

На правах рукописи

**Подопросветова Анастасия Борисовна**

**Теоретическое и экспериментальное исследования  
устойчивости упругой трубки с протекающей внутри  
жидкостью**

Специальность 01.02.05 —  
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико–математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель: доктор физико–математических наук  
**Веденеев Василий Владимирович**

Официальные оппоненты: **Зайцев Дмитрий Кириллович**,  
доктор физико–математических наук,  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт–Петербургский политехнический университет Петра Великого»,  
профессор

**Симаков Сергей Сергеевич**,  
кандидат физико–математических наук,  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико–технический институт (государственный университет)»,  
доцент

Ведущая организация: Институт механики им. Р.Р. Мавлютова  
— обособленное структурное подразделение  
Федерального государственного бюджетного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

Защита состоится \_\_\_\_\_ г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при ИПМех РАН по адресу: 119526, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН и на сайте <http://www.ipmnet.ru/diss/diss/>.

Автореферат разослан \_\_\_\_\_ года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 002.240.01,  
канд. физ.-мат. наук

Сысоева Елена Ярославовна

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы.

Настоящая работа посвящена изучению устойчивости упругой трубки с протекающей внутри жидкостью.

В биологических и промышленных приложениях при течении жидкостей в тонкостенных упругих трубках возникают различные явления, которые оказывают влияние на характер течения и на деформацию стенок: неединственность стационарного состояния, потеря его устойчивости, изменение характера течения с ламинарного на турбулентный. Известно, что изменение геометрии кровеносных сосудов, например варикозное расширение, может привести к изменению течения жидкости, что влечёт за собой дисфункциональные изменения в организме человека и животного. В частности, экспериментальные исследования кровотока жирафов (Brook B.S., Pedley T.J., Seymour R.S.) показали, что ограничения кровотока вследствие изменений в ярёмных венах могут привести к ограничениям мозгового кровотока. В экспериментах, проведенных на собаках (Волобуев А.Н., Кошев В.И., Петров Е.С.), исследованы условия возникновения колебаний в кровеносной системе.

Исследования ученых в области гидроупругости (Болотин В.В., Вольмир А.С., Ильгамов М.А., Amabili M., Paidoussis M.P., Wang X.) легли в основу дальнейшего развития изучения взаимодействия жидкости с тонкостенными упругими трубками. До сих пор в литературе исследовались, в основном, лишь течения ньютоновской (линейно-вязкой) или идеальной жидкости, в том числе нелинейные задачи, связанные с движением солитонов в системах «упругая трубка—жидкость» (Василевский Ю.В., Вельмисов П.А., Ильичев А.Т., Чупахин А.П., Demiray H., Jensen O.E., Fu Y.C., Fung Y.C., Kumaran V.A., Pedley T.J., Stewart P.S.). Известно, однако, что кровь в небольших сосудах и другие биологические жидкости могут проявлять существенно неньютоновские свойства (Кучумов А.Г., Anand M., Coene P.-P.L.O., Galdi G.P., Ku D.N., Smith N.P.). Исследованиям нелинейно-вязких жидкостей в различных областях, в том числе исследованиям реологии крови, занимались ведущие ученые всего мира (Ентов В.М., Левтов В.А., Регирер С.А., Рожков А.Н., Caro C.G., Charm, S.E., Kurland G.S., Liepsch D., Moravec S., Thurston G.B., Pedley T.J.). Наиболее общей моделью, описывающей поведение крови при течении по сосудам, является модель псевдопластической жидкости. В данной работе поставлены и решены новые задачи изучения влияния нелинейно-вязких свойств протекающей среды на движение системы на основе одномерных моделей, которые являются основным механизмом для изучения динамики биологической жидкости в системе кровообращения (Абакумов М.В., Василевский Ю.В., Симаков С.С., Холодов А.С., Alastruey J., Blanco P., Formaggia L., Quarteroni A., Reymond P.).

Подавляющее большинство экспериментальных исследований устойчивости движения жидкости в тонкостенных упругих трубках проводилось только для турбулентных течений (Amabili M., Bertram C.D., Brower R.W., Gavioli N. Wang R.-Q.), и только несколько исследований было проведено для ламинарных течений (Lyon C.K., Kumaran V.A). Однако, в нормальных условиях кровь течет на турбулентном режиме лишь в небольшой части сердечно-сосудистой системы, тогда как преимущественно течение крови является ламинарным. Тем самым, экспериментальное исследование поведения упругой трубки при различных, в том числе небольших, числах Рейнольдса и влияние на него характера течения представляет большой интерес.

Таким образом, актуальность перечисленных задач связана с важными приложениями, в первую очередь в биомеханике: неустойчивостью системы «стенка сосуда — поток крови» объясняются различные виды пульсаций сосудов животных и людей, ограничения скорости течения и, как следствие, изменения в системе кровообращения.

**Целью** данной работы является исследование устойчивости мягких упругих трубок с протекающей внутри жидкостью, несвязанной с изгибом продольной оси трубки.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Проведение аналитического исследования уравнения, описывающего осесимметричное стационарное состояние линейно-упругой трубки при протекании степенных жидкостей на основе одномерной модели.
2. Изучение динамической устойчивости упругих трубок с протекающей внутри степенной жидкостью, основанное на одномерной модели, с целью выявления влияния реологии жидкости, длины трубки, продольного натяжения, жесткости и поверхностной плотности трубки.
3. Экспериментальное исследование устойчивости мягкой тонкостенной упругой трубки с протекающей внутри ньютоновской жидкостью. Анализ влияния режима течения жидкости на границу устойчивости и на колебания после потери устойчивости.

### **Научная новизна.**

Принципиально новыми являются задачи течения нелинейно-вязкой жидкости внутри деформируемых трубок. До сих пор исследовались лишь течения ньютоновской (линейно-вязкой) или идеальной жидкости: на простых одномерных постановках были предсказаны основные эффекты, возникающие в системах «трубка—жидкость», которые затем были подтверждены экспериментально.

В данной работе предложены новые постановки задач, направленные на изучение влияния нелинейно-вязких свойств протекающей среды на стационарное состояние и устойчивость системы. Было проведено детальное

исследование области неустойчивости, обнаруженной ранее без учёта продольного натяжения в бесконечно длинных трубках (Юшутин, 2012). Был найден критерий неустойчивости движения нелинейно-вязкой степенной жидкости, который показывает качественную разницу с устойчивостью течения ньютоновской жидкости: в зависимости от показателя нелинейности в пространстве параметров появляются новые области неустойчивости, отсутствующие в случае ньютоновской жидкости. В работе были проведены теоретические исследования влияния реологии жидкости на границу устойчивости, в том числе учтено натяжение трубки, а также конечная длина деформируемой трубки.

Наряду с большим количеством экспериментальных исследований турбулентного течения внутри упругой трубки, существует пробел в области исследований ламинарных потоков в упругой трубке, необходимых для приложений в сердечно-сосудистой системе. Проведённые в настоящей работе исследования позволяют восполнить недостающие экспериментальные данные. В экспериментальной части было проведено детальное построение границы устойчивости и областей разных видов колебаний при течении в упругих трубках линейно-вязкой жидкости. Экспериментально выявлено влияние режима течения (ламинарного и турбулентного) на устойчивость упругой трубки при условии равных интегральных параметров течения.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в данной работе, применимы к взаимодействию жидкости с мягкими стенками содержащих их трубок и сосудов, такими как кровь и стенки сосуда.

Результаты научного исследования применимы в биомедицинских технологиях для выявления участков кровеносной системы, более подверженных возникновению дисфункциональных изменений в организме человека и животных, в технологических процессах, где жидкости движутся в мягких трубках.

**Методология и методы исследования.** Задача исследования существования и единственности стационарного состояния упругой трубки с текущей внутри жидкостью была решена аналитически методами качественной теории дифференциальных уравнений. В случае исследования устойчивости течения нелинейно-вязкой степенной среды в упругой трубке задача решалась классическими методами теории устойчивости. Для трубок бесконечной длины рассматривались решения в виде бегущих волн и выводилось дисперсионное уравнение. Анализом его корней находились области неустойчивости в пространстве параметров. Для трубки большой, но конечной длины асимптотическое положение спектра собственных частот определялось с помощью теории глобальной неустойчивости. Для трубок произвольной длины была решена задача на собственные значения.

Экспериментальные исследования по изучению устойчивости движения ньютоновских сред в тонкостенных латексных трубках было проведено на установке типа «Starling resistor», созданной в НИИ механики МГУ. Испытания проводились на модели тонкостенной эластичной трубки (трубки Пенроуза), натянутой между двумя жёсткими трубками того же диаметра и помещенной в резервуар. Установка состоит из бака с рабочей жидкостью, резервуара-аквариума, систем труб, кранов, компрессора, насоса, расходомера, датчиков давлений, камер и микрофона. Система автоматизирована; создана компьютерная программа для записи и обработки эксперимента. Показания датчиков оцифровываются, визуализируются, что позволяет более детально контролировать ход эксперимента, и записываются с помощью данной программы. После проведения эксперимента производилась обработка и анализ полученных данных.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Качественное аналитическое исследование уравнений движения осесимметричного стационарного состояния упругой трубки показывает, что для движения идеальной жидкости с заданным профилем скорости стационарное состояние всегда существует для коротких трубок и при определенных условиях для сколь угодно длинных трубок. Однако, при учете вязкости, трубка может иметь лишь конечную длину, что приводит к возникновению нестационарного движения как единственного возможного при достаточно большой длине трубки. Более того, если стационарное состояние трубки, удовлетворяющее граничным условиям, существует, то оно может быть неединственным в зависимости от значения числа Рейнольдса и некоторых дополнительных условий.
2. Изучение осесимметричной потери устойчивости растянутых упругих трубок с протекающей внутри степенной жидкостью, основанное на одномерной модели, показывает, что, хотя такие возмущения в случае ньютоновской жидкости затухают (что соответствует имеющимся экспериментальным данным), они могут расти в случае показателя степенной среды  $n < 0.611$ , что обобщает аналогичный результат в ненатянутых трубках (Юшутин, 2012). Это означает, что для псевдопластических жидкостей неустойчивость может наблюдаться при повышенном внутреннем давлении в трубке, т.е. без схлопывания трубки во время цикла колебаний.
3. Даже если трубка с протекающей нелинейной-вязкой степенной средой осесимметрично неустойчива, эта неустойчивость может не наблюдаться, если неустойчивость является конвективной. Однако, если неустойчивость абсолютна, локализованные возмущения растут и область возмущения расширяется как вниз, так и вверх по потоку. В

связи с этим найден критерий абсолютной/конвективной неустойчивости в зависимости от продольного натяжения бесконечно длинной трубки.

4. Поскольку критерий неустойчивости для длинной, но конечной трубки не совпадает с критерием неустойчивости для бесконечно длинной трубки, то для определения границ устойчивости асимптотическое расположение спектра найдено методом глобальной неустойчивости. Неустойчивость конечных трубок может иметь место лишь при  $n < 1/3$ . Для трубок произвольной (в том числе, малой) длины граница устойчивости и свойства области неустойчивости найдена численно с учетом упругости стенки трубы, продольного натяжения и длины трубки.
5. Экспериментальное исследование автоколебаний трубок Пенроуза с протекающей внутри жидкостью при турбулентном и ламинарном режимах проводилось с одинаковыми скоростями потока и перепадами давления в резисторе Старлинга для выявления влияния режима течения. Было проведено сравнение границ устойчивости и были выявлены четыре типа колебаний, наблюдаемые по датчикам перепада давления, датчику выходного давления и визуализации режимов колебаний трубки. Результаты исследования показывают, что турбулентные течения являются менее устойчивыми и имеют большую амплитуду колебаний, чем ламинарные течения, а режимы колебаний упругой трубки различны для ламинарного и турбулентного режимов течения, даже при условии равенства интегральных параметров (расход, перепад давления, трансмуральное давление, форма трубки).

**Достоверность** полученных результатов обусловлена использованием классических математических методов механики сплошных сред. Для аналитических и численных расчётов использованы стандартные, хорошо известные методы исследования характера неустойчивости. Достоверность экспериментальных исследований подтверждена использованием современного измерительного оборудования, многократными независимыми тарировками, соответствием части результатов известным ранее.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих семинарах и конференциях: семинар по механике сплошных сред под руководством академика РАН А.Г. Куликовского, профессора В.П. Карликова, член-корр. РАН О.Э. Мельника, профессора А.Н. Осипова; видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ — ИТПМ СО РАН — СПбГПУ — НИИМ МГУ; научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени проф. В. В. Трофимова под руководством профессора Георгиевского Д.В. и профессора Шамолина М.В.; XIV Всероссийская (с международным участием) конференция «Биомеханика - 2020» (Пермь, 2020); 11-я международная конференция - школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 2020); School for young mechanics

and mathematicians «Mathematical methods of mechanics» (Moscow, 2020); XLVIII International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» (St. Petersburg, 2020); VII всероссийская конференция с участием зарубежных учёных «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Красноярск, 2020); XII всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019); всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию со дня рождения академика РАН Л.В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред» (Новосибирск, 2019); XVIII и XIX всероссийская школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2016 и 2019); конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, 2016, 2017, 2018 и 2019); 12th European Fluid Mechanics Conference (Вена, Австрия, 2018); всероссийские конференции молодых учёных механиков «YSM-2017» и «YSM-2018» (Сочи, 2017 и 2018); 8th World Congress of Biomechanics (Дублин, Ирландия, 2018); конференции «Ломоносов-2017» и «Ломоносов-2018» (Москва, 2017 и 2018); международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященная памяти академика Леонида Ивановича Седова в связи со столетием со дня его рождения (Москва, 2017); конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ (Москва, 2016 и 2017); 23rd Congress of the European Society of Biomechanics (Севилья, Испания, 2017); XII всероссийская (с международным участием) конференция «Биомеханика-2016» (Пермь, 2016).

**Личный вклад.** Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. В постановке задачи, обсуждении результатов и подготовке совместных научных публикаций принимал участие соавтор, научный руководитель В.В. Веденеев. В работах [1; 2] интегрированием уравнений движения по сечению автором получено одномерное уравнение, описывающее длинноволновые низкочастотные движения системы и учитывающее реологию текущей жидкости. Найдены критерий устойчивости безграничной однородной трубки и критерий абсолютной неустойчивости. Доказано, что потеря устойчивости линейно-вязких сред с сохранением осесимметричности движения невозможна. Помимо этого, в работе [1] автором проведено аналитическое и численное исследования влияния продольного натяжения и длины конечной трубки на найденную ранее область неустойчивости. В работе [3] автором аналитически исследованы свойства одномерного уравнения движения с заданными граничными условиями для осесимметричного стационарного состояния упругой трубки, учитывающего реологию жидкости и образующийся профиль скорости.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 26 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК и/или в периодических научных журналах, индексируемых



## Содержание работы

Во **введении** дана общая характеристика диссертационной работы: обосновывается актуальность исследования, формулируется цель, ставятся задачи диссертационной работы, излагается научная новизна и практическая ценность полученных результатов.

**Первая глава** посвящена обзору литературы (**разделе 1.1**) и выводу одномерной системы уравнений для осесимметричных возмущений течения ньютоновской жидкости в упругих трубках (**разделе 1.2**).

В **разделе 1.2.1** описывается постановка задачи: рассматривается течение степенной жидкости внутри осесимметричной цилиндрической тонкостенной упругой трубки (рис. 1).

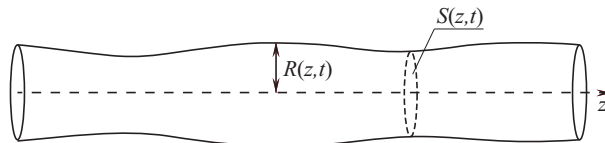


Рис. 1: Осесимметричное возмущение упругой трубки

Система уравнений для жидкости имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \frac{dv^i}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla^i p + \frac{1}{\rho} \nabla_j \tau^{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где  $\tau^{ij}$  — тензор вязких напряжений. Реология степенной жидкости описывается соотношением:

$$\tau^{ij} = 2\mu(\sqrt{2}I_2(e))^{n-1} e^{ij}, \quad I_2 = \sqrt{e^{ij}e_{ij}}, \quad (1)$$

где  $e^{ij}$  — тензор скорости деформаций.

Вводится цилиндрическая система координат с осью  $z$ , направленной вдоль трубки, и система уравнений переписывается в цилиндрической системе координат.

Заметим, что для стационарного течения внутри жёсткой цилиндрической трубки постоянного радиуса  $R_0$  решением системы является Пуазейлевский профиль скорости:

$$v^z(r) = 2^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{k}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left(R_0^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -k = \text{const}. \quad (2)$$

Для ньютоновской жидкости ( $n = 1$ ) получается стандартный параболический профиль скорости.

В **разделе 1.2.2** вводятся основные предположения для приведения системы уравнений к одномерной. Считается, что деформирование трубки происходит так, что каждое поперечное сечение  $S(z, t)$  оболочки остаётся круговым, а точки оболочки перемещаются только радиально (Рис. 1). Взаимодействие между средой и трубкой происходит за счёт условия прилипания и равенства нормальных напряжений. При этом предполагается, что возмущения: имеют длину волны, много большую радиуса  $R$ ; имеют низкую частоту колебаний, так что течение можно считать квазиустановившимся.

Осреднение системы уравнений по сечению, приведенное в **разделе 1.2.3**, производится при помощи интегрирования уравнений системы по поперечному сечению и ряда алгебраических преобразований. Таким образом, уравнения системы принимают вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \pi \frac{\partial R^2(z, t)}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q(z, t)^2}{(2n+1)\pi R(z, t)^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{2(3n+1)^n Q(z, t)^n}{n^n \pi^{n-1} R(z, t)^{3n-1}} + \\ + \frac{\pi R(z, t)^2}{\rho} \frac{\partial P(z, t)}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта система впервые получена Юшутиным (2012).

Для получения последнего уравнения одномерной системы в **разделе 1.2.4** вводится уравнение, связывающее давление жидкости и движение стенки трубки:

$$\beta(R - R_0) + m \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = P, \quad \beta = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)R_0^2}, \quad (5)$$

где  $\beta$  — радиальная жёсткость трубки,  $m = \rho_t h$  — поверхностная плотность стенки трубки, которая может включать в себя инерцию жидкости,  $N = \sigma h$  — продольное натяжение трубки,  $R_0$  — радиус недеформированной трубки;  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $h$  — толщина стенки трубки,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения трубки.

В **разделе 1.2.5** формулируется замкнутая система уравнений (3–5) для трёх неизвестных  $Q$ ,  $R$ ,  $P$  относительно переменных  $z$ ,  $t$ . Сравнение полученной одномерной системы уравнений с ранее полученными в литературе другими одномерными моделями приводится в **разделе 1.2.6**.

В **разделе 1.2.7** полученная система уравнений обезразмеривается при помощи размерно независимых величин: плотности жидкости  $\rho$ , радиуса трубки  $R_0$  и расхода  $Q_0$  на входе в трубку.

Таким образом, окончательно записывается безразмерная система двух одномерных по пространству уравнений:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial(\pi R^2)}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q^2}{(2n+1)\pi R^2} \right) + \frac{16Q^n}{\pi Re R^{3n-1}} + \pi R^2 \beta \frac{\partial R}{\partial z} + \\ + \pi R^2 m \frac{\partial^3 R}{\partial z \partial t^2} - \pi R^2 N \frac{\partial^3 R}{\partial z^3} = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

где  $Re$  — число Рейнольдса степенной среды согласно определению Мецнера-Рида.

В **разделе 1.3** сформулированы основные результаты главы 1.

Во **второй главе** теоретически исследованы существование и единственность стационарных осесимметричных состояний упругих трубок при протекании степенных жидкостей. Проведено качественное аналитическое исследование уравнений движения стационарного состояния трубки.

В **разделе 2.1** система уравнений (6, 7), полученная в главе 1, записывается для стационарного состояния, т.е. для случая, когда расход и радиус не зависят от времени:  $Q = 1$ ,  $R = R_s(z)$ , и сводится к уравнению:

$$\frac{d}{dz} \left[ -\frac{N}{\beta} \frac{d^2 R_s}{dz^2} + \left( \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2 \beta} R_s^{-5} + 1 \right) R_s \right] = -\frac{16}{\pi^2 \beta Re R_s^{3n+1}}. \quad (8)$$

Также, для стационарного состояния вводятся три граничных условия: упругая трубка имеет одинаковый радиус на входе и на выходе ( $R_s(0) = R_s(L) = 1$ ), и задано значение входного трансмурального давления  $P = P_{in}$ , откуда  $\frac{d^2 R_s(0)}{dz^2} = -P_{in}/N$ .

Без учета натяжения (т.е. при  $N = 0$ ) одномерное уравнение (8) является уравнением первого порядка и интегрируется в явном виде. При учёте натяжения ( $N \neq 0$ ) уравнение (8) представляет собой уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами и в явном виде не интегрируется. В связи с этим, разделы 2.2, 2.3 посвящены качественному исследованию свойств краевой задачи для уравнения (8).

**Раздел 2.2** посвящен исследованию задачи без учёта вязкости. Когда значение числа Рейнольдса стремится к бесконечности,  $Re \rightarrow \infty$ , дифференциальное уравнение (8) имеет первый интеграл:

$$-\frac{N}{\beta} \frac{d^2 R_s}{dz^2} + \left( \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2 \beta} R_s^{-5} + 1 \right) R_s + A = 0, \quad (9)$$

$$A(0) = -\left(\frac{P_{in}}{\beta} + \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2\beta} + 1\right).$$

Обозначив  $R_s = x$  и  $\frac{\partial R_s}{\partial z} = y$ , уравнение (9) было преобразовано к системе:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2 N x^4} + \frac{\beta x}{N} + \frac{\beta A}{N}, \end{cases} \quad (10)$$

где штрихом обозначена производная по  $z$ .

В рамках новых обозначений оставшиеся граничные условия имеют вид:

$$x(0) = x(L) = 1. \quad (11)$$

Если значение числа Рейнольдса конечно, тогда в уравнении (9) величина  $A \neq const$ , а именно  $A = A(z)$  является растущей функцией координаты. Причем, при ограниченных значениях  $R(z)$  производная этой функции ограничена снизу. Поэтому движение траектории  $x(z)$ ,  $y(z)$  можно представить как движение вдоль векторного поля (10) с одновременной эволюцией этого поля из-за роста  $A$ .

Для нахождения решения краевой задачи (10, 11) необходимо подобрать начальное значение  $y(0)$  на прямой  $x(0) = 1$  таким образом, чтобы значение  $z$ , за которое траектория  $x(z), y(z)$  вернется на прямую  $x = 1$ , было равно длине трубки  $L$ .

Для исследования системы (10) была найдена качественная картина её фазовой плоскости. Сначала находились стационарные точки  $(x_0, y_0)$  системы (10) и рассматривались три возможных типа фазовых траекторий в зависимости от значения  $P_{in}$  (**подраздел 2.2.1**).

Для дальнейшего исследования были введены значение  $P_{cr} = \beta \left( \frac{5}{4^{4/5}} \varkappa^{1/5} - (\varkappa + 1) \right) < 0$  и значение  $A = A_0 = -(\varkappa + 1)$  при  $P_{in} = 0$ , где  $\varkappa = \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2\beta}$ .

Далее приводятся три возможных типа фазовых траекторий.

1.  $P_{in} \geq 0$ . Две стационарные точки: центр и седло ( $x_0 > 1$ ) (Рис. 2(a)). При увеличении значения трансмурального давления стационарные точки двигаются в противоположные стороны.

2.  $P_{cr} < P_{in} < 0$ . Входное давление в трубке  $P_{in}$  отрицательное, но не слишком большое по абсолютной величине.

2.1. Две стационарные точки: центр и седло ( $x_0 < 1$ , т.е. суженное состояние трубки) (Рис. 2(б)).

2.2. Две стационарные точки: центр и седло ( $x_0 > 1$ ).

В обоих случаях при увеличении абсолютного значения трансмурального давления стационарные точки сближаются.

3.  $P_{in} \leq P_{cr} < 0$ . При  $P_{in} = P_{cr}$  стационарные точки сливаются (Рис. 2(в)) и при  $P_{in} < P_{cr}$  (Рис. 2(г)) исчезают.

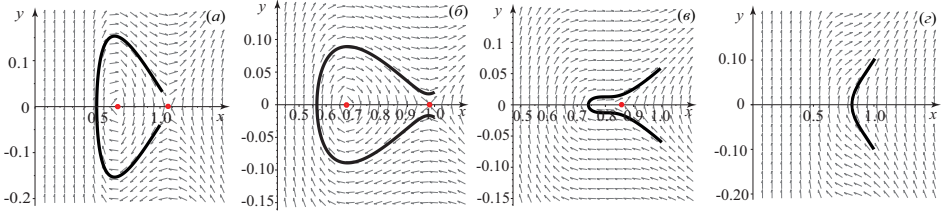


Рис. 2: Фазовый портрет для (а)  $P_{in} > 0$ , (б)  $P_{cr} < P_{in} < 0$ , (в)  $P_{in} = P_{cr}$ , (г)  $P_{in} < P_{cr} < 0$ .

Анализ максимально возможной длины трубки, проведенный в **подразделе 2.2.2**, показал, что при  $P_{cr} < P_{in} < 0$  и  $P_{in} > 0$  трубка может быть сколь угодно длинной при  $y(0)$ , близких к сепаратрисе, соответствующей седловой точке, а при  $P_{in} \leq P_{cr} < 0$  значение  $L_{max}$  конечно, поскольку стационарных точек нет.

Возможность неединственности решения краевой задачи (10), (11) в зависимости от значения параметра  $A$  для разных длин трубок связана с существованием решения с обходом и без обхода точки-центра (Рис. 2(а,г)) рассматривается в **подразделе 2.2.3**.

1.  $P_{in} > 0$ . При достаточно малых значениях  $L$  существуют две траектории, при  $L > L_{cr1} > 0$  появляются ещё два решения. При  $L > L_{cr2} > L_{cr1}$  появляются ещё четыре дополнительных решения.

2.  $P_{cr} < P_{in} < 0$ .

2.1. Для стационарных точек  $x_0 < 1$  и для любых значений длины  $L$  имеется неединственность решения.

2.2. Для стационарных точек  $x_0 > 1$  количество решений зависит от длины трубки. При достаточно малых значениях  $L < L_{cr1}$  существуют две траектории, при  $L_{cr2} > L > L_{cr1}$  решений не существует, при достаточно больших  $L$  существует любое наперёд заданное чётное количество решений.

3.  $P_{in} \leq P_{cr} < 0$ . Поскольку стационарных точек нет, для больших значений  $L$  решение не существует; для малых значений  $L$  существует два решения, и при  $L = L_{max}$  — единственное решение.

**Раздел 2.3** посвящён исследованию задачи с учётом вязкости. В зависимости от конечного значения  $Re$  и, соответственно, скорости увеличения  $A$ , может иметь место неединственность решения, аналогичная невязкому случаю (Рис. 3). Для  $P_{cr} < P_{in} < 0$  и достаточно малого  $Re$  «провал» радиуса сдвигается под действием вязкости к концу трубки. Кроме того, в решении с обходом центра «провал» радиуса становится меньше, а в решении без обхода центра «провал» радиуса увеличивается.

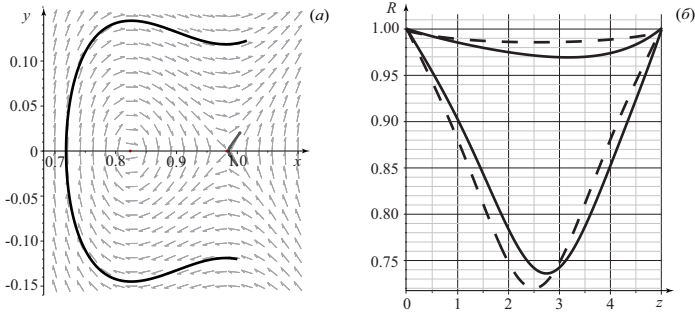


Рис. 3: Для безразмерных параметров  $\beta = 0.4$ ,  $N = 0.2$ ,  $n = 0.2$ ,  $P_{in} = -0.003$ ,  $L = 5$  (а) фазовый портрет и (б) график  $R(z)$  (невязкий случай — пунктирные линии,  $Re = 250$  — сплошные линии).

При больших конечных значениях числа Рейнольдса  $Re$  и положительном входном трансмуральном давлении возможен случай возникновения неединственности, аналогичный случаю  $P_{in} > 0$  с несколькими обходами центра.

В разделе 2.4 рассматриваются примеры использования описанной в предыдущих разделах теории для конкретных параметров сердечно-сосудистой системы человека.

В разделе 2.5 сформулированы и обсуждены результаты главы 2. В частности, результаты показывают, что в связи с обнаруженной неединственностью решения при численном моделировании гемодинамики системы кровеносных сосудов на основе одномерных моделей необходим дополнительный контроль получаемых в расчёте решений.

В третьей главе проведен теоретический анализ устойчивости системы, полученной в главе 1.

В разделах 3.1.1 и 3.1.2 проводится линеаризация безразмерной системы двух одномерных уравнений (6, 7) и получено дисперсионное уравнение при условии, что длина волны значительно меньше расстояния, на котором невозмущенный радиус существенно изменится, и много больше радиуса трубки ( $R \ll \lambda \ll L$ ):

$$\left(1 + \frac{mk^2}{2}\right)\omega^2 + \left(\frac{16n}{\pi Re}i - \frac{2(3n+1)k}{\pi(2n+1)}\right)\omega + \frac{8(1-3n)k}{\pi^2 Re}i - \frac{k^2\beta}{2} + \frac{k^2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} - \frac{Nk^4}{2} = 0. \quad (12)$$

Для длинных волн натяжение и инерционные члены ( $N$  и  $m$ ) незначительны, а важную роль играет только радиальная жесткость  $\beta$ . Наоборот, для коротких волн преобладают натяжение и инерционные члены.

В разделе 3.1.3 описан метод получения критерия неустойчивости для длинных волн ( $k \rightarrow 0$ ,  $m = N = 0$ ). Критерий неустойчивости  $\text{Im } \omega > 0$  сводится к следующему неравенству:

$$0 < \beta < \beta_{fl}(n) = \frac{-(6n^3 - n^2 - 1)}{2n^2\pi^2(2n + 1)}. \quad (13)$$

Данное неравенство выполняется только при  $n < 0.611$  (рис. 4(a)), т.е. осесимметричная неустойчивость возможна только для псевдопластических жидкостей.

В разделе 3.1.4 показано, что без учета неньютоновских свойств среды в слагаемом, отвечающем за вязкие потери давления, даже при учёте неньютоновского профиля скорости, найденная в разделе 3.1.3 область неустойчивости отсутствует.

Определение критерия и области неустойчивости для коротких волн ( $k \rightarrow \infty$ ) приведено в разделе 3.1.5. Трубка будет устойчива при  $m = 0$ ,  $N \neq 0$  и неустойчива при  $m \neq 0$ ,  $N = 0$ . При  $m \neq 0$ ,  $N \neq 0$  критерий коротковолновой неустойчивости (рис. 4(б)) имеет вид:

$$n < \frac{1}{3 + 2\pi\sqrt{\frac{N}{m}}}, \quad n < 1/3; \quad n > \frac{1}{3 - 2\pi\sqrt{\frac{N}{m}}}, \quad \sqrt{\frac{N}{m}} < \frac{3}{2\pi}, \quad n > 1/3.$$

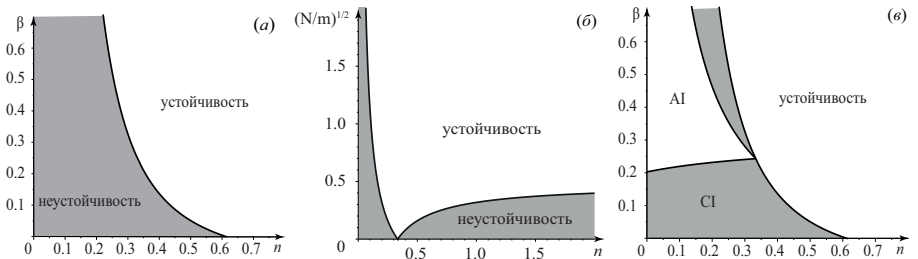


Рис. 4: (а) Область неустойчивости при  $m = 0$ ,  $N = 0$ . (б) Область неустойчивости коротких волн при  $m \neq 0$ ,  $N \neq 0$ . (в) Область абсолютной (AI) и конвективной (CI) неустойчивости.

Хотя неустойчивость длинных и коротких волн обусловлена различными параметрами трубки, оба критерия не зависят от числа Рейнольдса, которое определяет лишь скоростью роста, но не границу устойчивости, возмущений.

Раздел 3.1.6 посвящён переходу от длинноволновой к коротковолновой неустойчивости. Во-первых, если длинные и короткие волны либо затухают, либо растут, то все волны либо затухают, либо растут. Другими

словами, не существует изолированной области неустойчивости или устойчивости для волн со «средним» значением волновых чисел. Во-вторых, если длинные волны затухают, а короткие волны растут или наоборот, тогда существует только одно пороговое волновое число, разграничивающее затухающие и растущие волны.

Даже если трубка с протекающей внутри псевдопластичной жидкостью неустойчива, эта неустойчивость может не наблюдаться в реальности, если неустойчивость конвективна. В связи с этим, в **разделе 3.2** проведен анализ абсолютной и конвективной неустойчивости. Получен критерий абсолютной неустойчивости при  $m = 0$ ,  $N = 0$  (рис. 4(в)), который имеет вид:

$$\frac{2(3n + 1)}{\pi^2(2n + 1)} = \beta_{div}(n) < \beta < \beta_{abs}(n) = \frac{(3n + 1)(1 - n)}{\pi^2 n(2n + 1)}, \quad n < 1/3. \quad (14)$$

Было исследовано влияние продольного натяжения  $N$  на область абсолютной неустойчивости.

**Раздел 3.3** посвящен изучению влияния стационарного сужения или расширения упругой трубки на локальную устойчивость, с учетом предположения о том, что радиус меняется медленно ( $R_s \approx const$ ), но градиент давления, вызванный сужением или расширением, не пренебрежимо мал ( $\chi = \frac{dR_s}{dz} \neq 0$  — малая, но ненулевая величина). Аналитически был найден критерий неустойчивости в зависимости от параметра, отвечающего за сужение или растяжение упругой трубки вдоль её длины.

Поскольку критерий устойчивости для сколь угодно большой длины конечной трубки в общем случае не совпадает с критерием устойчивости для бесконечно длинной трубки, то в **разделе 3.4** была исследована задача определения области глобальной неустойчивости методом А.Г. Куликовско-го. Для этого было изучено поведение кривой, определяющей положение комплексных собственных частот трубки большой, но конечной длины.

Было установлено, что критерий глобальной неустойчивости практически совпадает с критерием абсолютной неустойчивости, за исключением небольшого участка в области перехода из нижней части области конвективной неустойчивости в область абсолютной неустойчивости. Таким образом, неустойчивость трубки большой конечной длины возможна лишь при показателе реологического закона  $n < 1/3$ .

**Раздел 3.5** посвящен изучению глобальной неустойчивости стационарно сужающейся или расширяющейся упругой трубки. Был найден критерий неустойчивости в зависимости от параметра, отвечающего за сужение или растяжение упругой трубки вдоль её длины  $\chi$ .

При одинаковом значении числа Рейнольдса и уменьшающемся значении  $\chi$ , т.е. для сужающейся трубки, область неустойчивости уменьшается, а затем исчезает вовсе. При фиксированном  $\chi$  и уменьшающемся значении числа Рейнольдса область неустойчивости растет. Для расширяющихся трубок с увеличением  $\chi$  и фиксированном числе Рейнольдса область



неустойчивости расширяется. В отличие от сужающихся трубок, для расширяющихся трубок при неизменном  $\chi$  и уменьшающемся значении числа Рейнольдса область неустойчивости уменьшается.

Исследование устойчивости трубки конечной длины приведено в **разделе 3.6**. Рассматривается цилиндрическая упругая трубка длиной  $L$ , закрепленная на жестких цилиндрических трубках длиной  $L_1, L_2$  с текучей неньютоновской жидкостью внутри. Дисперсионное уравнение (12) относительно волнового числа  $k$  является уравнением четвертого порядка, поэтому были заданы четыре граничных условия: радиус упругой трубки во входном и выходном сечениях совпадает с радиусом жестких трубок и в безразмерном виде представляется как  $R(z) = 1$  при  $z = -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}$ ; давления на концах жестких участков ( $z = -L_1 - \frac{L}{2}, \frac{L}{2} + L_2$ ) являются постоянными и заданными.

Решение искалось в виде собственных мод:

$$Q(z, t) = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^4 Q_j e^{ik_j(\omega)z},$$

где  $k_j(\omega)$  — четыре корня дисперсионного уравнения,  $Q_j$  — постоянные. Для удовлетворения граничным условиям необходимо, чтобы  $\det M = 0$ , где матрица  $M$  имеет вид:

$$\begin{aligned} M_{1j} &= ik_j e^{-ik_j \frac{L}{2}}; \\ M_{2j} &= ik_j e^{ik_j \frac{L}{2}}; \\ M_{3j} &= -\frac{N}{2\pi} ik_j^3 e^{-ik_j \frac{L}{2}} - \frac{L_1}{\pi} \left( \omega^2 + \frac{16ni}{\pi Re} \omega \right) e^{-ik_j \frac{L}{2}}; \\ M_{4j} &= -\frac{N}{2\pi} ik_j^3 e^{ik_j \frac{L}{2}} - \frac{L_2}{\pi} \left( \omega^2 + \frac{16ni}{\pi Re} \omega \right) e^{ik_j \frac{L}{2}}. \end{aligned}$$

В работе исследовано влияние уменьшения длины упругой трубки на расположение собственных частот на  $\omega$ -плоскости и его связь с кривой, около которой локализуются собственные частоты при  $L \rightarrow \infty$ .

Для определения области неустойчивости задача в общем случае решалась численно. Однако, без учета продольного натяжения и поверхностной плотности трубки (т.е. при  $N = m = 0$ ) было получено аналитическое решение. Независимо от длины  $L$  область неустойчивости для трубки конечной длины при  $N = m = 0$  совпадает с областью абсолютной неустойчивости для трубок бесконечной длины  $\beta_{div} < \beta < \beta_{abs}$ .

В общем случае, при условии  $N > 0$  численно было найдено:

1. При фиксированном числе Рейнольдса и одинаковой длине трубки с увеличением продольного натяжения  $N$  область неустойчивости сужается по ширине (Рис. 5(a)).

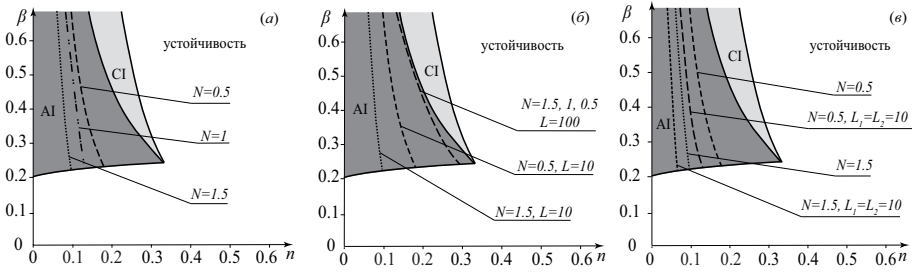


Рис. 5: (а) Влияние продольного натяжения  $N$  на область неустойчивости при  $L = 10$ ,  $Re = 100$  и  $L_1 = L_2 = 0$ . (б) Влияние длины трубки  $L$  на область неустойчивости в зависимости от продольного натяжения  $N$  при  $Re = 100$  и  $L_1 = L_2 = 0$ . (в) Влияние длин жестких трубок  $L_1, L_2$  на область неустойчивости при  $L = 10$  и  $Re = 100$ .

2. Изменение числа Рейнольдса  $Re$  и поверхностной плотности  $m$  практически не влияет на границу неустойчивости.

3. Область неустойчивости больше для более длинных трубок при одинаковом продольном растяжении  $N$  (Рис. 5(б)).

4. При изменении длины жестких входных и выходных трубок, при одинаковых значениях продольного натяжения  $N$  область неустойчивости тем больше, чем меньше длины жёстких трубок (Рис. 5(в)).

В разделе 3.7 сформулированы основные результаты главы 3. В частности, растущие осесимметричные колебания упругой трубки возможны только для псевдопластических жидкостей, что объясняет существование только неосесимметричных колебаний упругой трубки с протекающей внутри ньютоновской жидкостью, наблюдаемое в экспериментах.

В четвертой главе экспериментально исследованы режимы автоколебаний упругих трубок Пенроуза с протекающей внутри ньютоновской жидкостью при различных режимах течения.

Раздел 4.1.1 посвящен обоснованию выбора методики проведения экспериментальных исследований. Для сравнения влияния режима течения необходимо организовать такие «эквивалентные» потоки, чтобы расход, давления и форма трубки были одинаковые, а единственным различием был режим течения: ламинарный или турбулентный. Возможным способом является использование различных рабочих жидкостей.

Экспериментальное исследование проводилось на установке, имеющей принципиальную схему «Starling resistor» (Рис. 6). Установка состоит из тонкостенной эластичной трубки Пенроуза диаметром 10 мм, длиной 44 см и толщиной  $0.3 \pm 0.02$  мм, натянутой между двумя жёсткими трубками одинакового диаметра и помещенной в камеру. Рабочая жидкость протекает по замкнутому контуру. Течение внутри упругой трубки происходит за счет перепада давления  $\Delta p = p_1 - p_2$  (разница давлений вверх  $p_1$  и вниз

$p_2$  по потоку). Перепад давления в трубке изменяется в зависимости от расхода  $Q$  или давления на выходе  $p_2$ . Давление в выходном сечении  $p_2$  изменяется в соответствии с положением сливного шланга. Трансмуральное давление  $p - p_e$  может контролироваться уровнем воды в камере; во всех проделанных экспериментах  $p_e = p_a + 883\text{Па}$ . Подробное описание установки приведено в разделе 4.1.2.

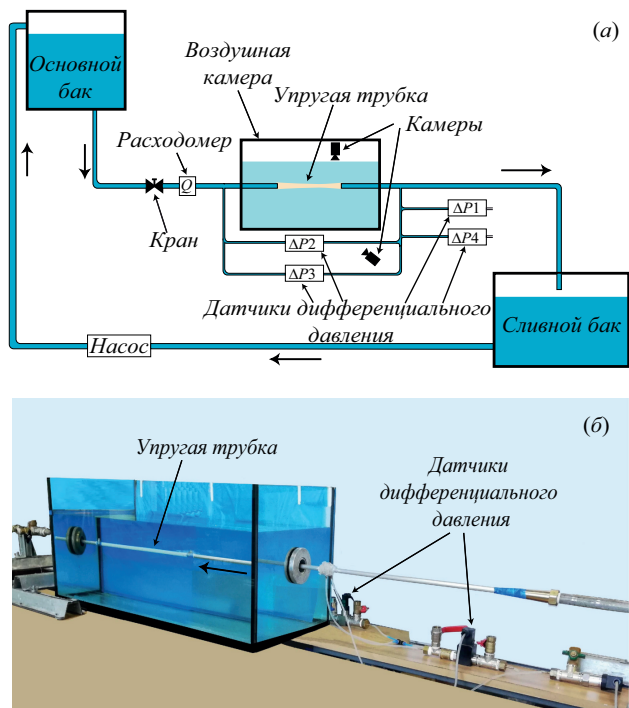


Рис. 6: (а) Схема и (б) фотография установки для исследования колебаний упругих трубок с протекающей внутри жидкостью.

В разделе 4.1.3 описана методика выбора рабочей жидкости и диапазона расхода для сравнения поведения упругой трубки на турбулентном и ламинарном режимах при одинаковом расходе и перепаде давления. В качестве рабочей жидкости при турбулентном режиме течения использовалась вода, а при ламинарном режиме — водные растворы глицерина. Получено, что диапазон расхода от 1,9 до 3,2 л/мин и концентрация водного раствора глицерина от 40% до 44% при температуре  $20^\circ\text{C}$  являются необходимыми условиями для получения эквивалентных потоков.

Поскольку в экспериментах используется трубка из упругого материала, ее диаметр меняется в зависимости от трансмурального давления.

В связи с этим в **разделе 4.1.4** приведены экспериментальные данные измерений диаметра упругой трубки в зависимости от выходного давления.

**Раздел 4.2** посвящён результатам экспериментов, как для границы устойчивости, так и для характеристик колебаний. В **разделе 4.2.1** приводятся четыре типа колебаний, установленные на основании проведенных экспериментов. Один ярко выраженный пик присутствует во всех режимах колебаний и соответствует резкому увеличению и последующему уменьшению перепада давления. После основного пика наблюдаются четыре, три, два или одно небольшое изменение перепада давления для четвертого, третьего, второго и первого типов колебаний соответственно.

Подробные экспериментальные исследования типов колебаний проведены независимо для неустойчивости упругих трубок с протекающим внутри турбулентным (**раздел 4.2.2**) и ламинарным потоком (**раздел 4.2.3**).

В **разделе 4.2.4** проведено сравнение режимов неустойчивости ламинарного и турбулентного потоков.

Было установлено, что потеря устойчивости при турбулентном режиме потока происходит при меньшем перепаде давления, чем при ламинарном режиме. Затем происходит резкое увеличение перепада давления при турбулентном режиме и наблюдаются колебания третьего типа. В то же время колебания упругой трубки с ламинарным потоком внутри происходят согласно четвертому типу и только при дальнейшем увеличении перепада давления переходят к третьему типу. Третий тип колебаний реализуется при близких перепадах давления для обоих режимов течения. Колебания упругой трубки переходят ко второму типу при дальнейшем увеличении перепада давления, а граница перехода от третьего типа ко второму соответствует почти одинаковым перепадам давления для турбулентных и ламинарных течений. Однако переход к первому режиму для турбулентного потока происходит при меньшем перепаде давления, чем для ламинарного потока. Наблюдаемые области режимов колебаний упругой трубки для ламинарного и турбулентного потока при одинаковых расходах показаны на рисунке 7.

**Раздел 4.2.5** посвящен проверке эквивалентности ламинарного и турбулентного режимов. Поскольку перепад давления на границе устойчивости для турбулентного и ламинарного режимов течения не совпадает, то форма трубки тоже не совпадает. Поэтому режимы вблизи границ устойчивости не эквивалентны. В связи с тем, что переход к неустойчивости для турбулентного режима происходит при меньшем перепаде давления, то были определены параметры, для которых были реализованы устойчивый ламинарный режим течения 42% и 43% раствора глицерина, эквивалентный граничному устойчивому турбулентному режиму. Было определено, что такие режимы действительно эквивалентны в интегральном смысле.

В **разделе 4.2.6** приводится сравнение режимов колебаний упругой трубки на основе визуализации, полученной с двух камер, расположенных

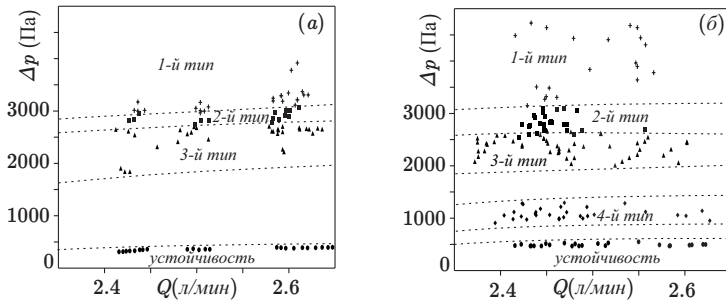


Рис. 7: Перепад давления в зависимости от расхода для (а) турбулентного и (б) ламинарного течения.

сверху и сбоку трубки (Рис. 6). Максимальное сжатие трубки во время цикла колебаний увеличивается при последовательном переходе от третьего режима колебаний ко второму и достигает максимального сжатия при первом режиме колебаний как в турбулентном, так и в ламинарном режимах течения. Также область пережатия длиннее и плавнее при ламинарном режиме и короче и круче при турбулентном режиме для всех режимов колебаний.

В **разделе 4.3** представлено теоретическое обоснование более длительного сохранения устойчивости упругой трубки с ламинарным потоком внутри, чем с турбулентным потоком.

В **разделе 4.4** кратко сформулированы основные результаты главы 4.

В **закл<sup>ю</sup>чении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Аналитически исследованы свойства одномерного уравнения движения с заданными граничными условиями для осесимметричного стационарного состояния упругой трубки, учитывающего реологию жидкости и образующийся профиль скорости.
  - а) Получено, что для движения идеальной жидкости с заданным профилем скорости стационарное состояние всегда существует для коротких трубок и при определенных условиях для сколь угодно длинных трубок. При учёте вязкости трубка может иметь лишь конечную длину, что приводит к возникновению нестационарного движения, как единственного возможного, при достаточно большой длине трубки.
  - б) Если стационарное состояние трубки, удовлетворяющее граничным условиям, существует, то в зависимости от значения числа Рейнольдса и дополнительных условий оно может быть неединственным.

2. Аналитически исследована локальная, абсолютная и конвективная неустойчивость бесконечной упругой трубки, глобальная неустойчивость длинных конечных трубок, а также численно исследована устойчивость упругой трубки произвольной конечной длины.
  - а) Для бесконечно длинной упругой трубки показано, что неустойчивость, при которой сохраняется осесимметричность движения трубки, возможна лишь при показателе степенного закона  $n < 0.611$ . Таким образом, потеря устойчивости линейно-вязких сред с сохранением осесимметричности движения невозможна.
  - б) Найдены области абсолютной ( $n < 1/3$ ) и конвективной неустойчивости бесконечно длинных трубок в зависимости от продольного натяжения упругой трубки.
  - в) Получено, что критерий глобальной неустойчивости длинной конечной трубки практически совпадает с критерием абсолютной неустойчивости для бесконечной длины трубки.
  - г) Определено влияние продольного натяжения и длины трубки на устойчивость упругой трубки конечной длины.
3. Проведены экспериментальные исследования по определению границы устойчивости и типов колебаний упругой трубки, с протекающей внутри ньютоновской жидкостью, в зависимости от режима колебаний при одинаковых расходах и перепадах давления.
  - а) Установлено, что потеря устойчивости в режиме турбулентного потока происходит при меньшем перепаде давления, чем в ламинарном потоке.
  - б) Были выявлены четыре типа колебаний для ламинарного и три для турбулентного потоков, наблюдаемые по датчикам перепада давления, датчику выходного давления и визуализации режимов колебаний трубки. Колебания на турбулентном режиме характеризуются более резким сужением трубки в момент схлопывания и большей амплитудой колебаний.
  - в) Проведено сравнение переходов между типами колебаний в зависимости от перепада давления для ламинарных и турбулентных течений.

## Публикации автора по теме диссертации

1. *Poroshina\*, A. and Vedeneev, V.* Influence of longitudinal tension on the stability of the finite length elastic tubes conveying Non-Newtonian fluid // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2018. — Vol. 1129. — 012029.
2. *Веденеев, В.В. и Порошина, А.Б.* Устойчивость упругой трубки, содержащей текущую неньютоновскую жидкость и

- имеющей локально ослабленный участок // Труды МИАН. — 2018. — Т. 300, 1. — 42—64.
3. *Порошина, А.Б. и Веденеев, В.В.* Существование и единственность стационарного состояния упругой трубки при протекании через нее степенной жидкости // Российский журнал биомеханики. — 2018. — Т. 22, 2. — 196—222.
  4. *Порошина, А.Б.* Стационарное состояние упругой трубки с протекающей внутри жидкостью // Сборник Трудов конференции-конкурса молодых ученых. — г. Москва: изд-во Московского университета. — 2017. — С. 171—178.
  5. *Порошина, А.Б.* Устойчивость упругой трубки при протекании через неё нелинейно-вязкой жидкости // Сборник Трудов конференции-конкурса молодых ученых. — г. Москва: изд-во Московского университета. — 2016. — С. 174—181.
  6. *Порошина, А.Б., Веденеев В.* Абсолютная, конвективная и глобальная неустойчивость упругой трубки с протекающей неньютоновской жидкостью бесконечных и конечных размеров // Сборник тезисов докладов VII Всероссийской конференции "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения — г. Красноярск: изд-во ИВМ СО РАН. — 2020. — С. 186—187.
  7. *Подопросветова, А.Б., Веденеев В.* Экспериментальное исследование влияния режимов течения на устойчивость упругой трубки // Всероссийская конференция молодых учёных-механиков YSM-2020. Тезисы докладов. — г. Москва: изд-во Московского университета. — 2020. — С. 122.
  8. *Подопросветова, А.Б.* Исследование неустойчивости упругой трубки бесконечной и конечной длины с протекающей внутри псевдопластической жидкостью // Всероссийская конференция молодых учёных-механиков YSM-2020. Тезисы докладов. — г. Москва: изд-во Московского университета. — 2020. — С. 121.
  9. *Порошина, А.Б.* Экспериментальное исследование устойчивости упругой трубки // Всероссийская школа-семинар "Современные проблемы аэрогидродинамики". Тезисы докладов. — г. Москва: изд-во Московского университета. — 2019. — С. 88.
  10. *Порошина, А.Б.* Влияние сужения и расширения трубки на устойчивость упругих трубок конечной длины // Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В.Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред». Тезисы докладов. — г. Новосибирск: изд-во Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН. — 2019. — С. 168—169.

11. **Порошина, А.Б.** Исследование устойчивости упругой сужающейся и расширяющейся трубки с протекающей внутри псевдопластической жидкостью // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. – Уфа РИЦ БашГУ. – 2019. – С. 277–279.
12. **Порошина, А.Б.** Устойчивость упругой суженой или расширенной трубки с протекающей неньютоновской жидкостью // Ломоносовские чтения. Секция механики. Тезисы докладов – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2019. – С. 182–183.
13. **Poroshina, A., Vedeneev V.** Instability of elastic finite length tubes conveying power law fluids // 12th European Fluid Mechanics Conference. – Vienna, Austria. – P. 44.
14. **Poroshina, A., Vedeneev V.** Instability of elastic tubes conveying power law fluids // 8th World Congress of Biomechanics. – Dublin, Ireland.
15. **Порошина, А.Б., Веденеев В.** Влияние продольного натяжения на устойчивость упругих трубок конечной длины с протекающей внутри неньютоновской жидкостью // Всероссийская конференция молодых учёных-механиков YSM-2018. Тезисы докладов. – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2018. – С. 136.
16. **Веденеев В., Порошина, А.Б.** Исследование влияния продольного натяжения на область устойчивости упругих трубок конечной длины с протекающей внутри степенной жидкостью // Ломоносовские чтения. Секция механики. Тезисы докладов – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2018. – С. 167.
17. **Порошина, А.Б.** Исследование устойчивости упругих трубок конечной длины с протекающей внутри степенной жидкостью // Сборник тезисов XXV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов-2018 – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2018.
18. **Poroshina, A., Vedeneev V.** Existence and uniqueness of stationary state of elastic tubes conveying power law fluids // 23rd Congress of the European Society of Biomechanics. – Seville, Spain.
19. **Порошина, А.Б.** Неединственность стационарного состояния упругой трубки с протекающей внутри степенной жидкостью // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов - 2017». Сборник трудов конференции. – г. Москва: изд-во МАКС Пресс. 2017. – 2017.
20. **Порошина, А.Б., Веденеев В.** Осесимметричное стационарное состояние упругой трубки при протекании через нее неньютоновской жидкости // Ломоносовские чтения. Секция механики. Тезисы докладов – г. Москва: изд-во Московского университета, – 2017. – С. 168.



21. **Порошина, А.Б.** Стационарное состояние упругой трубки с протекающей внутри жидкостью // Тезисы конференции-конкурса молодых ученых института механики МГУ им. М.В. Ломоносова 11-13 октября – г. Москва: изд-во Московского университета. — 2017. — С. 30.
22. **Порошина, А.Б., Веденеев В.** Существование и единственность стационарного состояния упругой трубки при протекании через неё нелинейно-вязкой жидкости // Всероссийская конференция молодых учёных-механиков, 5-15 сентября 2017 г., Сочи, «Буревестник» МГУ. Тезисы докладов. – г. Москва: изд-во Московского университета. — 2017. — С. 98.
23. **Порошина, А.Б., Веденеев В.** Осесимметричная неустойчивость упругой трубки при протекании внутри нее неньютоновской жидкости // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 18-27 апреля 2016. — 2016. — С. 146.
24. **Порошина, А.Б., Веденеев В.** Существование и единственность стационарного состояния упругой трубки при протекании через неё нелинейно-вязкой жидкости // Биомеханика-2016. Тезисы докладов XII Всероссийской (с международным участием) конференции. – г. Пермь: изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета. — 2016. — С. 99–100.
25. **Веденеев В., Порошина, А.Б.** Устойчивость упругой трубки при протекании через неё нелинейно-вязкой жидкости // Современные проблемы аэрогидродинамики. Тезисы докладов XVIII Всероссийской конференции, посвященной 60-летию Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике и 125-летию со дня рождения академика АН СССР Н.И. Мухомеловича. – г. Москва: изд-во Московского университета. — 2016. — С. 34–35.
26. **Порошина, А.Б.** Устойчивость упругой трубки при протекании через неё нелинейно-вязкой жидкости // Тезисы конференции-конкурса молодых ученых института механики МГУ им. М.В. Ломоносова 10-12 октября 2017 г. – г. Москва: изд-во Московского университета. — 2017. — С. 24.

\*Фамилия Порошина (Poroshina) изменена на Подопросветова (Podoprosvetova) на основании свидетельства о заключении брака.

*Подопросветова Анастасия Борисовна*

Теоретическое и экспериментальное исследования устойчивости упругой трубки  
с протекающей внутри жидкостью

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать \_\_\_\_\_.\_\_\_\_.\_\_\_\_\_. Заказ № \_\_\_\_\_

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография \_\_\_\_\_