

Автором не предлагается методики получения коэффициентов $K = E^*/E$ и n для промежуточных ситуаций, однако он предполагает, что данный критерий, тем не менее, будет достаточно хорошо согласовываться с экспериментальными данными. На Рисунке 1.2.5.3 представлены асимптотики по Рэлею (горизонтальными линиями), асимптотика Тейлора (убывающей прямой) и линии, представленные уравнением (1.2.5.1), асимптотически стремящиеся к обоим критериям.

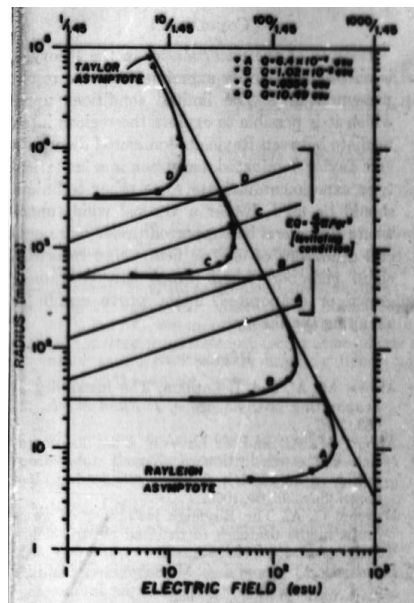


Рисунок 1.2.5.3 Численные построения зависимости (1.2.5.1)

Согласно полученной зависимости, капли, несущие фиксированный заряд, могут устойчиво существовать в электрическом поле только в случае, если их

радиусы лежат в определённом диапазоне, сужающемся по мере роста величины внешнего поля.

В 1989 году О.А. Basaran и L.E. Scriven опубликовали теоретические исследования устойчивости изолированных заряженных капель идеальной идеально проводящей жидкости различных осесимметричных форм [118]. Рассматриваются капли с $n=2,3,4,5$ выступами на поверхности. Формы поверхности капель задаются уравнением $r=f(\theta)$, где $f(\theta)$ - функция поверхности, а r - радиальная координата. Деформация капель задаётся в виде возмущения поверхности, пропорционального полиному Лежандра соответствующего порядка ($n=2,3,4,5$). Исследование проводится в безразмерных переменных в терминах отношения давления электрических сил к капиллярным $\Sigma = \frac{\varepsilon_0 \varphi_0^2}{2\sigma R}$, где ε_0 - диэлектрическая постоянная, φ_0 - потенциал на поверхности, σ и R - коэффициент поверхностного натяжения и радиус равновеликой сферической капли. Форма поверхности и потенциал в окрестности капли описываются уравнением Лапласа-Юнга (баланс давлений на поверхности капли) и уравнением Лапласа соответственно.

Анализ устойчивости поверхности проводился авторами численно, методом конечных элементов. Исследовались устойчивости различных форм поверхности капли, задаваемых искажением, пропорциональным n -й моде, при разных собственных зарядах капли. Основные результаты приведены на диаграмме бифуркаций на Рисунке 1.2.5.4, где показаны семейства капель в безразмерных координатах разницы гидродинамических давлений $K - K_0$ и поверхностного потенциала φ_s . Здесь $\varphi_s = \sqrt{\Sigma} = \varphi_0 \sqrt{\varepsilon_0 / 2\sigma R}$ - потенциал на поверхности капли; $K = (R / \sigma) \Delta p_0$ (Δp_0 - разность давлений в капле и среде), а K_0 - аналогичный параметр для сферической капли. Величина $K - K_0$ фактически характеризует степень деформации капли, а φ_s - величину её собственного заряда.

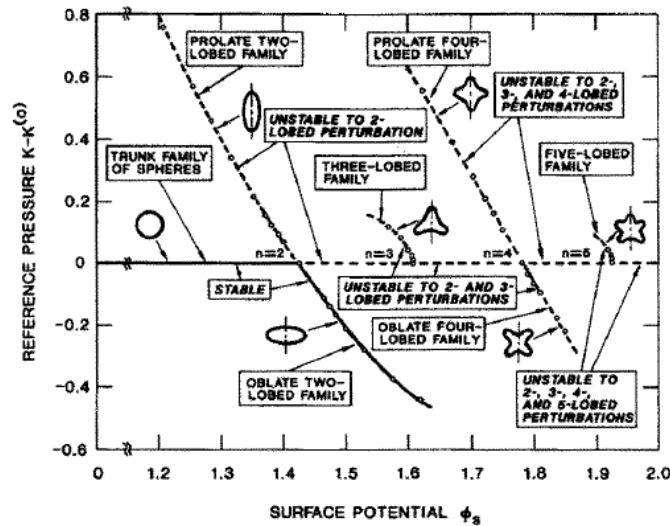


Рисунок 1.2.5.4. Бифуркационная диаграмма для заряженных капель. Линиями показаны равновесные состояния капель. Сплошные линии соответствуют устойчивому равновесию, а пунктирные – неустойчивому.

Авторами получены точки бифуркаций (в местах пересечения линий равновесия для семейств и линии для неискажённых сфер $K = K_0$) для семейств капель с n выступами, которые хорошо согласуются с теоретическими значениями $\Sigma = (n+2)/2$. Авторы утверждают, что изначальные искажения сферической поверхности, пропорциональные n -ому полиному Лежандра ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$) последовательно теряют устойчивость с ростом величины собственного заряда капли, а точка бифуркации капель с $n=2$ соответствует критерию Рэлея. Было получено, что, как правило, поверхности n -ого семейства неустойчивы к возмущениям мод с номерами до n включительно. Явное исключение составляют сплюснутые сфероиды, которые могут оставаться устойчивыми при зарядах, выше критического по Рэлею. Получено также, что сильно вытянутые сфероиды будут неустойчивы при зарядах, меньших критического по Рэлею. При зарядах выше критического неустойчивой будет сколь угодно малая начальная деформация сфероида.

Аналитическая работа Shrimpton [119] посвящена объяснению наблюдавшегося в экспериментах распада капель при собственных зарядах, составлявших 70-80% от критического по Рэлею значения. Поскольку во всех

анализируемых экспериментальных работах явно или неявно присутствовали внешние электрические поля, авторы провели оценки максимальной величины собственного заряда на капле с учётом наличия на её поверхности поляризационного заряда, индуцированного внешним полем.

Авторы полагают, что критерий Рэлея остаётся верным, однако критическое значение поверхностной плотности заряда определяется плотностями собственного и индуцированного зарядов. Плотность индуцированного заряда на поверхности заряженной диэлектрической сферы во внешнем однородном поле величиной E_0 записывается в виде:

$$\rho_i = \rho_f \left(\frac{\varepsilon_g - 1}{\varepsilon_g} \right) + 3E_0\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_d - \varepsilon_g}{\varepsilon_d + 2\varepsilon_g} \right) \cos\theta$$

Согласно предположениям авторов, собственный заряд капли равномерно распределён по её поверхности. Наложение индуцированного заряда увеличивает суммарную поверхностную плотность заряда с одного конца капли и уменьшает её с другого конца, что проиллюстрировано схематично на Рисунке 1.2.5.5. В качестве критической величины плотности поверхностного заряда, авторы используют максимальное её значение, формально вводя индуцированный заряд Q_i , как произведение максимальной плотности индуцированного заряда на площадь поверхности сферы.

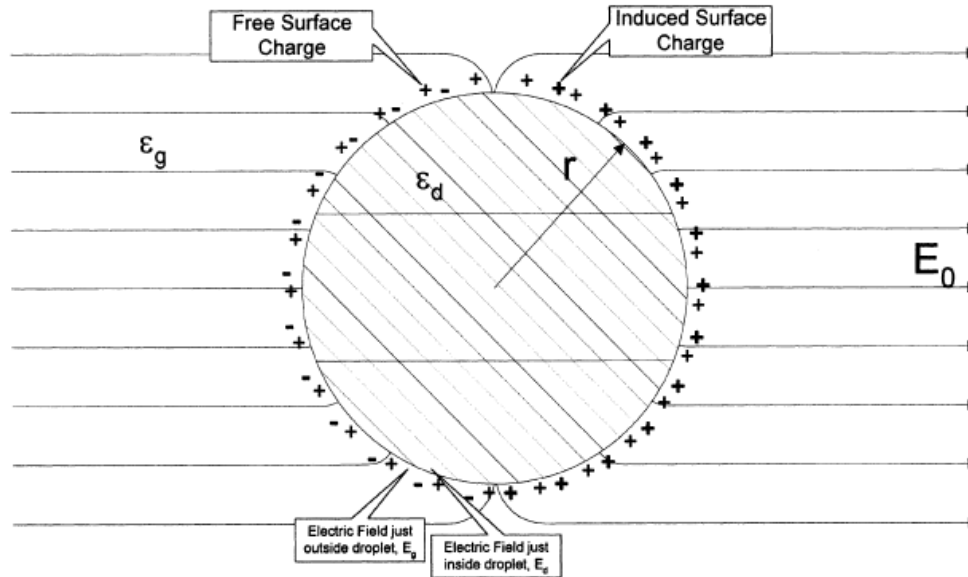


Рисунок 1.2.5.5 Собственные и индуцированные заряды на поверхности капли

Авторы утверждают, что критическая величина заряда в таком случае будет являться суперпозицией её свободного Q_f и индуцированного Q_i зарядов.

$$Q_{cr} = Q_f + Q_i$$

С учётом вышеупомянутого, формулируется максимальная величина собственного заряда диэлектрической капли во внешнем однородном поле.

$$\frac{Q_f}{Q_{cr}} = \left(\frac{\varepsilon_g}{2\varepsilon_g - 1} \right) \cdot \left(1 - \frac{3}{2} E_0 \sqrt{\frac{r \varepsilon_0}{\varepsilon_g \gamma} \left(\frac{\varepsilon_d - \varepsilon_g}{\varepsilon_d + 2\varepsilon_g} \right)} \right)$$

Результаты аналитических оценок представлены на Рисунке 1.2.5.6, из которых видно, что высокая диэлектрическая проницаемость вещества капли может существенно снижать максимальную величину собственного заряда капли во внешнем поле.

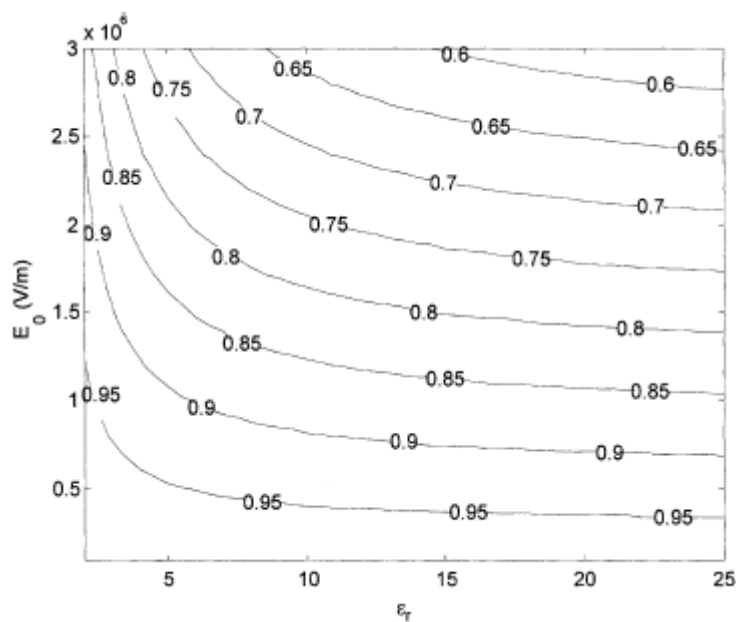


Рисунок 1.2.5.6 Зависимости относительной величины свободного заряда от величины внешнего поля E_0 и диэлектрической проницаемости капли ε_d , рассчитанные при

$$\gamma = 0.03 \text{ Н/м}, \quad \varepsilon_g = 1 \text{ и } r = 40 \text{ мкм}.$$

Стоит отметить, что сам процесс развития электростатической неустойчивости капли является очень сложным процессом, и поддается моделированию численными методами только на начальном этапе, как это было проделано в работах Кагуарра [43]. Отделение же дочерних капелек тяжело поддается даже численному моделированию описанию [120-121].

Из представленных в данном параграфе работ можно сделать вывод, что данные методики дают лишь качественный результат, либо повторяют выводы более точных подходов, рассмотренных в предыдущих главах.

Глава 2. Заряженная капля в полях простых конфигураций

2.1. Заряженная капля в однородном поле

Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из капли несжимаемой, невязкой и идеально проводящей жидкости плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ , находящейся во внешнем однородном электростатическом поле напряжённостью \vec{E}_0 . Исходно сферическая капля имеет радиус R , и несёт собственный заряд Q , распределённый по её поверхности. Рассмотрим капиллярные осцилляции и устойчивость поверхности такой капли.

Для рассмотрения задачи воспользуемся неинерциальной системой отсчёта в сферических координатах (r, θ, φ) с точкой начала отсчёта в центре масс движущейся капли. Ось, от которой отсчитывается угол θ , будем принимать проходящей через центр масс капли параллельно направлению поля, как показано на Рисунке 2.1.1.

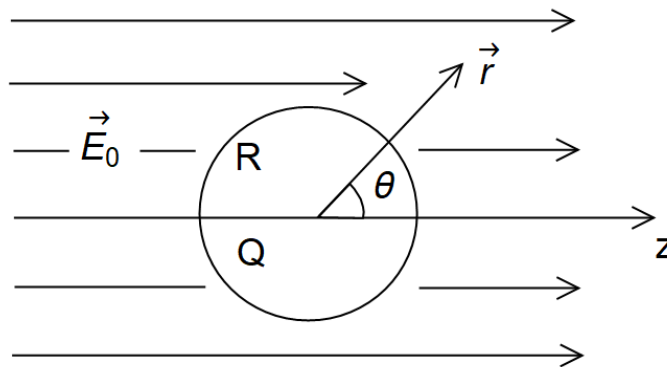


Рисунок 2.1.1 Введённая система координат

Ограничимся осесимметричной постановкой задачи, не рассматривая зависимость величин от угла φ . Такой подход позволяет значительно сократить объём вычислений, не отражаясь при этом на общности рассуждений. Величины,

описывающие систему, запишем в безразмерных переменных, выбрав в качестве характерных масштабов обезразмеривания исходный радиус капли R , плотность жидкости ρ , коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ : $R = \rho = \sigma = 1$.

Остальные величины будут выражены в долях своих характерных значений:

$$[V] = R^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}}; \quad [P] = \sigma R^{-1}; \quad [Q] = R^{\frac{3}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}}; \quad [t] = R^{\frac{3}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \sigma^{-\frac{1}{2}};$$

Форму поверхности капли представим в виде суперпозиции её равновесной формы $r = r(\theta)$ в однородном электростатическом поле и волнового возмущения $\xi(\theta, t)$ на её поверхности, задавая уравнение поверхности в виде:

$$F(r, \theta, t) \equiv r - r(\theta) - \xi(\theta, t) = 0;$$

Величину волнового возмущения будем полагать малой по сравнению с характерными размерами деформированной в электрическом поле капли.

$$\max |\xi(\theta, t)| \ll \min r(\theta)$$

Будем решать систему, состоящую из уравнений гидродинамики:

уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \mathbf{F}_{in};$$

уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0;$$

а также уравнений, определяющих электрическое поле в окрестности капли

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi.$$

Времена релаксации заряда капли будем полагать малыми в сравнении с характерными гидродинамическими временами.

Здесь \mathbf{V} и P - скорость движения и давление жидкости внутри капли соответственно; \mathbf{F}_{in} - объёмная сила инерции, которая возникает вследствие ускоренного движения центра масс заряженной капли в электрическом поле; \mathbf{E} - напряжённость электрического поля в окрестности капли. Потенциал Φ электрического поля является суперпозицией потенциала однородного поля Φ_{ex} , и потенциала Φ_d , создаваемого собственным зарядом капли:

$$\Phi = \Phi_{ex} + \Phi_d \quad \Phi_{ex} \equiv -E_0 r \mu; \quad \mu \equiv \cos\theta;$$

Задачу дополним системой условий в особых точках:

условием ограниченности скорости в центре масс капли

$$r = 0: \quad |\mathbf{V}| < \infty;$$

и условием убывания электрического поля, создаваемого каплей по мере удаления от неё:

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_d \rightarrow const$$

Аналогичное условие на компоненту потенциала $\Phi_{ex}(\mathbf{r})$ не формулируется, т.к. эта компонента известна и расчёта не требует.

Сформулируем систему граничных условий на возмущённой поверхности капли. Запишем кинематическое граничное условие и условие эквипотенциальности поверхности капли (как следствие идеальной проводимости жидкости):

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) F = 0; \quad \Phi = Const.$$

Динамическое граничное условие в случае идеальной жидкости запишем в виде баланса давлений на её поверхности:

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad P - P_{atm} + P_E = P_\sigma;$$

Здесь P_{atm} - давление внешней среды, а давление электрического поля на поверхность капли P_E и давление капиллярных сил P_σ выражаются формулами:

$$P_E = \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}; \quad P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n}.$$

где \mathbf{n} - орт нормали к возмущённой поверхности капли:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \Big|_{F=0} \quad F(r, \theta, t) \equiv r - r(\theta) - \xi(\theta, t);$$

Дополним задачу интегральными условиями сохранения объёма капли, неподвижности центра её масс, а также условием сохранения заряда капли:

$$\iiint_V dV = \frac{4}{3}\pi; \quad \{V : 0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$\iiint_V \mathbf{r} dV = 0; \quad \{V : 0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

$$\iint_S \kappa dS = Q; \quad \{S : r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

где поверхностная плотность заряда $\kappa \equiv (\mathbf{E}, \mathbf{n})/4\pi$.

Скаляризация задачи. В сформулированной выше задаче будут рассматриваться малые колебания $\xi(\theta, t)$ свободной поверхности капли и соответствующее им движение жидкости, поэтому целесообразным будет использование модели потенциального течения жидкости, в рамках которой поле скоростей \mathbf{V} определяется гидродинамическим потенциалом $\psi(r, \theta, t)$: $\mathbf{V} = \nabla \psi$. Переходя в сформулированной выше системе уравнений к электрическому $\Phi(r, \theta, t)$ и гидродинамическому $\psi(r, \theta, t)$ потенциалам, нетрудно получить краевую задачу в скаляризованном виде:

основные уравнения

$$\Delta\psi = 0; \quad \Delta\Phi = 0; \quad P = P_{st} + P_{in} - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2;$$

где P_{st} - гидростатическое давление жидкости в капле, а P_{in} - давление сил инерции;

условия в особых точках

$$r = 0: \quad |\nabla\psi| < \infty;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi \rightarrow const;$$

условия и выражения для величин на возмущённой поверхности капли

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad -\frac{\partial\xi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \left(-\frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial\theta} \right) \right) = 0;$$

$$\Phi = const; \quad P_0 + P_{in} - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - P_{atm} + P_E = P_\sigma;$$

$$P_E = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi}; \quad P_\sigma = \text{div}\mathbf{n};$$

$$\mathbf{n} = \left(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} [-r(\theta) - \xi(\theta, t)] \right) \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(-\frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial\theta} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}};$$

дополнительные интегральные условия

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)+\xi(\theta, t)} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)+\xi(\theta, t)} \mathbf{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 0;$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\nabla\Phi, \mathbf{n}) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = Q.$$

где \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ - орты сферической системы координат.

Для решения сформулированной задачи воспользуемся асимптотическими методами, для чего определим величины, являющиеся малыми параметрами задачи. Основной малой величиной будем считать безразмерную амплитуду волнового возмущения $\varepsilon \equiv \max(\xi(\theta, t)) \ll 1$ поверхности капли, вызванного тепловыми колебаниями поверхности. Как следствие, мала и безразмерная скорость течения жидкости, вызванного осцилляциями поверхности: $|\psi(r, \theta, t)| \sim |\xi(\theta, t)| \sim \varepsilon$. Ограничимся также рассмотрением небольших отклонений $h(\theta) \equiv r(\theta) - 1$ равновесной формы капли от сферической, полагая безразмерную величину $\eta \equiv \sqrt{\max|h(\theta)|} \ll 1$ одним из малых параметров задачи. Данный подход с введением нескольких малых величин сходен с методом, использованным в работах Feng и Beard 1990 года [27].

Для исследования устойчивости капли ограничимся первым порядком малости по амплитуде ε осцилляций поверхности, представляя искомые величины в виде сумм компонент нулевого и первого порядков и обозначая компоненты соответствующего порядка верхними индексами в круглых скобках:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + O(\xi^2); & P_E &= P_E^{(0)} + P_E^{(1)} + O(\xi^2); \\ P_\sigma &= P_\sigma^{(0)} + P_\sigma^{(1)} + O(\xi^2); & P &= P^{(0)} + P^{(1)} + O(\xi^2). \end{aligned}$$

Компонента потенциала Φ_{ex} имеет порядок ε^0 , и поэтому индекс над ней будет опускаться для краткости выражений.

Процедура линеаризации проводится стандартными методами, после которой формулируются две задачи: задача нулевого порядка, позволяющая определить равновесную форму поверхности и задача первого порядка для анализа устойчивости возмущённой поверхности.

Равновесная форма поверхности. Линеаризованная и скаляризованная задача нулевого порядка по ε состоит из следующего набора уравнений и условий:

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} &= \Phi_d^{(0)} + \Phi_{ex}; & \Delta\Phi_d^{(0)} &= 0 \\ r \rightarrow \infty: & & \Phi_d^{(0)} &\rightarrow Const \\ r = r(\theta): & & P_{st} + P_{in}^{(0)} - P_{atm} + P_E^{(0)} &= P_\sigma^{(0)}; & \Phi^{(0)} &= Const \\ & & P_E^{(0)} &= \frac{(\nabla\Phi^{(0)})^2}{8\pi}; & P_\sigma^{(0)} &= div\mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{n}_0 = \left(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial r(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.1.2)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta, t)} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi; \quad (2.1.3)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta, t)} \mathbf{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 0 \quad (2.1.4)$$

$$r = r(\theta): \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\mathbf{n}_0, \nabla\Phi^{(0)} \right) \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = -4\pi Q$$

Напомним, что искажение сферической поверхности $h(\theta) \equiv r(\theta) - 1$ предполагается малым и представим его в виде разложения по полиномам Лежандра. Тогда равновесная форма поверхности запишется в виде:

$$r(\theta) = 1 + h(\theta) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad (2.1.5)$$

Так как деформация поверхности капли вызывается давлением внешнего электрического поля $h(\theta) \sim P_E^{(0)} \sim E_0^2$, можно получить оценку на величину напряжённости поля в терминах введённого выше малого параметра η : $E_0 \sim h(\theta)^{1/2} \sim \eta$. В то же время, собственный заряд сферической капли в отсутствии внешнего электрического поля не приводит к изменению её

равновесной формы, поэтому положим, что $Q \sim \eta^0$. Из определения параметра η очевидно, что коэффициенты a_n разложения равновесной формы поверхности (2.1.5) будут иметь порядок $a_n \sim \eta^2$.

В силу рассмотрения малых искажений будем сохранять в задаче слагаемые до слагаемых порядка $\eta^2 = \max |h(\theta)|$.

Используя разложение для равновесной формы поверхности капли в условиях неподвижности центра масс (2.1.4) и сохранения объёма капли (2.1.3), получим, что $a_0 = 0$ и $a_1 = 0$, благодаря чему уточним выражение (2.1.5):

$$r(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad (2.1.6)$$

Для расчёта электростатического давления на поверхность капли необходимо получить потенциал $\Phi^{(0)} = \Phi_d^{(0)} + \Phi_{ex}$ в окрестности капли. Из краевой задачи на потенциал будем определять компоненту $\Phi_d^{(0)}$, поскольку компонента потенциала, обусловленная внешним однородным электрическим полем, известна $\Phi_{ex} \equiv -E_0 r \mu$ и удовлетворяет уравнению Лапласа.

$$\Delta \Phi_d^{(0)} = 0 \quad (2.1.7)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_d^{(0)} \rightarrow Const \quad (2.1.8)$$

$$r = r(\theta): \quad \Phi^{(0)} = Const \quad (2.1.9)$$

$$r = r(\theta): \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\mathbf{n}_0, \nabla \Phi^{(0)}) \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -4\pi Q \quad (2.1.10)$$

Уравнение Лапласа (2.1.7) на потенциал $\Phi_d^{(0)}$ решается методом разделения переменных и его решение, удовлетворяющее условию ограниченности потенциала при $r \rightarrow \infty$ (2.1.8) представимо в следующем виде:

$$\Phi_d^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) + const \quad (2.1.11)$$

Коэффициенты B_n определяются из условия эквипотенциальности поверхности капли (2.1.9). Для этого общее решение (2.1.11), краевое (2.1.9) и интегральное (2.1.10) условия разбиваются по порядкам η . Так как условие эквипотенциальности (2.1.9) должно выполняться при любом $\mu \equiv \cos \theta$ одновременно, будем приравнивать коэффициенты, стоящие при полиномах $P_n(\mu)$ одинакового порядка, что допустимо в силу линейной независимости полиномов Лежандра. Условие сохранения заряда (2.1.10) позволит уточнить значение константы интегрирования в общем решении (2.1.11). После решения краевой задачи выражение для электростатического потенциала в окрестности капли принимает вид:

$$\Phi^{(0)} = \frac{Q}{r} + E_0 \left(\frac{1}{r^2} - r \right) P_1(\mu) + \frac{Q}{r^3} a_2 P_2(\mu) \quad (2.1.12)$$

Далее рассчитаем давления на поверхности капли по формулам (2.1.1) с сохранением слагаемых до величины порядка η^2 включительно. Давление капиллярных сил с учётом выражений (2.1.6) и (2.1.2) для формы поверхности и нормали к ней запишется в виде:

$$P_{\sigma}^{(0)} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1)(n+2) P_n(\mu). \quad (2.1.13)$$

Электростатическое давление рассчитывается с учётом выражений (2.1.6), (2.1.12):

$$P_E^{(0)} = \frac{Q^2}{8\pi} + \frac{3E_0 Q}{4\pi} P_1(\mu) + \frac{3E_0^2}{8\pi} P_0(\mu) + \frac{6E_0^2}{8\pi} P_2(\mu) - \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} (2 - (n+1)) a_n P_n(\mu) \quad (2.1.14)$$

Силу инерции \mathbf{F}_{in} определим, как массовую силу, по величине равную силе, действующей на заряд величиной Q в однородном электростатическом поле

величиной E_0 . При интегрировании уравнения Эйлера предполагалось, что $\mathbf{F}_{in} \equiv F_{in} \cdot \mathbf{e}_z = \nabla P_{in}^0$, а F_{in} не зависит от конкретной точки пространства и является характеристикой введённой системы отсчёта. Таким образом, можно определить давление инерции $P_{in}^0 = F_{in} \cdot z = F_{in} \cdot r \cdot \mu$ на поверхности сферической $r = 1$ капли:

$$P_{in}^0 = F_{in} \cdot z = \frac{3Q}{4\pi}(-E_0\mu) = -\frac{3Q}{4\pi}E_0P_1(\mu) . \quad (2.1.15)$$

Учёт отклонения равновесной формы поверхности капли от сферической формы приведёт к появлению слагаемых порядка η^3 , не учитываемых в данном рассмотрении.

Баланс давлений на поверхности капли запишем с учётом решения уравнения Эйлера соответствующего порядка $P_{st} + P_{in}^0 - P_{atm} + P_E^{(0)} = P_\sigma^{(0)}$. Используя выражения (2.1.13), (2.1.14), (2.1.15) для давлений через амплитуды a_n равновесного искажения, получим выражение:

$$P_{st} + \left(-\frac{3Q}{4\pi}E_0P_1(\mu)\right) - P_{atm} + \frac{Q^2}{8\pi} + \frac{3E_0Q}{4\pi}P_1(\mu) + \frac{3E_0^2}{8\pi}P_0(\mu) + \frac{6E_0^2}{8\pi}P_2(\mu) -$$

$$-\frac{Q^2}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} (2 - (n+1))a_n P_n(\mu) = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1)(n+2)P_n(\mu)$$

Баланс давлений должен выполняться в любой точке поверхности капли (то есть при любом μ). Воспользуемся линейной независимостью полиномов Лежандра, благодаря чему можно разделить равенство на бесконечное число уравнений, каждое из которых содержит слагаемые, пропорциональные определённому полиному $P_n(\mu)$.

Слагаемые при полиноме нулевого порядка $P_0(\mu)$ определяют гидростатическое давление P_{st} внутри капли $P_{st} = 2 - \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{3E_0^2}{8\pi}$. При полиноме

$P_1(\mu)$ давление инерции (2.1.15) полностью компенсирует соответствующую компоненту электрического давления.

Форму равновесной поверхности капли определяют выражения для амплитуд a_n разложения (2.1.6) для значений $n \geq 2$:

$$a_2 = 3J; \quad n \geq 3: a_n = 0 \quad (2.1.16)$$

$$J \equiv \frac{w}{(1-W)}; \quad w \equiv \frac{E_0^2}{16\pi}; \quad W \equiv \frac{Q^2}{16\pi}.$$

где величина J - характеризует отклонение равновесной формы капли от сферической формы, и выражается через зарядовый параметр W и параметр w , характеризующий величину внешнего поля в окрестности капли.

Окончательное выражение для равновесной формы $r(\theta)$ поверхности капли (2.1.6) с учётом (2.1.16) запишется в виде:

$$r(\theta) = 1 + h(\theta) = 1 + 3J P_2(\mu). \quad (2.1.17)$$

Получение эволюционного уравнения. Перейдём к рассмотрению задачи первого порядка малости по параметру ε . Математическая постановка, полученная из исходной системы уравнений, состоит из уравнений Лапласа для гидродинамического и электрического потенциалов и условий ограниченности решений в особых точках:

$$\Delta \psi(r, \theta, t) = 0; \quad r \rightarrow 0: \quad |\nabla \psi(r, \theta, t)| < \infty; \quad (2.1.18)$$

$$\Delta \Phi^{(1)}(r, \theta, t) = 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0. \quad (2.1.19)$$

Уравнения дополняются системой граничных условий на поверхности капли: динамическим, кинематическим и условием эквипотенциальности поверхности капли

$$r = r(\theta): \quad P^{(1)} + P_E^{(1)} = P_\sigma^{(1)}; \quad (2.1.20)$$

$$-\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} = 0; \quad (2.1.21)$$

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) + \frac{\partial \Phi^{(0)}(r, \theta, t)}{\partial r} \xi(\theta, t) = \text{Const}; \quad (2.1.22)$$

Выражения для поправок первого порядка малости к гидродинамическому давлению, а также к давлениям электрического поля и капиллярных сил на поверхности капли запишутся в виде:

$$r = r(\theta): \quad P^{(1)} = \frac{3Q}{4\pi} E_0 \xi(\theta, t) \mu - \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial t}; \quad (2.1.23)$$

$$P_E^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{(\nabla \Phi^{(0)})^2}{8\pi} \right) \xi(\theta, t) + \frac{(\nabla \Phi^{(0)} \nabla \Phi^{(1)})}{4\pi}; \quad (2.1.24)$$

$$P_\sigma^{(1)} = 2 \left(-\xi(\theta, t) - 3 \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) + \Delta_\theta (-\xi(\theta, t) + 2\xi(\theta, t)h(\theta)); \quad (2.1.25)$$

$$\Delta_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right);$$

Задача дополняется интегральными условиями сохранения объёма капли, неподвижности центра её масс и сохранения заряда капли, которые в первом порядке малости по ε принимают вид:

$$\int_0^\pi r^2(\theta) \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0; \quad \int_0^\pi r^3(\theta) \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0; \quad (2.1.26)$$

$$r = r(\theta): \quad \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} 2\xi(\theta, t) + (2r(\theta) - 1) \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \xi(\theta, t) + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \xi(\theta, t) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right] \sin \theta d\theta = 0. \quad (2.1.27)$$

Решение уравнения Лапласа (2.1.18) для гидродинамического потенциала с учётом ограниченности скорости в центре капли запишем в виде:

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) r^n P_n(\mu). \quad (2.1.28)$$

Подставляя выражения для равновесной формы поверхности (2.1.17) и гидродинамического потенциала (2.1.28) в кинематическое граничное условие (2.1.21) определим координатную зависимость возмущения $\xi(\theta, t)$:

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\mu); \quad (2.1.29)$$

и выразим коэффициенты V_n разложения (2.1.28) через амплитуды возмущения $\alpha_n(t)$:

$$\begin{aligned} V_n(t) = & \frac{1}{n} \left(-3J \left((n-3)U_{2,n-2,n} - \frac{Y_{2,n-2,n}}{n-2} \right) \alpha'_{n-2}(t) + \right. \\ & \left. \left(1 - 3J \left((n-1)U_{2,n,n} - \frac{Y_{2,n,n}}{n} \right) \right) \alpha'_n(t) - \right. \\ & \left. -3J \left((n+1)U_{2,n+2,n} - \frac{Y_{2,n+2,n}}{2+n} \right) \alpha'_{n+2}(t) \right) \end{aligned}$$

$$U_{a,b,c} = \left(C_{a,0}^{c,0} \right)_{b,0}^2; \quad Y_{a,b,c} = -\sqrt{a(a+1)b(b+1)} \cdot C_{a,0}^{c,0} \cdot C_{a,-1}^{c,0} \cdot C_{b,0}^{c,0};$$

где $C_{l_1, m_1}^{l_2, m_2}$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Решение уравнения Лапласа для компоненты электрического потенциала первого порядка (2.1.19), удовлетворяющее условию убывания потенциала на бесконечности запишем в виде:

$$\Phi_d^{(1)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu) + Const \quad (2.1.30)$$

Решение (2.1.30) подставляется в условия (2.1.22) и (2.1.27) с учётом выражений для формы поверхности (2.1.17) и (2.1.29), откуда определяются коэффициенты $K_n(t)$. Процедура аналогична рассмотренной для компоненты потенциала $\Phi_d^{(0)}$. В результате получим выражение для потенциала в окрестности возмущённой поверхности капли:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-(n+1)} P_n(\mu) \cdot \left[Q\alpha_n(t) + 3E_0 \left(U_{1,-1+n,n} \alpha_{n-1}(t) + U_{1,1+n,n} \alpha_{n+1}(t) \right) + \right. \\ \left. + 3QJ \left(nU_{2,n-2,n} \alpha_{n-2}(t) + (2+n)U_{2,n,n} \alpha_n(t) + (4+n)U_{2,n+2,n} \alpha_{n+2}(t) \right) \right] \quad (2.1.31) \end{aligned}$$

Для того чтобы удовлетворить динамическому граничному условию (2.1.20), получим выражения для добавок первого порядка малости по ε к давлениям капиллярных сил $P_\sigma^{(1)}$ и электрического поля $P_E^{(1)}$ на возмущённой поверхности капли. Поправку $P_\sigma^{(1)}$ получим, подставляя (2.1.17) и (2.1.29) в выражение (2.1.25), и учитывая собственные значения оператора $\Delta_\theta P_n(\cos \theta) = -n(n+1)P_n(\cos \theta)$:

$$\begin{aligned} P_\sigma^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \left[3J(-8 - 2(-2+n)(-1+n))U_{2,n-2,n} \alpha_{n-2}(t) + \right. \\ \left. + ((-1+n)(2+n) + 3J(-8 - 2n(1+n)))U_{2,n,n} \alpha_n(t) + \right. \\ \left. + 3J(-8 - 2(2+n)(3+n))U_{2,n+2,n} \alpha_{n+2}(t) \right]. \quad (2.1.32) \end{aligned}$$

Выражение для поправки $P_E^{(1)}$ рассчитывается по формуле (2.1.24), с учётом выражений (2.1.12), (2.1.31) для компонент потенциала, и выражений (2.1.17), (2.1.29) для формы поверхности:

$$P_E^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu) \left(C_{-2}^E \alpha_{n-2}(t) + C_{-1}^E \alpha_{n-1}(t) + C_0^E \alpha_{n-2}(t) + C_1^E \alpha_{n+1}(t) + C_2^E \alpha_{n+2}(t) \right) \quad (2.1.33)$$

$$C_{-2}^E = w \left[36n U_{1,-2+n,-1+n} U_{1,-1+n,n} - 48U_{2,-2+n,n} + \frac{12W(-10U_{2,-2+n,n} + Y_{2,-2+n,n})}{1-W} \right]$$

$$C_{-1}^E = \frac{(-9+6n)QU_{1,-1+n,n}}{4\pi}$$

$$C_0^E = 4W(n-1) + w \left[36n U_{1,-1+n,n} U_{1,n,-1+n} + 36(2+n) U_{1,n,1+n} U_{1,1+n,n} - 48U_{2,n,n} + \frac{12W(2(-3+n)U_{2,n,n} + Y_{2,n,n})}{1-W} \right]$$

$$C_1^E = \frac{(-3+6n)QU_{1,1+n,n}}{4\pi}$$

$$C_2^E = w \left[36(2+n) U_{1,1+n,n} U_{1,2+n,1+n} - 48U_{2,2+n,n} + \frac{12W((6+4n)U_{2,2+n,n} + Y_{2,2+n,n})}{1-W} \right]$$

Выражение для поправки к гидродинамическому давлению $P^{(1)}$ рассчитывается по формуле (2.1.23) с учётом выражения для гидродинамического потенциала (2.1.28) и равновесной формы поверхности (2.1.17):

$$P^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3E_0Q}{4\pi} \left(\alpha_{-1+n}(t) U_{1,-1+n,n} + \alpha_{1+n}(t) U_{1,1+n,n} \right) P_n(\mu) + \quad (2.1.34)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} P_n(\mu) \left[3J \left(3U_{2,-2+n,n} + \frac{Y_{2,-2+n,n}}{-2+n} \right) \alpha_{n-2}''(t) + \alpha_n''(t) + \right.$$

$$+3J \left(U_{2,n,n} + \frac{Y_{2,n,n}}{n} \right) \alpha_n''(t) + 3J \left(-U_{2,2+n,n} - \frac{Y_{2,2+n,n}}{2+n} \right) \alpha_{2+n}''(t) \Big]$$

Запишем баланс давлений (2.1.20) с использованием выражений (2.1.32), (2.1.33), (2.1.34) для поправок к давлениям $P_\sigma^{(1)}$, $P_E^{(1)}$, $P^{(1)}$. Перенеся все слагаемые в левую часть, объединим их в общую сумму по n , после чего воспользуемся ортогональностью полиномов Лежандра и получим систему связанных дифференциальных уравнений второго порядка. Каждое из уравнений приводится к каноническому виду путём деления всего уравнения на коэффициент при $\alpha_n''(t)$, и представляется в следующем виде:

$$\alpha_n''(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) - \sum_{m \in M} \left(C_m^f(n) \alpha_{n+m}(t) + C_m^d(n) \alpha_{n+m}''(t) \right) = 0. \quad (2.1.35)$$

Здесь и далее в параграфе $M = \{-2, -1, 1, 2\}$ - приобретает смысл спектра мод, связанных с модой с номером n (что будет показано ниже), а ω_n - собственная частота колебаний этой моды:

$$\omega_n^2 = n(n-1)(2+n-4W) - wC_\omega; \quad (2.1.36)$$

$$C_\omega = \frac{3}{1-W} \left((-2+n+n^2+4W) Y_{2,n,n} + 8n - 8nW - 12n^2(1-W) U_{1,-1+n,n} U_{1,n,-1+n} - \right. \\ \left. - 12n(2+n)(1-W) U_{1,n,1+n} U_{1,1+n,n} - (-10n+3n^2+3n^3-8nW) U_{2,n,n} \right)$$

а $C_m^f(n)$, $C_m^d(n)$, - численные коэффициенты, выражения для которых приведены в Приложении. Заметим, что индексы n амплитуд $\alpha_n(t)$ не могут быть отрицательными, поэтому будем считать $\alpha_n(t) = 0$ при $n < 0$.

Выражение для собственных частот осцилляций (2.1.36) позволяет вычислить критерий неустойчивости колебаний поверхности. Критерий устойчивости осцилляций n -й моды определяется как вещественность

собственной частоты аналогично расчётам в работах Rayleigh [6], Hendrics [10]. Из условия $\omega_n^2_{cr} = 0$ легко получить выражение для критических значений полевого параметра w_{cr} .

$$w_{cr} = \frac{n(n-1)(2+n-4W)}{C_\omega}; \quad (2.1.37)$$

Общее решение эволюционного уравнения. Перейдём к рассмотрению амплитуд отдельных гармоник осцилляций поверхности. Следует отметить, что условия сохранения объёма капли и неподвижности её центра масс (2.1.26) определяют величины амплитуд нулевой и первой гармоник соответственно, которые несложно получить, подставляя в соответствующие интегральные условия выражения (2.1.17) и (2.1.29) для формы поверхности:

$$\alpha_0(t) = -\frac{6}{5} \frac{w}{1-W} \alpha_2(t);$$

$$\alpha_1(t) = -\frac{81w}{(35+126w-35W)} \alpha_3(t). \quad (2.1.38)$$

Так как амплитуды возмущений $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ определены, систему уравнений (2.1.35) следует решать для значений $n \geq 2$. Воспользуемся методом последовательных приближений, в нулевом приближении пренебрегая слагаемыми, отвечающими за взаимодействие мод. Система примет вид:

$$\frac{\partial^2 \alpha_n^0(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 \alpha_n^0(t) = 0, \quad (n \geq 2).$$

Решение этого гармонического уравнения представим в следующем виде:

$$\alpha_n^0(t) = A_n^+ \exp(i\omega_n t) + A_n^- \exp(-i\omega_n t); \quad (2.1.39)$$

где $A_n^\pm = const$.

В первом приближении в слагаемых, опущенных ранее, в качестве выражений для амплитуд используются решения нулевого приближения (2.1.39). В результате, амплитуды $\alpha_n(t)$ в первом приближении будут определяться системой уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \alpha_n(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 \alpha_n(t) - \\ & - \left(C_{-2}^f(n) - \omega_{n-2}^2 C_{-2}^d(n) \right) \left[A_{n-2}^+ \exp(i\omega_{n-2}t) + A_{n-2}^- \exp(-i\omega_{n-2}t) \right] - \\ & - \left(C_{-1}^f(n) - \omega_{n-1}^2 C_{-1}^d(n) \right) \left[A_{n-1}^+ \exp(i\omega_{n-1}t) + A_{n-1}^- \exp(-i\omega_{n-1}t) \right] - \\ & - \left(C_1^f(n) - \omega_{n+1}^2 C_1^d(n) \right) \left[A_{n+1}^+ \exp(i\omega_{n+1}t) + A_{n+1}^- \exp(-i\omega_{n+1}t) \right] - \\ & - \left(C_2^f(n) - \omega_{n+2}^2 C_2^d(n) \right) \left[A_{n+2}^+ \exp(i\omega_{n+2}t) + A_{n+2}^- \exp(-i\omega_{n+2}t) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

Полученное уравнение (2.1.40) является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка, общее решение которого ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Соответствующее однородное уравнение первого приближения так же является гармоническим, как и уравнение нулевого приближения, поэтому его решение можно записать в виде, аналогичном $\alpha_n^0(t)$ с такими же обозначениями коэффициентов:

$$\alpha_n^{(одн)}(t) = A_n^+ \exp(i\omega_n t) + A_n^- \exp(-i\omega_n t); \quad (2.1.41)$$

Частное решение неоднородного уравнения представим в виде суперпозиции экспонент, аналогичных экспонентам, входящим в функцию неоднородности:

$$\alpha_{n+m}^{(неодн)}(t) = B_{n,m}^+ \exp(i\omega_{n+m}t) + B_{n,m}^- \exp(-i\omega_{n+m}t); \quad (m \in M). \quad (2.1.42)$$

Подставляя общий вид амплитуды (2.1.42) в систему уравнений (2.1.40), определим выражения для коэффициентов $B_{n,m}^{\pm}$:

$$B_{n,m}^{\pm} = C_m^s(n)A_{n+m}^{\pm}; \quad C_m^s(n) = \frac{C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n)}{\omega_n^2 - \omega_{n+m}^2} \quad (2.1.43)$$

Исходя из физических соображений, очевидно, что амплитуды колебаний должны описываться вещественными функциями, поэтому можно записать $B_{n,m}^+ = (B_{n,m}^-)^*$, $A_n^+ = (A_n^-)^*$, где «*» обозначает комплексное сопряжение.

Выражение для $\alpha_n(t)$ запишем, как сумму однородного $\alpha_n^{(одн)}(t)$ и неоднородного $\alpha_n^{(неодн)}(t)$ решений, с учётом выражений для (2.1.41) и (2.1.42), соотношений (2.1.43) для коэффициентов $B_{n,m}^{\pm}$ и представляя комплексные коэффициенты A_n^{\pm} в виде: $A_n^{\pm} = v_n \exp(\pm ib_n)$, где v_n и b_n вещественные константы:

$$\alpha_n(t) = b_n \exp[i(\omega_n t + v_n)] + \sum_{m \in M} b_{n+m} \exp[i(\omega_{n+m} t + v_{n+m})] C_m^s(n) + к.с.; \quad (2.1.44)$$

Аббревиатура *к.с.* обозначает слагаемые, комплексно сопряжённые к выписанным. В решении (2.1.44) константы v_n и b_n определяются из начальных условий.

Решение с начальными условиями. Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени возбуждена единичная мода с номером k , с постоянной амплитудой ζ . При этом скорость движения поверхности в начальный момент примем равной нулю:

$$t = 0: \quad \alpha_n(t) = \zeta \delta_{n,k}; \quad \alpha'_n(t) = 0 \quad (n \geq 2). \quad (2.1.45)$$

Подставляя решение (2.1.44) в систему начальных условий (2.1.45), получим:

$$\begin{cases} v_n \cos(b_n) + \sum_{m \in M} v_{n+m} \cos(b_{n+m}) \cdot C_m^s(n) = \zeta \delta_{n,k} \\ v_n \omega_n \sin(b_n) + \sum_{m \in M} v_{n+m} \omega_{n+m} \sin(b_{n+m}) \cdot C_m^s(n) = 0 \end{cases} \quad (2.1.46)$$

Полученную систему связанных алгебраических уравнений (2.1.46) будем решать методом последовательных приближений, аналогичным применённому выше для системы эволюционных уравнений (2.1.35). В нулевом приближении пренебрегаем взаимодействием мод, вследствие чего система принимает вид:

$$\begin{cases} v_n^0 \cos(b_n^0) = \zeta \delta_{n,k} \\ v_n^0 \omega_n \sin(b_n^0) = 0 \end{cases}$$

Решения этой системы при $\omega_n \neq 0$ достаточно очевидны:

$$\begin{cases} v_n^0 = \zeta \delta_{n,k} \\ b_n^0 = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.1.47)$$

В первом приближении будем решать систему, записанную с учётом решения (2.1.47) в слагаемых, опущенных в нулевом приближении. При этом система уравнений (2.1.46) приводится к виду:

$$\begin{cases} v_n \cos(b_n) + \sum_{m \in M} v_{n+m}^0 \cos(b_{n+m}^0) \cdot C_m^s(n) = \zeta \delta_{n,k} \\ v_n \omega_n \sin(b_n) + \sum_{m \in M} v_{n+m}^0 \omega_{n+m} \sin(b_{n+m}^0) \cdot C_m^s(n) = 0. \end{cases} \quad (2.1.48)$$

Решая систему уравнений (2.1.48) для различных n , получим, что её решения нетривиальны в интервале $k-2 \leq n \leq k+2$.

$$\begin{cases} v_k = \zeta; \\ \sin(b_k) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} v_{k \pm m} = -\zeta C_{\mp m}^s(k \pm m); \\ \sin(b_{k \pm m}) = 0; \end{cases} \quad m \in M = \{-2, -1, 1, 2\} \quad (2.1.49)$$

Выражение для функции $\xi(\theta, t)$, описывающей волновое возмущение поверхности капли, с учётом решений (2.1.49) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) = & \zeta \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + \\ & + \zeta \sum_{m \in M} C_{-m}^s(k+m) [\cos(\omega_k t) - \cos(\omega_{k+m} t)] P_{k+m}(\mu). \end{aligned} \quad (2.1.50)$$

$$C_m^s(n) = \frac{C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n)}{\omega_n^2 - \omega_{n+m}^2}$$

где $M = \{-2, -1, 1, 2\}$ - спектр присоединённых мод.

Анализ устойчивости капли однородном поле. Перейдём к анализу полученных результатов, для чего обратимся к формуле (2.1.37), связывающей критические для наступления неустойчивости капли величины полевого параметра w и зарядового параметра W . Из представленных на Рисунке 2.1.2 зависимостей видно, что критические значения полевого параметра при больших значениях номеров гармоники n стремятся к горизонтальной асимптотике. Следовательно, можно утверждать, что существует комбинация величин внешнего поля и собственного заряда капли, за критическая для всех мод одновременно. Этот результат качественно отличается от результатов, полученных для заряженной капли в отсутствие внешнего электрического поля. Согласно результатам, опубликованным в работах Rayleigh [6], Hendrics [10], Feng [27], величина собственного заряда капли, необходимая для реализации неустойчивости определённой моды, возрастает по мере увеличения номера этой моды неограниченно.

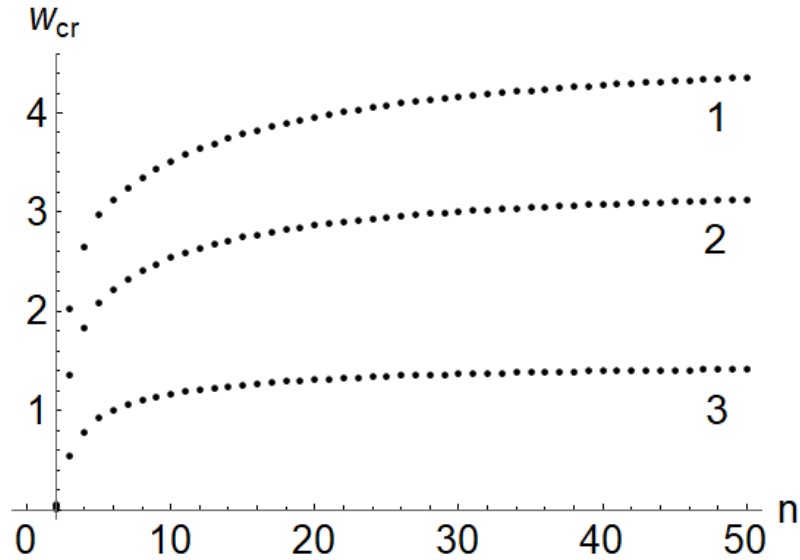


Рисунок 2.1.2 Критические значения полевого параметра от номера гармоники. Линиями на рисунке обозначены: 1 - $W = 0$, 2 - $W = 0.25$, 3 - $W = 0.81$.

Уровень, на котором находится асимптотика, нетрудно получить из уравнения (2.1.37):

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{cr} = \frac{4}{9}(1 - W)$$

Величина L убывает с увеличением W (заряда капли), что означает понижение критической для реализации неустойчивости поверхности капли величины напряжённости поля E_0 . Такой же вывод следует и из Рисунка 2.1.3, показывающего критические значения напряжённости поля (обезразмеренные в соответствии с работой Fontelos [35]) для основной второй гармоники осцилляций.

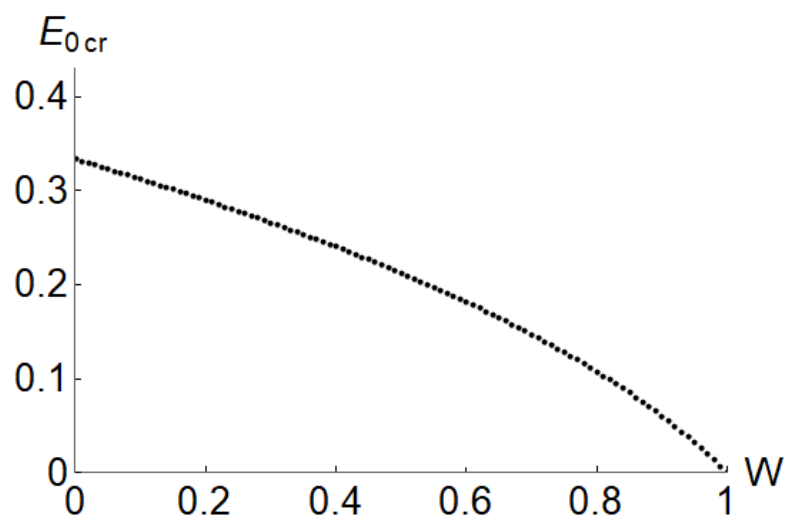


Рисунок 2.1.3 Связь между критическими значениями напряжённости поля и зарядового параметра капли для второй гармоники осцилляций.

Общий характер данной зависимости хорошо соотносится с результатами, полученными численно методом граничных элементов в работе Fontelos [35] и представленными на Рисунке 2.1.4. Однако можно заметить, что в области малых W зависимости расходятся. Отметим, что при малых собственных зарядах капли деформация её поверхности в основном определяется величиной внешнего однородного электростатического поля. Такая капля оказывается вытянутой вдоль направления поля, а величина кривизны поверхности вблизи её концов может быть значительной, что осложняет как аналитическое, так и численное исследование такой капли.

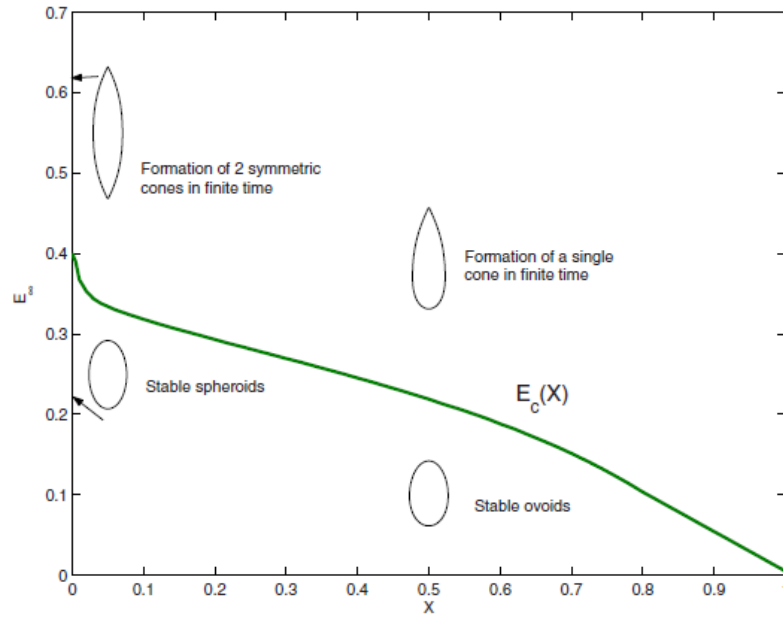


Рисунок 2.1.4 Зависимость между критическими значениями напряжённости поля и собственного заряда капли, полученная численными методами.

Отметим, что в отсутствие внешнего поля ($E_0 = 0$) выражение для квадрата частоты (2.1.36) ожидаемо переходит в выражение, полученное Рэлеем [6]

$$\omega_n^2 = n(n-1) \left(2 + n - \frac{Q^2}{4\pi} \right).$$

Предельный переход к критическим условиям распада по Рэлею также выполняется $Q_{cr}^2 > 16\pi$.

Перейдём к рассмотрению выражения для амплитуд осцилляций (2.1.50). Можно заметить, что выражения для амплитуд связанных мод с номерами $k \pm m$ содержат $\cos \omega_k t$, а значит, при наступлении неустойчивости изначально возбуждённой k -й моды весь спектр связанных с ней мод также становится неустойчивым. На Рисунке 2.1.5 представлены зависимости амплитуд различных мод от времени для случая, когда величина полевого параметра превышает критическое значение для изначально возбуждённой 2-ой моды (сплошная линия) с безразмерной амплитудой $\zeta = 0.1$. Амплитуда изначально возбуждённой второй моды (показанная сплошной линией) экспоненциально нарастает с течением времени. Связанные с ней третья (штрихпунктирная) и четвёртая (пунктирная) моды, комбинация полевого и зарядового параметра для которых меньше

соответствующих критических значений, также экспоненциально нарастают, сохраняя осциллирующий характер. Точечной линией и штрихпунктирной линией с двумя точками показаны нулевая и первая моды осцилляций, которые в рассматриваемом приближении определяются соотношением (2.1.38) и компенсируют изменение объёма и смещение центра масс капли при её деформации соответственно.

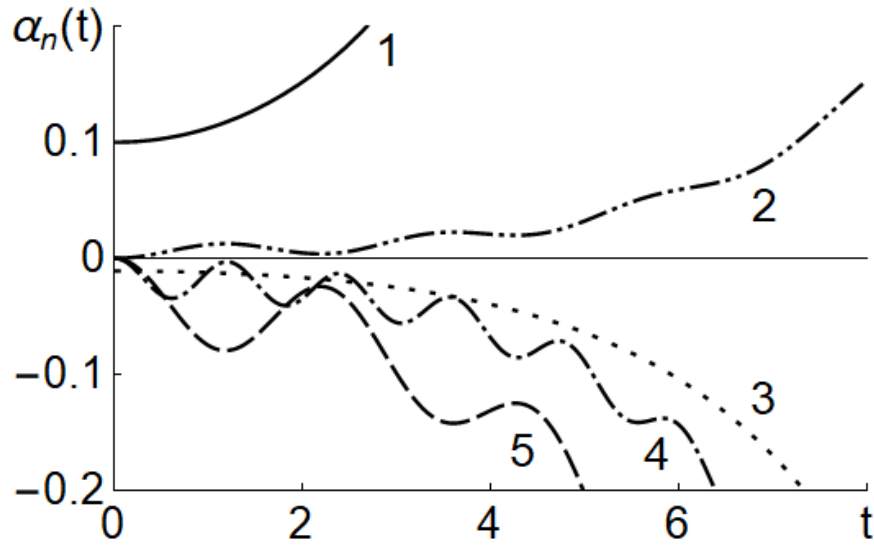


Рисунок 2.1.5 Временные зависимости амплитуд основной ($n=2$) моды осцилляций и спектра связанных с ней мод. Рассчитано при $W = 0.1$, $w = 0.046$. Обозначения: 1 – основная вторая мода, 2 – первая мода, 3 – нулевая мода, 4 – четвёртая мода, 5 – третья мода.

В приведённом выше анализе временной эволюции неустойчивых мод осцилляций можно сделать вывод, что критические условия неустойчивости заряженной поверхности капли в однородном электростатическом поле определяются комбинацией полевого и зарядового параметров для второй моды осцилляций. При этом дальнейшее развитие неустойчивости поверхности капли определяется целым спектром мод, связанных с основной и теряющих устойчивость одновременно ней. Наличие внешнего однородного электростатического поля в окружающем каплю пространстве приводит к снижению критической для начала её распада величины собственного заряда. Вместе с этим, появляется возможность создать внешнее электростатическое поле такой величины, в котором все моды осцилляций поверхности капли будут

неустойчивы одновременно. Сформулированные выше основные зависимости, будут использоваться при последующем анализе результатов неустойчивости заряженной капли в неоднородных полях.

2.2. Заряженная капля в поле точечного заряда

Данный параграф посвящен рассмотрению капли в неоднородном электростатическом поле, создаваемом точечным зарядом. Поле такой формы выбрано, как пример одной из простейших конфигураций неоднородного поля, имеющих аналитическое представление. В то же время, модель точечного заряда может быть применена и для описания взаимодействия пары заряженных капель в аэрозоле в самом простом приближении.

Постановка. Рассмотрим систему, состоящую из капли несжимаемой, невязкой, идеально проводящей жидкости плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ , находящейся во внешнем неоднородном электростатическом поле на расстоянии L от точечного заряда величиной q (Рисунок 2.2.1).

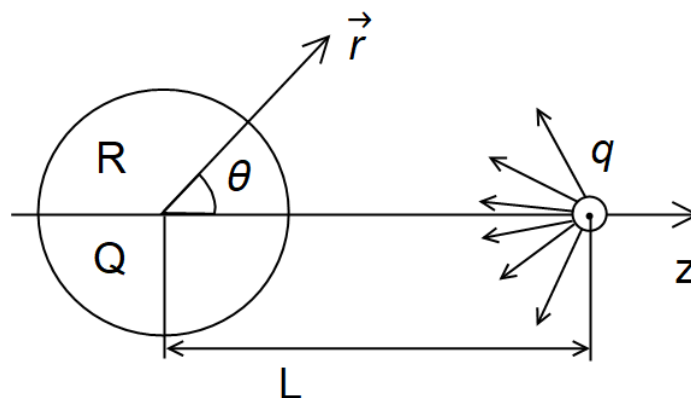


Рисунок 2.2.1 Взаимное расположение капли и точечного заряда во введённой системе координат.

Исходно сферическая капля имеет радиус R и несёт собственный заряд Q , распределённый по её поверхности. Исследуем капиллярные осцилляции и

устойчивость поверхности капли по отношению к давлению суммарного электрического поля.

Отметим, что заряженная капля, находящаяся под действием электрических сил смещается с течением времени. В экспериментах [Grimm 2005] показано, что характерные времена распада неустойчивой заряженной капли метанола диаметром 225 мкм составляет порядка 1 мкс. За такое время смещение s центра масс капли, вызванное взаимодействием её заряда с внешним электрическим полем будет существенно меньше радиуса капли и составлять порядка $s \approx 0.1R$. Таким образом, в текущих расчётах смещением центра масс заряженной капли в электростатическом поле можно пренебречь, что позволяет считать расстояние L от центра масс капли до источника внешнего неоднородного электростатического поля постоянной величиной. Эти выводы справедливы и для неоднородных электростатических полей других конфигураций, исследуемых в последующих параграфах данной работы.

Для рассмотрения используем неинерциальную систему отсчёта в сферических координатах (r, θ, φ) с точкой начала отсчёта в центре масс движущейся капли. Ось, от которой отсчитывается угол θ , будем принимать проходящей через центр масс капли в направлении точечного заряда, создающего внешнее электростатическое поле, как показано на Рис 2.2.1. Так как исследуемое в данной главе электростатическое поле симметрично относительно этой оси, целесообразно будет использовать постановку задачи, симметричную по углу φ , аналогичную рассмотренной в Параграфе 2.1. Такой подход позволяет значительно сократить объём вычислений, не отражаясь при этом на общности рассуждений.

Математическая постановка задачи аналогична постановке для капли в однородном поле, и подробно выписана в предыдущем параграфе.

Форма поверхности осциллирующей капли представляется в виде суперпозиции её равновесной формы $r(\theta)$ и волнового возмущения поверхности $\xi(\theta, t)$.

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t)$$

Обезразмеривание с характерными масштабами R , ρ , и σ проводится стандартными методами, рассмотренными в параграфе 2.1. Задача скаляризуется переходом к гидродинамическому потенциалу ψ , и электрическому потенциалу Φ . При этом поле скоростей в капле \mathbf{V} и напряжённость электростатического поля \mathbf{E} в её окрестности запишутся выражениями:

$$\mathbf{V} = \nabla \psi, \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi.$$

В безразмерном и скаляризованном виде постановка задачи состоит следующего набора уравнений и условий:

уравнений Лапласа для гидродинамического ψ и электрического Φ потенциалов, а также выражения для гидродинамического давления P в капле

$$\Delta \psi = 0; \quad \Delta \Phi = 0; \quad P = P_{st} + F_{in} r \mu - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2;$$

$$\mu \equiv \cos \theta$$

где P_{st} - гидростатическое давление в жидкости, а F_{in} - сила инерции, связанная с ускоренным движением заряженной капли в электростатическом поле. Потенциал Φ в окрестности капли состоит из потенциала, создаваемого каплей Φ_d и внешнего по отношению к капле потенциала точечного заряда Φ_{ex}^{ch} , который в отличие от рассмотренного в задаче параграфа 2.1 однородного поля имеет вид:

$$\Phi = \Phi_{ex}^{ch} + \Phi_d \quad \Phi_{ex}^{ch} \equiv \frac{q}{r'}; \quad r' = \sqrt{(r^2 + L^2 - 2Lr\mu)^2} \quad \mu \equiv \cos \theta; \quad (2.2.1)$$

Естественные граничные условия формулируются в виде условия ограниченности поля скоростей жидкости в центре капле и условия убывания поля

$$r = 0: \quad |\nabla\psi| < \infty; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi_d \rightarrow const$$

На поверхности капли ставятся следующие граничные условия: динамическое, кинематическое и условие эквипотенциальности

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad P - P_{atm} + P_E = P_\sigma;$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(-\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) = 0; \quad \Phi = Const;$$

где давление электрических и капиллярных сил рассчитывается по формулам:

$$P_E = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi}; \quad P_\sigma = div\mathbf{n};$$

$$\mathbf{n} = \left(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [-r(\theta) - \xi(\theta, t)] \right) \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(-\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

где \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ - орты введённой сферической системы координат.

Задача дополняется интегральными условиями сохранения объёма, неподвижности центра масс и сохранения заряда капли

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)+\xi(\theta,t)} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi; \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)+\xi(\theta,t)} \mathbf{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 0;$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\nabla\Phi, \mathbf{n}) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = -4\pi Q.$$

Используем асимптотические методы решения задачи, введя два малых параметра: амплитуду капиллярных осцилляций поверхности капли $\varepsilon \equiv \max |\xi(\theta, t)|$ и величину отклонения равновесной формы капли от сферической

$\eta \equiv \max|h(\theta)| \ll 1$, где $h(\theta) \equiv r(\theta) - 1$. Собственный заряд капли будет иметь порядок $Q \sim \eta^0$, так как сам по себе (в отсутствии внешнего поля) не искажает равновесную сферическую форму капли. Потенциал внешнего электрического поля будет иметь порядок $\Phi_{ex}^{ch} \sim \eta^{1/2}$, так как деформация равновесной поверхности капли вызывается компонентой электрического давления, связанной именно с внешним полем. Для исследования устойчивости капли ограничимся первым порядком малости по амплитуде осцилляций поверхности ε , представив искомые величины в виде сумм компонент нулевого и первого порядков и обозначив компоненты соответствующего порядка верхними индексами в круглых скобках:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + O(\xi^2); & P_E &= P_E^{(0)} + P_E^{(1)} + O(\xi^2); \\ P_\sigma &= P_\sigma^{(0)} + P_\sigma^{(1)} + O(\xi^2); & P &= P^{(0)} + P^{(1)} + O(\xi^2). \end{aligned}$$

Компонента потенциала Φ_{ex}^{ch} имеет порядок ε^0 , и поэтому индекс над ней будет опускаться для краткости выражений. Задача линейризуется стандартными методами, после чего формулируются две краевые задачи: порядка ε^0 , для расчёта равновесной формы поверхности и порядка ε^1 для анализа устойчивости возмущённой поверхности.

Равновесная форма капли. Поскольку равновесная форма капли в неоднородном электростатическом поле отлична как от сферической формы, так и от формы вытянутого сфероида, необходимо получить выражение для неё в аналитическом представлении. Математическая постановка задачи о расчёте равновесной формы капли имеет вид аналогичный уравнениям (2.1.1)-(2.1.4), (2.1.7)-(2.1.10):

$$r = r(\theta, t): \quad P_{st} + P_{in}^0 - P_{atm} + P_E^{(0)} = P_\sigma^{(0)}; \quad (2.2.2)$$

$$P_E^{(0)} = \frac{(\nabla\Phi^{(0)})^2}{8\pi}; \quad (2.2.3)$$

$$P_\sigma^{(0)} = \text{div}\mathbf{n}_0 \quad (2.2.4)$$

$$\mathbf{n}_0 = \left(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.2.5)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta,t)} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi; \quad (2.2.6)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta,t)} \mathbf{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 0 \quad (2.2.7)$$

Для расчета давления электрического поля $P_E^{(0)}$ выпишем краевую задачу определения потенциала в окрестности поверхности капли:

$$\Phi^{(0)} = \Phi_d^{(0)} + \Phi_{ex}^{ch};$$

$$\Delta\Phi_d^{(0)} = 0 \quad (2.2.8)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_d^{(0)} \rightarrow \text{Const} \quad (2.2.9)$$

$$r = r(\theta, t): \quad \Phi^{(0)} = \text{Const}; \quad (2.2.10)$$

$$r = r(\theta, t): \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\mathbf{n}_0, \nabla\Phi^{(0)} \right) \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = -4\pi Q \quad (2.2.11)$$

Равновесная форма капли, представляемая в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$ с коэффициентами разложения a_n , с учётом условий сохранения объёма капли (2.2.6) и неподвижности центра масс (2.2.7), позволяющих определить, что $a_0 = 0$ и $a_1 = 0$, запишется в виде:

$$r(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad (2.2.12)$$

Отметим, что коэффициенты a_n разложения (2.2.12) будут иметь порядок η^1 .

Уравнение Лапласа (2.2.8) для потенциала $\Phi_d^{(0)}$ решается методом разделения переменных и его решение, удовлетворяющее условию ограниченности потенциала при $r \rightarrow \infty$ (2.2.9), представимо в следующем виде:

$$\Phi_d^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) + Const \quad (2.2.13)$$

Коэффициенты B_n определяются из условия эквипотенциальности поверхности капли (2.2.10). Поскольку это условие должно выполняться при любом $\mu \equiv \cos \theta$, необходимо приравнять коэффициенты, стоящие при полиномах $P_n(\mu)$ одинакового порядка, что допустимо в силу линейной независимости полиномов Лежандра. В отличие от рассмотренного ранее потенциала однородного поля аналитическое выражение для потенциала точечного заряда Φ_{ex}^{ch} (см. (2.2.1)) не имеет вида разложения по полиномам Лежандра. Поэтому представим потенциал Φ_{ex}^{ch} на поверхности сферической капли в виде необходимого разложения по $P_n(\mu)$:

$$\Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} F_k \cdot P_k(\mu) \quad F_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu \quad (2.2.14)$$

Для проведения численных расчётов требуется использовать конечное число слагаемых в разложении (2.2.14), поэтому ограничимся учётом слагаемых, пропорциональных полиномам Лежандра порядка, не превышающего некоторое значение k_m . Как показывают дальнейшие расчёты, значение этого параметра зависит от расстояния L между каплей и точечным зарядом. Для определения k_m сравним зависимости приближённого разложения (2.2.14) и точного выражения (2.2.1) для потенциала Φ_{ex}^{ch} от угла θ , приведённые на Рисунке 2.2.2. Как видно из рисунка, наибольшие по абсолютной величине расхождения приближенных и точного выражений наблюдаются на конце капли, максимально близком к источнику внешнего электростатического поля ($\theta = 0$). С увеличением k_m (числа

учитываемых в разложении (2.2.14) слагаемых) данные расхождения уменьшаются.

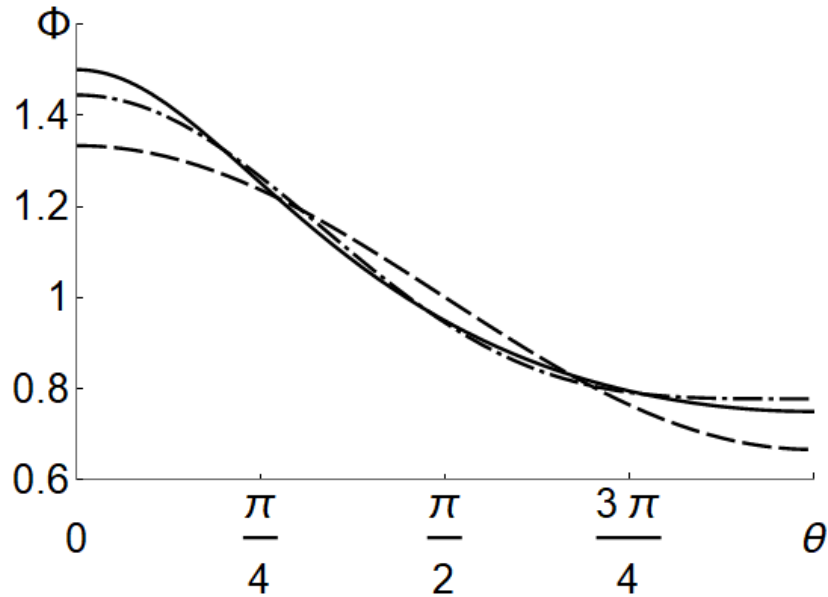


Рисунок 2.2.2 Угловые зависимости потенциала и его приближений. Сплошная линия – точное значение потенциала, пунктирная – разложение при $k_m = 2$, штрихпунктирная – разложение при $k_m = 3$.

Поскольку точное значение потенциала Φ_{ex}^{ch} (2.2.1), взятое при $r=1$, и его приближённое разложение (2.2.14) зависят только от угла θ , то в качестве критерия для выбора k_m будем рассматривать максимальную по углу величину относительной погрешности разложения (2.2.14). Примем, что величина относительной погрешности δ не должна превышать 1%. Проведя расчёты δ при $L=3$, представленные на Рисунке 2.2.3, получим, что величина k_m должна быть не меньше четырёх. Отметим, что с увеличением расстояния L величина относительной погрешности приближения (2.2.14) снижается, поэтому можно принять, что при $L \geq 3$ для приближённого разложения (2.2.14) потенциала точечного заряда $k_m = 4$.

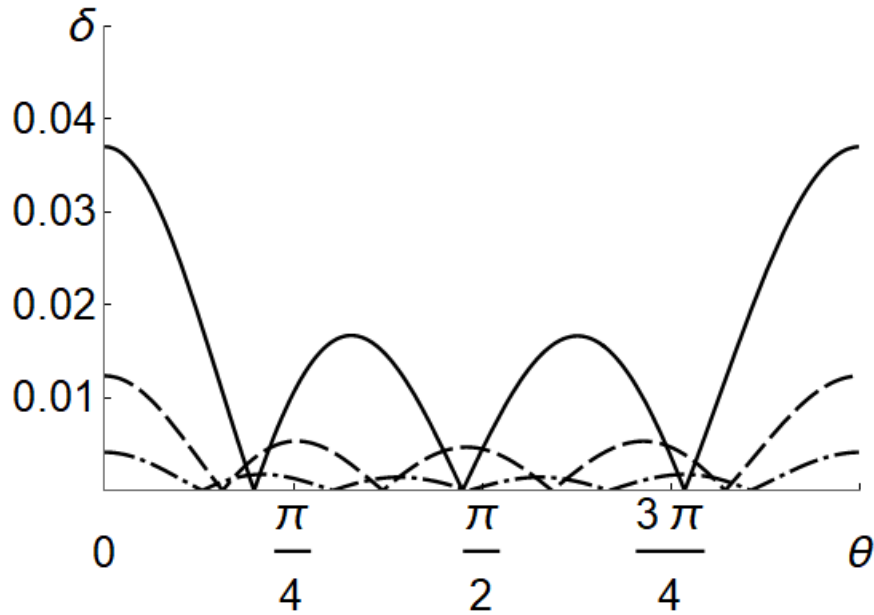


Рисунок 2.2.3 Зависимости относительной погрешности разложения потенциала Φ_{ex}^{ch} от угла, построенные при $L=3$. Сплошная линия - $k_m=2$, пунктирная - $k_m=3$, штрихпунктирная - $k_m=4$.

Используя разложение потенциала (2.2.14) в условии эквипотенциальности (2.2.10) и условии сохранения заряда (2.2.11), определим коэффициенты B_n и получим выражение для электростатического потенциала $\Phi^{(0)} = \Phi_d^{(0)} + \Phi_{ex}^{ch}$ в окрестности капли:

$$\Phi^{(0)} \approx \frac{Q}{r} + \Phi_{ex}^{ch} - F_0 - \sum_{k=1}^{k_m} F_k r^{-(k+1)} P_k(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} Q a_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) \quad (2.2.15)$$

При получении этого выражения константу $const$ в разложении (2.2.13) выберем равной $-F_0$, при этом потенциал поверхности сферической капли (при $r=1$) будет равен Q . Отметим, что из условия сохранения заряда (2.2.11) следует, чтобы B_0 в разложении (2.2.13) равно нулю.

Используя выражение (2.2.15), можно рассчитать электростатическое давление на поверхности капли по формуле (2.2.3):

$$P_E^{(0)} = \frac{(\nabla \Phi^{(0)})^2}{8\pi}$$

В данном расчёте возникает необходимость представить выражение $\partial_r \Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1}$ в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра:

$$\partial_r \Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} S_k \cdot P_k(\mu) \quad S_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_r \Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu \quad (2.2.16)$$

Процедура разложения полностью аналогична рассмотренной выше в этом параграфе процедуре разложения потенциала $\Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1}$. Критерий точности разложения выбирается таким же: максимальная по углу величина относительной погрешности разложения не должна превышать 1%.

На Рисунке 2.2.4 приведена зависимость относительной погрешности δ разложения (2.2.16) от угла θ . Нетрудно заметить, что вблизи точки $\theta \approx \frac{3\pi}{8}$ значения δ резко возрастают.

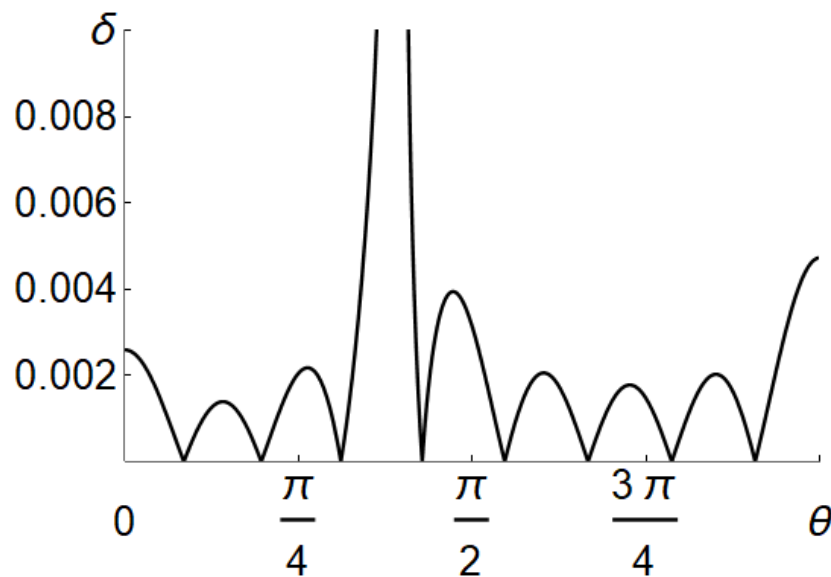


Рисунок 2.2.4 Угловая зависимость относительной погрешности разложения производной потенциала, рассчитанная при $L=3$, $k_m=7$.

Проанализируем подробнее явный вид относительной погрешности:

$$\delta = \frac{\partial_r \Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1} - \sum_{k=0}^{k_m} S_k \cdot P_k(\mu)}{\partial_r \Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1}}.$$

Обратим внимание, что в окрестности точек, где малы значения раскладываемой величины, т.е. $\partial_r \Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1} \rightarrow 0$, величина относительной погрешности δ стремится к бесконечности. А вблизи точек, где в ноль обращается разложение (2.2.16), т.е. $\sum_{k=0}^{k_m} S_k \cdot P_k(\mu)$, величина δ становится близкой к единице. Отметим, что численные оценки точного выражения $\partial_r \Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1}$ и его разложения (2.2.16) показывают, что величина абсолютной погрешности в окрестности указанных точек вовсе не является максимальной. На основании сказанного, при оценке максимальной величины δ будем исключать из рассмотрения окрестности «неудобных» точек, где обращаются в ноль раскладываемая величина или её разложение.

Так, для разложения производной потенциала, представленной на Рисунке 2.2.4, из рассмотрения исключается область вблизи точки $\theta \approx \frac{3\pi}{8}$, а в качестве критерия для выбора k_m будет служить величина относительной погрешности разложения потенциала в точке на конце капли, наиболее удалённом от точечного заряда $\theta = \pi$.

Отметим, что если исключать описанным выше образом области, где близка к нулю раскладываемая величина или её разложение, то во всех используемых в данной работе разложениях величина относительной погрешности δ оказывается максимальной на одном из двух концов капли, находящихся на оси z , являющейся осью симметрии задачи.

Величина $k_m = 7$, полученная для разложения производной потенциала (2.2.16), отличается от полученного ранее значения $k_m = 4$ для разложения

потенциала (2.2.14). В дальнейших расчётах равновесной формы капли в обоих разложениях примем $k_m = 7$, т.е. наибольшим, что только повысит точность разложения (2.2.14) для потенциала $\Phi_{ex}^{ch}|_{r=1}$, и одновременно позволит записать дальнейшие выражения более компактно.

В результате для электрического давления, записанного с сохранением слагаемых до величины порядка η^1 включительно, получим:

$$P_E^{(0)} = \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{Q}{4\pi} \sum_{k=1}^{k_m} (S_k + (k+1)F_k) P_k(\mu) + \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n P_n(\mu) +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=1}^{k_m} \sum_{l=-m}^m (S_{k+l} + (k+l+1)F_{k+l}) (S_m + (m+1)F_m) U_{m,k+l,k} P_k(\mu) \quad (2.2.17)$$

где $U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 \right)^2$, а $C_{a,0}^{c,0}; b,0$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Выражение для капиллярного давления будет иметь такой же вид, как и в параграфе 2.1:

$$P_{\sigma}^{(0)} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1)(n+2) P_n(\mu). \quad (2.2.18)$$

Выражение для давления сил инерции, полученное в параграфе 2.1 из общефизических соображений и скомпенсировавшее в балансе давлений соответствующие слагаемые электростатического давления, в данной ситуации не применимо ввиду неоднородности поля точечного заряда и будет получено ниже.

Рассмотрим выражение (2.2.2) для баланса давлений:

$$P_{st} + P_{in}^0 - P_{atm} + P_E^{(0)} = P_{\sigma}^{(0)} \text{ с учётом (2.2.17)-(2.2.18) по порядкам малости } \eta.$$

Приравнивая в балансе давлений слагаемые, имеющие порядок η^0 , получим выражение для гидростатического давления в капле

$$P_{st} = 2 - \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{3q^2}{8\pi L^4}$$

Рассматривая слагаемые порядка $\eta^{1/2}$ баланса давлений, получим, что давление инерции на поверхности капли является единственным давлением, способным компенсировать компоненту электростатического давления порядка $\eta^{1/2}$ и, следовательно, должно описываться выражением вида:

$$P_{in}^0 = -\frac{Q}{4\pi} \sum_{k=1}^{k_m} (S_k + (k+1)F_k) P_k(\mu)$$

Рассматривая слагаемые баланса давлений порядка η^1 и используя ортогональность полиномов Лежандра, получим выражения для коэффициентов a_n равновесной формы поверхности капли:

$$r(\theta) = 1 + h(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{2k_m} a_n P_n(\mu). \quad (2.2.19)$$

$$a_n = \frac{1}{8\pi(k-1)(k+2 - \frac{Q^2}{4\pi})} \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{m=-k}^k (S_{n+m} + (n+m+1)F_{n+m})(S_k + (k+1)F_k) U_{m,n+m,n}$$

Здесь и далее в этом параграфе следует принять коэффициенты $F_k, S_k = 0$ при $k < 1$, так как в разложениях (2.2.14), (2.2.16) коэффициенты с отрицательными индексами отсутствуют. Отметим, также, что коэффициент S_0 разложения (2.2.16) равен нулю сам по себе, а F_0 отсутствует в выражении для производной потенциала $\partial_r \Phi^{(0)}$, которое и используется для расчёта электрического давления на поверхности капли. Напомним также, что

использовавшиеся выше разложения (2.2.14), (2.2.16) получены с относительной погрешностью $\delta < 1\%$ при $L \geq 3$ и $k_m = 7$ для каждого из них.

Таким образом, в ходе решения задачи нулевого порядка по ε получены выражения для равновесной формы поверхности капли (2.2.19) в поле точечного заряда и для электростатического потенциала в её окрестности (2.2.15).

Получение эволюционного уравнения. Перейдём к рассмотрению задачи первого порядка малости по ε . Математическая постановка, полученная из исходной системы уравнений, состоит из уравнений Лапласа на гидродинамический потенциал ψ и поправку к электрическому потенциалу $\Phi^{(1)}$, естественных условий в особых точках и соответствующих граничных условий:

$$\Delta\psi(r, \theta, t) = 0; \quad r \rightarrow 0: \quad |\nabla\psi(r, \theta, t)| < \infty; \quad (2.2.20)$$

$$\Delta\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad (2.2.21)$$

$$r = r(\theta): \quad P^{(1)} + P_E^{(1)} = P_\sigma^{(1)}; \quad (2.2.22)$$

$$r = r(\theta): \quad -\frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial\theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} = 0; \quad (2.2.23)$$

$$r = r(\theta): \quad \Phi^{(1)}(r, \theta, t) + \frac{\partial\Phi^{(0)}(r, \theta, t)}{\partial r} \xi(\theta, t) = Const; \quad (2.2.24)$$

$$r = r(\theta): \quad P^{(1)} = F_{in} \xi(\theta, t) \mu - \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial t}; \quad (2.2.25)$$

$$P_E^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{(\nabla\Phi^{(0)})^2}{8\pi} \right) \xi(\theta, t) + \frac{(\nabla\Phi^{(0)} \nabla\Phi^{(1)})}{4\pi}; \quad (2.2.26)$$

$$P_\sigma^{(1)} = 2 \left(-\xi(\theta, t) - 3 \frac{\partial h(\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial\theta} \right) + \Delta_\theta (-\xi(\theta, t) + 2\xi(\theta, t)h(\theta)); \quad (2.2.27)$$

$$\Delta_{\theta} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right);$$

$$\int_0^{\pi} r^2(\theta) \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0; \quad \int_0^{\pi} r^3(\theta) \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0; \quad (2.2.28)$$

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} 2\xi(\theta, t) + (2r(\theta) - 1) \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \xi(\theta, t) + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \xi(\theta, t) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right] \sin \theta d\theta = 0. \quad (2.2.29)$$

Возмущение поверхности капли представляется в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\mu); \quad (2.2.30)$$

Решение уравнения Лапласа (2.2.20) для гидродинамического потенциала с учётом ограниченности скорости в центре капли и кинематического граничного условия (2.2.23) имеет вид:

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) r^n P_n(\mu). \quad (2.2.31)$$

$$V_n(t) = \frac{1}{n} \left(\alpha_n'(t) - \sum_{k=2}^{2kmax} \sum_{m=-k}^k a_k \alpha_{m+n}'(t) \left((-1+m+n) U_{k, m+n, n} - \frac{Y_{k, m+n, n}}{m+n} \right) \right)$$

здесь и далее $U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0; b,0}^{c,0} \right)^2$, $Y_{a,b,c} = -\sqrt{n(n+1)m(m+1)} \left(C_{a,0; b,0}^{c,0} C_{a,-1; b,1}^{c,0} \right)$, где

$C_{a,0; b,0}^{c,0}$, $C_{a,-1; b,1}^{c,0}$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Решение уравнения Лапласа для компоненты электрического потенциала первого порядка (2.2.21), удовлетворяющее условию убывания потенциала на бесконечности запишем в виде:

$$\Phi_d^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) + Const \quad (2.2.32)$$

Решение (2.2.32) подставляется в условия (2.2.24) и (2.2.29) с учётом выражений для формы поверхности (2.2.19) и (2.2.30), откуда определяются коэффициенты K_n . Процедура аналогична рассмотренной для компоненты потенциала $\Phi_d^{(0)}$. Отметим, что для расчёта компоненты $\Phi_d^{(1)}$ возникает необходимость разложить по полиномам Лежандра величину $\partial_{r,r} \Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1}$:

$$\partial_{r,r} \Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} G_k \cdot P_k(\mu) \quad G_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_{r,r} \Phi_{ex}^{ch} \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu \quad (2.2.33)$$

Так же, как и в ранее рассмотренных разложениях внешнего потенциала (2.2.14) и его первой производной (2.2.16), здесь проводятся оценки точности разложения (2.2.33) для $L \geq 3$ с целью получить относительную погрешность δ , не превышающую 1%. В результате оценок получаем $k_m = 10$, которое в дальнейшем будет применяться и для разложений (2.2.14), (2.2.16), поскольку это повысит их точность и при этом позволит компактнее записывать последующие выражения данного параграфа. В результате получим выражение для поправки к электрическому потенциалу в окрестности возмущённой поверхности капли:

$$\Phi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-(n+1)} P_n(\mu) \cdot \left[Q\alpha_n - \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k ((k+1)F_k + S_k)\alpha_{n+m} U_{k,n+m,n} + \right. \quad (2.2.34)$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=-k}^k Qa_k \alpha_{n+m} (k+m+n) U_{k,n+m,n} \right] + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{k_m} (2S_k + G_k - F_k k(k+1)) \alpha_k U_{k,k,0}$$

Для того, чтобы удовлетворить динамическому граничному условию (2.2.22), получим выражения для добавок первого порядка малости по амплитуде возмущения к давлениям капиллярных сил $P_{\sigma}^{(1)}$ и электрического поля $P_E^{(1)}$ на

возмущённой поверхности капли. Поправку к давлению капиллярных сил $P_\sigma^{(1)}$ получим, подставляя (2.2.19) и (2.2.30) в выражение (2.2.27), и учитывая собственные значения оператора Δ_θ :

$$\Delta_\theta P_n(\cos \theta) = -n(n+1)P_n(\cos \theta):$$

$$P_\sigma^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \left(\alpha_n(t)(n-1)(n+2) + \sum_{k=0}^{2k_{\max}} \sum_{m=-k}^k U_{k,n+m,n} a_k \alpha_{n+m}(t) (4 - 2k(k+1) - 2(n+m)(n+m+1)) \right) \quad (2.2.35)$$

Выражение для поправки $P_E^{(1)}$ рассчитывается по формуле (2.2.26), с учётом выражений (2.2.15), (2.2.34) для компонент потенциала, и выражений (2.2.19), (2.2.30) для формы поверхности.

$$P_E^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu) \left[\frac{Q^2}{4\pi} \alpha_n(t)(n-1) + \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k \frac{Q}{4\pi} ((1+k)(2+k-m-2n)F_k - G_k - (m+2n)S_k) \alpha_{n+m}(t) U_{k,n+m,n} + \sum_{k=2m=-k}^{2k_m} \sum_{m=-k}^k \left(\frac{Q^2}{4\pi} a_k \alpha_{n+m}(t) \cdot \left((10 - k^2 + m^2 + 4n + m(4+n) - k(6+n)) U_{k,m+n,n} + Y_{k,m+n,n} \right) + \frac{1}{4\pi} \alpha_{n+m}(t) U_{k,n+m,n} \sum_{l=0}^{k_m} \sum_{d=-l}^l (G_l - F_l(1+l)(2+l))(S_{k+d} + F_{k+d}(k+d+1)) U_{l,k+d,k} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k \sum_{l=0}^{k_m} \sum_{d=-l}^l (S_k + F_k(k+1)) \cdot ((l+1)F_l + S_l)(n+m+1) \alpha_{n+m+d}(t) U_{l,n+m+d,n+m} U_{k,n+m,n} \right] \quad (2.2.36)$$

Выражение для поправки к гидродинамическому давлению рассчитывается по формуле (2.2.25), с учётом выражений (2.2.30), (2.2.31) и (2.2.19). Сила инерции, входящая в данное выражение, рассчитывается в квазиоднородном приближении, считая внешнее поле однородным величиной $E_c = \frac{q}{L^2}$:

$$P^{(1)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3Q}{4\pi} \frac{q}{L^2} (\alpha_{1+n}(t)U_{1,1+n,n} + \alpha_{-1+n}(t)U_{1,-1+n,n}) - \quad (2.2.37)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\alpha_n''(t) + \sum_{k=2m=-k}^{2k_m} \sum_k a_k \alpha_{m+n}''(t) \left((m-1)U_{k,m+n,n} - \frac{Y_{k,m+n,n}}{m+n} \right) \right) P_n(\mu)$$

Запишем баланс давлений (2.2.22) с использованием выражений (2.2.35), (2.2.36), (2.2.37) для поправок к давлениям $P_{\sigma}^{(1)}$, $P_E^{(1)}$, $P^{(1)}$. Перенеся все слагаемые в левую часть, объединим их в общую сумму по n , после чего воспользуемся ортогональностью полиномов Лежандра и получим систему связанных дифференциальных уравнений второго порядка. Каждое из уравнений приводится к каноническому виду путём деления всего уравнения на коэффициент при $\alpha_n''(t)$, и представляется в следующем виде:

$$\alpha_n''(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) - \sum_{m \in M} \left(C_m^f(n) \alpha_{n+m}(t) + C_m^d(n) \alpha_{n+m}''(t) \right) = 0. \quad (2.2.38)$$

Явный вид коэффициентов $C_m^f(n)$, $C_m^d(n)$ приведен в Приложении. Здесь и далее в параграфе множество $M = \{-2k_m, -2k_m + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2k_m - 1, 2k_m\}$ - аналогично случаю с однородным полем определяет спектр гармоник, связанных с n -ой гармоникой осцилляций, а ω_n - собственная частота колебаний этой моды, определяемая выражением:

$$\omega_n^2 = n(n-1) \left(n + 2 - \frac{Q^2}{4\pi} \right) - n \left(\sum_{k=0}^{k_m} \frac{Q}{4\pi} \left((1+k)(2+k-2n)F_k - G_k - 2nS_k \right) U_{k,n,n} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -n \left[\sum_{k=2}^{2k_m} a_k \left((2k + 2k^2 + 3(-2 + n + n^2)) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Q^2}{4\pi} (4 - 3k - k^2 - 4n + 2kn) \right) U_{k,n,n} + \left(n^2 + n + \frac{Q^2}{4\pi} - 2 \right) \frac{Y_{k,n,n}}{n} \right] + \\
& + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k \sum_{l=|m|}^{k_m} (S_k + F_k(k+1)) ((l+1)F_l + S_l) (n+m+1) U_{l,n,n+m} U_{k,n+m,n} + \\
& + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=0}^{k_m} \sum_{l=-m}^m U_{m,k+l,k} (S_{k+l} + F_{k+l}(k+l+1)) (G_m - F_m(1+m)(2+m)) U_{k,n,n} \left. \right]
\end{aligned} \tag{2.2.39}$$

$$U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 \right)^2$$

$$Y_{a,b,c} = -\sqrt{n(n+1)m(m+1)} \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 C_{a,-1}^{c,0}; b,1 \right)$$

где $C_{a,0}^{c,0}; b,0$ $C_{a,-1}^{c,0}; b,1$ - коэффициенты Клебша-Гордана,

Заметим, что нижний индекс j амплитуд $\alpha_j(t)$ не может быть отрицательным, поэтому будем полагать $\alpha_j(t) = 0$ при $j < 0$.

На основе выражения (2.2.39) из критического условия устойчивости осцилляций поверхности капли $\omega_n^2|_{cr} = 0$ можно получить выражение для критического значения полевого параметра w_{cr} . Отметим, что в данном случае существуют два значения параметра w_{cr} , физический смысл которых будет рассмотрен ниже.

Отметим, что потенциал Φ_{ex}^{ch} рассматриваемого в данном параграфе поля точечного заряда, имеет простой аналитический вид и может быть представлен в виде

$$\Phi_{ex}^{ch} = \frac{q}{r'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q}{L} \left(\frac{r}{L} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad r' = \sqrt{(r^2 + L^2 - 2Lr\mu)^2} \quad \mu \equiv \cos \theta;$$

Этот ряд является сходящимся, так как известен предел частичных сумм ряда, равный $\frac{q}{r'}$. Аналогичным образом можно прийти к выводу, что разложения для потенциала и его производных на сферической поверхности так же описываются сходящимися рядами. Аналитические выражения для коэффициентов соответствующих разложений получим путём взятия производных от представленного выше ряда и в результате выпишем выражения для коэффициентов F_n, S_n, G_n в разложениях (2.2.13), (2.2.15), (2.2.31) в простом аналитическом представлении:

$$F_n = \frac{q}{L} L^{-n} \quad S_n = \frac{q}{L} n L^{-n} \quad G_n = \frac{q}{L} n(n+1) L^{-n}$$

Отметим, что в опубликованных ранее работах [89, 91, 92], рассматривающих каплю в поле точечного заряда, используется разложение потенциала по величине $\frac{r}{L}$. Такое разложение потенциала точечного заряда идентично использованному выше разложению по полиномам Лежандра. Однако, в отличие от работ [89, 91, 92] в текущем рассмотрении оценка точности разложения была проведена другим, более корректным методом, а в самом разложении учитывается большее число слагаемых, что повышает точность расчетов.

Общее решение эволюционного уравнения. Рассмотрим амплитуды $\alpha_n(t)$ отдельных гармоник осцилляций капли. Условия сохранения объёма капли и неподвижности её центра масс (2.2.28) определяют величины амплитуд нулевой и первой гармоник соответственно. Выражения несложно получить, подставляя в соответствующие интегральные условия выражения (2.2.19) и (2.2.30) для формы поверхности:

$$\alpha_0(t) = - \sum_{n=2}^{2k_m} a_n \alpha_n(t) \frac{2}{2n+1};$$

$$\alpha_1(t) = - \sum_{n=1}^{k_m-1} 3a_{n+1} U_{n+1,1,n} \alpha_n \frac{9}{2n+1} - \sum_{n=3}^{k_m+1} 3a_{n-1} U_{n-1,1,n} \alpha_n \frac{9}{2n+1}. \quad (2.2.40)$$

После определения амплитуд нулевой и первой мод осцилляций $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, систему уравнений (2.2.38) целесообразно решать для значений $n \geq 2$. Воспользуемся методом последовательных приближений, пренебрегая в нулевом приближении слагаемыми, отвечающими за взаимодействие мод. Решение получающегося гармонического уравнения представим в виде:

$$\alpha_n^0(t) = A_n^+ \exp(i\omega_n t) + A_n^- \exp(-i\omega_n t); \quad (2.2.41)$$

где $A_n^\pm = const$.

В первом приближении в слагаемых, опущенных ранее, в качестве выражений для амплитуд используются решения нулевого приближения (2.2.41), тогда амплитуды $\alpha_n(t)$ в первом приближении определяются системой уравнений:

$$\frac{\partial^2 \alpha_n(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 \alpha_n(t) - \sum_{m \in M} \left(C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n) \right) \left[A_{n+m}^+ \exp(i\omega_{n+m} t) + A_{n+m}^- \exp(-i\omega_{n+m} t) \right] = 0 \quad (2.2.42)$$

Уравнение (2.2.42) является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка, общее решение которого ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Однородное уравнение так же, как уравнение в нулевом приближении, является гармоническим, поэтому его решение запишем в виде (обозначения коэффициентов оставим такими же, как в нулевом приближении):

$$\alpha_n^{(одн)}(t) = A_n^+ \exp(i\omega_n t) + A_n^- \exp(-i\omega_n t); \quad (2.2.43)$$

Частное решение неоднородного уравнения представим в виде суперпозиции экспонент, аналогичных экспонентам, входящим в функцию неоднородности:

$$\alpha_{n+m}^{(\text{неодн})}(t) = B_{n,m}^+ \exp(i\omega_{n+m}t) + B_{n,m}^- \exp(-i\omega_{n+m}t); \quad (m \in M). \quad (2.2.44)$$

Подставляя выражение (2.2.44) в уравнение (2.2.42), определим выражения для коэффициентов $B_{n,m}^\pm$:

$$B_{n,m}^\pm = C_m^s(n) A_{n+m}^\pm; \quad C_m^s(n) = \frac{C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n)}{\omega_n^2 - \omega_{n+m}^2} \quad (2.2.45)$$

Поскольку амплитуды колебаний должны описываться вещественными функциями, можно записать $B_{n,m}^+ = (B_{n,m}^-)^*$, $A_n^+ = (A_n^-)^*$, где «*» обозначает комплексное сопряжение.

Запишем выражение для $\alpha_n(t)$ как суперпозицию $\alpha_n^{(\text{одн})}(t)$ и $\alpha_n^{(\text{неодн})}(t)$, используя общий вид решений (2.2.43), (2.2.44) с учётом соотношений (2.2.45) для $B_{n,m}^\pm$ и представляя комплексные коэффициенты A_n^\pm в виде: $A_n^\pm = v_n \exp(\pm ib_n)$, где v_n и b_n вещественные константы:

$$\alpha_n(t) = b_n \exp[i(\omega_n t + v_n)] + \sum_{m \in M} b_{n+m} \exp[i(\omega_{n+m} t + v_{n+m})] C_m^s(n) + \text{к.с.}; \quad (2.2.46)$$

Аббревиатурой *к.с.* обозначим слагаемые, комплексно сопряжённые к выписанным. Вещественные константы b_n и v_n определяются из начальных условий.

Устойчивость равновесной формы. Решение с начальными условиями.

Представим, что в начальный момент времени возбуждается единичная гармоника с номером k , с постоянной амплитудой ζ . При этом в начальный момент скорость движения поверхности капли равна нулю. В этом случае начальные условия будут иметь вид:

$$t=0: \quad \alpha_n(t) = \zeta \delta_{n,k}; \quad \alpha'_n(t) = 0 \quad (n \geq 2). \quad (2.2.47)$$

Подставляя решение (2.2.46) в систему начальных условий (2.2.47), получим:

$$\begin{cases} v_n \cos(b_n) + \sum_{m \in M} v_{n+m} \cos(b_{n+m}) \cdot C_m^s(n) = \zeta \delta_{n,k} \\ v_n \omega_n \sin(b_n) + \sum_{m \in M} v_{n+m} \omega_{n+m} \sin(b_{n+m}) \cdot C_m^s(n) = 0 \end{cases} \quad (2.2.48)$$

где $M = \{-2k_m, -2k_m + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2k_m - 1, 2k_m\}$.

Полученную систему связанных уравнений (2.2.48) будем решать методом последовательных приближений, аналогичным тому, который был применён выше для решения системы эволюционных уравнений (2.2.38). В нулевом приближении пренебрегается взаимодействием гармоник, вследствие чего система принимает вид:

$$\begin{cases} v_n^0 \cos(b_n^0) = \zeta \delta_{n,k} \\ v_n^0 \omega_n \sin(b_n^0) = 0 \end{cases}$$

Решения этой системы при $\omega_n \neq 0$ достаточно очевидны:

$$\begin{cases} v_n^0 = \zeta \delta_{n,k} \\ b_n^0 = \pi l, \quad l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.2.49)$$

В первом приближении будем решать систему, записанную с учётом решения (2.2.49) в слагаемых, опущенных в нулевом приближении. При этом система уравнений (2.2.48) приводится к виду:

$$\begin{cases} v_n \cos(b_n) + \sum_{m \in M} v_{n+m}^0 \cos(b_{n+m}^0) \cdot C_m^s(n) = \zeta \delta_{n,k} \\ v_n \omega_n \sin(b_n) + \sum_{m \in M} v_{n+m}^0 \omega_{n+m} \sin(b_{n+m}^0) \cdot C_m^s(n) = 0. \end{cases} \quad (2.2.50)$$

Решая систему уравнений (2.2.50) для различных n , получим, что её решения нетривиальны для номеров гармоник в интервале $k - 2k_m \leq n \leq k + 2k_m$.

$$\begin{cases} v_k = \zeta; \\ \sin(b_k) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} v_{k+m} = -\zeta C_{-m}^s(k+m); \\ \sin(b_{k+m}) = 0; \end{cases} \quad m \in M \quad (2.2.51)$$

Выражение для функции $\xi(\theta, t)$, описывающей волновое возмущение поверхности капли, с учётом решений (2.2.51) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) = & \zeta \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + \\ & + \zeta \sum_{m \in M} C_{-m}^s(k+m) [\cos(\omega_k t) - \cos(\omega_{k+m} t)] P_{k+m}(\mu). \end{aligned} \quad (2.2.52)$$

где $M = \{-2k_m, -2k_m + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2k_m - 1, 2k_m\}$, $C_m^s(n) = \frac{C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n)}{\omega_n^2 - \omega_{n+m}^2}$,

ω_n^2 определяется формулой (2.2.39), а коэффициенты $C_m^f(n)$, $C_m^d(n)$ приведены в Приложении.

Анализ результатов. Основными характеристиками устойчивости поверхности капли, как и в случае однородного поля, остаются зарядовый

параметр $W = \frac{Q^2}{16\pi}$, и полевой параметр $w = \frac{E_c^2}{16\pi}$. В текущей задаче для

определения величины полевого параметра используется значение напряжённости

внешнего поля точечного заряда в точке центра масс капли $E_c = \frac{q}{L^2}$, т.е.

$w = \frac{q^2}{16\pi L^4}$. Почему сделан именно такой выбор, будет рассмотрено в параграфе

2.4. Из критического условия устойчивости осцилляций $\omega_n^2|_{cr} = 0$, используя

(2.2.39), несложно получить выражение критических значений полевого

параметра w_{cr} . На Рисунке 2.2.5 приведены зависимости критических значений

полевого параметра от номера моды при различных значениях зарядового

параметра, из которых видно, что одному значению W соответствует два значения w_{cr} . Исключение составляет вырожденный случай незаряженной капли $W = 0$, изображённый сплошной линией.

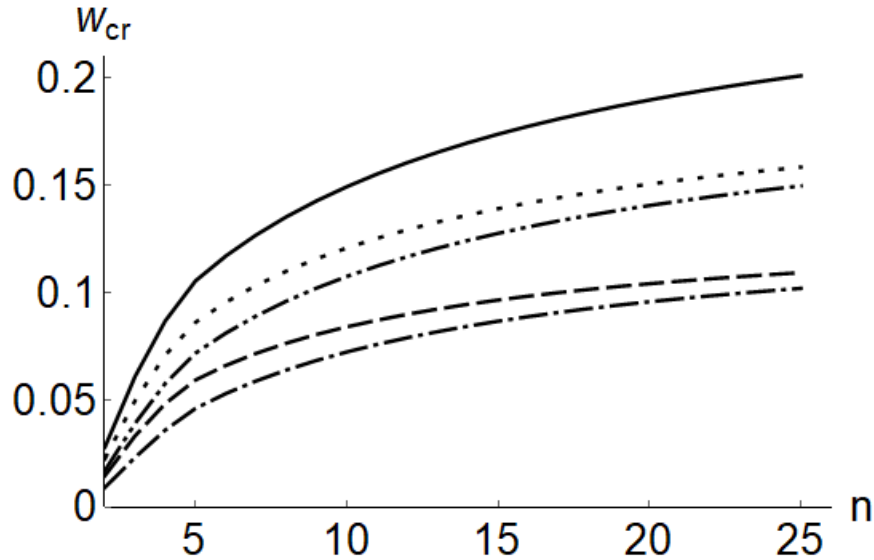


Рисунок 2.2.5 Зависимости критических значений полевого параметра от номера моды. Построено при $L = 3$, $k_m = 10$. Сплошная линия - $W = 0$, точечная - $W = 0.25$, $qQ > 0$, штрихпунктирная с двумя точками - $W = 0.25$, $qQ < 0$, пунктирная - $W = 0.5$, $qQ > 0$, штрихпунктирная - $W = 0.5$, $qQ < 0$.

Расщепление критических условий можно объяснить из общефизических соображений. Устойчивость поверхности капли определяется величиной плотности заряда на её поверхности, которая в свою очередь является суммой плотностей собственного заряда капли, и заряда, индуцированного внешним полем. В однородном электростатическом поле максимальная плотность заряда создаётся на том из концов вытянутой капли, где знаки индуцированного внешним полем заряда и собственного заряда капли совпадают. Смена направления поля или знака собственного заряда капли приводит к созданию максимальной поверхностной плотности заряда такой же величины уже на противоположном конце капли. В неоднородном электростатическом поле при смене собственного заряда капли или направления поля также будет происходить смена точки поверхности капли, в которой достигается максимальная по величине

поверхностная плотность заряда. Однако, в неоднородном электростатическом поле точечного заряда величина поверхностной плотности индуцируемого полем заряда на конце капли, обращённом к точечному заряду q , будет выше, чем на противоположном её конце, как схематично показано на Рисунке 2.2.6. Поэтому и величина максимальной плотности заряда будет зависеть от того, на каком из концов капли («дальнем» или «ближнем») суммируются одинаковые по знаку поверхностные плотности индуцированного и собственного зарядов капли.

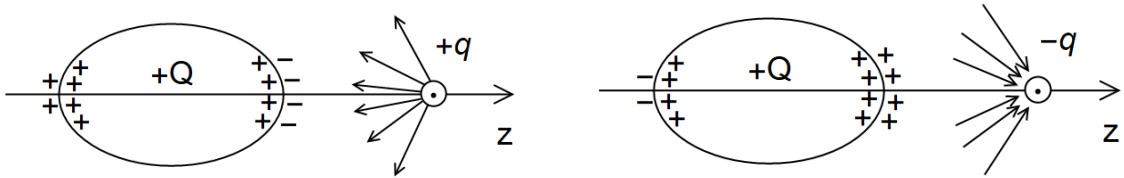


Рисунок 2.2.6 Иллюстрация суперпозиции собственного и индуцированного зарядов на поверхности капли, находящейся в неоднородном электростатическом поле точечного заряда. Поверхностная плотность собственного заряда отмечена внутри капли, а индуцированного – снаружи.

Так, если знаки собственного заряда капли Q и заряда, создающего внешнее поле q противоположны, то максимальная плотность заряда достигается на конце капли, обращённом к точечному заряду, а в случае, когда знаки Q и q совпадают – на противоположном. При этом абсолютное значение максимальной поверхностной плотности заряда, определяющее устойчивость капли, будет выше для разноимённых зарядов Q и q , а критическое значение полевого параметра w_{cr} , соответственно, ниже.

Неоднородность поля характеризуется не только выбранной в данном случае конфигурацией поля точечного заряда, но и фактическим расстоянием от центра масс капли до точечного заряда L . Поэтому появляется возможность исследовать влияние неоднородности поля, изменяя параметр L . Из

представленных на Рисунке 2.2.7 зависимостей видно, что критические значения полевого параметра снижаются по мере приближения капли к точечному заряду.

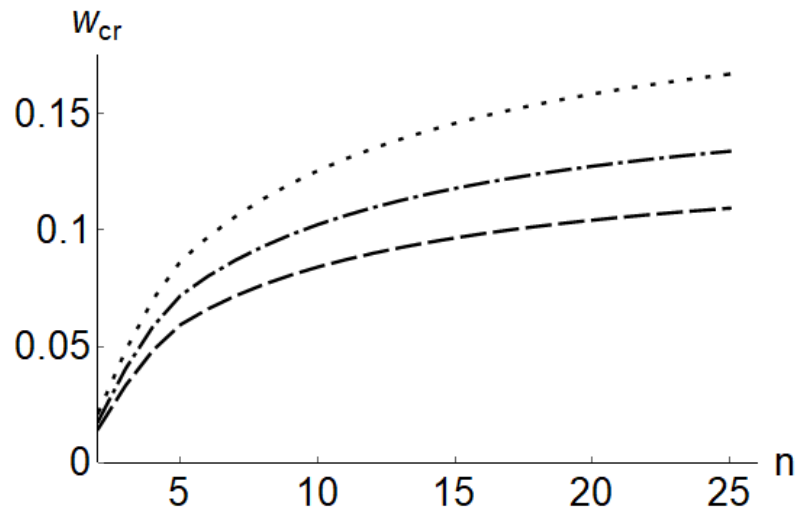


Рисунок 2.2.7 Зависимости критических значений полевого параметра от номера моды, рассчитанные при $W = 0.25$. Точечная линия - $L = 10$, штрихпунктирная - $L = 4$, пунктирная - $L = 3$.

В предельном переходе к $L \rightarrow \infty$ при фиксированном значении параметра w получим зависимости, соответствующие случаю заряженной капли в однородном электростатическом поле напряжённостью $E_0 = \sqrt{16\pi w}$.

Остальные закономерности реализации неустойчивости аналогичны полученным для однородного поля, рассмотренным подробно в конце параграфа 2.1. К таковым закономерностям относятся: снижение w_{cr} с увеличением зарядового параметра W ; выход критических значений полевого параметра на «насыщение» с увеличением номера гармоники, следствием чего является существование для каждого значения зарядового параметра такой величины полевого параметра, при превышении которой неустойчивыми оказываются все гармоники осцилляций капли. В случае возбуждения в начальный момент времени единичной k -й гармоники осцилляций поверхности, одновременно с ней возбуждается спектр гармоник, с номерами $k - 2k_m \leq n \leq k + 2k_m$. Все эти гармоники становятся неустойчивыми одновременно с изначально возбуждённой

k -ой гармоникой, даже если критические условия неустойчивости для них не достигнуты.

В заключение ещё раз отметим, что в случае неоднородного поля появляется зависимость критических для реализации неустойчивости капли условий от соотношения между знаками собственного заряда Q и точечного заряда q , создающего внешнее поле, следствием чего являются существование двух критических значений полевого параметра.

Сравнительный анализ полученных в данном параграфе зависимостей с полями других конфигураций будет приведён позднее в отдельном параграфе 2.4.

2.3. Заряженная капля в поле точечного диполя

В данном параграфе рассматривается капля в неоднородном электростатическом поле, создаваемом точечным диполем. Такая форма поля выбрана, как ещё один пример неоднородного поля наиболее простой конфигурации, потенциал которого имеет аналитическое представление, а также с целью сравнения влияния полей различной неоднородности на устойчивость заряженной поверхности капли.

Постановка. Исследуется капля несжимаемой, невязкой, идеально проводящей жидкости плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ , находящаяся во внешнем неоднородном электростатическом поле на расстоянии L от точечного диполя с дипольным моментом \vec{p} (Рисунок 2.3.1).

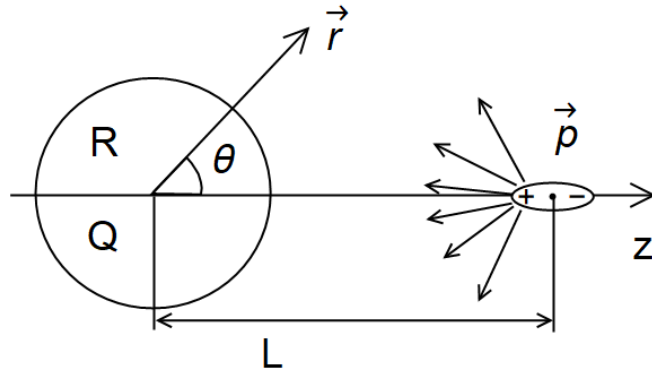


Рисунок 2.3.1 Взаимное расположение капли и точечного диполя во введённой системе координат.

На изначально сферической капле радиуса R находится собственный заряд Q , распределённый по её поверхности. В задаче рассматриваются капиллярные осцилляции и устойчивость поверхности капли по отношению к давлению суммарного электрического поля.

Выберем систему отсчёта в сферических координатах (r, θ, φ) с точкой начала отсчёта в центре масс движущейся капли. Ось, от которой отсчитывается угол θ , будем принимать проходящей через центр масс капли в направлении точечного диполя, создающего внешнее электростатическое поле, как показано на Рис 2.3.1. Электростатическое поле точечного диполя обладает осевой симметрией, поэтому будет целесообразно применить постановку задачи, симметричную по углу φ , аналогичную рассмотренной в параграфах 2.1 и 2.2. Рассмотрение осесимметричной задачи позволяет значительно сократить объём вычислений, не отражаясь при этом на общности рассуждений. Постановка задачи формулируется аналогично ранее рассмотренной постановке для капли в поле точечного заряда (см. параграф 2.2).

Форма поверхности осциллирующей капли ищется в виде суперпозиции её равновесной формы $r(\theta)$ и возмущения поверхности $\xi(\theta, t)$:

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t).$$

Для проведения процедуры обезразмеривания используются, как и в предыдущих параграфах, характерные масштабы R , ρ , и σ . Скаляризация производится переходом к гидродинамическому потенциалу ψ , и электрическому потенциалу Φ . Поле скоростей в капле \mathbf{V} и напряжённость электростатического поля \mathbf{E} в её окрестности запишутся выражениями:

$$\mathbf{V} = \nabla \psi; \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi.$$

После процедур обезразмеривания и скаляризации математическая формулировка задачи запишется следующим набором уравнений и условий:

уравнения Лапласа для электрического Φ и гидродинамического ψ потенциалов, а также выражения для гидродинамического давления P в капле:

$$\Delta \Phi = 0; \quad \Delta \psi = 0; \quad P = P_{st} + F_{in} r \mu - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2;$$

$$\mu \equiv \cos \theta.$$

где P_{st} - гидростатическое давление в жидкости, а F_{in} - сила инерции, связанная с ускоренным движением заряженной капли в электростатическом поле. Потенциал Φ в окрестности капли состоит из потенциала, Φ_d создаваемого поверхностным зарядом капли, и внешнего по отношению к капле потенциала точечного диполя Φ_{ex}^{dip} .

Исходное выражение для потенциала $\Phi_{ex}^{dip} \equiv \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}'}{(r')^3}$, где $\vec{r}' = \vec{r} - L \vec{e}_z$ - радиус вектор из центра точечного диполя, во введённой выше системе координат (Рисунок 2.3.1) записывается в виде:

$$\Phi = \Phi_{ex}^{dip} + \Phi_d; \quad \Phi_{ex}^{dip} \equiv \frac{p(r\mu - L)}{(r')^3}; \quad r' = \sqrt{(r^2 + L^2 - 2Lr\mu)^2}; \quad (2.3.1)$$

здесь и далее по тексту параграфа p - проекция момента диполя на положительное направление оси z : $\vec{p} \equiv p \cdot \vec{e}_z$, а $\mu \equiv \cos \theta$.

Условие ограниченности поля скоростей жидкости в центре капле и условие убывания поля формулируются в виде:

$$r=0: \quad |\nabla\psi| < \infty; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi_d \rightarrow const.$$

На возмущённой поверхности капли ставятся динамическое, кинематическое граничные условия и условие эквипотенциальности:

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad P - P_{atm} + P_E = P_\sigma;$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(-\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) = 0; \quad \Phi = Const;$$

где давление электрических и капиллярных сил рассчитывается по формулам:

$$P_E = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi}; \quad P_\sigma = \text{div}\mathbf{n};$$

$$\mathbf{n} = \left(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [-r(\theta) - \xi(\theta, t)] \right) \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(-\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}};$$

\mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ - орты введённой сферической системы координат.

Используются дополнительные интегральные условия сохранения объёма капли, неподвижности центра её масс и сохранения собственного заряда Q её поверхности:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)+\xi(\theta,t)} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi; \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)+\xi(\theta,t)} \mathbf{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 0;$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\nabla\Phi, \mathbf{n}) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = -4\pi Q.$$

Для решения задачи асимптотическими методами, вводятся два малых параметра: амплитуда капиллярных осцилляций поверхности капли $\varepsilon \equiv \max |\xi(\theta, t)|$ и величина отклонения равновесной формы капли от сферической

$\eta \equiv \max|h(\theta)| \ll 1$, где $h(\theta) \equiv r(\theta) - 1$. Потенциал внешнего электрического поля будет иметь порядок $\Phi_{ex}^{dip} \sim \eta^{1/2}$, так как деформация равновесной поверхности капли вызывается компонентой электрического давления, связанной именно с внешним полем. Собственный заряд капли в отсутствии внешнего поля не искажает равновесную сферическую форму капли, и поэтому будет иметь порядок $Q \sim \eta^0$. В данном рассмотрении будут учитываться слагаемые до порядка η^1 включительно. Для исследования устойчивости капли, ограничиваясь первым порядком малости по амплитуде осцилляций поверхности ε , представим искомые величины в виде сумм компонент нулевого и первого порядков и обозначим компоненты соответствующего порядка верхними индексами в круглых скобках:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + O(\xi^2); & P_E &= P_E^{(0)} + P_E^{(1)} + O(\xi^2); \\ P_\sigma &= P_\sigma^{(0)} + P_\sigma^{(1)} + O(\xi^2); & P &= P^{(0)} + P^{(1)} + O(\xi^2). \end{aligned}$$

Компонента потенциала Φ_{ex}^{dip} имеет порядок ε^0 , и поэтому индекс над ней будет опускаться для краткости выражений. Подстановка данных разложений в выписанную выше задачу и проведение процедуры линеаризации позволяют сформулировать две краевые задачи: порядка ε^0 для расчёта равновесной формы поверхности и порядка ε^1 для анализа устойчивости возмущённой поверхности.

Равновесная форма капли. Равновесная форма капли в поле точечного диполя отлична от сферической формы, являясь асимметрично вытянутой, поэтому необходимо получить выражение для неё в аналитическом представлении. Математическая постановка задачи о расчёте равновесной формы капли имеет вид аналогичный уравнениям (2.2.2)-(2.2.11):

$$r = r(\theta, t): \quad P_{st} + P_{in}^0 - P_{atm} + P_E^{(0)} = P_\sigma^{(0)}; \quad (2.3.2)$$

$$P_E^{(0)} = \frac{(\nabla\Phi^{(0)})^2}{8\pi}; \quad (2.3.3)$$

$$P_{\sigma}^{(0)} = \operatorname{div} \mathbf{n}_0 \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{n}_0 = \left(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.3.5)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta,t)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi; \quad (2.3.6)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta,t)} \mathbf{r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 0 \quad (2.3.7)$$

Потенциал электрического поля, необходимый для расчёта давления $P_E^{(0)}$ определяется из краевой задачи, записываемой уравнениями:

$$\Phi^{(0)} = \Phi_d^{(0)} + \Phi_{ex}^{dip};$$

$$\Delta \Phi_d^{(0)} = 0 \quad (2.3.8)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_d^{(0)} \rightarrow \text{const} \quad (2.3.9)$$

$$r = r(\theta, t): \quad \Phi^{(0)} = \text{const}; \quad (2.3.10)$$

$$r = r(\theta, t): \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\mathbf{n}_0, \nabla \Phi^{(0)} \right) \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -4\pi Q \quad (2.3.11)$$

Равновесная форма капли $r(\theta)$ представляется в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$ с коэффициентами разложения a_n . Условия сохранения объёма капли (2.3.6) и неподвижности центра масс (2.3.7), позволяют определить, что $a_0 = 0$ и $a_1 = 0$, после чего $r(\theta)$ представима в виде:

$$r(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad (2.3.12)$$

Отметим, что коэффициенты a_n разложения (2.3.12) будут иметь порядок η^1 .

Уравнение Лапласа (2.3.8) для потенциала $\Phi_d^{(0)}$ решается методом разделения переменных и его решение, удовлетворяющее условию ограниченности потенциала при $r \rightarrow \infty$ (2.3.9), имеет вид:

$$\Phi_d^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) + \text{const} \quad (2.3.13)$$

Подставляя решение (2.3.13) в условие эквипотенциальности поверхности капли (2.3.10), несложно определить коэффициенты B_n . Поскольку это условие должно выполняться при любом $\mu \equiv \cos \theta$, то в силу линейной независимости полиномов Лежандра коэффициенты, стоящие при полиномах $P_n(\mu)$ одинакового порядка, должны быть равны. Как и в случае неоднородного поля точечного заряда (2.2.1), аналитическое выражение для потенциала точечного диполя Φ_{ex}^{dip} (см. (2.3.1)) не имеет вида готового разложения по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$.

Поэтому потенциал Φ_{ex}^{dip} на поверхности сферической капли представим в виде необходимого разложения: $\Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} F_k \cdot P_k(\mu)$. Формально, коэффициенты разложения функции $\Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1}$ по полиномам Лежандра описываются формулой:

$$F_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu.$$

Однако, следует отметить, что потенциал точечного диполя имеет достаточно простое аналитическое представление в виде требующегося разложения:

$$\Phi_{ex}^{dip} = \frac{\vec{p}\vec{r}'}{(r')^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p}{L^2} (n+1) \left(\frac{r}{L}\right)^n P_n(\cos \theta); \quad r' = \sqrt{(r^2 + L^2 - 2Lr\mu)^2}; \quad \mu \equiv \cos \theta.$$

Из приведённого выше выражения нетрудно получить явный вид коэффициентов F_k , с учётом которых запишем разложение функции $\Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1}$:

$$\Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} F_k \cdot P_k(\mu) \quad F_k = \frac{p}{L^2} (k+1) L^{-k} \quad (2.3.14)$$

Для проведения численных расчётов ограничимся в разложении (2.3.14) учётом конечного числа слагаемых. То есть, учтем лишь слагаемые,

пропорциональные полиномам Лежандра, порядок которых не превышает некоторое значение k_m . Для оценки величины ошибки, допускаемой при замене точного выражения (2.3.1) на приближённое (2.3.14), будем использовать максимальную по углу θ величину относительной погрешности δ разложения потенциала, определяемую выражением:

$$\delta = \frac{\Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1} - \sum_{k=0}^{k_m} F_k \cdot P_k(\mu)}{\Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1}}$$

Потребуем, чтобы величина относительной погрешности не превышала 1%. Отметим, что с увеличением числа учтённых в разложении (2.3.14) слагаемых величина δ уменьшается, поэтому достаточно выбрать минимальное значение k_m , обеспечивающее требуемую точность приближения. Проведение оценок относительной допускаемой погрешности по методике, рассмотренной подробнее в параграфе 2.2, даёт значение $k_m = 6$. Как и для потенциала точечного заряда (2.2.14), значение относительной погрешности зависит от расстояния L между каплей и точечным диполем. Учитывая, что с увеличением расстояния L величина относительной погрешности приближения (2.3.14) снижается, примем, что при $L \geq 3$ для приближённого разложения (2.3.14) потенциала точечного диполя $k_m = 6$.

Подставляя решение (2.3.13) и разложение для внешнего потенциала (2.3.14) в условие эквипотенциальности (2.3.10) и условие сохранения заряда (2.3.11), определим коэффициенты B_n и получим выражение для электростатического потенциала $\Phi^{(0)} = \Phi_d^{(0)} + \Phi_{ex}^{dip}$ в окрестности равновесной поверхности капли:

$$\Phi^{(0)} \approx \frac{Q}{r} + \Phi_{ex}^{dip} - F_0 - \sum_{k=1}^{k_m} F_k r^{-(k+1)} P_k(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} Q a_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) \quad (2.3.15)$$

При получении этого выражения значение константы интегрирования $const$ в разложении (2.3.13) примем равной $-F_0$, при этом потенциал поверхности сферической капли (при $r=1$) будет равен Q . Из условия сохранения заряда (2.3.11) следует, что коэффициент B_0 разложения (2.3.13) равен нулю.

Электростатическое давление рассчитывается по формуле (2.3.3) с использованием выражения (2.3.15):

$$P_E^{(0)} = \frac{(\nabla\Phi^{(0)})^2}{8\pi}$$

В данном расчёте возникает необходимость представить производную $\partial_r \Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1}$ в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра. Явный вид коэффициентов этого разложения S_k формально определяется интегралами

$$S_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_r \Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu. \quad \text{Однако, аналогично коэффициентам } F_k$$

разложения (2.3.14), несложно получить аналитические выражения для коэффициентов S_k , дифференцируя по r известное разложение:

$$\Phi_{ex}^{dip} = \frac{\vec{p}\vec{r}'}{(r')^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p}{L^2} (n+1) \left(\frac{r}{L}\right)^n P_n(\cos\theta). \quad \text{В результате получим:}$$

$$\partial_r \Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} S_k \cdot P_k(\mu) \quad S_k = \frac{p}{L^2} k(k+1)L^{-k} \quad (2.3.16)$$

Процедура оценки точности разложения (2.3.16) полностью аналогична рассмотренной выше в этом параграфе процедуре, использованной при оценке точности разложения (2.3.14) для потенциала $\Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1}$. Следует отметить, что в окрестности точек, где малы значения раскладываемой величины, т.е. $\partial_r \Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1} \rightarrow 0$, значение относительной погрешности δ стремится к бесконечности. А вблизи точек, где в ноль обращается разложение (2.3.16), т.е.

$\sum_{k=0}^{k_m} S_k \cdot P_k(\mu) \rightarrow 0$, величина δ становится близкой к единице. Отметим, что численные оценки точного выражения $\partial_r \Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1}$ и его разложения (2.3.16) показывают, что величина абсолютной погрешности в окрестности указанных точек вовсе не является максимальной. Поэтому, при оценке максимальной величины δ исключим из рассмотрения окрестности точек, где обращаются в ноль раскладываемая величина или её разложение. Критерий точности разложения выбираем таким же: максимальная по углу величина относительной погрешности разложения не должна превышать 1% (за исключением указанных выше точек). Для $L \geq 3$ получим $k_m = 9$, это же значение k_m будем применять и для полученного ранее разложения (2.3.14), что позволит более компактно записать дальнейшие выражения. Такая замена только повысит точность разложения (2.3.14).

Выражение для электрического давления, записанного с сохранением слагаемых до величины порядка η^1 включительно, имеет вид:

$$P_E^{(0)} = \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{Q}{4\pi} \sum_{k=1}^{k_m} (S_k + (k+1)F_k) P_k(\mu) + \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n P_n(\mu) +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=1}^{k_m} \sum_{l=-m}^m (S_{k+l} + (k+l+1)F_{k+l}) (S_m + (m+1)F_m) U_{m,k+l,k} P_k(\mu) \quad (2.3.17)$$

где $U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 \right)^2$, а $C_{a,0}^{c,0}; b,0$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Капиллярное давление рассчитывается по формуле (2.3.4) с учётом выражений для нормали (2.3.5) и равновесной формы поверхности (2.3.12):

$$P_\sigma^{(0)} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1)(n+2) P_n(\mu). \quad (2.3.18)$$

Давление сил инерции, как и в случае неоднородного электростатического поля точечного заряда (см. параграф 2.2), не может быть получено в аналитическом виде из общефизических сообщений и будет определено ниже из анализа баланса давлений на поверхности капли.

Выражение (2.3.2) для баланса давлений: $P_{st} + P_{in}^0 - P_{atm} + P_E^{(0)} = P_\sigma^{(0)}$ рассматривается с учётом явного вида давлений на поверхности капли (2.3.17)-(2.3.18) по порядкам малости η .

Приравнивая в балансе давлений слагаемые, имеющие порядок η^0 , получим выражение для гидростатического давления в капле:

$$P_{st} = 2 - \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{3E_c^2}{8\pi}$$

где $E_c^2 = \frac{4p^2}{L^6}$ - квадрат напряжённости внешнего поля, создаваемого точечным диполем в точке центра масс капли.

При рассмотрении в балансе давлений слагаемых порядка $\eta^{1/2}$, получим уравнение, связывающее давление инерции и соответствующую компоненту электрического давления. Выполнение баланса давлений на поверхности капли требует, чтобы давление инерции на поверхности капли описывалось выражением вида:

$$P_{in}^0 = -\frac{Q}{4\pi} \sum_{k=1}^{k_m} (S_k + (k+1)F_k) P_k(\mu)$$

Рассмотрим слагаемые баланса давлений порядка η^1 , для чего сгруппируем их, и, используя ортогональность полиномов Лежандра, получим выражения для коэффициентов a_n равновесной формы поверхности капли:

$$r(\theta) = 1 + h(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{2k_m} a_n P_n(\mu). \quad (2.3.19)$$

$$a_n = \frac{1}{8\pi(k-1)(k+2 - \frac{Q^2}{4\pi})} \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{m=-k}^k (S_{n+m} + (n+m+1)F_{n+m})(S_k + (k+1)F_k) U_{m,n+m,n}$$

где $U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 \right)^2$, а $C_{a,0}^{c,0}; b,0$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Примем, что в этом и последующих выражениях параграфа коэффициенты $F_k, S_k = 0$ при $k < 1$, так как в разложениях (2.3.14), (2.3.16) коэффициенты с отрицательными индексами отсутствуют. Отметим, также, что коэффициент S_0 разложения (2.3.16) равен нулю сам по себе, а F_0 просто отсутствует в выражении для производной потенциала $\partial_r \Phi^{(0)}$, которое и применяется для расчёта электрического давления на поверхности капли. Напомним также, что использовавшиеся выше разложения (2.3.14), (2.3.16) получены с относительной погрешностью $\delta < 1\%$ при $L \geq 3$ и $k_m = 9$ для каждого из них.

Итак, решение задачи нулевого порядка малости по ε позволило определить явный вид выражений для равновесной формы поверхности капли (2.3.19) в поле точечного диполя и электростатического потенциала в её окрестности (2.3.15), которые будут использоваться при решении задачи первого порядка малости по ε .

Получение эволюционного уравнения. Для анализа устойчивости полученной равновесной формы (2.3.19) сформулируем задачу первого порядка малости по параметру ε . Её математическая постановка, полученная из исходной системы уравнений, состоит из уравнений Лапласа для гидродинамического потенциала ψ и поправки к электрическому потенциалу $\Phi^{(1)}$, естественных условий в особых точках и соответствующих граничных условий:

$$\Delta\psi(r, \theta, t) = 0; \quad r \rightarrow 0: \quad |\nabla\psi(r, \theta, t)| < \infty; \quad (2.3.20)$$

$$\Delta\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad (2.3.21)$$

$$r = r(\theta): \quad P^{(1)} + P_E^{(1)} = P_\sigma^{(1)}; \quad (2.3.22)$$

$$r = r(\theta): \quad -\frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial\theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} = 0; \quad (2.3.23)$$

$$r = r(\theta): \quad \Phi^{(1)}(r, \theta, t) + \frac{\partial\Phi^{(0)}(r, \theta, t)}{\partial r} \xi(\theta, t) = \text{Const}; \quad (2.3.24)$$

где выражения для компонент первого порядка малости соответствующих давлений имеют вид:

$$r = r(\theta): \quad P^{(1)} = F_{in} \xi(\theta, t) \mu - \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial t}; \quad (2.3.25)$$

$$P_E^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{(\nabla\Phi^{(0)})^2}{8\pi} \right) \xi(\theta, t) + \frac{(\nabla\Phi^{(0)} \nabla\Phi^{(1)})}{4\pi}; \quad (2.3.26)$$

$$P_\sigma^{(1)} = 2 \left(-\xi(\theta, t) - 3 \frac{\partial h(\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial\theta} \right) + \Delta_\theta (-\xi(\theta, t) + 2\xi(\theta, t)h(\theta)); \quad (2.3.27)$$

$$\Delta_\theta \equiv \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right);$$

а дополнительные интегральные условия записываются выражениями:

$$\int_0^\pi r^2(\theta) \xi(\theta, t) \sin\theta d\theta = 0; \quad \int_0^\pi r^3(\theta) \xi(\theta, t) \cos\theta \sin\theta d\theta = 0; \quad (2.3.28)$$

$$\int_0^\pi \left[\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} 2\xi(\theta, t) + (2r(\theta) - 1) \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2} \xi(\theta, t) + \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \right] -$$

$$\left. -\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\theta} \frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r \partial\theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} \xi(\theta,t) - \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} \right] \sin\theta d\theta = 0. \quad (2.3.29)$$

Возмущение поверхности капли ищется в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$:

$$\xi(\theta,t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\mu); \quad (2.3.30)$$

Решение уравнения Лапласа для гидродинамического потенциала с учётом ограниченности скорости в центре капли (2.3.20) и кинематического граничного условия (2.3.23) имеет вид:

$$\psi(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) r^n P_n(\mu). \quad (2.3.31)$$

$$V_n(t) = \frac{1}{n} \left(\alpha_n'(t) - \sum_{k=2}^{2kmax} \sum_{m=-k}^k a_k \alpha_{m+n}'(t) \left((-1+m+n) U_{k,m+n,n} - \frac{Y_{k,m+n,n}}{m+n} \right) \right)$$

здесь и далее $U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 \right)^2$, $Y_{a,b,c} = -\sqrt{n(n+1)m(m+1)} \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 C_{a,-1}^{c,0}; b,1 \right)$, где

$C_{a,0}^{c,0}; b,0$ $C_{a,-1}^{c,0}; b,1$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Рассматривая далее уравнение Лапласа для компоненты электрического потенциала первого порядка (2.3.21), запишем его решение, удовлетворяющее условию убывания потенциала на бесконечности, в виде:

$$\Phi_d^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) + Const \quad (2.3.32)$$

Решение (2.3.32) подставляется в условия (2.3.24) и (2.3.29) с учётом выражений для формы поверхности (2.3.19) и (2.3.30), откуда определяются коэффициенты K_n . Процедура аналогична рассмотренной выше для компоненты

потенциала $\Phi_d^{(0)}$. Вторую производную $\partial_{r,r} \Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1}$, которая необходима при расчёте $\Phi_d^{(1)}$, разложим по полиномам Лежандра с формальными коэффициентами $G_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_{r,r} \Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu$. Определив явный вид коэффициентов G_k так же, как это было сделано ранее для $\partial_r \Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1}$ и $\Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1}$, запишем приближённое выражение:

$$\partial_{r,r} \Phi_{ex}^{dip} \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} G_k \cdot P_k(\mu) \quad G_k = \frac{P}{L^2} (k-1)k(k+1)L^{-k} \quad (2.3.33)$$

Для разложения (2.3.33) проводятся оценки точности, аналогичные тем, что описаны выше для разложений внешнего потенциала (2.3.14) и его первой производной (2.3.16). Принимая величину относительной погрешности разложения $\delta \leq 1\%$, для случая $L \geq 3$ получим значение $k_m = 12$. Это значение k_m в дальнейшем будет применяться и для разложений (2.3.14), (2.3.16), поскольку это только повысит их точность и при этом позволит компактнее записывать последующие выражения данного параграфа. В результате получим выражение для поправки к потенциалу в окрестности возмущённой поверхности капли:

$$\Phi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-(n+1)} P_n(\mu) \cdot \left[Q\alpha_n - \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k ((k+1)F_k + S_k)\alpha_{n+m} U_{k,n+m,n} + \right. \quad (2.3.34)$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=-k}^k Qa_k \alpha_{n+m} (k+m+n) U_{k,n+m,n} \right] + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{k_m} (2S_k + G_k - F_k k(k+1)) \alpha_k U_{k,k,0}$$

Для удовлетворения динамическому граничному условию (2.3.22), необходимо получить выражения для добавок первого порядка малости по амплитуде возмущения к давлениям капиллярных сил $P_\sigma^{(1)}$, электрического поля $P_E^{(1)}$ и гидродинамического давления $P^{(1)}$ на возмущённой поверхности капли.

Поправку к давлению капиллярных сил $P_\sigma^{(1)}$ получим, подставляя (2.3.19) и (2.3.30) в выражение (2.3.27), и учитывая собственные значения оператора Δ_θ :

$$\Delta_\theta P_n(\cos \theta) = -n(n+1)P_n(\cos \theta)$$

В результате получим

$$P_\sigma^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \left(\alpha_n(t)(n-1)(n+2) + \right. \quad (2.2.35)$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=-k}^k U_{k,n+m,n} a_k \alpha_{n+m}(t) (4 - 2k(k+1) - 2(n+m)(n+m+1)) \right)$$

Поправка к электрическому давлению на поверхности капли $P_E^{(1)}$ рассчитывается по формуле (2.2.26), с учётом выражений (2.2.15), (2.2.34) для компонент потенциала, и выражений (2.2.19), (2.2.30) для формы поверхности возмущённой капли:

$$P_E^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu) \left[\frac{Q^2}{4\pi} \alpha_n(t)(n-1) + \right. \quad (2.2.36)$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k \frac{Q}{4\pi} ((1+k)(2+k-m-2n)F_k - G_k - (m+2n)S_k) \alpha_{n+m}(t) U_{k,n+m,n} +$$

$$+ \sum_{k=2m=-k}^{2k_m} \sum_{k=2m=-k}^k \left(\frac{Q^2}{4\pi} a_k \alpha_{n+m}(t) \cdot \left((10 - k^2 + m^2 + 4n + m(4+n) - k(6+n)) U_{k,m+n,n} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + Y_{k,m+n,n} \right) + \frac{1}{4\pi} \alpha_{n+m}(t) U_{k,n+m,n} \sum_{l=0}^{k_m} \sum_{d=-l}^l (G_l - F_l(1+l)(2+l))(S_{k+d} + \right.$$

$$+ F_{k+d}(k+d+1)) U_{l,k+d,k} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k \sum_{l=0}^{k_m} \sum_{d=-l}^l (S_k + F_k(k+1)) \cdot$$

$$\left. \cdot ((l+1)F_l + S_l)(n+m+1) \alpha_{n+m+d}(t) U_{l,n+m+d,n+m} \right) U_{k,n+m,n} \left. \right]$$

Поправка к гидродинамическому давлению рассчитывается по формуле (2.3.25), с учётом выражений (2.3.30), (2.3.31) и (2.3.19):

$$P^{(1)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3Q}{4\pi} \frac{2p}{L^3} (\alpha_{1+n}(t)U_{1,1+n,n} + \alpha_{-1+n}(t)U_{1,-1+n,n}) - \quad (2.3.37)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\alpha_n''(t) + \sum_{k=2m=-k}^{2k_m} \sum_{k=2m=-k}^k a_k \alpha_{m+n}''(t) \left((m-1)U_{k,m+n,n} - \frac{Y_{k,m+n,n}}{m+n} \right) \right) P_n(\mu)$$

Здесь, как и в аналогичном выражении предыдущего параграфа (2.2) сила инерции рассчитывается в квазиоднородном приближении, считая величину внешнего поля равной $E_c = \frac{2p}{L^3}$.

Баланс давлений (2.3.22) записывается с использованием выражений (2.3.35), (2.3.36), (2.3.37) для поправок к капиллярному $P_{\sigma}^{(1)}$, электрическому $P_E^{(1)}$ и гидродинамическому $P^{(1)}$ давлениям. Все слагаемые переносятся в левую часть, объединяются в общую сумму по n , и с применением свойства ортогональности полиномов Лежандра записывается система связанных дифференциальных уравнений второго порядка. Уравнения приводятся к каноническому виду путём деления каждого уравнения на коэффициент при $\alpha_n''(t)$, и представляются в следующем виде:

$$\alpha_n''(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) - \sum_{m \in M} \left(C_m^f(n) \alpha_{n+m}(t) + C_m^d(n) \alpha_{n+m}''(t) \right) = 0. \quad (2.3.38)$$

Выражения для коэффициентов $C_m^f(n)$, $C_m^d(n)$ приведены в Приложении. Здесь и далее в текущем параграфе (аналогично рассмотренному ранее случаю поля точечного диполя) множество $M = \{-2k_m, -2k_m + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2k_m - 1, 2k_m\}$ - определяет спектр гармоник, связанных с n -ой гармоникой осцилляций, а собственная частота ω_n колебаний этой гармоники, определяется выражением:

$$\begin{aligned}
\omega_n^2 = & n(n-1) \left(n+2 - \frac{Q^2}{4\pi} \right) - n \left(\sum_{k=0}^{k_m} \frac{Q}{4\pi} ((1+k)(2+k-2n)F_k - G_k - 2nS_k) U_{k,n,n} \right) - \\
& - n \left[\sum_{k=2}^{2k_m} a_k \left((2k + 2k^2 + 3(-2+n+n^2)) + \right. \right. \quad (2.3.39) \\
& \left. \left. + \frac{Q^2}{4\pi} (4 - 3k - k^2 - 4n + 2kn) \right) U_{k,n,n} + \left(n^2 + n + \frac{Q^2}{4\pi} - 2 \right) \frac{Y_{k,n,n}}{n} \right] + \\
& + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k \sum_{l=|m|}^{k_m} (S_k + F_k(k+1)) ((l+1)F_l + S_l) (n+m+1) U_{l,n,n+m} U_{k,n+m,n} + \\
& + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=0}^{k_m} \sum_{l=-m}^m U_{m,k+l,k} (S_{k+l} + F_{k+l}(k+l+1)) (G_m - F_m(1+m)(2+m)) U_{k,n,n} \quad \left. \right] \\
& U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 \right)^2
\end{aligned}$$

$$Y_{a,b,c} = -\sqrt{n(n+1)m(m+1)} \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 C_{a,-1}^{c,0}; b,1 \right)$$

где $C_{a,0}^{c,0}; b,0$ $C_{a,-1}^{c,0}; b,1$ - коэффициенты Клебша-Гордана,

Заметим, что нижний индекс j амплитуд $\alpha_j(t)$ не может быть отрицательным, поэтому будем полагать $\alpha_j(t) = 0$ при $j < 0$.

На основе выражения (2.3.39) из критического условия устойчивости осцилляций поверхности капли $\omega_{n\ cr}^2 = 0$ можно получить выражение для критического значения полевого параметра w_{cr} . Отметим, что в данном случае существуют два значения параметра w_{cr} , как и для капли в поле точечного заряда, рассмотренной в параграфе 2.2.

Решение эволюционного уравнения. Рассмотрим амплитуды $\alpha_n(t)$ отдельных гармоник осцилляций поверхности капли. Процедура совпадает с рассмотренной ранее для поля точечного заряда (параграф 2.2) и в текущем

параграфе ограничимся приведением результирующих выражений. Общее решение эволюционного уравнения (2.3.38) запишется следующим выражением:

$$\alpha_n(t) = b_n \exp[i(\omega_n t + v_n)] + \sum_{m \in M} b_{n+m} \exp[i(\omega_{n+m} t + v_{n+m})] C_m^s(n) + \text{к.с.}; \quad (2.3.40)$$

где *к.с.* - слагаемые, комплексно сопряжённые к выписанным, b_n , v_n - вещественные коэффициенты, определяемые из начальных условий, а

$$C_m^s(n) = \frac{C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n)}{\omega_n^2 - \omega_{n+m}^2}.$$

Зададим в начальный момент времени возбуждение с постоянной амплитудой ζ единичной гармонике с номером k . Скорость движения поверхности капли в начальный момент примем равной нулю. В математическом представлении такие начальные условия будут иметь вид:

$$t = 0: \quad \alpha_n(t) = \zeta \delta_{n,k}; \quad \alpha'_n(t) = 0 \quad (n \geq 2). \quad (2.3.41)$$

Подстановка решения (2.3.40) в начальные условия (2.3.41) позволяет определить величины b_n , v_n и записать явный вид функции $\xi(\theta, t)$:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) = & \zeta \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + \\ & + \zeta \sum_{m \in M} C_{-m}^s(k+m) [\cos(\omega_k t) - \cos(\omega_{k+m} t)] P_{k+m}(\mu). \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

где $M = \{-2k_m, -2k_m + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2k_m - 1, 2k_m\}$, $C_m^s(n) = \frac{C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n)}{\omega_n^2 - \omega_{n+m}^2}$,

ω_n^2 определяется формулой (2.3.39), а коэффициенты $C_m^f(n)$, $C_m^d(n)$ приведены в Приложении.

Анализ результатов. Устойчивость поверхности капли в неоднородном электростатическом поле точечного диполя определяется такими же основными характеристиками, как и в случае капли в электростатическом поле точечного

заряда (см. параграф 2.2). Ими являются – зарядовый параметр $W = \frac{Q^2}{16\pi}$, и полевой параметр $w = \frac{E_c^2}{16\pi}$, определяющие характерную величину напряжённости электрического поля вблизи капли, создаваемого как её собственным зарядом, так и внешним полем. Квадрат напряжённости поля точечного диполя в точке центра масс капли определяется выражением: $E_c^2 = \frac{4p^2}{L^6}$. Рассматривая критическое условие устойчивости осцилляций $\omega_{n\ cr}^2 = 0$, несложно получить критические значения полевого параметра w_{cr} . Из графика зависимости w_{cr} от номера моды (рис 2.3.2) видно, что для одного значения зарядового параметра W получается два значения w_{cr} .

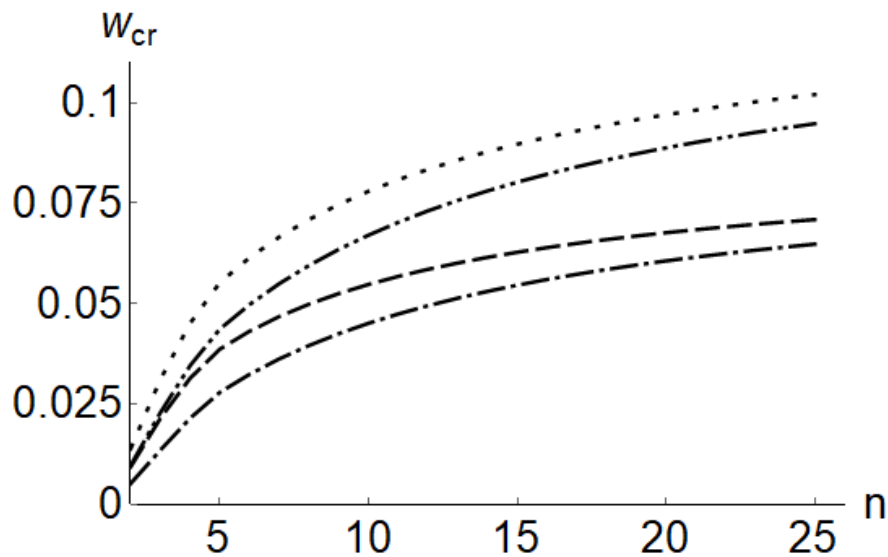


Рисунок 2.3.2 Зависимости критических значений полевого параметра от номера моды. Построено при $L = 3$, $k_m = 12$. Точечная - $W = 0.25$, $pQ < 0$, штрихпунктирная с двумя точками - $W = 0.25$, $pQ > 0$, пунктирная - $W = 0.5$, $qQ < 0$, штрихпунктирная - $W = 0.5$, $pQ > 0$.

Это расщепление критических условий, не наблюдавшееся для капли в однородном поле (см. параграф 2.1) полностью аналогично расщеплению w_{cr} в неоднородном поле точечного заряда. Подробный анализ приведён в

параграфе 2.2. Здесь лишь отметим, что расщепление критических условий связано с неодинаковыми значениями максимальной величины поверхностной плотности заряда на капле в зависимости от направления силовых линий внешнего электростатического поля и знака собственного заряда капли. Другими словами, критическое значение полевого параметра w_{cr} зависит от соотношения между знаком собственного заряда капли и направлением силовых линий поля, характеризующихся знаком дипольного момента p , ($\vec{p} \equiv p \cdot \vec{e}_z$). Если $pQ > 0$ значения w_{cr} будут ниже, чем для случая $pQ < 0$ при равных величинах W , и L . Случай $pQ = 0$, очевидно, является вырожденным и соответствует незаряженной капле в поле точечного диполя или заряженной капле в отсутствие внешнего электростатического поля.

Влияние величины собственного заряда капли Q и расстояния до точечного диполя L на устойчивость возмущённой поверхности капли проиллюстрировано на Рисунке 2.3.3.

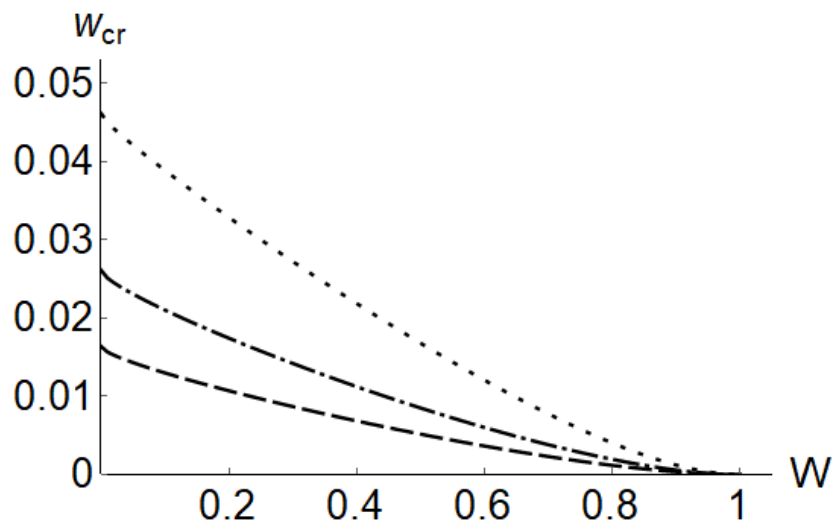


Рисунок 2.3.3 Зависимости критических значений полевого параметра от величины зарядового параметра при $pQ < 0$. Точечная линия - $L = 10$, штрихпунктирная - $L = 4$, пунктирная - $L = 3$.

Область устойчивых осцилляций находится под соответствующими кривыми. Области неустойчивости – выше. Видно, что критические значения

полевого параметра уменьшаются с увеличением W , а уменьшение расстояния L приводит к сокращению области устойчивости капли. Эти результаты соответствуют выводам, приведённым для капли в поле точечного заряда в параграфе 2.2. Добавим, что в предельном переходе к $L \rightarrow \infty$ при фиксированном значении параметра w получим зависимости, соответствующие случаю заряженной капли в однородном электростатическом поле напряжённостью $E_0 = \sqrt{16\pi w}$, где направление поля будет характеризоваться знаком момента p диполя.

Более подробный анализ закономерностей реализации неустойчивости отдельных мод осцилляций приводит к результатам, аналогичным тем, что рассмотрены подробно в конце параграфа 2.1 для однородного поля. Одной из них является выход критических значений полевого параметра на «насыщение» с увеличением номера моды, следствием чего является существование для каждого значения зарядового параметра W такой величины полевого параметра w , при превышении которой неустойчивыми оказываются все моды осцилляций капли. Если в начальный момент времени возбуждается единичная k -я мода осцилляций поверхности, то одновременно с ней возбуждается целый спектр мод с номерами $k - 2k_m \leq n \leq k + 2k_m$. Все эти моды теряют устойчивость одновременно с изначально возбуждённой k -ой модой, даже если критические условия неустойчивости для них не достигнуты. Отметим также, что при задании одинаковой точности разложений потенциала и его производных ($\delta \leq 1\%$) спектр присоединённых мод для капли в поле точечного диполя будет шире, чем для капли в поле точечного заряда. Подробный сравнительный анализ полученных в данном параграфе зависимостей с полями других конфигураций будет приведён позднее в отдельной главе 4.

Глава 3. Заряженная капля в полях сложной формы

3.1. Капля в поле тонкой заряженной нити

В большинстве экспериментов по распаду заряженных капель используются однородные электростатические поля. Однако, существует ряд работ, в которых изучается поведение капель в неоднородных электростатических полях, где поле создаётся парой электродов, один из которых представляет собой металлическую иглу или тонкий проводящий стержень, а второй является пластиной, с размерами, по величине сравнимыми со всей экспериментальной установкой. Текущая глава посвящена рассмотрению устойчивости капли в электростатических полях сложной конфигурации, создаваемых в подобных установках. Точное описание таких полей невозможно как из-за сложной формы электродов, так и вследствие искажений, вносимых окружающим установку оборудованием, например капельницами и ёмкостями для сбора капель. Для приближённого анализа полей подобной конфигурации на устойчивость заряженной капли воспользуемся моделью электростатического поля, создаваемого тонкой заряженной нитью. В литературе тонкой нитью или просто нитью называется тонкий стержень, поперечными размерами которого можно пренебречь, поэтому далее в тексте данного параграфа все эти названия следует считать синонимами.

Постановка задачи. Рассмотрим каплю радиуса R идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости, несущую заряд Q , расположенную вблизи тонкого стержня длиной $2a$ с собственным зарядом q . Центр масс капли располагается на линии оси стержня на расстоянии L от его конца, как показано на Рисунке 3.1.1. Исследуем устойчивость осцилляций поверхности такой капли по отношению к суперпозиции электрического поля собственного заряда и заряда, индуцированного в капле полем заряженной нити.

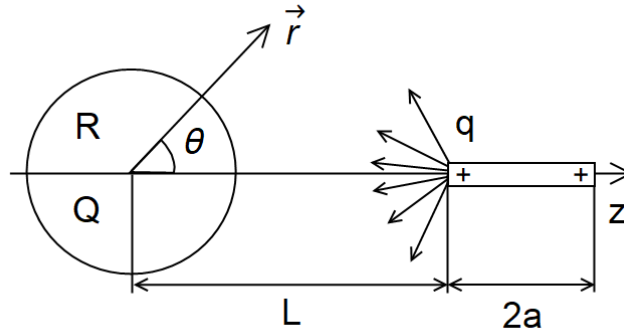


Рисунок 3.1.1. Взаимное расположение капли и тонкого заряженного стержня

Решение задачи проведём в сферических координатах (r, θ, φ) с началом отсчёта в центре масс капли. Ось OZ , от положительного направления которой отсчитывается угол θ , будем считать совпадающей с осью стержня и направленной от центра масс капли к стержню. Зависимостью величин от азимутального угла φ в текущем рассмотрении пренебрежём, т.е. ограничимся рассмотрением осесимметричных осцилляций капли, чтобы избежать излишней громоздкости выкладок. Такой подход, однако, не уменьшит общности рассмотрения. Для конкретизации дальнейших рассуждений примем, что капля находится на значительном расстоянии L от конца стержня, составляющем несколько радиусов R капли. При этом длина стержня $2a$ порядка или больше этого расстояния. То есть между характерными линейными размерами задачи справедливы следующие соотношения: $R \ll L$, $L \sim a$. Форма поверхности капли, находящейся в неоднородном электростатическом поле, отлична от сферической. В сферических координатах она может быть представлена суммой функции $r(\theta)$, описывающей равновесную форму капли, и $\xi(\theta, t)$, описывающей волновое возмущение равновесной поверхности: $r = f(\theta, t) \equiv r(\theta) + \xi(\theta, t)$.

Математически задача формулируется аналогично ранее использованной постановке задач об устойчивости заряженной капли в поле точечного заряда и точечного диполя (см. параграфы 2.2, 2.3). Основой постановки задачи являются классические уравнения электрогидродинамики в предположении малости гидродинамических скоростей по сравнению с релятивистскими:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mathbf{F}_{in}}{\rho} \quad \text{div} \mathbf{V} = 0$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

Здесь и далее \mathbf{V} - скорость волнового течения жидкости; P - гидродинамическое давление в капле, ρ - плотность жидкости. \mathbf{F}_{in} - сила инерции, действующая на единицу объёма, которую вводим при переходе к неинерциальной системе отсчёта, связанной с центром масс капли, так как капля в целом ускоренно перемещается под действием внешнего электрического поля. Величинами \mathbf{E} и Φ будем обозначать напряжённость электрического поля и электрический потенциал соответственно.

Основные уравнения дополняются условием ограниченности скорости жидкости в центре масс капли.

$$r = 0: \quad |\mathbf{V}| < \infty$$

Напряжённость поля, создаваемого системой из капли и нити, должна стремиться к нулю по мере удаления от них:

$$r \rightarrow \infty: \quad E \rightarrow 0$$

Формулируется система гидродинамических и электрических граничных условий на поверхности капли $r = f(\theta, t)$: кинематическое, динамическое и условие эквипотенциальности поверхности капли:

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) F = 0; \quad F(r, \theta, t) \equiv r - f(\theta, t) = 0$$

$$P - P_{atm} + P_E = P_\sigma; \quad \Phi = Const,$$

где P_{atm} - давление внешней среды, P_E и P_σ - давления электрических и капиллярных сил соответственно, определяемые соотношениями:

$$P_E = \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}; \quad P_\sigma = \sigma \cdot \text{div} \mathbf{n}$$

σ - коэффициент поверхностного натяжения жидкости, а орт нормали к поверхности капли \mathbf{n} определяется через функцию поверхности F :

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \Big|_{F=0}$$

Электрический потенциал $\Phi = \Phi_{ex}^r + \Phi_d$ в окрестности капли является суперпозицией потенциала создаваемого Φ_{ex}^r зарядом, расположенными на стержне, и потенциала Φ_d , создаваемого поверхностным зарядом капли. Потенциал тонкого стержня будем моделировать потенциалом тонкой заряженной нити Φ_{ex}^r ([8], стр.227, задача 74) который в сферической системе координат, связанной с центром масс капли, имеет вид:

$$\Phi_{ex}^r = -\frac{q}{2a} \ln \left(\frac{L + r\mu + \sqrt{L^2 + 2Lr\mu + r^2}}{2a + L + r\mu + \sqrt{(2a + L)^2 + 2(2a + L)r\mu + r^2}} \right) \quad \mu \equiv \cos \theta \quad (3.1.1)$$

Сформулированная задача дополняется интегральными условиями сохранения объёма капли, неподвижности центра масс капли при осцилляциях её поверхности и условием сохранения заряда капли:

$$\iiint_V dV = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \iiint_V \mathbf{r} dV = 0; \quad \iint_S \kappa \cdot dS = Q$$

$$\{V : 0 \leq r \leq f(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad \{S : r = f(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

где κ - поверхностная плотность заряда на капле:

$$\kappa = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}, \mathbf{n})$$

Скаляризация. Для удобства расчетов в задаче выполняется переход к безразмерным переменным. Характерными масштабами задачи становятся исходный радиус капли, плотность жидкости и коэффициент поверхностного натяжения на её поверхности: $R=1$, $\rho=1$, $\sigma=1$. Далее в тексте работы все формулы будут по умолчанию приводиться в безразмерном виде. За безразмерными величинами сохраним старые обозначения. Формулы, записанные в размерном виде можно отличить по наличию в них величин R , ρ и σ . Так как в поставленной задаче мы ограничиваемся рассмотрением движений жидкости, связанных с малыми колебаниями свободной поверхности, целесообразным будет

использование модели потенциального течения. Поле скоростей \mathbf{V} в рамках такой модели определяется гидродинамическим потенциалом $\psi(r, \theta, t)$: $\mathbf{V} = \nabla \psi$. В сформулированной выше задаче перейдем к электрическому $\Phi(r, \theta, t)$ и гидродинамическому $\psi(r, \theta, t)$ потенциалам. Благодаря этому, после процедуры скаляризации система уравнений в безразмерных переменных запишется в виде:

$$\Delta \psi = 0; \quad \Delta \Phi = 0$$

$$r = 0: \quad |\nabla \psi| < \infty$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi \rightarrow const$$

$$r = f(\theta, t): \quad -\frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) = 0$$

$$P - P_{atm} + P_E = P_\sigma \quad \Phi = Const$$

где давления, входящие в динамическое граничное условие, определяются выражениями:

$$P_E = \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi}; \quad P_\sigma = div \mathbf{n}; \quad P = P_{st} + P_{in} - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2;$$

$$\mathbf{n} = \left(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [f(\theta, t)] \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}};$$

здесь P_{st} - гидростатическое давление в неосциллирующей деформированной капле, а P_{in} - давление инерции, связанное с ускоренным движением центра масс капли.

Дополнительные условия запишутся в виде:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{f(\theta, t)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi; \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{f(\theta, t)} \mathbf{r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 0;$$

$$r = f(\theta, t): \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\nabla \Phi, \mathbf{n}) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -4\pi Q$$

Линеаризация. Выписанная задача решается в предположении малости волнового искажения поверхности капли: $|\xi(\theta, t)| \ll \min |r(\theta)|$ и, как следствие,

малости скорости течения жидкости, вызванного колебаниями возмущённой поверхности, поэтому будем полагать, что: $|\psi(r, \theta, t)| \sim \max |\xi(\theta, t)| \equiv \varepsilon$. Будем полагать, что равновесная форма капли также мало отлична от сферической $\eta \equiv \max |h(\theta)| \ll 1$, где $h(\theta) \equiv r(\theta) - 1$. При этом собственный заряд капли будет иметь порядок $Q \sim \eta^0$, так как сам по себе (в отсутствии внешнего поля) не искажает равновесную сферическую форму капли. Напряжённость и потенциал внешнего электрического поля, создаваемого нитью, будут иметь порядок $E_{ex} \sim \Phi_{ex}^r \sim \eta^{1/2}$, так как деформация равновесной поверхности капли вызывается компонентой электрического давления, связанной именно с внешним полем. Ограничимся учётом слагаемых, имеющих порядок до η^1 включительно. Искомые величины запишем в виде суммы компонент нулевого и первого порядка по малому параметру ε , пренебрегая слагаемыми более высоких порядков:

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + O(\xi^2); \quad P_E = P_E^{(0)} + P_E^{(1)} + O(\xi^2);$$

$$P_\sigma = P_\sigma^{(0)} + P_\sigma^{(1)} + O(\xi^2); \quad \Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + O(\xi^2);$$

Проводя процедуру линеаризации стандартными методами, получим задачу нулевого порядка по ε для определения равновесной формы поверхности капли и задачу первого порядка для анализа её устойчивости.

Решение задачи нулевого порядка. Равновесная форма капли. Равновесная форма капли в поле тонкой заряженной нити определяется аналогично рассмотренным ранее задачам с другими неоднородными полями, в которых рассчитывались равновесные формы капли в поле точечного заряда (параграф 2.2) и точечного диполя (параграф 2.3).

Краевая задача имеет вид:

$$\Phi^{(0)} = \Phi_d^{(0)} + \Phi_{ex}^r; \quad \Delta \Phi_d^{(0)} = 0 \quad (3.1.2)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_d^{(0)} \rightarrow Const \quad (3.1.3)$$

$$r = r(\theta): \quad \Phi^{(0)} = \text{Const}; \quad (3.1.4)$$

$$r = r(\theta): \quad P_{st} + P_{in}^0 - P_{atm} + P_E^{(0)} = P_\sigma^{(0)}; \quad (3.1.5)$$

$$P_E^{(0)} = \frac{(\nabla\Phi^{(0)})^2}{8\pi}; \quad P_\sigma^{(0)} = \text{div}\mathbf{n}_0 \quad (3.1.6)$$

$$\mathbf{n}_0 = \left(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.1.7)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi; \quad (3.1.8)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)} \mathbf{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 0 \quad (3.1.9)$$

$$r = r(\theta): \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{n}_0, \nabla\Phi^{(0)}) \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = -4\pi Q \quad (3.1.10)$$

В сферических координатах форму поверхности капли будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$:

$$r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu), \quad \mu \equiv \cos\theta.$$

Подставляя это разложение в условия сохранения объёма капли (3.1.8) и неподвижности её центра масс (3.1.9), получим приближённые выражения для коэффициентов a_0 и a_1 соответственно:

$$a_0 = 1 + O\left(\frac{a_n^2}{a_0^2}\right) \approx 1; \quad a_1 = 0 + O\left(\frac{a_n^2}{a_0^2}\right) \approx 0. \quad (3.1.11)$$

С учётом выражений (3.1.11) форма равновесной поверхности $r(\theta)$ и выражение для нормали к ней \mathbf{n}_0 , рассчитываемое по формуле (3.1.7), в линейном по a_n приближении будут иметь вид:

$$r(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad (3.1.12)$$

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(\mu)$$

Решение уравнения Лапласа (3.1.2) для электрического потенциала в сферических координатах для осесимметричного случая, удовлетворяющее условию ограниченности потенциала при $r \rightarrow \infty$ (3.1.3) записывается в виде:

$$\Phi_d^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) + Const \quad (3.1.13)$$

Коэффициенты B_n определяются из условия эквипотенциальности поверхности капли (3.1.4). Для этого воспользуемся линейной независимостью полиномов Лежандра, приравняв коэффициенты, стоящие при полиномах $P_n(\mu)$ одинакового порядка. Потенциал Φ_{ex}^r внешнего поля, создаваемого заряженной нитью на поверхности капли, необходимо представить в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$:

$$\Phi_{ex}^r \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} F_k \cdot P_k(\mu) \quad F_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_{ex}^r \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu \quad (3.1.14)$$

В неоднородных полях простых конфигураций (см. параграфы 2.2 и 2.3) для аналогичных коэффициентов F_k . были получены явные аналитические выражения. В текущей задаче ввиду сложности формы поля тонкой нити это сделать невозможно, поэтому коэффициенты F_k . определяются с использованием численных методов по формулам (3.1.14). Объем вычислений при этом значительно возрастает, поскольку расчеты приходится проводить отдельно для каждого набора параметров: q , a и L . Заметим, что коэффициенты F_k , как и потенциал Φ_{ex}^r , линейно зависят от величины заряда стержня q . Это позволяет сократить объем расчётов, вычисляя для каждой рассматриваемой пары значений a и L величину F_k / q , умножая их потом на необходимую величину заряда q .

Очевидно, что для проведения численных расчётов требуется использовать конечное число слагаемых в разложении (3.1.14), поэтому ограничимся учётом слагаемых, пропорциональных полиномам Лежандра порядка, не превышающего некоторое значение k_m . При замене точного выражения (3.1.1) на приближённое (3.1.14) возникает ошибка, величину которой необходимо оценить. Для оценки будем использовать максимальную по углу θ величину относительной погрешности δ разложения (3.1.14) потенциала, определяемую выражением:

$$\delta = \frac{\Phi_{ex}^r \Big|_{r=1} - \sum_{k=0}^{k_m} F_k \cdot P_k(\mu)}{\Phi_{ex}^r \Big|_{r=1}},$$

где $\Phi_{ex}^r \Big|_{r=1}$ определяется по формуле (3.1.1).

Потребуем, чтобы величина относительной погрешности не превышала 1%. Величина δ имеет как явную зависимость от геометрических параметров задачи a и L в выражении $\Phi_{ex}^r \Big|_{r=1}$, так и неявную в коэффициентах F_k , поэтому требуется проводить большое количество численных оценок величины δ для всех интересующих значений параметров a и L . Опираясь на результаты численных оценок, частично представленных на Рисунке 3.1.2, можно сделать вывод, что с увеличением числа учтённых в разложении (3.1.14) слагаемых величина δ уменьшается.

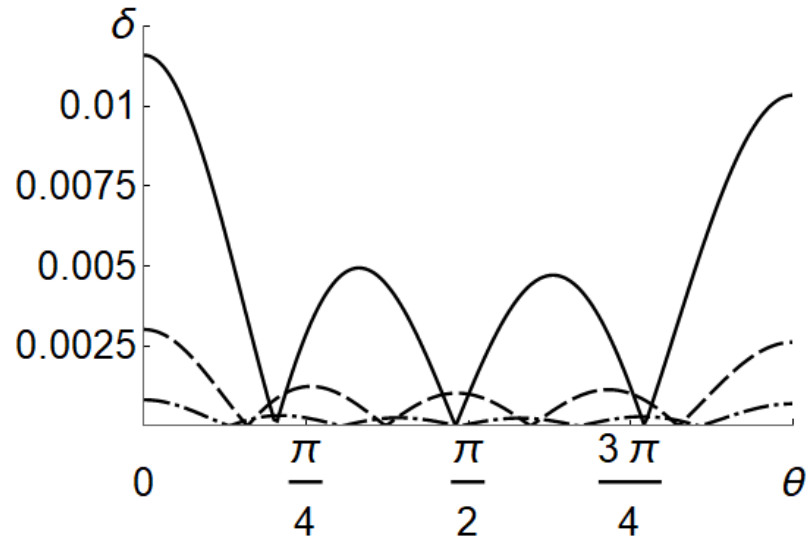


Рисунок 3.1.2 Зависимости относительной погрешности разложения δ от угла, при $L=3$, $a=3$. Сплошная линия - $k_m=2$, пунктирная линия - $k_m=3$, штрихпунктирная - $k_m=4$.

Максимальная по углу величина относительной погрешности для всех рассматриваемых величин a и L соответствует точке $\theta=0$ (см. Рисунок 3.1.2), т.е. достигается на конце капли, обращённом к нити. Построения, представленные на Рисунке 3.1.3, показывают, что величина максимальных значений δ уменьшается как с увеличением длины нити $2a$, так и по мере удаления от неё капли (т.е. с ростом L).

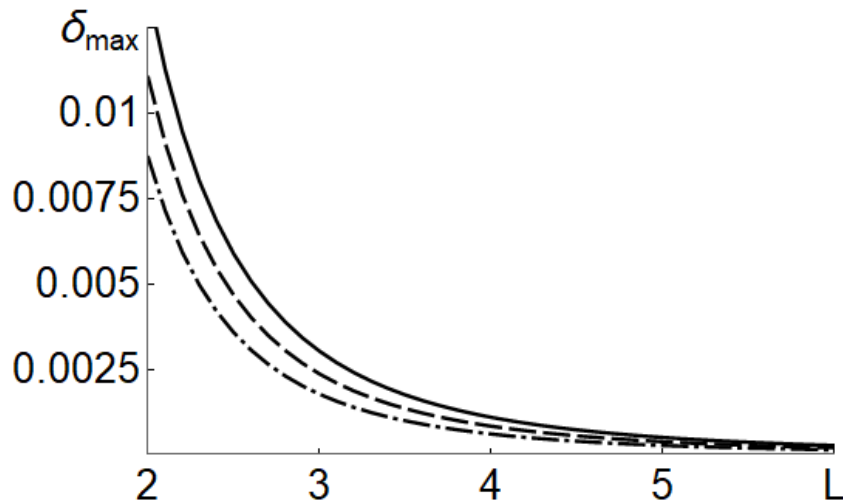


Рисунок 3.1.3 Зависимости максимальной величины относительной погрешности разложения от расстояния L , построенные при $k_m=3$. Сплошная линия - $a=3$, пунктирная - $a=5$, штрихпунктирная - $a=10$.

Эти выводы косвенно подтверждаются аналогичными результатами для рассмотренных в предыдущей главе неоднородных полей. Отметим, что выражение (3.1.1) для потенциала внешнего поля тонкой нити при стремлении параметра $a \rightarrow 0$ переходит в выражение для потенциала точечного заряда (2.2.1). Следовательно, все полученные в данном параграфе формулы при $a \rightarrow 0$ должны переходить в формулы, полученные в параграфе 2.2.

Исходя из вышеприведённых зависимостей, можно ограничиться выбором одного значения k_m , обеспечивающего достаточную точность разложения (3.1.14) во всем рассматриваемом диапазоне значений параметров a и L . Так, используя соотношения между характерными размерами задачи ($R \ll L$, $L \sim a$), для разложения потенциала (3.1.14) при $L \geq 3$ и $a \geq 3$ получим $k_m = 3$, которое и будем использовать. Отметим, что для аналогичного разложения (2.2.14) поля точечного заряда, к которому выполняется предельный переход при $a \rightarrow 0$, максимальный порядок учитываемых слагаемых составлял $k_m = 4$. Однако выше получено меньшее значение $k_m = 3$ связано с тем, что в текущем параграфе рассматриваются не короткие нити, а нити с $a \geq 3$.

Разложение (3.1.14) наряду с решением уравнения Лапласа (3.1.13) подставляются в условие эквипотенциальности поверхности капли (3.1.4), откуда находятся явные выражения для коэффициентов B_n . Подставляя эти же выражения в условие сохранения заряда (3.1.10), получим, что $B_0 = 0$.

Определив явный вид коэффициентов B_n , запишем выражение электростатического потенциала в окрестности равновесной поверхности капли:

$$\Phi^{(0)} \approx \frac{Q}{r} + \Phi_{ex}^r - F_0 - \sum_{k=1}^{k_m} F_k r^{-(k+1)} P_k(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} Q a_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) \quad (3.1.15)$$

Выбрав значение константы интегрирования $const$ в разложении (3.1.13) равной $-F_0$, получим, что потенциал поверхности сферической капли (при $r = 1$) будет равен Q .

Используя явный вид потенциала в окрестности капли (3.1.15) рассчитаем электростатическое давление по формуле (3.1.6). В процессе расчёта возникает необходимость разложить в ряд по полиномам Лежандра производную потенциала на поверхности сферы $\partial_r \Phi_{ex}^r|_{r=1}$:

$$\partial_r \Phi_{ex}^r|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} S_k \cdot P_k(\mu) \quad S_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_r \Phi_{ex}^r|_{r=1} P_k(\mu) d\mu \quad (3.1.16)$$

Для всех рассматриваемых значений параметров a и L проводятся численные построения относительной погрешности потенциала. Окрестности точек, в которых величина $\partial_r \Phi_{ex}^r|_{r=1}$ или её разложение $\sum_{k=0}^{k_m} S_k \cdot P_k(\mu)$ обращаются в ноль, исключаются из оценки величины относительной погрешности аналогично тому, как это сделано ранее в параграфе 2.2 для разложения (2.2.16). Максимальные значения относительной погрешности δ с учётом таких поправок будут достигаться в точке $\theta = \pi$. Построения также показывают, что относительная погрешность разложения убывает с увеличением k_m , a и L , поэтому, требуя, чтобы величина относительной погрешности разложения не превышала 1% для $a \geq 3$ и $L \geq 3$ получим минимальное значение $k_m = 5$. Для компактности записи выражений будем использовать $k_m = 5$, и для ранее полученного разложения (3.1.14), что только повысит его точность.

Далее рассчитываются давления электрических и капиллярных сил на равновесной поверхности капли по формулам (3.1.6), с сохранением слагаемых до величины порядка η^1 включительно:

$$P_E^{(0)} = \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{Q}{4\pi} \sum_{k=1}^{k_m} (S_k + (k+1)F_k) P_k(\mu) + \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n P_n(\mu) +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=1}^{k_m} \sum_{l=-m}^m (S_{k+l} + (k+l+1)F_{k+l}) (S_m + (m+1)F_m) U_{m,k+l,k} P_k(\mu) \quad (3.1.17)$$

$$P_{\sigma}^{(0)} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1)(n+2) P_n(\mu).$$

где $U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 \right)^2$, а $C_{a,0}^{c,0}$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Отметим, что в целях более компактной и удобной формы записи выражений в формулы включены слагаемые, на самом деле являющиеся нулями. Следует обратить внимание, что коэффициент S_0 аналогичных разложений (2.2.16), (2.3.16) производной потенциала в соответствующих параграфах тождественно равен нулю. Численные оценки коэффициента S_0 разложения (3.1.16) показывают, что его значения не превышают погрешности расчётов и на несколько порядков меньше величин остальных коэффициентов, учитываемых в разложении (3.1.16), поэтому в дальнейшем также будем считать его равным нулю. Для расчёта электростатического давления константа F_0 , присутствующая в выражении (3.1.15) для потенциала в окрестности капли, исчезает в выражении для производной потенциала $\partial_r \Phi^{(0)}$, которое и используется для вычисления электрического давления и дальнейших расчётов. В этом и последующих выражениях следует считать значение коэффициента F_0 равным нулю. Отметим, что в данном выражении и далее по параграфу коэффициенты F_k и S_k также следует считать равными нулю и при $k < 0$, так как в разложениях (3.1.14), (3.1.16) коэффициенты с отрицательными индексами отсутствуют.

Выражения (3.1.17) для давлений подставляются в выражение для баланса давлений (3.1.5) и разбивается по порядкам малости η . Рассматривая слагаемые, имеющие порядок η^0 , получим выражение для гидростатического давления P_{st} в капле в равновесном состоянии, а анализируя слагаемые порядка $\eta^{1/2}$ получим выражение для давления инерции P_{in}^0 , удовлетворяющее балансу давлений:

$$P_{st} = 2 - \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{3E_c^2}{8\pi} \quad P_{in}^0 = -\frac{Q}{4\pi} \sum_{k=1}^{k_m} (S_k + (k+1)F_k) P_k(\mu)$$

где $E_c = \frac{q}{L(L+2a)}$ - величина напряжённости внешнего поля, создаваемого заряженной нитью в точке центра масс капли.

При рассмотрении слагаемых баланса давлений порядка η^1 воспользуемся ортогональностью полиномов Лежандра и получим выражения для коэффициентов a_n равновесной формы поверхности капли в виде:

$$r(\theta) = 1 + h(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{2k_m} a_n P_n(\mu). \quad (3.1.18)$$

$$a_n = \frac{1}{8\pi(k-1)(k+2 - \frac{Q^2}{4\pi})} \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{m=-k}^k (S_{n+m} + (n+m+1)F_{n+m})(S_k + (k+1)F_k) U_{m,n+m,n}$$

где $U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 \right)^2$, а $C_{a,0}^{c,0}; b,0$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Отметим, что в формуле (3.1.18) следует считать $F_k, S_k = 0$ при $k \leq 1$ в соответствии с замечаниями к выражению (3.1.17). Напомним также, что в текущем выражении $k_m = 5$, что обеспечивает относительную погрешность разложений (3.1.14), (3.1.16) $\delta < 1\%$ при $a \geq 3$ и $L \geq 3$. В дальнейших расчётах будут использоваться выражения (3.1.15) для потенциала в окрестности капли и (3.1.18) для равновесной формы поверхности.

Получение эволюционного уравнения. Устойчивость полученной равновесной формы (3.1.18) анализируется в задаче первого порядка малости по параметру ε . Математическая постановка и ход решения этой задачи во многом совпадает с рассмотренными ранее постановками (см. параграфы 2.2 и 2.3),

поэтому в текущем параграфе ограничимся приведением ключевых выражений и рассмотрением отличительных моментов.

Краевая задача для расчёта поправки $\Phi^{(1)}$ к электрическому потенциалу состоит из уравнения Лапласа для $\Phi^{(1)}$, условия ограниченности потенциала на бесконечности, условий эквипотенциальности поверхности капли и сохранения её заряда:

$$\Delta\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0;$$

$$r = r(\theta): \quad \Phi^{(1)}(r, \theta, t) + \frac{\partial\Phi^{(0)}(r, \theta, t)}{\partial r} \xi(\theta, t) = Const; \quad (3.1.19)$$

$$\int_0^\pi \left[\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} 2\xi(\theta, t) + (2r(\theta) - 1) \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2} \xi(\theta, t) + \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\theta} \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r \partial\theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} \xi(\theta, t) - \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} \right] \sin\theta d\theta = 0.$$

Краевая задача для расчёта гидродинамического потенциала состоит из уравнения Лапласа, условия ограниченности поля скоростей, и кинематического граничного условия.

$$\Delta\psi(r, \theta, t) = 0; \quad r \rightarrow 0: \quad |\nabla\psi(r, \theta, t)| < \infty;$$

$$r = r(\theta): \quad -\frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial\theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} = 0; \quad (3.1.20)$$

Условие баланса давлений на возмущённой поверхности капли имеет вид:

$$r = r(\theta): \quad P^{(1)} + P_E^{(1)} = P_\sigma^{(1)}; \quad (3.1.21)$$

где компоненты первого порядка малости соответствующих давлений и дополнительные интегральные условия определяются выражениями:

$$r = r(\theta): \quad P^{(1)} = F_{in} \xi(\theta, t) \mu - \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial t};$$

$$P_E^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{(\nabla \Phi^{(0)})^2}{8\pi} \right) \xi(\theta, t) + \frac{(\nabla \Phi^{(0)}) \nabla \Phi^{(1)}}{4\pi}; \quad (3.1.22)$$

$$P_\sigma^{(1)} = 2 \left(-\xi(\theta, t) - 3 \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) + \Delta_\theta (-\xi(\theta, t) + 2\xi(\theta, t)h(\theta));$$

$$\Delta_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right);$$

$$\int_0^\pi r^2(\theta) \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0; \quad \int_0^\pi r^3(\theta) \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0; \quad (3.1.23)$$

Возмущение поверхности капли ищется в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$:

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\mu); \quad (3.1.24)$$

Решение краевой задачи (3.1.20) проводится рассмотренными ранее (см. параграфы 2.2 и 2.3) методами с использованием ортогональности полиномов Лежандра. В результате выражение для гидродинамического потенциала запишется в виде:

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) r^n P_n(\mu). \quad (3.1.25)$$

$$V_n(t) = \frac{1}{n} \left(\alpha_n'(t) - \sum_{k=2}^{2kmax} \sum_{m=-k}^k a_k \alpha_{m+n}'(t) \left((-1+m+n) U_{k,m+n,n} - \frac{Y_{k,m+n,n}}{m+n} \right) \right)$$

здесь и далее $U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0; b,0}^{c,0} \right)^2$, $Y_{a,b,c} = -\sqrt{a(a+1)b(b+1)} \left(C_{a,0; b,0}^{c,0} C_{a,-1; b,1}^{c,0} \right)$, где

$C_{a,0; b,0}^{c,0}$, $C_{a,-1; b,1}^{c,0}$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Перейдём к рассмотрению краевой задачи (3.1.19) для расчёта поправки к электрическому потенциалу. Общее решение для $\Phi_d^{(1)}$, удовлетворяющее условию убывания потенциала на бесконечности, имеет вид:

$$\Phi_d^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) + Const$$

Данное выражение подставляется в граничное и интегральное условия с учетом выражений для формы поверхности (3.1.24), (3.1.18) и для потенциала в окрестности невозмущённой поверхности капли (3.1.15). Это позволяет определить коэффициенты K_n . Вторая производная $\partial_{r,r} \Phi_{ex}^r \Big|_{r=1}$, необходимая для расчета $\Phi_d^{(1)}$, раскладывается по полиномам Лежандра с численными коэффициентами G_k :

$$\partial_{r,r} \Phi_{ex}^r \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} G_k \cdot P_k(\mu) \quad G_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_{r,r} \Phi_{ex}^r \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu \quad (3.1.26)$$

Для разложения (3.1.26) проводятся численные построения с целью оценки его точности, аналогичные тем, что описаны выше для разложений (3.1.14) и (3.1.16). Максимальная величина относительной погрешности будет в точке $\theta = \pi$. Требуя, чтобы величина относительной погрешности разложения $\delta \leq 1\%$, для значения параметров $a \geq 3$ и $L \geq 3$ получим значение $k_m = 8$. Это значение k_m будет применяться далее и для разложений (3.1.14) и (3.1.16) во всех последующих выражениях данного параграфа. В результате, выражение для поправки к потенциалу в окрестности возмущённой поверхности капли запишется в виде:

$$\Phi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-(n+1)} P_n(\mu) \cdot \left[Q\alpha_n - \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k ((k+1)F_k + S_k) \alpha_{n+m} U_{k,n+m,n} + \right. \quad (3.1.27)$$

$$+ \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=-k}^k Qa_k \alpha_{n+m} (k+m+n) U_{k,n+m,n} \left] + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{k_m} (2S_k + G_k - F_k k(k+1)) \alpha_k U_{k,k,0}.$$

Следует отметить, что для полей более простых конфигураций, рассмотренных в предыдущей главе, выражение $(2S_k + G_k - F_k k(k+1))$ тождественно равно нулю. Это справедливо для всех форм внешних по отношению к капле электростатических полей, которые могут быть записаны в виде $\Phi_{ex} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k r^{-(k+1)} P_k(\cos \theta)$. Заметим, что это выражение является общим видом решения уравнения Лапласа в области вне капли, за исключением области, где находятся заряды, создающие внешнее поле. Таким образом, для любого внешнего по отношению к капле электростатического потенциала Φ_{ex} такое представление в окрестности поверхности капли справедливо, а, следовательно, последнее слагаемое в выражении (3.1.27) обращается в ноль. Это подтверждается и численными оценками, которые дают нулевой результат в пределах погрешности вычислений. С учётом этих уточнений поправка к потенциалу запишется более кратко:

$$\Phi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-(n+1)} P_n(\mu) \cdot \left[Q\alpha_n - \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k ((k+1)F_k + S_k) \alpha_{n+m} U_{k,n+m,n} + \right. \quad (3.1.28)$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=-k}^k Qa_k \alpha_{n+m} (k+m+n) U_{k,n+m,n} \right]$$

Полученные выше решения (3.1.25), (3.1.28) краевых задач (3.1.19) и (3.1.20) позволяют рассчитать поправки $P^{(1)}$, $P_E^{(1)}$, $P_\sigma^{(1)}$ к давлениям. С учётом выражений (3.1.15), (3.1.18) и (3.1.24) и собственных значений оператора $\Delta_\theta P_n(\cos \theta) = -n(n+1)P_n(\cos \theta)$, сохраняя слагаемые до величин порядка η^1 , получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
P^{(1)} = & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3Q}{4\pi} \frac{q}{L(L+2a)} \left(\alpha_{1+n}(t) U_{1,1+n,n} + \alpha_{-1+n}(t) U_{1,-1+n,n} \right) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\alpha_n''(t) + \sum_{k=2m=-k}^{2k_m} \sum_{k=2m=-k}^k a_k \alpha_{n+m}''(t) \left((m-1) U_{k,m+n,n} - \frac{Y_{k,m+n,n}}{m+n} \right) \right) P_n(\mu); \\
P_{\sigma}^{(1)} = & \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \left(\alpha_n(t)(n-1)(n+2) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{2k_{max}} \sum_{m=-k}^k U_{k,n+m,n} a_k \alpha_{n+m}(t) (4 - 2k(k+1) - 2(n+m)(n+m+1)) \right); \\
P_E^{(1)} = & \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu) \left[\frac{Q^2}{4\pi} \alpha_n(t)(n-1) + \right. \\
& + \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k \frac{Q}{4\pi} \left((1+k)(2+k-m-2n) F_k - G_k - (m+2n) S_k \right) \alpha_{n+m}(t) U_{k,n+m,n} + \\
& + \sum_{k=2m=-k}^{2k_m} \sum_{k=2m=-k}^k \left(\frac{Q^2}{4\pi} a_k \alpha_{n+m}(t) \cdot \left((10 - k^2 + m^2 + 4n + m(4+n) - k(6+n)) U_{k,m+n,n} + \right. \right. \\
& \left. \left. + Y_{k,m+n,n} \right) + \frac{1}{4\pi} \alpha_{n+m}(t) U_{k,n+m,n} \sum_{l=0}^{k_m} \sum_{d=-l}^l (G_l - F_l(1+l)(2+l))(S_{k+d} + \right. \\
& \left. + F_{k+d}(k+d+1)) U_{l,k+d,k} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k \sum_{l=0}^{k_m} \sum_{d=-l}^l (S_k + F_k(k+1)) \cdot \right. \\
& \left. \cdot ((l+1)F_l + S_l)(n+m+1) \alpha_{n+m+d}(t) U_{l,n+m+d,n+m} \right) U_{k,n+m,n} \left. \right].
\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Сила инерции, входящая в выражение для гидродинамического давления, рассчитывается в квазиоднородном приближении, как и в параграфах 2.2 и 2.3.

Баланс давлений (3.1.21) с учётом выражений (3.1.29) для поправок к давлениям позволяет получить эволюционное уравнение для амплитуд $\alpha_n(t)$:

$$\alpha_n''(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) - \sum_{m \in M} \left(C_m^f(n) \alpha_{n+m}(t) + C_m^d(n) \alpha_{n+m}''(t) \right) = 0. \quad (3.1.30)$$

Коэффициенты $C_m^f(n)$, $C_m^d(n)$ зависят от параметров задачи q , a , L и приведены в Приложении. В данном и последующих выражениях множество $M = \{-2k_m, -2k_m + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2k_m - 1, 2k_m\}$ - определяет спектр гармоник, связанных с n -ой гармоникой осцилляций, а собственная частота ω_n колебаний этой гармоники, записывается в виде:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 = & n(n-1) \left(n + 2 - \frac{Q^2}{4\pi} \right) - n \left(\sum_{k=0}^{k_m} \frac{Q}{4\pi} \left((1+k)(2+k-2n)F_k - G_k - 2nS_k \right) U_{k,n,n} \right) - \\ & - n \left[\sum_{k=2}^{2k_m} a_k \left((2k + 2k^2 + 3(-2 + n + n^2)) + \right. \right. \quad (3.1.31) \\ & \left. \left. + \frac{Q^2}{4\pi} (4 - 3k - k^2 - 4n + 2kn) \right) U_{k,n,n} + \left(n^2 + n + \frac{Q^2}{4\pi} - 2 \right) \frac{Y_{k,n,n}}{n} \right] + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k \sum_{l=|m|}^{k_m} (S_k + F_k(k+1)) ((l+1)F_l + S_l) (n+m+1) U_{l,n,n+m} U_{k,n+m,n} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=0}^{k_m} \sum_{l=-m}^m U_{m,k+l,k} (S_{k+l} + F_{k+l}(k+l+1)) (G_m - F_m(1+m)(2+m)) U_{k,n,n} \end{aligned}$$

$$U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0;b,0}^{c,0} \right)^2$$

$$Y_{a,b,c} = -\sqrt{a(a+1)b(b+1)} \left(C_{a,0;b,0}^{c,0} C_{a,-1;b,1}^{c,0} \right)$$

где $C_{a,0;b,0}^{c,0}$, $C_{a,-1;b,1}^{c,0}$ - коэффициенты Клебша-Гордана. Отметим, что нижний индекс j амплитуд $\alpha_j(t)$ не может быть отрицательным, поэтому будем полагать $\alpha_j(t) = 0$ при $j < 0$.

Используя выражение (3.1.31) для квадрата частоты, из критического условия устойчивости осцилляций поверхности капли $\omega_n^2_{cr} = 0$ нетрудно получить выражение для критического значения полевого параметра w_{cr} .

Общее решение эволюционного уравнения. Получение явного вида амплитуд осцилляций $\alpha_n(t)$ (см. выражение (3.1.24)) начинается с анализа интегральных условий сохранения объёма и неподвижности центра масс. Подставляя (3.1.24) и (3.1.18) в условия (3.1.23), определим $\alpha_0(t)$ и $\alpha_1(t)$.

$$\alpha_0(t) = - \sum_{n=2}^{2k_m} a_n \alpha_n(t) \frac{2}{2n+1};$$

$$\alpha_1(t) = - \sum_{n=1}^{k_m-1} 3a_{n+1} U_{n+1,1,n} \alpha_n \frac{9}{2n+1} - \sum_{n=3}^{k_m+1} 3a_{n-1} U_{n-1,1,n} \alpha_n \frac{9}{2n+1}. \quad (3.1.32)$$

Решение системы уравнений (3.1.30) будем проводить для $n \geq 2$, т.к. амплитуды нулевой и первой гармоник осцилляций $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ уже определены. Воспользуемся методом последовательных приближений. Для этого в нулевом приближении пренебрежём слагаемыми, отвечающими за взаимодействие гармоник, т.е. находящимися в сумме по $m \in M$. Решения получающегося гармонического уравнения, представленные в виде суммы экспонент с комплексно сопряжёнными множителями A_n^+ и A_n^- , используем в следующем приближении для записи слагаемых системы (3.1.30), опущенных в нулевом приближении. Таким образом, получим систему неоднородных дифференциальных уравнений в первом приближении:

$$\frac{\partial^2 \alpha_n(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 \alpha_n(t) -$$

$$- \sum_{m \in M} \left(C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n) \right) \left[A_{n+m}^+ \exp(i\omega_{n+m}t) + A_{n+m}^- \exp(-i\omega_{n+m}t) \right] = 0 \quad (3.1.33)$$

Полное решение этой системы запишется в виде суммы общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Переходя от комплексных констант A_n^+ , A_n^- к вещественным константам v_n и b_n $A_n^\pm = v_n \exp(\pm i b_n)$, получим:

$$\alpha_n(t) = b_n \exp[i(\omega_n t + v_n)] + \sum_{m \in M} b_{n+m} \exp[i(\omega_{n+m} t + v_{n+m})] C_m^s(n) + \text{к.с.};$$

$$C_m^s(n) = \frac{C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n)}{\omega_n^2 - \omega_{n+m}^2} \quad (3.1.34)$$

Буквами *к.с.* обозначены слагаемые, комплексно сопряжённые к выписанным. Вещественные константы b_n и v_n будут определяться из начальных условий.

Устойчивость равновесной формы. Решение с начальными условиями.

Начальные условия зададим в виде возбуждения в начальный момент времени единичной гармонике с номером k и постоянной амплитудой ζ . Скорость движения поверхности капли в начальный момент примем равной нулю. В математическом представлении такие начальные условия будут иметь вид:

$$t = 0: \quad \alpha_n(t) = \zeta \delta_{n,k}; \quad \alpha_n'(t) = 0 \quad (n \geq 2). \quad (3.1.35)$$

Система начальных условий (3.1.35), записанная с учётом решений (3.1.34) представима в виде:

$$\begin{cases} v_n \cos(b_n) + \sum_{m \in M} v_{n+m} \cos(b_{n+m}) \cdot C_m^s(n) = \zeta \delta_{n,k} \\ v_n \omega_n \sin(b_n) + \sum_{m \in M} v_{n+m} \omega_{n+m} \sin(b_{n+m}) \cdot C_m^s(n) = 0 \end{cases} \quad (3.1.36)$$

где $M = \{-2k_m, -2k_m + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2k_m - 1, 2k_m\}$.

Эта система решается с применением метода последовательных приближений, аналогично тому, как решалась система (3.1.30). Пренебрегая в нулевом приближении взаимодействием гармоник (т.е. слагаемыми под знаком суммы по m), получим решение, которое используем в следующем приближении для записи слагаемых, опущенных в нулевом приближении. Получим, что решения системы уравнений в первом приближении нетривиальны лишь для номеров n в интервале $k - 2k_m \leq n \leq k + 2k_m$ и имеют вид:

$$\begin{cases} v_k = \zeta; \\ \sin(b_k) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} v_{k+m} = -\zeta C_{-m}^s(k+m); \\ \sin(b_{k+m}) = 0; \end{cases} \quad m \in M \quad (3.1.37)$$

Явный вид функции $\xi(\theta, t)$ с учётом решений (3.1.37) запишется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) = & \zeta \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + \\ & + \zeta \sum_{m \in M} C_{-m}^s(k+m) [\cos(\omega_k t) - \cos(\omega_{k+m} t)] P_{k+m}(\mu). \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Напомним, что здесь $M = \{-2k_m, -2k_m + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2k_m - 1, 2k_m\}$, определяет спектр гармоник, связанных с изначально возбуждённой гармоникой с номером k ; $C_m^s(n) = \frac{C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n)}{\omega_n^2 - \omega_{n+m}^2}$, ω_n^2 определяется формулой (3.1.31), а коэффициенты $C_m^f(n)$, $C_m^d(n)$ приведены в Приложении.

Анализ результатов. Осцилляции отдельных мод поверхности капли остаются устойчивыми, когда их собственные частоты вещественны. Вещественность ω_n зависит от двух параметров задачи: зарядового параметра

$W = \frac{Q^2}{16\pi}$, характеризующего величину собственного заряда капли, и полевого

параметра $w = \frac{E_c^2}{16\pi}$, определяющего характерную величину напряжённости

внешнего электрического поля вблизи капли. Квадрат напряжённости поля тонкой нити в точке центра масс капли определяется выражением:

$$E_c^2 = \frac{q^2}{L^2(L+2a)^2}. \text{ Критические значения полевого параметра } w_{cr} \text{ увеличиваются}$$

с ростом номера моды. Устойчивость капли определяется наименьшей величиной значения w_{cr} , соответствующей основной моде осцилляций поверхности капли с номером $n=2$. Сами же значения w_{cr} стремятся к горизонтальной асимптотике при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, существует предельное значение w_{cr} , при котором осцилляция любой моды колебаний будет неустойчива. При возбуждении в начальный момент времени единичной k -й гармоники осцилляций поверхности одновременно с ней возбуждается целый спектр гармоник с номерами $k - 2k_m \leq n \leq k + 2k_m$. Гармоники из данного спектра теряют устойчивость одновременно с изначальной возбуждённой k -ой гармоникой, даже если полевой параметр для них не достигает критических значений. Все приведённые выше выводы качественно повторяют результаты, полученные для капли в электростатических полях, рассмотренных в главе 2 и подробно описанных в параграфе 2.1, поэтому здесь ограничимся лишь их упоминанием. Так же, как и в неоднородных полях точечного заряда (параграф 2.2) и точечного диполя (параграф 2.3), в поле тонкой нити наблюдается уменьшение критических значений полевого параметра с увеличением расстояния L . Для выбранного значения W расчёты показывают наличие двух критических значений полевого параметра w_{cr} . Аналогичное расщепление w_{cr} отмечалось и для капель в неоднородных полях простых конфигураций, рассмотренных в главе 2. Расщепление w_{cr} проявляется в виде его зависимости от знака произведения собственных зарядов капли и нити qQ . Данный результат можно интерпретировать из общефизических соображений, как неравнозначность ситуаций с одноимёнными и разноимёнными зарядами на стержне и капле, и, как следствие, генерацию поверхностного заряда разной плотности на поверхности капли.

Интересным представляется проанализировать влияние длины нити на критические условия устойчивости. Как видно из Рисунка 3.1.4 увеличение a приводит к увеличению критических значений полевого параметра.

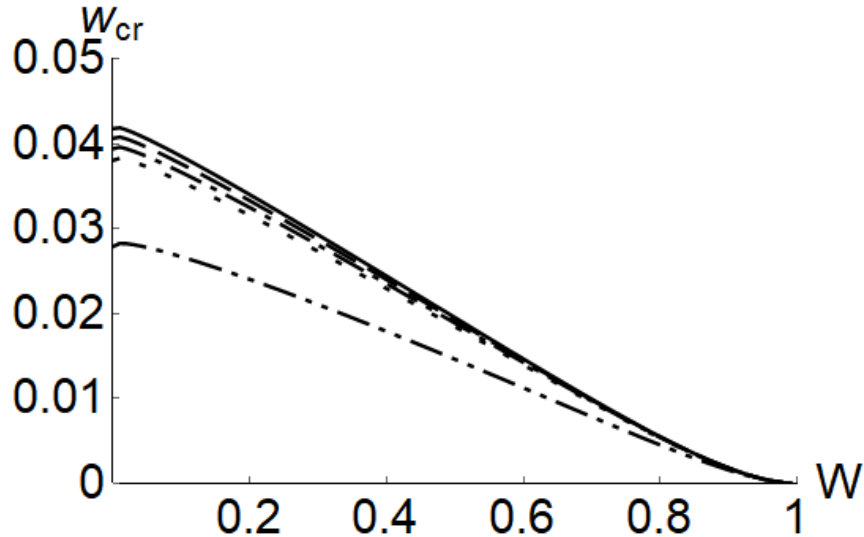


Рисунок 3.1.4. Зависимость критических значений полевого параметра от величины зарядового параметра при $qQ > 0$ и $L = 3$. Сплошная линия - $a = 100$, пунктирная - $a = 10$, штрихпунктирная - $a = 5$, точечная - $a = 3$. Штрихпунктирная с двумя точками – поле точечного заряда величиной q .

Для сравнения на Рисунке 3.1.4 приведены w_{cr} для поля точечного заряда, к которому выполняется предельный переход при $a \rightarrow 0$. На Рисунке 3.1.5 приведены зависимости критических значений полевого параметра от величины зарядового параметра при разных значениях расстояния до центра масс капли L , из которого видно, что величины w_{cr} убывают по мере удаления стержня от капли.

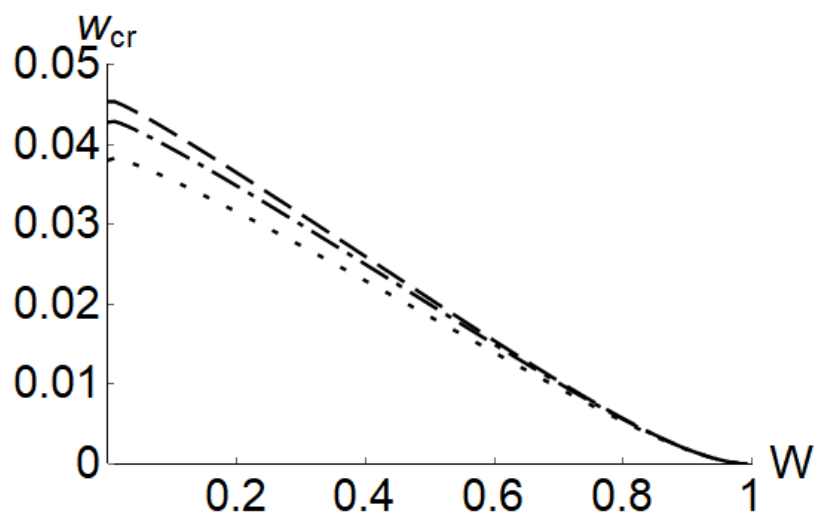


Рисунок 3.1.5. Зависимость критических значений полевого параметра от величины зарядового параметра при $qQ > 0$ и $a = 3$. Пунктирная линия - $L = 5$, штрихпунктирная - $L = 4$, точечная - $L = 3$.

Сравнительный анализ зависимостей, представленных на Рисунке 3.1.4 и Рисунке 3.1.5 позволяет заключить, что при рассмотрении полей тонких заряженных нитей, длина которых много больше расстояния до капли $2a \gg L$ влияние длины нити оказывается значительно более слабым, чем изменение формы поля, связанное с удалением капли от конца стержня.

В текущем анализе ограничимся приведёнными зависимостями, а сравнительный анализ полученных в данном параграфе критических условий с условиями в полях других конфигураций будет приведён позднее в отдельном параграфе.

3.2. Капля в поле стержня конечной толщины, поддерживаемого при постоянном потенциале

Исследования, приведённые в предыдущем параграфе, позволили проанализировать влияние неоднородности поля тонкой заряженной нити на устойчивость поверхности заряженной капли. Однако, в экспериментах размеры иглы или тонкого стержня не всегда существенно меньше размеров капли. При этом заряд на проводящем стержне, как правило, создаётся при помощи генератора, поддерживающего некоторое постоянное напряжение. В текущей главе исследуем устойчивость заряженной капли в электростатическом поле, создаваемом проводящим стержнем некоторой конечной толщины, поддерживаемом при постоянном потенциале, что лучше соответствует условиям лабораторных экспериментов.

Постановка задачи. Пусть имеется капля радиуса R идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости, несущая собственный заряд Q . Жидкость характеризуется плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Капля расположена вблизи цилиндрического стержня длиной $2a$ и диаметром $2b$. Стержень поддерживается при заданном постоянном потенциале φ_0 . Центр масс капли располагается на линии оси стержня на расстоянии L от его конца, как показано на Рисунке 3.2.1. Исследуем устойчивость поверхности такой капли по отношению к суперпозиции собственного заряда и заряда, индуцированного наличием внешнего электростатического поля.

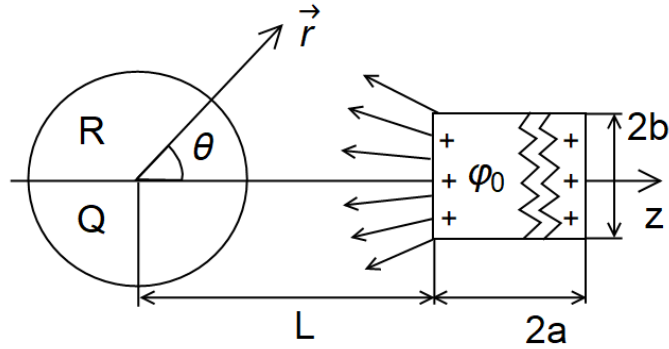


Рисунок 3.2.1. Взаимное расположение капли и стержня

Математическую постановку задачи сформулируем в сферических координатах (r, θ, φ) , разместив начало отсчёта в центре масс капли. Ось OZ , от положительного направления которой отсчитывается угол θ , будем считать совпадающей с осью стержня и направленной от центра масс капли к стержню. Ввиду симметричности геометрии задачи относительно оси OZ ограничимся рассмотрением осесимметричных осцилляций капли, пренебрегая зависимостью величин от азимутального угла φ . Такой подход позволит избежать излишней громоздкости выкладок, не уменьшая общности рассмотрения. Конкретизируем рассуждения, приняв, что капля находится на расстоянии L от конца стержня, значительно превышающем радиус R капли. Толщина $2b$ стержня сравнима с диаметром капли, а длина $2a$ порядка или больше расстояния L . Математически это запишется в виде следующих соотношений между характерными линейными размерами задачи: $R \ll L$, $L \sim a$, $b \sim R$. В сферических координатах форму поверхности представим в виде суммы функции $r(\theta)$, описывающей отличную от сферической равновесную форму капли, и $\xi(\theta, t)$, описывающей волновое возмущение равновесной поверхности: $r = f(\theta, t) \equiv r(\theta) + \xi(\theta, t)$. Задача формулируется на основе классических уравнений электрогидродинамики, записанных в предположении малости скоростей \mathbf{V} движения жидкости в капле по сравнению с релятивистскими. Уравнения и выражения и величины, описывающие эту систему, а также методы решения во многом совпадают с рассмотренной ранее задачей об устойчивости заряженной капли в

электростатическом поле тонкого стержня и в текущем рассмотрении позволяют опираться на процедуру решения в параграфе 3.1. Для краткости ограничимся приведением в этом параграфе особенностей текущей задачи, и анализа полученных результатов.

Математическая постановка задачи формулируется теми же выражениями, что и в задаче об устойчивости заряженной капли в поле тонкого стержня (параграф 3.1) и переходит в неё при $b \rightarrow 0$. Отличием текущей постановки является то, что электрическое поле системы из капли и стержня определяется потенциалом $\Phi = \Phi_{ex}^{sph} + \Phi_d$, который является суперпозицией потенциала Φ_{ex}^{sph} , создаваемого полем стержня, и потенциала Φ_d , создаваемого зарядом капли. Электростатический потенциал цилиндрического стержня конечной толщины будем моделировать потенциалом заряженного проводящего вытянутого сфероида, аналитическое выражение для которого в декартовой системе координат, связанной с центром сфероида, известно. Перейдя в сферическую систему координат, связанную с центром масс капли, и записывая заряд сфероида через его потенциал φ_0 и электроёмкость, получим выражение:

$$\Phi_{ex}^{sph} = \frac{\varphi_0}{\text{Arth}\sqrt{1-b^2/a^2}} \times \text{Arth} \left[\left(4(a^2-b^2) \cdot \left(\sqrt{(r\mu-a-L-\sqrt{a^2-b^2})^2+r^2(1-\mu^2)} + \sqrt{(r\mu-a-L+\sqrt{a^2-b^2})^2+r^2(1-\mu^2)} \right)^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]; \quad (3.2.1)$$

которое используется вместо выражения (3.1.1). Здесь и далее для краткости записи будем использовать обозначение: $\mu \equiv \cos \theta$.

Далее задача обезразмеривается с характерными масштабами $R=1$, $\rho=1$, $\sigma=1$ и скаляризуется и решается согласно методике, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Расчёт равновесной формы капли. Компоненты электростатического потенциала Φ_{ex}^{sph} при расчёте равновесной формы капли необходимо представить в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$:

$$\Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} F_k \cdot P_k(\mu) \quad F_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu \quad (3.2.2)$$

Как и для случая заряженной капли в поле тонкого стержня, в текущем рассмотрении для коэффициентов F_k . не удалось получить явные аналитические выражения ввиду сложности формы поля. Коэффициенты F_k . определяются по формулам (3.2.13) с использованием численных методов. Объем вычислений при этом по сравнению с оценкой аналогичных коэффициентов для простых полей (параграфы 2.2 и 2.3) значительно возрастает, поскольку расчеты приходится проводить отдельно для каждого набора параметров: φ_0 , a , b и L . В текущих оценках применяется тот же способ упрощения расчётов, что и в параграфе 3.1. Напомним, что коэффициенты F_k , как и потенциал Φ_{ex}^{sph} , линейно зависят от величины потенциала φ_0 , подаваемого на стержень. Для каждой рассматриваемой тройки значений a , b и L будем вычислять отношение F_k / φ_0 , умножая его потом на необходимую величину потенциала φ_0 . Для проведения численных расчётов необходимо использовать конечное число слагаемых в разложении (3.2.13). Поэтому ограничимся сохранением слагаемых, пропорциональных полиномам Лежандра порядка, не превышающего некоторое значение k_m . Необходимо провести оценку погрешности, допускаемой при замене точного выражения на приближённое. Для этого используем максимальную по углу θ величину относительной погрешности δ разложения (3.2.2) потенциала, определяемую выражением:

$$\delta = \frac{\Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1} - \sum_{k=0}^{k_m} F_k \cdot P_k(\mu)}{\Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1}},$$

где $\Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1}$ определяется по формуле (3.2.1).

Как и в задаче предыдущего параграфа, потребуем, чтобы величина относительной погрешности не превышала 1%. Величина δ имеет как явную зависимость от геометрических параметров задачи a , b и L через выражение $\Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1}$, так и неявную через коэффициенты F_k . Поэтому, как и в случае поля тонкой нити (параграф 3.1), необходимо проводить численные оценки величины δ для всех интересующих значений параметров a , b и L . Опираясь на результаты численных оценок, можно сделать вывод, что величина δ уменьшается с увеличением числа учтённых в разложении (3.2.2) слагаемых и с увеличением расстояния L . Эти выводы качественно повторяют результаты, полученные ранее для неоднородного поля тонкого стержня (параграф 3.1), и приводиться не будут. Как видно из Рисунка 3.2.2, максимальная по углу θ величина относительной погрешности, характеризующей точность разложения (3.2.2), снижалась по мере увеличения a и b . Стоит отметить, что это справедливо для рассматриваемых в текущей задаче случаев, т.е. когда $b < L$, и не справедливо для стержня, толщина которого сравнима с расстоянием от него до капли.

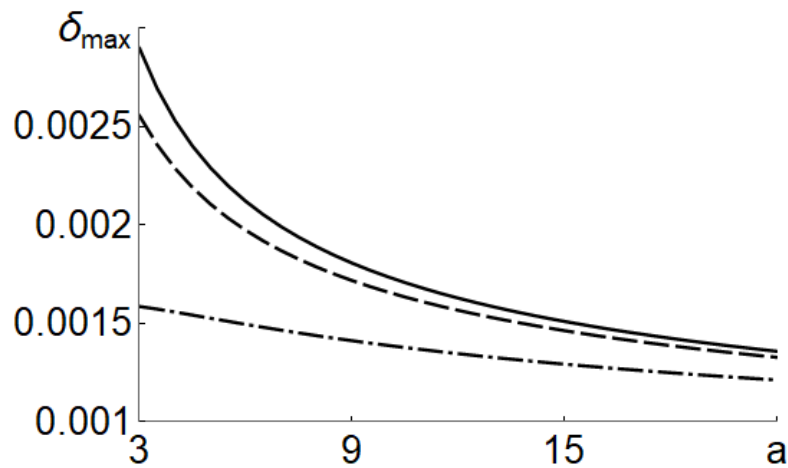


Рисунок 3.2.2 Зависимости максимальной по углу относительной погрешности разложения δ от длины стержня при $L=3$, $k_m=3$. Сплошная линия - $b=0.3$, пунктирная линия - $b=1$, штрихпунктирная - $b=2$.

Исходя из вышеприведённых зависимостей, ограничимся выбором одного значения k_m , обеспечивающего достаточную точность разложения (3.2.2) во всем рассматриваемом диапазоне значений параметров a , b и L . При значениях параметров $L \geq 3$, $a \geq 3$ и $0 > b > 2$ для разложения потенциала получим $k_m = 3$, которое и будем использовать в выражении (3.2.2).

Выражение электростатического потенциала в окрестности равновесной поверхности капли получено в виде (3.1.15), где F_k определяются соотношениями (3.2.2), а $k_m = 3$.

При расчёте электростатического давления величина $\partial_r \Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1}$, должна быть разложена в ряд по полиномам Лежандра, как и $\Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1}$:

$$\partial_r \Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} S_k \cdot P_k(\mu) \quad S_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_r \Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu \quad (3.2.3)$$

Для этого разложения проводятся оценки величины относительной погрешности, аналогичные тем, что проводились ранее для разложения (3.2.13). Отметим лишь, что из оценки величины относительной погрешности исключаются окрестности точек, в которых величина $\partial_r \Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1}$ или её разложение $\sum_{k=0}^{k_m} S_k \cdot P_k(\mu)$ обращаются в ноль. Обоснование этой процедуры

приведено подробно в параграфе 2.2, и здесь повторяться не будет. Величина относительной погрешности разложения (3.2.3) убывает с увеличением k_m , a , b и L в рассматриваемом диапазоне значений параметров. Требуя, чтобы величина относительной погрешности разложения не превышала 1% для $a \geq 3$, $0 > b > 2$ и $L \geq 3$, получим минимальное значение $k_m = 5$. Значение $k_m = 5$, будем использовать и для ранее полученного разложения (3.2.2), что существенно сократит запись выражений и только повысит точность разложения (3.2.2).

Давления электрических и капиллярных сил на равновесной поверхности капли определяются выражениями (3.1.17), с учётом (3.2.2) и (3.2.3). Как и в предшествующем параграфе 3.1, коэффициент S_0 равен нулю. Для проверки этого утверждения проводятся численные оценки коэффициента S_0 , которые показывают, что его значения не превышают погрешности расчётов и на несколько порядков меньше величин остальных коэффициентов, учитываемых в этом разложении. Начиная с выражения (3.1.17) значение коэффициента F_0 следует считать равным нулю, так как он отсутствует в выражении для производной электростатического потенциала в окрестности капли, используемом для расчёта электростатического давления $P_E^{(0)}$. Отметим, что коэффициенты F_k и S_k также следует считать равными нулю и при $k < 0$.

Гидростатическое давление и давление инерции представляются в виде:

$$P_{st} = 2 - \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{3E_c^2}{8\pi} \quad P_{in}^0 = -\frac{Q}{4\pi} \sum_{k=1}^{k_m} (S_k + (k+1)F_k) P_k(\mu)$$

где E_c - величина напряжённости внешнего поля, создаваемого заряженным проводящим стержнем в точке центра масс капли, запишется выражением:

$$E_c = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} |\varphi_0|}{(b^2 + L(2a + L)) \operatorname{Arth} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \quad (3.2.4)$$

Равновесная форма капли, получаемая из динамического граничного условия на поверхности капли запишется выражением (3.2.5):

$$r(\theta) = 1 + h(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{2k_m} a_n P_n(\mu). \quad (3.2.5)$$

$$a_n = \frac{1}{8\pi(k-1)(k+2 - \frac{Q^2}{4\pi})} \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{m=-k}^k (S_{n+m} + (n+m+1)F_{n+m})(S_k + (k+1)F_k)U_{m,n+m,n}$$

где $U_{a,b,c} \equiv \left(C_{a,0}^{c,0}; b,0 \right)^2$, а $C_{a,0}^{c,0}; b,0$ - коэффициенты Клебша-Гордана, а значение $k_m = 5$ в соответствии с получением выражения (3.2.3). Напомним, что это обеспечивает относительную погрешность разложений (3.2.2), (3.2.4) $\delta < 1\%$ для рассматриваемого диапазона значений параметров: $a \geq 3$, $0 > b > 2$ и $L \geq 3$.

Задача первого порядка малости. Далее проводится анализ устойчивости полученной выше равновесной формы (3.2.5). Формулировка и ход решения аналогичны задачам порядка ε^1 , подробно рассмотренным ранее в параграфах 2.2 и 2.3, поэтому в текущем параграфе будут приведены только основные выражения и результаты без детализации процедуры.

Всю систему уравнений можно условно разбить на краевые задачи для расчёта соответствующих компонент электрического и гидродинамического потенциалов, динамическое граничное условие с выражениями для компонент давлений и дополнительные интегральные условия. Напомним, что во всех расчётах ограничиваемся учётом слагаемых до величин, имеющих порядок до η^1 включительно.

В расчётах потребуется представить вторую производную $\partial_{r,r} \Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1}$, в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\partial_{r,r} \Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1} \approx \sum_{k=0}^{k_m} G_k \cdot P_k(\mu), \quad G_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_{r,r} \Phi_{ex}^{sph} \Big|_{r=1} P_k(\mu) d\mu \quad (3.2.6)$$

Получить аналитические выражения для численных коэффициентов разложения G_k не удалось ввиду сложной формы потенциала. Проводится процедура оценки точности разложения (3.2.6), аналогичная описанным выше процедурам для разложений (3.2.2) и (3.2.3). Требования к точности разложения

остаются такими же, как и ранее в этом параграфе - величина относительной погрешности разложения $\delta \leq 1\%$. Для значений параметров $a \geq 3$, $0 < b \leq 2$ и $L \geq 3$ получим значение $k_m = 8$. В целях сокращения записи выражений далее по тексту параграфа значение $k_m = 8$ будет применяться и для разложений (3.2.2) и (3.2.3), что только уменьшит погрешность указанных разложений.

Выражение для компоненты $\Phi^{(1)}$ электрического потенциала представляется в виде (3.1.27). Напомним, что это выражение записано с учётом того, что выражение $(2S_k + G_k - F_k k(k+1))$ тождественно равно нулю для потенциалов Φ_{ex} внешних по отношению к капле электростатических полей, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Подробнее обоснование такого утверждения было рассмотрено ранее при получении выражения (3.1.27). Численная проверка подтвердила справедливость данного утверждения и для рассматриваемой в текущем параграфе конфигурации электростатического поля стежня, поддерживаемого при постоянном потенциале.

При расчётах поправки первого порядка малости к гидродинамическому давлению используется то же приближение, что и для других конфигураций неоднородных полей – сила инерции рассчитывается в квазиоднородном приближении в поле величиной E_c .

Баланс давлений, выписанный с учётом явного вида для поправок к давлениям позволяет получить эволюционное уравнение для амплитуд $\alpha_n(t)$ в виде выражения (3.1.30), и квадрат собственной частоты осцилляций n -ой моды в виде выражения (3.1.31). Коэффициенты $C_m^f(n)$, $C_m^d(n)$ в этих выражениях неявно зависят от параметров задачи φ_0 , a , b , L через коэффициенты F_k , G_k и S_k разложений потенциала внешнего поля и его производных. Выражения для $C_m^f(n)$, $C_m^d(n)$ приведены в Приложении. Множество $M = \{-2k_m, -2k_m + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2k_m - 1, 2k_m\}$, где $k_m = 8$ также определяет спектр мод, связанных с n -ой модой осцилляций.

Критическое для наступления неустойчивости отдельно взятой моды осцилляций поверхности капли условие как и ранее, определяется выражением $\omega_n^2_{cr} = 0$, откуда при подстановке (3.1.31) получим выражение для критического значения полевого параметра w_{cr} , как функции параметров Q , a , b , L задачи.

Напомним, что полевой параметр $w = \frac{E_c^2}{16\pi}$ с учётом выражения (3.2.4).

Волновое возмущение поверхности капли $\xi(\theta, t)$ при начальных условиях, определяемых (3.1.35) примет вид:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) = & \zeta \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + \\ & + \zeta \sum_{m \in M} C_{-m}^s(k+m) [\cos(\omega_k t) - \cos(\omega_{k+m} t)] P_{k+m}(\mu). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

где $M = \{-2k_m, -2k_m + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 2k_m - 1, 2k_m\}$, а $k_m = 8$ определяет спектр мод, связанных с модой с номером k , возбуждение которой задавалось в начальном момент времени. Коэффициенты $C_m^s(n) = \frac{C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n)}{\omega_n^2 - \omega_{n+m}^2}$ с учётом выражений (3.1.31) и коэффициентами разложений, определяемыми (3.2.2), (3.2.3) и (3.2.6) показывают относительный вклад связанных мод с номерами $k+m$, ($m \in M$) в величину возмущения капли.

Анализ результатов. Поверхность капли считается устойчивой, когда осцилляции всех мод устойчивы. Вещественность собственной частоты ω_n , показывающая, что осцилляция данной моды устойчива, зависит от двух основных параметров задачи: зарядового параметра $W = \frac{Q^2}{16\pi}$, и полевого

параметра $w = \frac{E_c^2}{16\pi}$, характеризующих величины собственного заряда капли и

характерную величину напряжённости внешнего электрического поля вблизи

капли. Напряжённость поля тонкой нити в точке центра масс капли определяется выражением (3.2.4).

Основные особенности устойчивости поверхности капли в поле заряженного стержня конечной толщины соответствуют таковым для поля тонкой заряженной нити, поэтому в этом параграфе ограничимся их тезисным упоминанием. Критические значения полевого параметра w_{cr} увеличиваются с ростом номера моды, поэтому устойчивость капли в целом определяется наименьшей величиной значения w_{cr} , соответствующей основной $n=2$ моде осцилляций поверхности капли. При $n \rightarrow \infty$ значения w_{cr} стремятся к горизонтальной асимптотике, и существует предельное значение w_{cr} , при котором осцилляция любой моды колебаний будет неустойчива. При возбуждении в начальный момент времени единичной k -й моды осцилляций поверхности наличие внешнего электростатического поля приводит к возбуждению спектра мод с номерами $k - 2k_m \leq n \leq k + 2k_m$. Моды из данного спектра теряют устойчивость одновременно с изначально возбуждённой k -ой модой, даже если полевой параметр для них не достигает критических значений. Аналогично капле в поле бесконечно тонкого заряженного стержня (см. параграф 3.1) критические значения полевого параметра уменьшаются с увеличением расстояния L . Фиксированному значению зарядового параметра W соответствуют два критических значения полевого параметра w_{cr} . Расщепление w_{cr} проявляется в виде зависимости его значения от знака произведения собственного заряда капли и потенциала стержня $\varphi_0 Q$. Данный результат интерпретируется единообразно для всех рассмотренных в текущей работе неоднородных электростатических полей. Из общефизических соображений его можно объяснить как неравнозначность ситуаций с зарядами одинаковых, либо противоположных знаков на стержне и капле, и, как следствие, генерацию поверхностного заряда разной плотности на поверхности капли.

Проанализируем влияние геометрических размеров стержня на устойчивость поверхности капли. На Рисунке 3.2.3 представлены зависимости критических значений полевого параметра от величины зарядового параметра при разных толщинах стержня, из которых видно, что увеличение толщины стержня увеличивает критические значения полевого параметра.

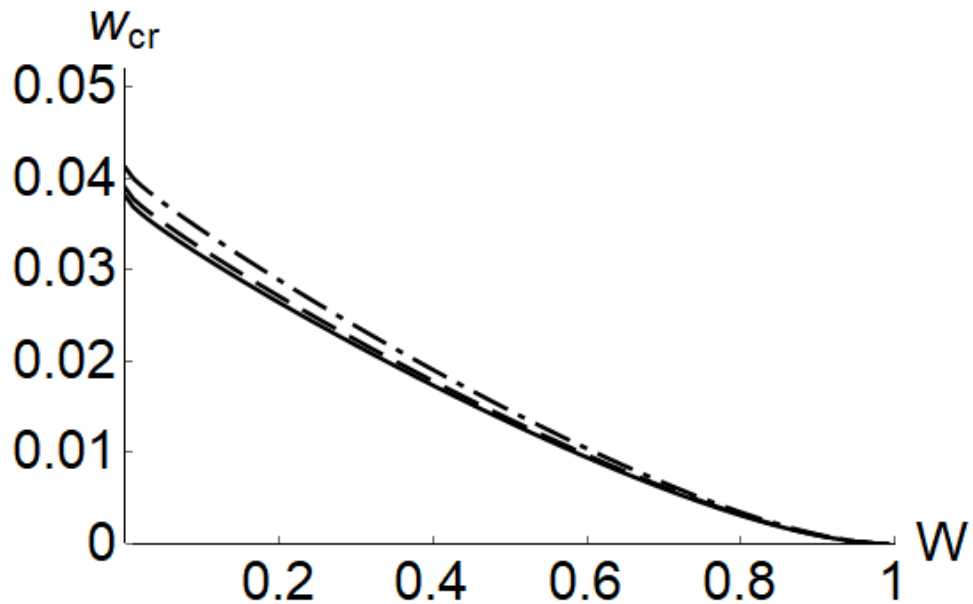


Рисунок 3.2.3. Зависимость критических значений полевого параметра от величины зарядового параметра при $\varphi_0 Q < 0$, $a = 3$ и $L = 3$. Сплошная линия - $b = 0.01$, пунктирная - $b = 1$, штрихпунктирная - $b = 2$.

Отметим, что толщина стержня $2b$ не оказывает существенного влияния на величину w_{cr} при толщинах стержня, меньших диаметра капли. Это можно видеть и из Рисунке 3.2.3, на котором пунктирная линия, построенная при толщине стержня $b = 1$, т.е. равной диаметру капли проходит близко к сплошной линии, соответствующей случаю очень тонкого стержня, толщина которого в сто раз меньше диаметра капли.

На Рисунке 3.2.4 представлены зависимости, аналогичные представленным на Рисунке 3.2.3, но построенные при разных длинах стержня. Построения показывают увеличение критических значений полевого параметра и с

увеличением длины стержня, что соответствует выводам, полученным в предыдущем параграфе.

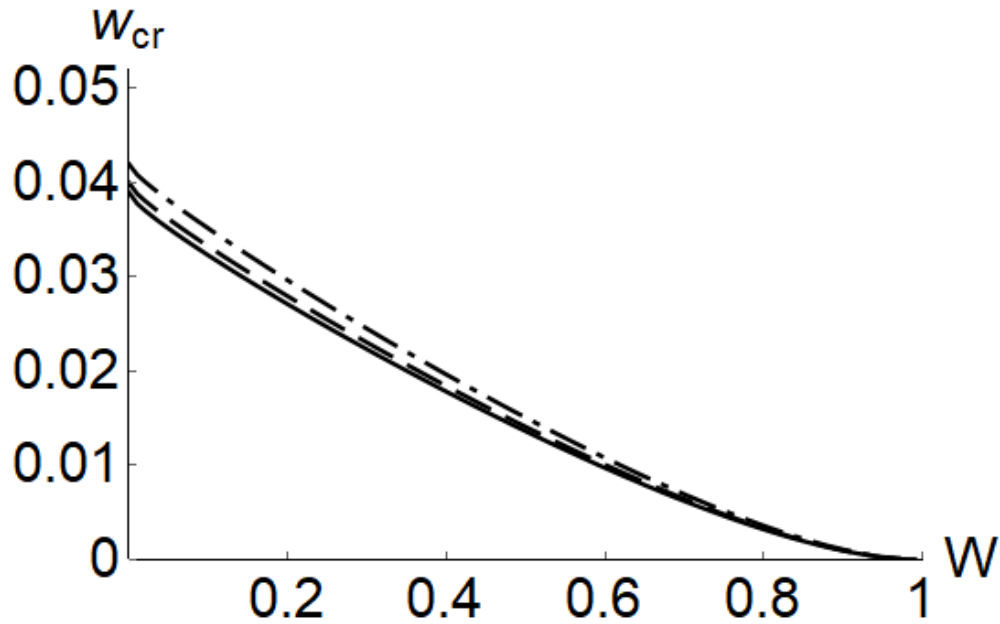


Рисунок 3.2.4. Зависимость критических значений полевого параметра от величины зарядового параметра при $\varphi_0 Q < 0$, $b = 1$ и $L = 3$. Сплошная линия - $a = 3$, пунктирная - $a = 5$, штрихпунктирная - $a = 100$.

Отметим, что ввод полевого параметра, характеризующего величину напряжённость внешнего поля именно в окрестности капли, позволяет проанализировать влияние геометрических параметров задачи и сопутствующего изменения неоднородности поля на устойчивость капли, исключая влияние изменения величины напряжённости поля. Однако, в эксперименте изменение толщины или длины стержня при поддержании на нём постоянного потенциала изменит также и абсолютную величину генерируемого на стержне заряда, что может повлиять на устойчивость капли. Как показывают построения, представленные на Рисунке 3.2.5, критическая величина потенциала, подаваемого на стержень, будет существенно снижаться с увеличением толщины стержня.

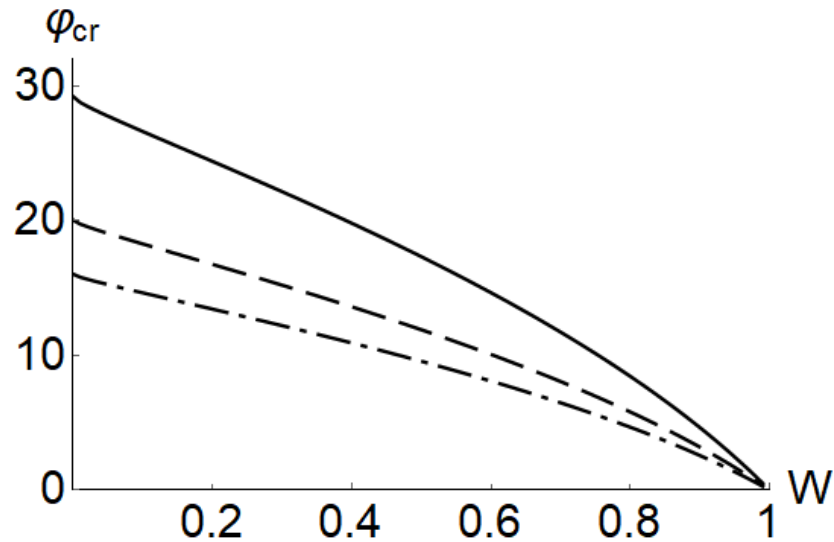


Рисунок 3.2.5. Зависимость критических значений потенциала, подаваемого на стержень, от величины зарядового параметра при $\varphi_0 Q < 0$, $a = 5$ и $L = 3$. Сплошная линия - $b = 0.3$, пунктирная - $b = 1$, штрихпунктирная - $b = 2$.

Напомним, что увеличение толщины стержня одновременно приводит к увеличению критических значений полевого параметра. Проанализируем это из общефизических соображений - увеличение толщины стержня приводит к увеличению его ёмкости, и как следствие (при фиксированном значении потенциала) – к увеличению заряда на его поверхности. Большая величина заряда на конце стержня будет генерировать в близлежащем пространстве поле большей напряжённости, что и приведёт к уменьшению необходимого для распада капли критического значения потенциала, подаваемого на стержень. При этом увеличение толщины стержня, а, следовательно, и его ёмкости, оказывает более существенное влияние, чем сопутствующее уменьшение неоднородности поля и критического значения полевого параметра. Увеличение длины стержня приводит к аналогичному эффекту – критические для распада капли значения потенциала стержня будут заметно снижены за счёт увеличения ёмкости стержня, что проиллюстрировано на Рисунке 3.2.6.

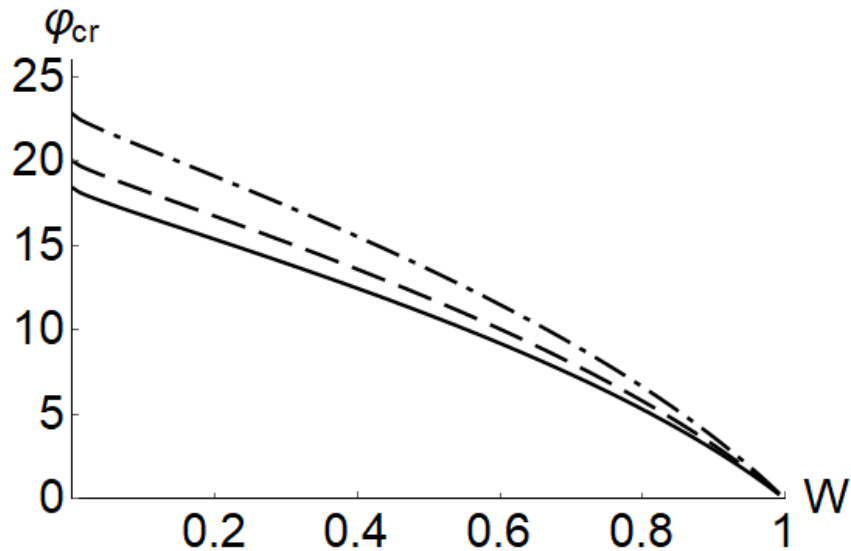


Рисунок 3.2.6. Зависимость критических значений потенциала, подаваемого на стержень, от величины зарядового параметра при $\varphi_0 Q < 0$, $b = 1$ и $L = 3$. Сплошная линия - $a = 10$, пунктирная - $a = 5$, штрихпунктирная - $a = 3$.

Подводя итог вышесказанному, отметим, что увеличение геометрических размеров стержня (в рассматриваемых пределах) уменьшает неоднородность создаваемого им электростатического поля, что выражается в увеличении критического для распада поверхности капли значения полевого параметра, характеризующего напряжённость поля в её окрестности. Однако, за счёт значительного возрастающей при этом ёмкости стержня даже увеличившиеся критические значения напряжённости поля будут достигаться при меньших абсолютных значениях потенциала стержня. То есть в эксперименте использование более крупного стержня приведёт к тому, что распад капли будет наблюдаться при меньших значениях подаваемого на стержень потенциала.

Глава 4. Устойчивость капли в полях различной неоднородности

В предыдущих главах (главы 2 и 3) была рассмотрена устойчивость поверхности капли идеальной жидкости в однородном и неоднородных электростатических полях. В этом параграфе проведём сравнение результатов, полученных ранее. Все приведённые далее по тексту выражения будут записаны в тех же безразмерных переменных, что, использовались ранее в Главах 1 и 2, с характерными масштабами обезразмеривания $R = \rho = \sigma = 1$, где R - исходный радиус капли, ρ - плотность жидкости, σ - коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Подытоживая предыдущие главы, обсудим характеристики устойчивости, свойственные заряженным каплям во всех рассмотренных электростатических полях. Устойчивость поверхности капли определяется устойчивостью отдельных гармоник осцилляций её поверхности, что характеризуется вещественностью собственных частот ω_n . Если осцилляции хотя бы одной гармоники теряют устойчивость, то неустойчивой считается вся поверхность капли. Осцилляции поверхности капли отдельной гармоники будут устойчивы, пока величина E_{ex} внешнего по отношению к капле поля не превысит некоторого критического значения. Это значение зависит как от собственного заряда капли, так от выбранной конфигурации поля и геометрических параметров задачи.

Вводится безразмерный полевой параметр $w = \frac{E_c^2}{16\pi}$, выражающий отношение характерной величины давления внешнего электрического поля E_{ex} к характерной величине давления капиллярных сил на поверхности капли. В качестве характерного значения напряжённости поля E_{ex} , создаваемого внешними по отношению к капле зарядами, выбрано его значение E_c в точке центра масс капли. Такой выбор позволяет отделить влияние величины поля от влияния его неоднородности и степени равновесной деформации поверхности

капли, благодаря чему становится возможным сравнение устойчивости капли в полях разной неоднородности.

Безразмерный параметр, характеризующий величину собственного заряда Q капли вводится аналогично, как отношение характерной величины давления электрического поля собственного заряда к характерной величине давления капиллярных сил на поверхности капли $W = \frac{Q^2}{16\pi}$.

Критические значения полевого параметра w_{cr} увеличиваются с ростом номера гармоникой осцилляций, поэтому устойчивость капли в целом определяется наименьшей величиной значения w_{cr} . Наименьшее значение w_{cr} соответствует основной гармонике осцилляций поверхности капли с $n=2$. Осцилляции гармоник с номерами $n=0,1$ в рамках текущего рассмотрения являются компенсационными и определяются осцилляциями более высоких гармоник.

При $n \rightarrow \infty$ критические значения полевого параметра выходят на горизонтальную асимптотику (см. параграф 2.1), а значит, можно утверждать, что существует комбинация величин полевого w и зарядового W параметров капли, являющаяся закритической для всех мод одновременно. Этот результат качественно отличается от результатов, полученных для заряженной капли в отсутствие внешнего электрического поля, согласно которым величина собственного заряда капли, необходимая для реализации неустойчивости определённой моды, неограниченно возрастает по мере увеличения n .

Возбуждение в начальный момент времени единичной моды осцилляций поверхности с номером k наличие внешнего электростатического поля приводит к возбуждению спектра мод с номерами $k - 2k_m \leq n \leq k + 2k_m$. Для однородного поля $k_m = 1$, а для любого из исследованных неоднородных полей определяется требуемой точностью рассмотрения. Отметим, что моды из данного спектра теряют устойчивость одновременно с возбуждённой в начальный момент времени

k -ой модой, даже если полевой параметр для них не достигает критических значений. Это проиллюстрировано на Рисунке 4.1 на примере капли в однородном поле.

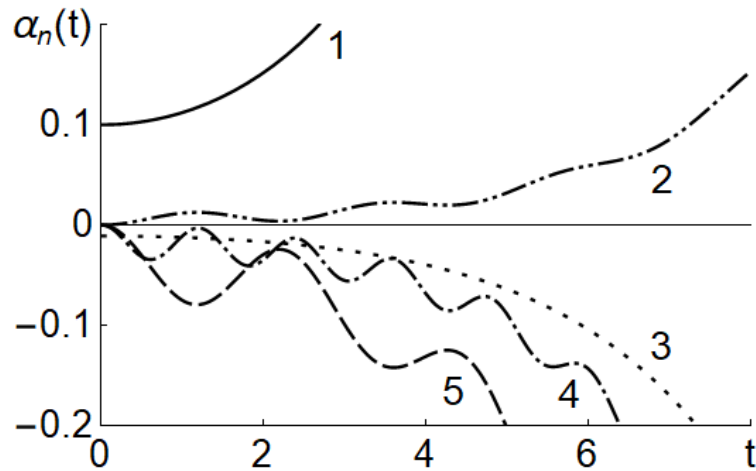


Рисунок 4.1 Временные зависимости амплитуд основной ($n=2$) моды осцилляций и спектра связанных с ней мод. Рассчитано при $W = 0.1$, $w = 0.046$. Обозначения: 1 – основная вторая мода, 2 – первая мода, 3 – нулевая мода, 4 – четвёртая мода, 5 – третья мода.

Таким образом, если капля в начальный момент времени имела волновое возбуждение осцилляций второй моды, то устойчивость капли будет определяться критическим значением полевого параметра для второй моды, однако форма поверхности распадающейся капли будет определяться целым спектром неустойчивых мод.

В отличие от капли в однородном электростатическом поле при рассмотрении капли в неоднородных полях было получено два критических значения полевого параметра для заданного значения зарядового параметра.

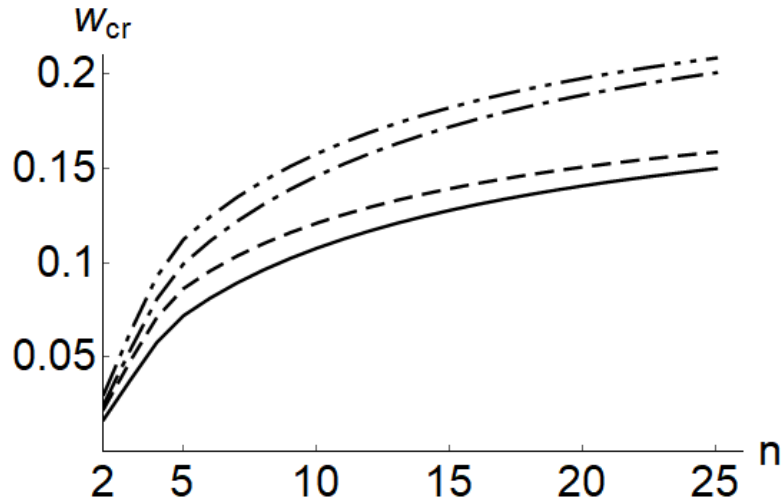


Рисунок 4.2 Критические значения полевого параметра от номера моды при $W = 0.25$.

Штрихпунктирная линия с двумя точками – поле тонкого стержня при $\varphi_0 Q > 0$, $a = 5$, и $L = 3$.

Штрихпунктирная – поле тонкого стержня при $\varphi_0 Q < 0$, $a = 5$, и $L = 3$. Пунктирная – поле точечного заряда при $qQ > 0$, $L = 3$. Сплошная – поле точечного заряда при $qQ < 0$, $L = 3$

Расщепление w_{cr} проявляется в виде зависимости его значения от комбинации направления поля и знака собственного заряда капли. Это объясняется тем, что в случае смены направления поля или знака собственного заряда капли изменяется плотность заряда на её поверхности, которая и приводит к распаду капли (подробный анализ см. параграф 2.2). Критические значения полевого параметра были меньше в тех случаях, когда максимальная по величине поверхностная плотность заряда генерировалась на конце капли, обращённом к источнику внешнего неоднородного поля, т.е. в точке, где напряжённость E_{ex} этого поля была максимальной. Для однородного поля значения w_{cr} одинаковы и такая зависимость отсутствует, что объясняется симметрией постановки относительно плоскости $\theta = \pi / 2$.

Из Рисунка 4.1.3 видно, что критические значения полевого параметра становятся меньше по мере увеличения неоднородности внешнего поля – однородное, поле стержня конечной толщины, поле тонкого стержня, поле точечного заряда и поле точечного диполя.

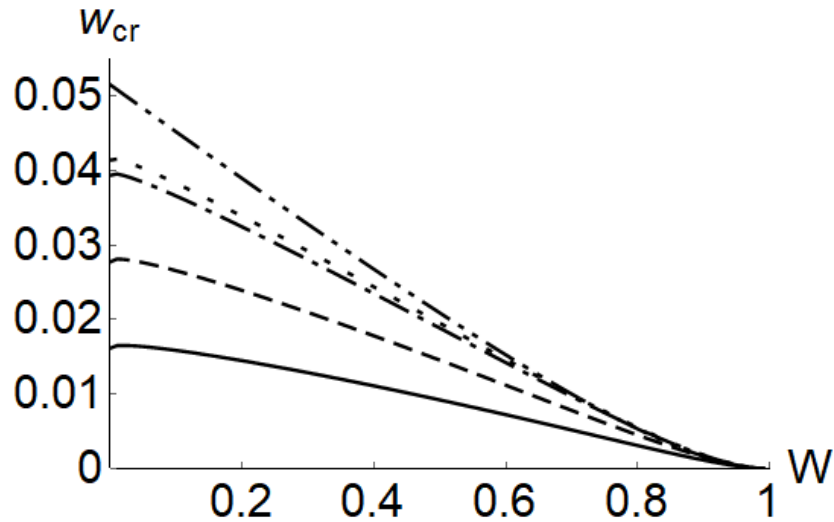


Рисунок 4.3. Зависимость критических значений полевого параметра от величины зарядового параметра в электростатических полях различной конфигурации. Штрихпунктирная линия с двумя точками – однородное поле. Точечная – поле стержня при $\varphi_0 Q > 0$, $a = 5$, $b = 2$ и $L = 3$.

Штрихпунктирная – поле тонкого стержня при $qQ > 0$, $a = 5$, и $L = 3$. Пунктирная – поле точечного заряда при $qQ > 0$, $L = 3$. Сплошная – поле точечного диполя при $pQ < 0$, $L = 3$

Отметим, что под неоднородностью внешнего электростатического поля в данном рассмотрении понимается относительная величина производной напряжённости поля вдоль оси OZ : $\delta = \frac{1}{E_c} \left| \frac{\partial E_{ex}}{\partial z} \right|$. Такое упрощённое определение уместно, поскольку максимальная величина поверхностной плотности заряда, которая и определяет устойчивость поверхности капли, создаётся на капле в точке $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, находящиеся на оси OZ .

В случае, когда максимальная плотность заряда капли создаётся на конце капли, обращённом к источнику внешнего поля, критические значения полевого параметра становятся меньше для всех приведённых неоднородных полей, как можно видеть из сравнения Рисунка 4.4 с Рисунком 4.3.

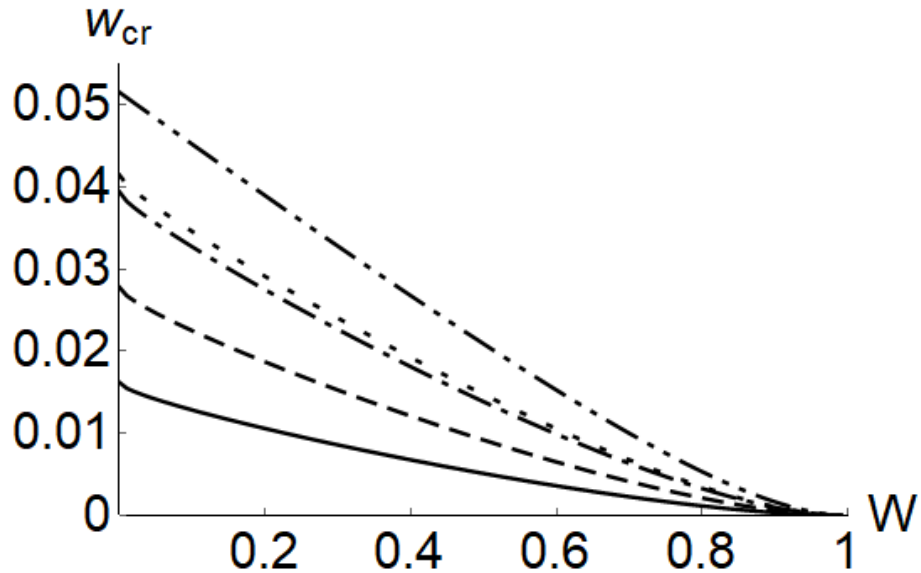


Рисунок 4.4. Зависимость критических значений полевого параметра от величины зарядового параметра в электростатических полях различной конфигурации. Штрихпунктирная линия с двумя точками – однородное поле. Точечная – поле стержня при $\varphi_0 Q < 0$, $a = 5$, $b = 2$ и $L = 3$.

Штрихпунктирная – поле тонкого стержня при $qQ < 0$, $a = 5$, и $L = 3$. Пунктирная – поле точечного заряда при $qQ < 0$, $L = 3$. Сплошная – поле точечного диполя при $pQ > 0$, $L = 3$

Как можно видеть из Рисунков 4.3 и 4.4 критические значения полевого параметра снижаются с увеличением собственного заряда Q на капле для всех рассмотренных полей. При достижении $Q_{cr} = \sqrt{16\pi}$ капля становится неустойчива в электростатическом поле любой величины и конфигурации. Это значение соответствует известной предельной величине собственного заряда изолированной капли, полученной Rayleigh [6]. Удаление капли от источника неоднородного электростатического поля, уменьшает его неоднородность, а при $L \rightarrow \infty$ и сохранении при этом величины E_c все рассматриваемые неоднородные поля переходят в задачу о капле в однородном поле.

Из проведённого выше сравнения можно сделать вывод, что неоднородность внешнего электростатического поля оказывает существенное влияние на условия устойчивости заряженной капли. При этом неоднородность поля стержня оказывает наименьшее влияние на устойчивость капли, а неоднородность поля точечного диполя – наибольшее.

Результаты и выводы

1. В рамках электрогидродинамики проведено аналитическое асимптотическое исследование устойчивости заряженной капли во внешнем электростатическом поле. Установлено, что с ростом номера гармоники критическое значение заряда, при котором реализуется неустойчивость капли при фиксированной напряжённости внешнего поля, выходит на горизонтальную асимптотику. Данный результат отличается от результата Рэлея для изолированной заряженной капли, когда критическое значение заряда неограниченно возрастало с увеличением номером гармоники.

2. В электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций получена аналитическая зависимость критических условий реализации неустойчивости n -й гармоники осцилляций поверхности заряженной капли в однородном и неоднородных полях.

3. Обнаружено, что с увеличением номера гармоники осцилляций зарядовый или полевой параметр монотонно повышаются и стремятся к некоторым постоянным значениям.

4. Установлено, что с увеличением степени неоднородности поля критические условия неустойчивости осцилляций отдельных гармоник и капли в целом снижаются.

5. Продемонстрировано, что неоднородность поля оказывает существенное влияние на критерий устойчивости капли при расположении источников поля на расстояниях от капли порядка ее радиуса.

6. В проведённом сравнительном анализе спектра возбуждаемых гармоник в электростатических полях разной степени неоднородности показано, что с увеличением степени неоднородности поля возрастает число гармоник спектра, связанных с изначально возбуждённой гармоникой.

7. Установлено, что при потере устойчивости некоторой гармоникой осцилляций, одновременно с ней теряет устойчивость весь спектр связанных с

ней гармоник, даже если критические условия реализации электростатической неустойчивости выполняются не для всех связанных взаимодействием гармоник.

8. Обнаружено, что на условия устойчивости капли в неоднородном поле, создаваемом длинным стержнем при постоянном потенциале большее влияние оказывает толщина стержня а не его длина.

9. Выяснено, что снижение критических условий устойчивости капли в поле стержня с увеличением его толщины связано с увеличением ёмкости стержня и соответствующим увеличением напряжённости поля в окрестности капли, а сопутствующее уменьшение неоднородности поля оказывает меньший эффект.

Список литературы

1. Zeleny J. The electrical discharge from liquid points and a hydrostatic method of measuring the electric intensity at their surface//Amer. Phys. Soc. Rev.–1914.–V.3, №2.–P. 69-91.
2. Zeleny J. Instability of electrified liquid surfaces//Phys. Rev .–1917.–V.10, №1.–P.1-6.
3. Wilson C.T.R., Taylor G.T. The bursting of soap-bubbles in a uniform electric field// Proc. Cambridge Phil. Soc .–1925.–V.22.–P. 720-730.
4. Nolan G.G. The breaking of water drops by electric field//Proc. Roy. Irish Akad.–1926.–V.A37.–P. 28-39.
5. Macky W.A. Some investigations on the deformation and breaking of water drops in strong electric fields//Proc. Roy. Soc. London .–1931.–V.A133, №822.–P. 565-587.
6. Gunn R. The free electrical charge on thunderstorm rain and its relation to droplet size//Journal of Geographical Research – 1949. – V.54, №1. – P.57-63.
7. Gunn R., Devin C., Raindrop charge and electric field in active thunderstorms//Journal of Meteorology – 1953. – V.10. – P.279-284
8. R.S. Allan, S.G. Mason, Particle behaviour in shear and electric fields deformation and burst of fluid drops//Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1962. - Vol. 267, №1328. - P. 45-61.
9. Doyle A., Moffett D.R., Vonnegut B. Behavior of evaporating electrically charged droplets//J. Coll. Sci.–1964.–V.19.–P. 136-143.
- 10.Latham J. The mass loss of water drops falling in electric fields//Quart J. R. Met. Soc .–1965.–V.91, №387. –P. 87-91.
- 11.Latham J., Roxburgh I. W. Disintegration of Pairs of Water Drops in an Electric Field// Proc. R. Soc. Lond. A. – 1966.- V.295. – P.84-97

12. Abbas M.A., Latham J. The instability of evaporating charged drops //J. Fluid. Mech.–1967.–V.30, №4. –P. 663-670.
13. Abbas M.A., Latham J. The disintegration and electrification of charged water drops falling in an electric field// Quart J.R. Met. Soc.–1969.–V.95, №4–P.63-76.
14. Azad A.K., Latham J. The disintegration of charged drop-pairs in an electric field//J. of Atmospheric and Terrestrial Physics. 1970. – V.32, №2.-P.345-354
15. Latham J., Myers V. Loss of charge and mass from raindrops falling in intense Electric Fields// J. of Geophysical Research. - 1970 – V.75, №3 – P.515-520.
16. Brazier-Smith P. R., Jennings S. G. and Latham J. an investigation of the behaviour of drops and drop-pairs subjected to strong electrical forces//Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1971 - V.325, №1562.-P.363-376
17. Ausman E. L., Brook M. Distortion and Disintegration of Water Drops in Strong Electric Fields//Journal of Geophysical Research. – 1967.-V.72, №24.-P.6131-6135.
18. Richards C. N., Dawson G. A. The hydrodynamic instability of water drops falling at terminal velocity in vertical electric fields// Journal of Geophysical Research 1971 - V.76,-№15 – P.3445-3455.
19. Colgate S.A., Romero J.M. Charge versus drop size in an electrified cloud//Journal of geophysical research. - 1970 - V.75,-№30 – P.5874-5881
20. Taylor G. Disintegration of water drops in an electric field//Proc. Roy. Soc. A.– 1964.–V.280.–P. 383-397.
21. Owe Berg T. G., George D.C. Investigations of charged water drops//Monthly Weather Review. - 1967–V.95, №12.–P. 884-894.
22. Owe Berg T.G., Gaukler T.A., Trainor R.J. The temperature of strongly charged water droplets//Journal of atmospheric sciences. – 1969.-V.26.– P.558-559.
23. Owe Berg T.G., Trainor R.J., Vaughan U. Stable, unstable and metastable charged droplets//J. Atmos. Sci.–1970.–V.27, №11.–P. 1173-1181.

24. Schweizer J.D., Hanson D.N. Stability limit of charged drops//J. Coll. Int. Sci.-1971.-V.35, №3.-P. 417-423.
25. Roulleau M., Desbois M. Study of evaporation and instability of charged water droplets//J. Atmos. Sci.-1972.-V.29, №4.-P. 565-569.
26. Davis, E.J. A History of Single Aerosol Particle Levitation//Aerosol Science and Technology.-1997.-V.26, №3.-P.212-254.
27. Feng J.Q., Beard K.V. Small-Amplitude Oscillations of Electrostatically Levitated Drops// The Royal Society Proceedings: Mathematical and Physical Sciences, V.430. №1878.-P.133-150.
28. Davis E.J., Ward T.L., Rodenhizer D.G., Jenkins R.W., Mcrae D.D. Radioactive decay measurement of single microparticles in the electrodynamic balance: experimental aspects// Part. Sci. Technol. 1988.-V.6.-P.169.
29. Richardson C.B., Pigg A.L. Hightower R.L. On the stability limit of charged droplets// Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1989. - V.422, №1863 - P.319-328.
30. Taflin D.C., Ward T.L., Davis E.J. Electrified droplet fission and the Rayleigh limit//Langmuir – 1989. - V.5. – P.376-384.
31. Davis E.J., Bridges M.A. The Rayleigh limit of charge revisited: light scattering from exploding droplets//J. Aerosol Sci. – 1994. - V.25, №6 - P.1179-1199.
32. Wildmann J.F., Aardahl C.L., Davis E.J. Observations of non-Rayleigh limit explosions of electrodynamically levitated microdroplets//Aerosol Science and Technology. - 1997 V.27, №5. - P.636-648.
33. Duft D., Lebius H., Huber B.A. Shape oscillations and stability of charged microdroplets// Phys. Rev. Lett. – 2002.-V.89, №8–084503.
34. Li K., Tu H., Ray A.K. Charge Limits on Droplets during Evaporation// Langmuir. 2005. – V.21, №9 – P.3786-3794.
35. Grimm R.L., Beauchamp J.L. Evaporation and discharge dynamics of highly charged droplets of heptane, octane, and p-xylene generated by electrospray ionization//Analytical Chemistry. – 2002. - V.74, №24.– P.6291-6297.

36. Grimm R.L., Beauchamp J.L. Dynamics of Field-Induced Droplet Ionization: Time-Resolved Studies of Distortion, Jetting, and Progeny Formation from Charged and Neutral Methanol Droplets Exposed to Strong Electric Fields// J. Phys. Chem. B. 2005. – V.109, №16.-P.8244-8250.
37. Smith J.N., Flagan R.C. Beauchamp J.L. Droplet evaporation and discharge dynamics in electrospray ionization//J. Phys. Chem. – 2002 - A, V.106. №42. P.9957-9967
38. Achtzehn, T., Mueller, R., Duft, D., and Leisner, T.: The Coulomb instability of charged microdroplets, The European Physical J. D, - 2005 -V.34, P.311–313
39. Fong C.S., Black N.D., Kiefer P.A., Shaw R.A. An experiment on the Rayleigh instability of charged liquid drops// Am. J. Phys.–2007.–V.75, №6 – P.499-505
40. Gomez and Tang K. Charge and fission of droplets in electrostatic sprays// Phys. Fluids.-1994.-V.6.-№1.-P.404-414.
41. Widmann J.F., Aardahl C.L., Davis E.J., Observations of Non-Rayleigh Limit Explosions of Electrodynamically Levitated Microdroplets//Aerosol Science and Technology.-1997.-V.27.-№5.-P.636-648,
42. Grimm R.L., Beauchamp J.L. Dynamics of Field-Induced Droplet Ionization: Time-Resolved Studies of Distortion, Jetting, and Progeny Formation from Charged and Neutral Methanol Droplets Exposed to Strong Electric Fields// J. Phys. Chem. B. 2005. – V.109, №16.-P.8244-8250.
43. Karyappa R.B., Deshmukh S.D., Thaokar R.M. Breakup of a conducting drop in a uniform electric field// J. Fluid Mech. – 2014.- №754.-P.550-589.
44. Karyappa R.B., Naik A., Thaokar R.M. Electroemulsification in a uniform electric field// Langmuir.-V.32, №1.-P.46–54.
45. Kim J.G., Im D.J., Jung Y.M., Kang I.S. Deformation and motion of a charged conducting drop in a dielectric liquid under a nonuniform electric field//Journal of Colloid and Interface Science – 2007, №310.- P.599–606.
46. Kim O.V., Dunn P.F. Controlled Production of Droplets by In-Flight Electrospraying//Langmuir - 2010 V.26. №20.-P.15807–15813

- 47.Mhatre S. Dielectrophoretic motion and deformation of a liquid drop in an axisymmetric non-uniform AC electric field// Sensors and Actuators B -2017.- №239.-P.1098–1108.
- 48.Mhatre S., Thaokar R.M. Drop motion, deformation, and cyclic motion in a non-uniform electric field in the viscous limit// Physics of Fluids – 2013 – V.25, №7- P.072105-17
- 49.Mhatre S., Thaokar R. Electrocoalescence in non-uniform electric fields: An experimental study// Chem. Eng. Process 2015.- №96.-P.28-38.
- 50.Ochs, H. T., Czys, R. R. Charge effects on the coalescence of water drops in free-fall// Nature 1987.- №327, P.606–608.
- 51.Park, J.-U., Hardy, M., Kang, S.J., Barton, K., Adair, K., Mukhopadhyay, D.K., Lee, C.Y., Strano, M.S., Alleyne, A.G., Georgiadis, J.G., Ferreira, P.M. Rogers, J.A. High-resolution electrohydrodynamic jet printing// Nat. Mater.- 2007.- №6, P.782–789.
- 52.Scott, T.C.; DePaoli, D.W.; Sisson, W.G. Further development of the electrically driven emulsion-phase contactor// Ind. Eng. Chem. Res.-1994.- №33.-P.1237-1244.
- 53.Jones T.B., Liquid dielectrophoresis on the microscale// J. Electrostatics.-2001.- №51.-P.290-299.
- 54.Wakeman R.J., Butt G., An Investigation of High Gradient Dielectrophoretic Filtration// Chem. Eng. Res. Des. 2003.- №81.-P.924-948.
- 55.Alinezhad K., Hosseini M.,K. Movagarnejad, and M. Salehi Experimental and modeling approach to study separation of water in crude oil emulsion under non-uniform electrical field// Korean J. Chem. Eng.-2010.- №27.-P.198-205.
- 56.Yang S.M., Yao H., Zhang D., Li W.J., Kung H.F., Chen S.C. Droplet-based dielectrophoresis device for on-chip nanomedicine fabrication and improved gene delivery efficiency//Microfluid Nanofluid.-2015.-V.19.-№1.-P.19-30.
- 57.Chen Q., Ma J., Wang B., Zhang Y. Microscopic mechanism on coalescence of the nano-droplets in present non-uniform electric field by molecular dynamics simulations// AIP Advances.-2016.-V.6.-№11.-115019.

58. Ha, J.W., Yang, S.M. Breakup of a Multiple Emulsion Drop in a Uniform Electric Field// *Journal of Colloid and Interface Science*.-1999.-V.213, №1.-P.92–100.
59. Mhatre S., Deshmukh S., Thaokar R.M. Electrocoalescence of a drop pair// *Physics of Fluids*.-2015.-V.27.-№9.-P.92-106.
60. Hosseini M., Shahavi M.H. Electrostatic Enhancement of Coalescence of Oil Droplets (in Nanometer Scale) in Water Emulsion// *Chinese Journal of Chemical Engineering*.-2012.-V.20.-№4.-P.654–658.
61. Im D.J., Noh J., Moon D., Kang, I.S. Electrophoresis of a Charged Droplet in a Dielectric Liquid for Droplet Actuation// *Analytical Chemistry*.-2011.-V.83.-№13.-P.5168–5174.
62. Luo J., Guo D., Luo J.B., Xie G.X., Numerical simulation of bubble dynamics in a micro-channel under a nonuniform electric field// *Electrophoresis*.-2011.-V.32.-№3.-414-422.
63. Lukyanets A.S., Kavehpour H.P. Effect of electric fields on the rest time of coalescing drops// *Applied Physics Letters*.-2008.-V.93.-№19.-194101.
64. Singh P., Aubry N. Transport and deformation of droplets in a microdevice using dielectrophoresis// *Electrophoresis*.-2007.-V.28.-№4.-644–657.
65. Vivacqua V., Mhatre S., Ghadiri M., Abdullah A.M., Hassanpour A., Al-Marri, M.J., Kermani B. Electrocoalescence of water drop trains in oil under constant and pulsatile electric fields// *Chemical Engineering Research and Design*.-2015.-V.104.-P.658–668..
66. Zagnoni M., Le Lain G., Cooper J.M. Electrocoalescence Mechanisms of Microdroplets Using Localized Electric Fields in Microfluidic Channels. // *Langmuir*.-2010.-V.26.-№18.-14443–14449.
67. Bréchnignac C., Cahuzac P., Carlier F., de Frutos M. Asymmetric fission of Nan++ around the critical size of stability// *Physical Review Letters*.-1990.-V.64.-№24.-P.2893–2896.

68. Tucs A., Bojarevics V., Pericleous K. Magneto-hydrodynamic stability of large scale liquid metal batteries// *Journal of Fluid Mechanics*.-2018.-V.852.-P.453–483.
69. Gurzhi R.N., Kalinenko A.N., Kopeliovich A.I. Electron-Electron Collisions and a New Hydrodynamic Effect in Two-Dimensional Electron Gas// *Physical Review Letters*.-1995.-V.74.-№19.-P.3872–3875.
70. Guet C., Biquard X., Blaise P., Blundell S.A., Gross M., Huber B.A., Rocco J.C. Excitation and fragmentation of highly charged metal clusters in collisions with ions// *Zeitschrift Fur Physik D Atoms, Molecules and Clusters*.-1997.-V.40.-№1.-P.317–322.
71. Brechignac C., Cahuzac P., Carlier F., de Frutos M., Barnett R.N., Landman U. Dynamics and energy release in fission of small doubly charged clusters// *Physical Review Letters*.-1994.-V.72.-№11.-P.1636–1639.
72. Barnett R.N., Landman U., Rajagopal G. Patterns and barriers for fission of charged small metal clusters// *Physical Review Letters*.-1991.-V.67.-№22.-P.3058–3061.
73. Saleh A.M., Clemente R.A. Equilibrium and Stability of Ellipsoidal Liquid Metal Drops in TEMPUS Like Experiments// *Journal of the Physical Society of Japan*.-2001.-V.70.-№1.-P.86–90.
74. Horstmann G.M., Weber N., Weier T. Coupling and stability of interfacial waves in liquid metal batteries// *Journal of Fluid Mechanics*.-2017.-V.845.-№1.-P.35-43.
75. Chandezon F., Tomita S., Cormier D., Grübling P., Guet C., Lebius H., Huber B.A. Rayleigh Instabilities in Multiply Charged Sodium Clusters// *Physical Review Letters*.-2001.-V.87.-№15.-P.34-47.
76. Schapiro O., Kuntz P.J., Hervieux P.A., Gross D.H.E., Madjet M.E., Muhring, K. Fragmentation phase transitions in atomic clusters III// *Zeitschrift Fur Physik D Atoms, Molecules and Clusters*.-1997.-V.41.-№3.-P.219–227.
77. Blaise P., Blundell S.A., Guet C., Zope R.R. Charge-Induced Fragmentation of Sodium Clusters// *Physical Review Letters*.-2001.-V.87.№6.-P.123-135.

78. Deshmukh S.D., Thaokar R.M. Deformation, breakup and motion of a perfect dielectric drop in a quadrupole electric field. // *Phys. Fluids*.-2012.-V.24.-№3.-032105.
79. Deshmukh S.D., Thaokar R.M. Deformation and breakup of a leaky dielectric drop in a quadrupole electric field.// *J. Fluid Mech.*-2013.-V.731.-P.713–733.
80. Mhatre S., Deshmukh S., Thaokar R. Stability of a charged drop near a conductor wall// *Eur. Phys. J.*-2012.-V.35.-№5.-P.39-54.
81. Bezemer C., Croes G.A., Motion of water droplets of an emulsion in a non-uniform field// *Br. J. Appl. Phys.*-1955.-V.6.-P.224-247.
82. Mhatre S., Thaokar R. Pin-plate electrode system for emulsification of a higher conductivity leaky dielectric liquid into a low conductivity medium// *Ind. Eng. Chem. Res.*-2014.-V.53.-№13.-P.488–496.
83. Rayleigh J.W.S. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity// *Phil. Mag.*.-1882.-V.14.-P.184-186.
84. Hendrics C.D., Schneider J.M. Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatic forces// *J. Amer. Phys.*.-1963.-V.1, №6.-P.450-453.
85. Torza S., Cox R. G., Mason S.G. Electrohydrodynamic Deformation and Burst of Liquid Drops// *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*.-1971.-V.269.-№1198.-P.295–319.
86. Morrison C.A., Leavitt R.P., Wortman D.E. The extended Rayleigh theory of the oscillation of liquid droplets. // *Journal of Fluid Mechanics*.-1981.-V.104.-№1.-P.295-309.
87. Wilson C.T.R., Taylor G.I. The bursting of soap-bubbles in a uniform electric field// *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*.-1925.-V.22.-№5.-P.728-744.
88. Inculet I.I., Kromann R. Breakup of large water droplets by electric fields // *IEEE Trans. Ind. Appl.*-1989.-V.25.-№5.-P. 945-948.

89. Ha J.-W., Yang S.-M. Deformation and breakup of Newtonian and non-Newtonian conducting drops in an electric field.//J. Fluid Mech.-2000.-V.405.-P.131–156.
90. Ajayi O.O. A note on Taylor's electrohydrodynamic theory//Proc. R. Soc. Lond. A 1978.-V.364.-P.499–507.
91. Miksis M.J. Shape of a drop in an electric field//Phys. Fluids.-1981.-V.24.-P.1967–1972.
92. Sherwood J.D. Breakup of fluid droplets in electric and magnetic fields.//J. Fluid Mech.-1988.V.188.-P.133–146.
93. Feng J.Q., Scott T.C. A computation analysis of electrohydrodynamics of a leaky dielectric drop in an electric field.//J. Fluid Mech.-1996.-V.311.-P.289–326.
94. Dubash N., Mestel A.J. Behaviour of a conducting drop in a highly viscous fluid subject to an electric field//J. Fluid Mech.-2007.-V.581.-P.469–493.
95. Dubash N., Mestel A.J. Breakup behavior of a conducting drop suspended in a viscous fluid subject to an electric field.//Phys. Fluids.-2007.-V.19.-072101.
96. Zrnic D.S., Doviak R.J., Mahapatra P.R. The effect of charge and electric field on the shape of raindrops//Radio Sci.–1984.–V.19.-№1.–P.75-83
97. Cheng K. Capillary oscillations of a drop in an electric field//Physics Letters A.-1985.-V.112.-№8.-P.392–396.
98. O' Kanski C.T., Thacher H.C. The distortion of aerosol droplets by an electric field//J. Phys. Chemistry.–1953.–V.57, №9.–P. 955-958.
99. O' Kanski C.T., Thacher H.C. Electric free energy and deformation of droplets in electrically conducting system//J. Phys. Chemistry.–1957.–V.61, №9.–P.1172-1174.
100. Moriya S., Adachi K., Kotaka T. Deformation of droplets suspended in viscous media in an electric field 1: rate of deformation.//Langmuir.- 1986.-V.2.-P.155–160.

101. Varshney A., Ghosh S., Bhattacharya S., Yethiraj A. 2012 Self organization of exotic oil-in-oil phases driven by tunable electrohydrodynamics.// *Sci. Rep.*-V.2.-№738.-P.75-89.
102. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Критерий неустойчивости заряженной капли в электростатическом подвесе//*ЭОМ.*–2015.–Т.51, №3.–С. 44-50.
103. Tsamopoulos J.A., Brown R.A. Nonlinear oscillation of inviscid drops and bubbles//*J. Fluid Mech.*–1983.–V.127.–P. 519-537.
104. Tsamopoulos J.A., Brown R.A. Resonant oscillations of inviscid charged drops//*J. Fluid Mech.* –1984.–V.147.–P. 373-395.
105. Tsamopoulos J. A., Akylas T.R., Brown R.A. Dynamics of Charged Drop Break-Up// *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.*-1985.-V.401, №1820.-P.67–88.
106. Feng J. Q., Beard K.V. Small-Amplitude Oscillations of Electrostatically Levitated Drops. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.*-1990.-V.430, №1878.-P.133–150.
107. Adornato P.M., Brown R.A. Shape and Stability of Electrostatically Levitated Drops// *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.*-1983.-V.389, №1796.-P.101–117.
108. Feng J.Q., Beard K.V. A Perturbation Model of Raindrop Oscillation Characteristics with Aerodynamic Effects// *Journal of the Atmospheric Sciences.*-1991.-V.48, №16.-P.1856–1868.
109. Feng J.Q. Electrohydrodynamic behaviour of a drop subjected to a steady uniform electric field at finite electric Reynolds number// *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.*-1999.-V.455, №1986.-P.2245–2269.
110. А.И. Григорьев, А.Н. Жаров, В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева. Капиллярные колебания и устойчивость заряженного пузыря в вязкой диэлектрической жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.*-1998.-№ 5.-С.204-208.
111. А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева. Влияние расклинивающего давления на развитие неустойчивости заряженного

- тонкого слоя жидкости на твердом сферическом ядре // Изв. РАН. МЖГ. 1999.-№ 1.-С.102-106.
112. Григорьев А.И. О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли// ЖТФ.-1986.-Т.56, №5.-С.1272-1278.
113. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Корниенко Д.О. О некоторых закономерностях реализации сфероидальных осцилляций и электростатической неустойчивости заряженной капли// ЖТФ.-2010.-Т.80, №11.-С.11-20
114. Lee S.M., Kang I.S. Three-dimensional analysis of the steady-state shape and small-amplitude oscillation of a bubble in uniform and non-uniform electric fields// Journal of Fluid Mechanics.-1999.-V.384.-P.59–91.
115. Hua C.K., Lee D.W., Kang I.S. Analyses on a charged electrolyte droplet in a dielectric liquid under non-uniform electric fields//Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects.-2010.-V.372, №3.-P.86–97.
116. Fontelos M.A., Kindelán U., Vantzós O. Evolution of neutral and charged droplets in an electric field. Physics of Fluids.-2008.-V.20, №9.-092110.
117. Levine N. E. Disruption of charged water drops in an external electric field//Journal of Geophysical Research.-1971.-V.76, №21.P.5097–5100.
118. Basaran O. A., Scriven L.E. Axisymmetric shapes and stability of charged drops in an external electric field// Physics of Fluids A: Fluid Dynamics.-1989.-V.1, №5.-P.799–809.
119. Shrimpton J.S. Dielectric charged drop breakyup at sub-Rayleigh limit conditions// IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation.-2005.-V.12, №3.-P.573–578.
120. Elghazaly H.M.A., Castle G.S.P. Analysis of the Multisibling Instability of Charged Liquid Drops//IEEE Trans. Ind. Appl.–1987.–V.IA-23, №1.–P. 108-113.
121. Elghazaly H.M.A., Castle G.S.P. Analysis of the Instability of Evaporating Charged Liquid Drops//IEEE Trans. Ind. Appl.–1986.–V.IA-22, №5.–P. 892-895.

Публикации автора по теме диссертации.

Статьи в рецензируемых журналах, включенных в перечень ВАК, или индексируемых базами данных Web of Science и Scopus:

122. Григорьев А.И., Ширяев А.А., Ширяева С.О. О некоторых физических закономерностях реализации неустойчивости капли в однородном электростатическом поле // Изв. РАН. МЖГ.-2013.-№ 5.-С.111-124.
123. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. О равновесных формах проводящей капли в однородном и неоднородных электростатических полях /ЖТФ.-2013.-Т.83, №11.-С.44-51.
124. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. О неустойчивости n-й моды осцилляций заряженной капли в однородном электростатическом поле //ЖТФ.-2015.-Т.85, №1.-С.31-38.
125. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Ширяев А.А. Неустойчивость заряженной капли в кулоновском и дипольном полях //ЖТФ.-2015.-Т. 85, №8.-С.23-32.
126. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Ширяев А.А. Неустойчивость заряженной капли в неоднородном электростатическом поле тонкого стержня.// Изв. РАН МЖГ.-2016.-№2.-С.56-64.
127. Григорьев А.И., Ширяев А.А., Ширяева С.О. Неустойчивость заряженной капли в неоднородном электростатическом поле стержня конечной толщины // Изв. РАН. МЖГ.-2018.-№1.-С.36-50.

Другие публикации:

128. Григорьев А.И., Ширяев А.А. Осцилляции заряженной капли // XXV Международная научная конференция 17-21 сентября 2012 года, Одесса, Украина, Материалы конференции «Дисперсные системы».-С.74-75
129. Ширяев А.А. Нелинейный анализ условий устойчивости поверхности заряженной капли в однородном электрическом поле// Сборник тезисов докладов XIV Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в

неоднородных средах» 26-31 мая 2014 года. МГУ им. М.В. Ломоносова.
<http://waves.phys.msu.ru.-C.17-19>

130. Ширяев А.А. Нелинейное исследование осцилляций поверхности заряженной капли в поле стержня// Материалы международного молодёжного научного форума «Ломоносов-2016» Москва, МГУ, 11-15 апреля 2016г. ISBN 978-5-317-05237-9.
131. Ширяев А.А. «Об устойчивости заряженной капли во внешних электростатических полях»// Глобальная электрическая цепь: материалы четвертой Всероссийской конференции. Геофизическая обсерватория «Борок» – филиал Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН – Ярославль: Филигрань.-2019.- ISBN 978-5-6042792-4-3.– С 45.-46.
132. Ширяев А.А. «Устойчивость заряженной капли во внешних неоднородных электростатических полях»// Материалы Международного молодёжного научного форума «Ломоносов-2019» [Электронный ресурс] Москва. МАКС Пресс.- 2019.-1 электронн. опт. диск. (CD-ROM)

Приложение

Выражения для коэффициентов $C_i^f(n)$, $C_i^d(n)$ эволюционного уравнения (2.1.35).

$$\begin{aligned}
 C_{-2}^f(n) &= -w \left(-36n^2 U_{1,-2+n,-1+n} U_{1,-1+n,n} + \frac{n}{1-W} (-6n(1+n) + \right. \\
 &\quad \left. + 12(4 + (7-5n)W + (1+n)W^2)) U_{2,-2+n,n} - \frac{n}{1-W} (18 + 12W) Y_{2,-2+n,n} \right); \\
 C_{-1}^f(n) &= 12n(2n-3) \sqrt{w} \sqrt{W} U_{1,-1+n,n}; \quad C_1^f(n) = 12n(2n-1) \sqrt{w} \sqrt{W} U_{1,1+n,n}; \\
 C_0^f(n) &= -n((1-n)(2+n) + 4(-1+n)W) + w(24n - 36n^2 U_{1,-1+n,n} U_{1,n,-1+n} - \\
 &\quad - 36n(2+n) U_{1,n,1+n} U_{1,1+n,n} - \frac{3(n^2 + 7n - 2 + 4W) Y_{2,n,n}}{1-W} - \\
 &\quad \left. - \frac{3n(3n^2 - 18 + 8W - 4W^2 + n(3 + 16W - 4W^2)) U_{2,n,n}}{1-W} \right); \\
 C_2^f(n) &= -w(-36n(2+n) U_{1,1+n,n} U_{1,2+n,1+n} - \frac{n}{1-W} (18 + 12W) Y_{2,2+n,n} - \\
 &\quad - \frac{n}{1-W} (6n(1+n) - 12(4 - (9+5n)W + (1+n)W^2)) U_{2,2+n,n}); \\
 C_{-2}^d(n) &= -\frac{w}{1-W} \left(9U_{2,-2+n,n} + \frac{3Y_{2,-2+n,n}}{(n-2)} \right); \\
 C_{-1}^d(n) = C_1^d(n) &= 0; \quad C_2^d(n) = -\frac{w}{1-W} \left(-3U_{2,2+n,n} + \frac{3Y_{2,2+n,n}}{(n+2)} \right).
 \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов $C_m^d(n)$, $C_m^f(n)$, в выражениях (2.2.38), (2.3.38), (3.1.30), (3.2.28). Выражения для F_k , S_k , G_k приведены в соответствующих параграфах.

$$\begin{aligned}
C_m^d(n) &= - \sum_{k=2}^{2kmax} \sum_{m=-k}^k a_k \left((-1+m)U_{k,m+n,n} - \frac{Y_{k,m+n,n}}{m+n} \right); \\
C_m^f(n) &= \sum_{k=0}^{2kmax} \sum_{m=-k}^k n(4-2k(1+k)-2(m+n)(1+m+n))a_k U_{k,m+n,n} - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{2kmax} \sum_{m=-k}^k \frac{n}{4\pi} (-(-1+k)(6+k) + (1+k)(1+m+n) - \\
&\quad - (1+m+n)(4+m+n) + (1+n)(k+m+n)) Q^2 a_k U_{k,m+n,n} - \\
&\quad - \sum_{k=0}^{kmax} \sum_{m=-k}^k \frac{n}{4\pi} (Q((1+k)(2+k-m-2n)F_k - G_k - (m+2n)S_k) U_{k,m+n,n}) - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{2kmax} \sum_{m=-k}^k n \frac{Q^2 a_k Y_{k,m+n,n}}{4\pi} - \sum_{k=0}^{kmax} \sum_{m=-k}^k \sum_{l=0}^{kmax} \sum_{d=-l}^l \frac{n}{4\pi} U_{k,m+n,n} (1+m+n) \cdot \\
&\quad \cdot ((1+k)F_k + S_k) ((1+l)F_l + S_l) U_{l,d+m+n,m+n} - \sum_{k=0}^{2kmax} \sum_{m=-k}^k \sum_{m=0}^{kmax} \sum_{l=-z}^z \frac{n}{4\pi} \cdot \\
&\quad \cdot (-(1+z)(2+z)F_z + G_z) ((1+k+l)F_{k+l} + S_{k+l}) U_{k,m+n,n} U_{z,k+l,k} \cdot
\end{aligned}$$