

На правах рукописи

Яковенко Анастасия Александровна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА УПРУГИХ И  
ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ**

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-  
математических наук

Москва 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН).

Научный руководитель:

**Горячева Ирина Георгиевна**  
академик РАН, д.ф.-м.н., профессор,  
заведующий лабораторией трибологии  
ИПМех РАН

Официальные оппоненты:

**Пожарский Дмитрий Александрович**  
д.ф.-м.н., профессор,  
заведующий кафедрой прикладной  
математики ФГБОУ ВО «Донской  
государственный технический университет»

**Бобылев Александр Александрович**  
к.ф.-м.н., доцент,  
сотрудник кафедры механики композитов  
ФГБОУ ВО «Московский государственный  
университет имени М.В. Ломоносова»

Ведущая организация:

ФГАОУ ВО «Южный федеральный  
университет»

Защита состоится 9 июня 2022 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 на базе ИПМех РАН по адресу: просп. Вернадского 101, корп. 1, Москва.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН <http://www.ipmnet.ru/diss/diss/>

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 г.

Учёный секретарь

диссертационного совета Д 002.240.01

к.ф.-м.н.

Е.Я. Сысоева

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы:** В основе механики контактного взаимодействия лежит классическая работа Герца (Hertz H., 1882) о контакте двух упругих тел. Несмотря на то, что теория Герца дает достаточно полный анализ напряженно-деформируемого состояния контактирующих тел, в ее основе лежит ряд упрощающих предположений относительно формы, размеров и механических свойств тел. Помимо упругости, к ограничениям относится также идеальная гладкость контактирующих поверхностей. В действительности же поверхности тел геометрически неоднородны и обладают рельефом, представляющим собой совокупность неровностей различной формы и размеров. Наличие поверхностного рельефа приводит к тому, что область контакта является дискретной, то есть представляет собой систему отдельных пятен. При этом фактическая площадь контакта может быть в десятки раз меньше номинальной, что необходимо учитывать, так как именно на пятнах контакта протекают такие физические процессы, как трение, разрушение, теплообмен, перенос электрического заряда и т.д. Следовательно, от размеров фактической области контакта зависят изнашивание деталей, их тепло- и электропроводность, а также прочность сопряжений.

Задачи дискретного контакта возникают не только при рассмотрении взаимодействия тел с учетом их микрорельефа, но также и при исследовании взаимодействия неоднородных тел, тел сложной формы и систем тел, расположенных достаточно близко друг к другу (например, медицинские зажимы).

Размеры фактической области контакта и остальные контактные характеристики помимо реальной геометрии поверхностей контактирующих тел определяются также и механическими свойствами тел. Так, учет реологических свойств, которыми обладают многие материалы (например, полимеры, биологические ткани), может вносить значительные изменения в получаемые результаты, так как все характеристики контакта при этом будут зависеть от времени. Именно поэтому наряду с задачами дискретного контакта в упругом

случае большой практический интерес представляют и задачи контакта вязкоупругих тел.

Форма поверхности тел может описываться регулярной функцией, а может носить статистический характер. В случае нерегулярного микрорельефа решение контактной задачи основывается на характеристиках напряженно-деформированного состояния единичной неровности и топографии шероховатой поверхности. Одной из самых распространенных моделей такого рода является модель Гринвуда-Вильямсона (Greenwood J.A., Williamson J.B.P., 1966), описывающая шероховатость набором сфер, деформации которых определяются соотношениями Герца. Рассматривались и другие формы неровностей, например, эллиптические параболоиды (Bush A., Gibson R., Thomas T., 1975). Для описания поверхностного рельефа использовалась также и фрактальная геометрия (Majumdar A., Bhushan B., 1991; Бородич Ф.М., Мосолов А.Б, 1992).

Недостатком представленных моделей является неучет взаимного влияния неровностей, что существенно при большой плотности контакта. Учет взаимного влияния существенно усложняет решение задач дискретного контакта. Однако аналитическое решение можно получить для поверхностей с регулярным рельефом. Так, в работе (Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G., 1985) получено решение задачи контакта поверхностей с синусоидальным рельефом. Для решения периодических контактных задач взаимодействия системы осесимметричных инденторов и упругого полупространства разработан метод локализации (Горячева И.Г., 1998). Аналитическое решение задач множественного контакта с учетом взаимного влияния возможно также получить и в случае, когда область контакта состоит из ограниченного числа подобластей (Collins W.D., 1963; 30. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., 1970; Марзицин Б.М., Попов Г.Я., 1975; Fabrikant V.I., 1986; Goryacheva I.G., Dobychin M.N., 1991).

Учет релаксационных свойств взаимодействующих тел приводит к дополнительным трудностям в решении контактных задач. Для их решения, как правило, используется принцип соответствия (Бленд Д., 1965; Кристенсен Р., 1974), основанный на интегральном преобразовании, а также метод замены

упругих постоянных соответствующими вязкоупругими операторами, предложенный Радоком (Radok J.R.M., 1956). К контактной задаче этот метод был применен впервые в работе (Lee E.H., Radok J.R.M., 1960) для случая возрастающей области контакта. Затем этот подход был обобщен на случай произвольно изменяющейся во времени области контакта (Hunter S.C., 1960; Graham G.A.C., 1965; Yang W.H., 1966; Ting T.C.T., 1966; Ting T.C.T., 1968; Greenwood J.A., 2010). Подход Радока также применяется и для решения задач дискретного контакта вязкоупругих тел, шероховатость которых описывается моделью Гринвуда-Вильямсона (Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M., 2000). Среди исследований дискретного контакта вязкоупругих тел стоит также отметить работу Перссона (Persson B.N.J., Albohr O., Creton C., Peveri V., 2004), который разработал теорию контакта тел с учетом их шероховатости на различных масштабных уровнях. Аналогично упругому случаю для исследования контакта вязкоупругих шероховатых тел используется и фрактальная геометрия (Abuzeid O.M., 2004; Abuzeid O.M., Eberhard P., 2007).

Развитие вычислительной техники привело к росту популярности численных методов для решения задач дискретного контакта упругих и вязкоупругих тел (Stanley H.M., Kato T., 1997; Kozhevnikov I.F., Duhamel D., Yin H.P., Feng Z.-Q., 2010; Chen W.W., Wang Q.J., Huan Z., Luo X., 2011; Rostami A., Jackson R.L., 2013; Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.F., 2014; Spinu S., Cerlinka D., 2017). Но, несмотря на широту круга задач, которые возможно решить с помощью численных методов, разработка аналитических моделей актуальна и по сей день. Во-первых, аналитические методы позволяют в явном виде выделить параметры, от которых зависят модели контактного взаимодействия, и оценить качественно и количественно их влияние на характеристики контактного взаимодействия. Во-вторых, полученные аналитические зависимости могут быть использованы при исследовании поведения более сложных систем взаимодействия, в которых рассматриваемый контакт является подсистемой (например, робототехнических систем), а также при обработке экспериментальных данных. Именно необходимостью построения

аналитических моделей контактного взаимодействия тел с различными механическими свойствами и различной поверхностной геометрией обосновывается актуальность данного исследования.

**Целью** диссертационной работы является постановка и решение контактных задач о взаимодействии упругих и вязкоупругих тел с учетом геометрии их контактирующих поверхностей (макроформа, микрорельеф) и анализ влияния параметров поверхностной геометрии на характеристики контактного взаимодействия деформируемых тел на макроуровне и микроуровне.

Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

- контактная задача о внедрении в упругое полупространство ограниченной системы штампов различной формы с учетом взаимного влияния пятен контакта;
- контактная задача о внедрении в вязкоупругое основание (слой и полупространство) единичного цилиндрического штампа с различной формой торцевой поверхности;
- контактная задача о внедрении в упругое и вязкоупругое полупространство периодической системы осесимметричных штампов различной формы с учетом взаимного влияния пятен контакта;
- контактная задача о внедрении в вязкоупругий слой цилиндрического штампа с учетом микрогеометрии его контактирующей поверхности.

**Научная новизна** работы состоит в следующем:

- построена аналитическая модель для исследования внедрения в упругое полупространство ограниченной системы узких в плане штампов с учетом их взаимного влияния;
- проведен анализ влияния формы штампа, внедряющегося с постоянной скоростью в вязкоупругое полупространство, а также механических свойств материала основания (характерных времен ползучести и релаксации, длительных и мгновенных модулей упругости) на характеристики

контактного взаимодействия (распределение контактного давления, область контакта, приложенная к штампу нагрузка);

- исследовано влияние параметров нагружения (скорости внедрения, времени выдержки на заданной глубине) цилиндра, внедряющегося в вязкоупругий тонкий и толстый слой, и модели механического поведения вязкоупругого слоя на зависимость приложенной к штампу нагрузки от времени;
- получено решение периодической контактной задачи для двухуровневой системы осесимметричных штампов, внедряющихся в упругое полупространство, и проведен анализ влияния пространственного расположения штампов на контактные характеристики (размеры пятен контакта, распределение контактного давления, приложенные к штампам нагрузки);
- поставлена и решена периодическая контактная задача для системы осесимметричных штампов, внедряющихся в вязкоупругое полупространство под действием постоянного номинального давления, методом локализации и обосновано его применение для решения задач дискретного контакта вязкоупругих тел с неубывающей во времени областью контакта;
- выполнено обобщение метода решения задач контакта упругих тел с учетом шероховатости на двух масштабных уровнях на случай взаимодействия вязкоупругих тел.

**Достоверность** результатов исследования обеспечена сравнением полученных решений контактных задач в предельных случаях (малые и большие времена и скорости, малая плотность контакта) с известными аналитическими решениями (соответствующие упругие решения и решения для задач с единичной областью контакта) и с результатами численного моделирования, а также использованием для анализа полученных зависимостей (получения конкретных численных результатов) апробированных численных методов: методы численного интегрирования и численного решения нелинейных уравнений.

**Практическая значимость** работы заключается в том, что построенные модели контактного взаимодействия могут быть использованы при разработке нового медицинского оборудования, а также при обработке экспериментов по индентированию материалов, обладающих свойствами ползучести и релаксации. Более того, полученные результаты позволяют оценить влияние микрогеометрии контактирующих поверхностей на характеристики контактного взаимодействия (в частности, на размер фактической области контакта), от которых зависят многие практически важные свойства трибосопряжений (контактная жесткость, электро- и теплопроводность, износостойкость и другие).

**Методы исследования:**

- метод локализации, основанный на замене влияния отдаленных пятен контакта в периодической задаче дискретного контакта на действие равномерно распределенного номинального давления;
- метод соответствия решения задач в упругой и вязкоупругой постановках и метод замены упругих постоянных соответствующими вязкоупругими операторами для построения решения вязкоупругих задач на основе соответствующих известных упругих решений;
- методы численного интегрирования (метод Симпсона) и численного решения нелинейных уравнений (метод простой итерации, метод Ньютона, метод секущих).

**Положения, выносимые на защиту:**

- 1) построение решений контактных задач взаимодействия с упругим полупространством ограниченной системы узких в плане штампов, а также ограниченной и периодической системы осесимметричных штампов с учетом их взаимного влияния;
- 2) постановка и решение контактных задач взаимодействия с вязкоупругим полупространством цилиндрического штампа с различной формой торцевой поверхности и периодической системы одинаковых осесимметричных штампов, форма контактирующей поверхности которых описывается степенной функцией;



- 3) решение контактной задачи о внедрении в вязкоупругий слой цилиндра с плоским гладким и шероховатым основанием с применением приближенных решений для тонкого и толстого слоев;
- 4) анализ влияния макро- и микрогеометрии контактирующих поверхностей, определяемой формой отдельных неровностей (штампов), их пространственным расположением, механических свойств материалов взаимодействующих тел (упругие и вязкоупругие свойства), а также параметров нагружения (скорость внедрения или величина номинального давления) на характеристики контактного взаимодействия (относительное сближение под нагрузкой, фактическая и номинальная области контакта, распределение контактных давлений) и их изменение во времени.

**Апробация работы:** Основные результаты работы были представлены на 11 международных и 7 всероссийских конференциях:

- 1) XLIII международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, Россия, 5-20 апреля 2017;
- 2) 60-ая всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, Россия, 20-26 ноября 2017;
- 3) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2018», Москва, Россия, 16-25 апреля 2018;
- 4) XIII Всероссийская (с международным участием) конференция БИОМЕХАНИКА-2018, Краснодарский край, с. Дивноморское, Россия, 28 мая - 1 июня 2018;
- 5) International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”, (APM-2018), Санкт-Петербург, Россия, 25-30 июня 2018;
- 6) 7th European Conference on Mechanism Science (International Conference), Ахен, Германия, 4-6 сентября 2018;
- 7) IX международная конференция "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред", Горис, Армения, 1-6 октября 2018;

- 8) XXXI международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения (МИКМУС-2019), ИМАШ РАН, Москва, Россия, 4-6 декабря 2019;
- 9) XLVI международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, Россия, 13-17 апреля 2020;
- 10) XX международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на-Дону, Россия, 18-21 июня 2020;
- 11) XLVIII International Conference “Advanced Problems in Mechanics” (APM-2020), Санкт-Петербург, Россия, 21-26 июня 2020;
- 12) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2020», Москва, Россия, 26-30 октября 2020;
- 13) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2021», Москва, Россия, 20-26 апреля 2021;
- 14) международная молодёжная научная конференция «XLVII Гагаринские чтения», Москва, Россия, 20-23 апреля 2021;
- 15) XLIX International Summer School – Conference Advanced Problems in Mechanics (APM-2021), Санкт-Петербург, Россия, 21-25 июня 2021;
- 16) 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, ICTAM 2020+1, Милан, Италия, 22-27 августа 2021;
- 17) всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2021, посвященная 60-летию первого полета человека в космос, Сочи, Россия, 3-12 сентября 2021;
- 18) 64-я всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, Россия, 29 ноября - 3 декабря 2021.

Научные исследования, проведенные в диссертационной работе, осуществлялись в рамках грантов РФФИ: 16-58-52033, 19-58-52004, 20-01-00400, включая аспирантский грант для написания диссертации 20-31-90038 («Моделирование дискретного контакта упругих и вязкоупругих тел»); гранта РНФ 18-19-00574; Госзадания АААА-А20-120011690132-4 «Экспериментально-теоретическое изучение влияния геометрических и механических свойств

поверхности и тонких поверхностных слоев на фрикционные характеристики и изнашивание элементов пар трения».

**Публикации:** Основные результаты диссертации изложены в работах [1-23], изданных в периодических научных изданиях, сборниках материалов и тезисах докладов международных и всероссийских конференций. 6 статей [1-6] из списка публикаций напечатаны в журналах, входящих в перечень ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus, в том числе статья [5] опубликована в высокорейтинговом международном журнале.

**Личный вклад автора:** В работах [1-6] автором построено решение контактных задач единичного и множественного контакта упругих и вязкоупругих тел, математические постановки которых были предложены научным руководителем Горячевой И.Г. Все необходимые расчёты были проведены автором самостоятельно, анализ полученных результатов проводился совместно с Горячевой И.Г.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объем работы составляет 127 страниц, включая 40 рисунков. Список литературы содержит 123 наименования.

### **Содержание работы**

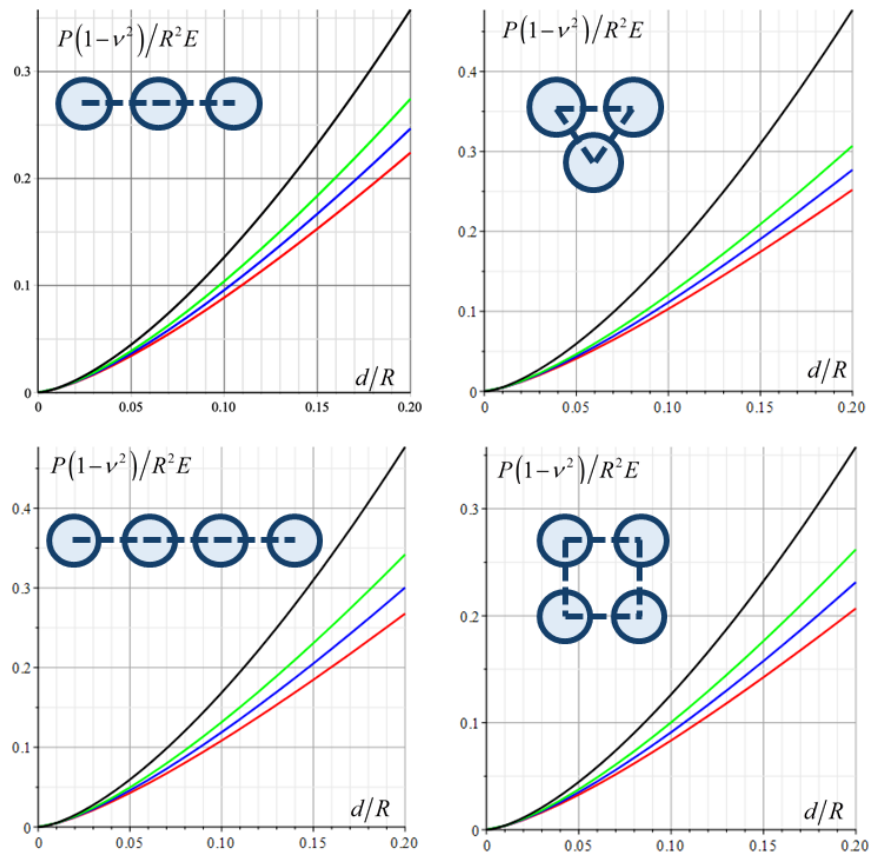
Во **введении** представлен обзор литературы, посвященной исследованиям, тематика которых относится к данной диссертации. Представлены существующие постановки и методы исследования задач контакта шероховатых тел, подходы к решению задач контакта тел, обладающих релаксационными свойствами, а также сформулированы основные цели и задачи диссертационной работы, обоснованы актуальность и научная новизна исследования.

В **первой главе** рассмотрена контактная задача о внедрении в упругое полупространство ограниченной системы  $N$  одинаковых по форме штампов под действием нормальной нагрузки  $P$ . Механические свойства полупространства характеризуются модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Исходя из принципа суперпозиции, вертикальные смещения границы упругого

полупространства внутри отдельного пятна контакта можно представить в виде суммы двух:  $u_z^{i(1)}$ , определяемое приложенным внутри рассматриваемого пятна контакта давлением, и  $u_z^{i(2)}$ , обусловленное влиянием остальных пятен контакта.

Определяющая система уравнений в случае системы сферических штампов, контактирующая поверхность которых описывается функцией  $f(r) = r^2/2R$  ( $R$  – радиус кривизны), получена Горячевой И.Г. (Горячева И.Г., 2001). В данной работе проведен анализ влияния пространственного расположения штампов в системе на распределение нагрузок между ними, а также на зависимость приложенной к системе нагрузки от глубины внедрения  $d$ . Исследовались системы  $N=3$  и  $N=4$  штампов, расположенных в линию и в вершинах равносторонних фигур (равносторонний треугольник и квадрат). Также варьировалось расстояние между штампами  $l$ . Результаты показали, что при расположении штампов в линию нагрузки на центральные штампы всегда меньше нагрузок на крайние, и чем ближе расположены штампы друг к другу, тем эта разница будет больше. Анализ зависимости нагрузки, приложенной к системе, от глубины внедрения показал, что расположение штампов в вершинах равносторонних фигур ведет к уменьшению величины суммарной нагрузки при фиксированной глубине внедрения (см. рис.1). При этом результаты, полученные без учета взаимного влияния, всегда дают завышенные значения нагрузок. И чем плотнее расположены штампы в системе, и чем глубже погружены они в полупространство, тем больше будет ошибка в величине нагрузки, обусловленная пренебрежением взаимным влиянием пятен контакта.

В работе также исследовано влияния плотности расположения штампов в системе на величину максимального контактного давления.



**Рисунок 1.** Зависимость приложенной к системе нагрузки от глубины внедрения при разном значении  $l$  ( $l = 0.75R$  – красная линия,  $l = R$  – синяя линия,  $l = 1.5R$  – зеленая линия,  $l \rightarrow \infty$  – черная линия)

Помимо системы сферических штампов, в работе также исследовано внедрение в упругое полупространство ограниченной системы узких в плане штампов (рис.2). Для определения смещений  $u_z^{i(1)}$ , вызванных действием давления внутри рассматриваемого пятна контакта, использовалось решение Галина для узкой балки (Галин Л.А., 1980). При этом смещения границы полупространства связаны с приложенной к нему погонной нагрузкой  $p(x)$  следующим образом

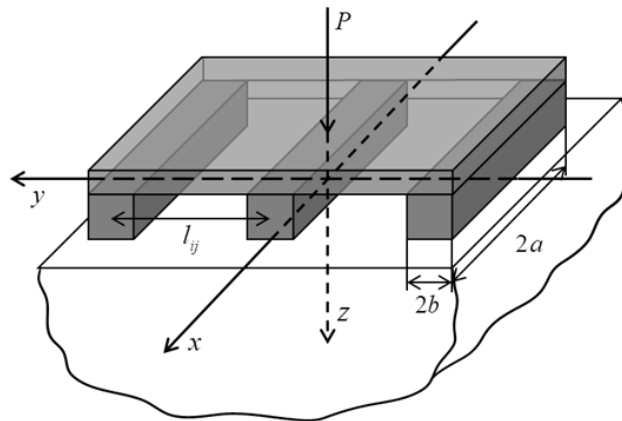
$$u_z(x,0) = \frac{p(x)}{k}, \quad k = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)\ln(a/b)}, \quad (1)$$

где  $a$  – полудлина штампа, а  $b$  – его полуширина ( $a \gg b$ ). Для определения же смещений  $u_z^{i(2)}$  влияние остальных штампов заменялось действием погонных нагрузок, равномерно распределенных по длине штампов. Использование этих

упрощений позволило получить систему уравнений, определяющую нагрузки, приложенные к каждому штампу, а именно

$$P_i = k \left( 2ad - \frac{1-\nu^2}{\pi a E} \sum_{j=1, j \neq i}^N P_j \left( a \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + l_{ij}^2} + 2a}{\sqrt{4a^2 + l_{ij}^2} - 2a} \right) + l_{ij} - \sqrt{4a^2 + l_{ij}^2} \right) \right), \quad (2)$$

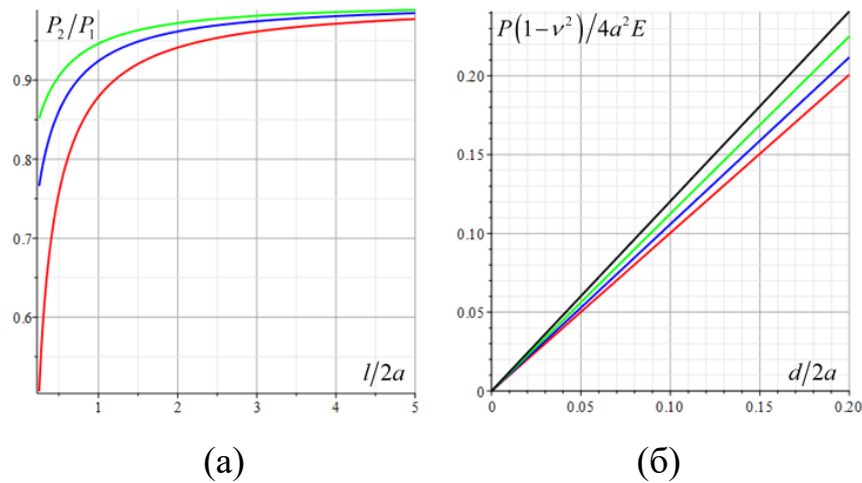
где  $l_{ij}$  – расстояние между  $i^{blM}$  и  $j^{blM}$  штампами.



**Рисунок 2.** Схема контакта с упругим полупространством ограниченной системы узких в плане штампов

Численные расчеты проводились для систем  $N = 3$  и  $N = 4$  штампов. На рис.3 представлены результаты только для системы  $N = 3$  штампов. Рис.3(а) представляет зависимость отношения нагрузки, действующей на центральный штамп, к нагрузке, действующей на крайний, от расстояния между ними для трех значений отношения  $b/a$ . Результаты показали, что чем уже штампы, тем равномернее нагружена система. К равномерному распределению нагрузок также ведет и увеличение расстояния между штампами. На рис.3(б) представлена зависимость суммарной нагрузки, приложенной к системе, от глубины внедрения. Получено, что, как и в случае сферических штампов, уменьшение расстояния  $l$  ведет к увеличению глубины внедрения при фиксированной приложенной к системе нагрузке.

Полученное решение позволило также определить высотное распределение штампов в системе, которое обеспечивает их равномерную нагруженность. Показано, что для равномерного нагружения штампов необходимо, чтобы крайние штампы имели высоту меньше, чем центральные.



**Рисунок 3.** (а) Зависимость отношения нагрузок на центральные и крайние штампы от расстояния между ними при разном значении  $b/a$  ( $a = 10b$  – красная линия,  $a = 30b$  – синяя линия,  $a = 100b$  – зеленая линия); (б) зависимость приложенной к системе нагрузки от глубины внедрения при  $a = 50b$  и разном значении  $l$  ( $l = 2a$  – красная линия,  $l = 3a$  – синяя линия,  $l = 6a$  – зеленая линия,  $l \rightarrow \infty$  – черная линия)

Таким образом, в **первой главе** получено решение контактной задачи взаимодействия с упругим полупространством ограниченной системы штампов. Для системы сферических штампов исследовано влияние их пространственного расположения на распределение нагрузок и зависимости суммарной нагрузки, приложенной к системе, от глубины внедрения. Показано, что равномерное пространственное расположение штампов (в вершинах равностороннего треугольника, квадрата и т.д.) ведет к уменьшению величины нагрузки, необходимой для достижения заданной глубины внедрения. Для системы узких в плане штампов разработан метод решения, позволяющий получить аналитические зависимости суммарной нагрузки и нагрузок, действующих на каждый штамп, от глубины внедрения системы в полупространство. Проанализировано влияние расстояния между штампами на характеристики контактного взаимодействия. Показано, что с уменьшением расстояния между штампами увеличивается глубина внедрения системы в полупространство при фиксированной приложенной нагрузке. Также определено высотное распределение штампов в системе, обеспечивающее равномерное распределение нагрузок между ними.

Во **второй** главе рассмотрены две контактные задачи: внедрение в вязкоупругое полупространство с постоянной скоростью цилиндрического штампа с различной формой торцевой поверхности и внедрение в вязкоупругий тонкий и толстый слой цилиндрического штампа с плоским основанием до заданной глубины с дальнейшим его там удержанием. В задаче для вязкоупругого полупространства считается, что форма основания цилиндра описывается степенной функцией, то есть  $f(r) = Ar^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Материал полупространства и слоя считается однородным, изотропным и линейно вязкоупругим с постоянным коэффициентом Пуассона. Тогда для описания его механического поведения достаточно одной функции релаксации или соответствующей функции ползучести (Кристенсен Р., 1974). В данной работе используются функции релаксации  $E(t)$  и ползучести  $J(t)$ , соответствующие одноосному растяжению/сжатию.

При внедрении в вязкоупругое полупространство с постоянной скоростью  $V$  цилиндрического штампа с различной формой торцевой поверхности процесс внедрения разделяется на два этапа: с изменяющейся областью контакта и с постоянной, когда угловые точки цилиндра находятся в контакте с полупространством. Так как в течение всего процесса область контакта является не убывающей во времени, то к решению задачи применим метод Радока замены упругих постоянных вязкоупругими операторами (Lee E.H., Radok J.R.M., 1960). Тогда решение вязкоупругой задачи представляет собой решение Галина (Галин Л.А., 1980) соответствующей упругой задачи, в котором модуль упругости  $E$  заменен интегральным оператором с ядром  $E(t)$ . Для описания механического поведения полупространства в работе используется модель стандартного вязкоупругого тела, функция релаксации которой имеет вид

$$E(t) = \frac{T_\sigma E_0}{T_\varepsilon} \left( 1 + \left( \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} - 1 \right) e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \right), \quad (3)$$



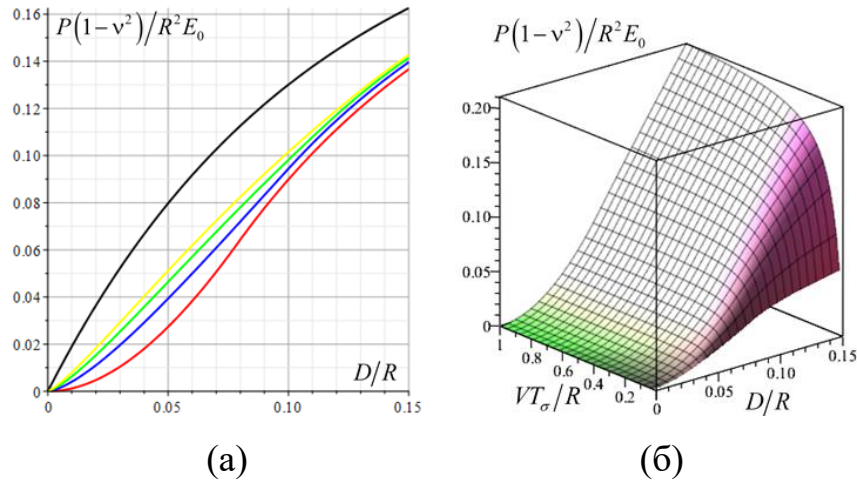
где  $E_0$  – мгновенный модуль упругости, а  $T_\sigma$  и  $T_\varepsilon$  – времена релаксации и ползучести. Для зависимости нагрузки, приложенной к цилиндру, от времени получено следующее выражение

$$P(t) = \frac{VT_\sigma E_0}{(1-\nu^2)T_\varepsilon} \begin{cases} \kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} (Vt)^{\frac{1}{n}} \left( t + (T_\varepsilon - T_\sigma) \frac{n+1}{n} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \Phi_n(t) \right) \right), & t \leq t_* \\ 2R \left( t - \frac{1}{n+1} t_* + (T_\varepsilon - T_\sigma) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \Phi_n(t_*) \right) \right), & t \geq t_* \end{cases} \quad (4)$$

где  $\kappa(n) = 2^{2/n} n^{(n-1)/n} (\Gamma(n))^{1/n} (\Gamma(n/2))^{-2/n} / (n+1)$ ,  $\Gamma(n)$  – гамма-функция,  $R$  – радиус цилиндра,  $\Phi_n(t) = \Phi(1/n, (n+1)/n; t/T_\sigma)$ ,  $\Phi(a, c; x)$  – вырожденная гипергеометрическая функция (Бейтман Г., Эрдейи А., 1965), а  $t_* = A(2nR/(n+1)\kappa(n))^n / V$  – момент вступления в контакт с полупространством угловых точек цилиндра.

На рис.4 представлены графики зависимости нагрузки, приложенной к штампу, от глубины внедрения  $D$  для разной формы основания штампа (а) и разной скорости внедрения (б). Из полученных результатов следует, что на одной и той же глубине внедрения значение нагрузки минимально для цилиндра с коническим основанием, а максимально – для цилиндра с плоским основанием. Анализ влияния скорости  $V$  на зависимость нагрузки от глубины внедрения показал, что при фиксированной глубине внедрения значение прикладываемой к штампу нагрузки меньше при малых скоростях внедрения.

В работе также представлен анализ изменения во времени распределения контактного давления под поверхностью цилиндра с различной формой основания.



**Рисунок 4.** Зависимость нагрузки от глубины внедрения (а) при разной форме основания цилиндра (плоское основание – черная линия,  $n = 1$  – красная линия,  $n = 2$  – синяя линия,  $n = 3$  – зеленая линия,  $n = 4$  – желтая линия) и  $V = R/10T_\sigma$ ,  $T_\varepsilon = 20T_\sigma$ ; (б) при разной скорости внедрения и  $n = 1$ ,  $T_\varepsilon = 10T_\sigma$ ;  $A = 0.05R^{n-1}$

Для решения задачи о внедрении в вязкоупругий слой толщины  $h$  цилиндра с плоским основанием использовался принцип соответствия (Бленд Д., 1965), так как в этом случае область контакта постоянна. При этом характер зависимости контактных характеристик (контактное давление  $p$ , нагрузка  $P$ ) от времени будет одинаков для тонкого и толстого слоев вследствие линейной зависимости упругих решений от глубины внедрения для рассматриваемой формы штампа, а именно

$$p(r, t) = \frac{V}{1-\nu^2} g_{1,2}(r, \lambda) T(t, t_*), \quad P(t) = \frac{V}{1-\nu^2} G_{1,2}(\lambda) T(t, t_*), \quad (5)$$

$$T(t, t_*) = \begin{cases} \int_0^t E(t-\tau) d\tau, & t \leq t_* \\ 0 & t_* < t < t_* \\ \int_0^{t_*} E(t-\tau) d\tau, & t \geq t_* \end{cases} \quad (6)$$

где  $t_*$  – момент начала стадии удержания,  $\lambda = h/R$ , а функции  $g_{1,2}(r, \lambda)$  и  $G_{1,2}(\lambda)$  определяются упругими решениями в приближении толстого и тонкого слоя, полученные в работах Александрова В.М. и Воровича И.И. (Александров В.М., Бабешко В.А., Кучеров В.А., 1966; Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А., 1974).

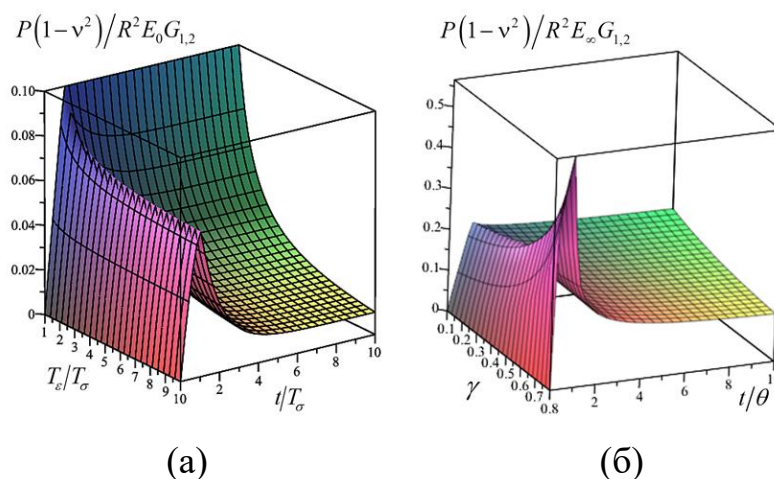
Для описания механического поведения слоя использовались две модели: с экспоненциальной функцией релаксации, а именно модель стандартного вязкоупругого тела (3), и со степенной функцией релаксации, которая имеет следующий вид

$$E(t) = \frac{A}{(\theta t)^\gamma} + E_\infty, \quad (7)$$

где  $A$  имеет размерность давления,  $\theta$  – размерность, обратную времени,  $\gamma \in (0,1)$ , а  $E_\infty$  соответствует длительному модулю упругости. На рис.5 представлены зависимости нагрузки, приложенной к цилиндру, от времени, которая определяется функцией  $T(t, t_*)$  (6), для двух рассматриваемых моделей вязкоупругого материала при варьировании их определяющих параметров. В случае экспоненциальной модели, результаты для которой представлены на рис.5(а), варьировалось значение отношения времен ползучести и релаксации. Анализ результатов показал, что чем больше значение отношения  $T_\varepsilon/T_\sigma$ , тем меньше величина нагрузки на максимальной глубине внедрения и величина нагрузки после длительного периода удержания цилиндра на этой глубине при фиксированном мгновенном модуле упругости. Для степенной модели вязкоупругого материала варьировались параметры  $A$  и  $\gamma$ . На рис.5(б) результаты представлены только для разных значений показателя степени  $\gamma$ . Установлено, что увеличение показателя степени  $\gamma$  (7) ведет к возрастанию нагрузки на максимальной глубине внедрения при фиксированном длительном модуле упругости. При этом также увеличивается скорость возрастания нагрузки в начале стадии внедрения и скорость релаксации нагрузки в начале стадии удержания.

Таким образом, во **второй главе** получено решение двух контактных задач о внедрении цилиндрического штампа в вязкоупругое полупространство и вязкоупругий слой. В каждой задаче получены аналитические зависимости от времени нагрузки, приложенной к цилиндру, и распределения контактного давления под поверхностью цилиндра. Исследовано влияние скорости внедрения штампа в вязкоупругое основание на зависимость приложенной к нему нагрузки

от глубины внедрения. Для задачи о внедрении цилиндрического штампа в вязкоупругое полупространство также исследовано влияние формы основания цилиндра на контактное давление и приложенную к цилиндру нагрузку. Результаты анализа внедрения цилиндра в вязкоупругий слой, полученные на стадии удержания, могут быть использованы для определения длительных механических характеристик вязкоупругого слоя.



**Рисунок 5.** Зависимость нагрузки от времени при  $V = 0.1R/T_\sigma$  (а) для модели стандартного вязкоупругого тела с разными значениями отношения  $T_e/T_\sigma$  и (б) для степенной модели с  $A = E_\infty$  и разными значениями показателя степени  $\gamma$

В третьей главе рассмотрены периодические контактные задачи для упругого и вязкоупругого полупространства, а именно внедрение в полупространство периодической системы осесимметричных штампов под действием заданного номинального давления  $\bar{p}$ . При этом предполагалось, что каждое пятно контакта представляет собой круг радиуса  $a$ . Рассматривались одноуровневая и двухуровневая системы штампов. В силу периодичности системы номинальное давление можно выразить через нагрузку, приложенную к отдельному штампу  $P_i$ , и среднее число пятен контакта на единицу площади  $\bar{N}$ . В случае одноуровневой задачи  $\bar{p} = \bar{N}P$ , где  $P_i \equiv P$ .

Для решения периодических контактных задач в упругом случае Горячевой И.Г. был предложен метод локализации (Горячева И.Г., 1998), согласно которому напряженно-деформированное состояние тела вблизи отдельного пятна контакта

можно с достаточной степенью точности определить, рассматривая реальные условия контакта лишь на близлежащих пятнах, а контактное давление на остальных заменить действием номинального давления вне круга радиуса  $A$ , определяемого плотностью расположения штампов. Анализ численных результатов для сферических штампов можно найти в (Горячева И.Г., 2001). В данной работе представлено решение для штампов, форма которых описывается степенной функцией  $f(r) = Cr^s/R_a^{s-1}$  ( $s=1,2,\dots$ ,  $R_a$  – характерный размер штампа,  $C$  – безразмерная константа), и проанализировано влияние формы штампов на характеристики контактного взаимодействия.

Из анализа полученных результатов следует, что с увеличением показателя степени  $s$  радиус отдельного пятна контакта возрастает, а давление в центральной части контактной области уменьшается. Сравнение с решением задачи о внедрении в полупространство единичного штампа позволяет сделать вывод, что пренебрежение взаимным влиянием штампов приводит к завышенным значениям размеров контактной области и заниженным значениям давления в центральной части пятна контакта. Так как полупространство загружено по всей области, то смещения его границы будут иметь бесконечное значение. Поэтому в периодических задачах вводится функция дополнительного смещения  $d$ , равная разнице глубины внедрения  $D$  и смещению границы полупространства, всюду нагруженного номинальным давлением. Из анализа влияния формы штампов на величину дополнительного смещения следует, что увеличение показателя степени функции  $f(r)$  ведет к значительному уменьшению дополнительного смещения. К такому же результату ведет и увеличение плотности расположения штампов в системе, что согласуется с полученными ранее результатами (Горячева И.Г., 2001).

Метод локализации применим и для разноуровневых периодических систем штампов. В работе решалась задача о внедрении в упругое полупространство двухуровневой (с заданной разницей высот уровней  $\Delta h$ ) системы штампов, расположенных в вершинах квадрата со стороной  $l$ . Все штампы имеют

сферическую форму, то есть  $f(r) = r^2/2R$ , где  $R$  – радиус кривизны. При рассмотрении контакта с полупространством фиксированного штампа действия близлежащих штампов другого уровня заменялось нагрузкой, распределенной по окружности радиуса  $B = l/\sqrt{2}$ , а действие всех остальных штампов обоих уровней заменялось номинальным давлением, равномерно распределенным вне круга радиуса  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ). Была получена следующая определяющая система уравнений

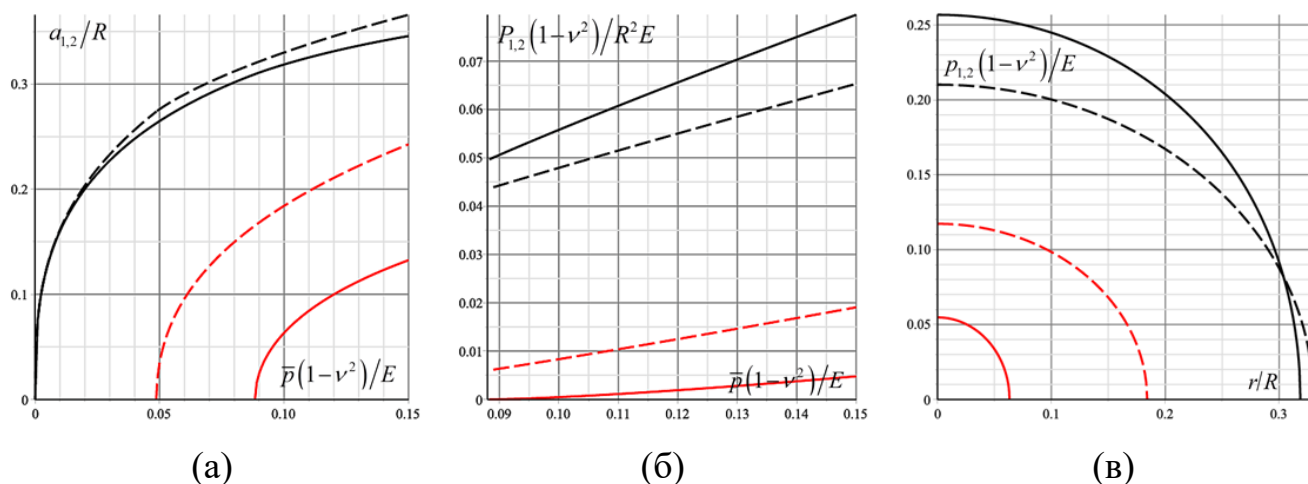
$$\bar{p} = \frac{1}{l^2}(P_1 + P_2), \quad \pi A_i^2 \bar{p} = P_i + 4P_j,$$

$$P_i = \frac{4Ea_i^3}{3(1-\nu^2)R} + \frac{8P_j}{\pi} \left( \frac{a_i}{\sqrt{B^2 - a_i^2}} - \arcsin\left(\frac{a_i}{B}\right) \right) + 2\bar{p} \left( A_i^2 \arcsin\left(\frac{a_i}{A_i}\right) - a_i \sqrt{A_i^2 - a_i^2} \right), \quad (8)$$

$$\Delta h = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( \frac{E\pi(a_1^2 - a_2^2)}{(1-\nu^2)R} - \frac{4P_1}{\sqrt{B^2 - a_2^2}} + \frac{4P_2}{\sqrt{B^2 - a_1^2}} - 2\pi\bar{p} \left( \sqrt{A_1^2 - a_1^2} - \sqrt{A_2^2 - a_2^2} \right) \right),$$

где  $i \neq j$ , а  $P_i$  и  $a_i$  – характеристики, относящиеся к штампам  $i^{o2o}$  уровня ( $i = 1, 2$ ).

На рис.6 представлены зависимости таких контактных характеристик, как размеры пятен контакта (а) и нагрузки (б), от номинального давления, а также распределение контактного давления (в) при фиксированном значении номинального давления. Анализ результатов показал, что теория Герца, которая не учитывает взаимное влияние пятен контакта, для штампов первого уровня дает заниженные значения нагрузок, а для штампов второго – наоборот, завышенные. Для радиусов же пятен контакта теория Герца для штампов обоих уровней в большинстве случаев дает завышенные значения. Из анализа распределения контактных давлений под штампами обоих уровней следует, что во всех случаях разница с теорией Герца больше для штампов второго уровня. При этом для штампов первого уровня в случае малых разниц высот отличие от теории Герца незначительное.



**Рисунок 6.** (а) Зависимость радиуса отдельного пятна контакта и (б) нагрузок  $P_{1,2}$  от номинального давления; (в) распределение давления на отдельном пятне контакта при  $\bar{p} = 0.1E/(1-\nu^2)$ ;  $l = 0.75R$ ,  $\Delta h = 0.075R$  (черные линии – первый уровень, красные линии – второй уровень; пунктир – теория Герца)

В работе также исследовано влияние плотности расположения штампов в системе и высотной разницы уровней на величину номинального давления, при которой штампы второго уровня вступают в контакт с полупространством. Результаты показали, что увеличение плотности расположения штампов, как и увеличение высотной разницы, ведет к тому, что двухуровневый контакт наступает при больших значениях номинального давления. При этом теория Герца всегда дает заниженные значения этой величины.

Для вязкоупругого полупространства решалась задача о внедрении в него одноуровневой системы штампов. Рассмотрен случай постоянного номинального давления. При этом каждое пятно контакта со временем будет только увеличиваться. С применением расширенного принципа соответствия (Graham G.A.C., 1968) и с учетом решения соответствующей упругой задачи, также представленного в **третьей главе**, получена следующая система уравнений для контактного давления, функции дополнительного смещения и радиуса отдельного пятна контакта

$$p(r,t) = \frac{C}{\pi(1-\nu^2)R_a^{s-1}} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial q_{1,2}(r,\tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{2}{\pi^2 A^2} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \left( \int_0^\tau J(\tau-s) \frac{dP(s)}{ds} ds \right) \arctan \left( \frac{\sqrt{a^2(\tau)-r^2}}{\sqrt{A^2-a^2(\tau)}} \right) \right) d\tau, \quad (9)$$

$$d(t) = 2^{s-2} s \frac{\Gamma^2(s/2) C a^s(t)}{\Gamma(s) R_a^{s-1}} - 2(1-\nu^2) \left( \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\bar{p}(\tau)}{d\tau} d\tau \right) \sqrt{A^2-a^2(t)}, \quad (10)$$

$$\frac{a^{s+1}(t)}{\arccos(a(t)/A) + (a(t)/A) \sqrt{1-(a(t)/A)^2}} = \frac{(s+1)\Gamma(s)(1-\nu^2)R_a^{s-1}}{2^{s-2}s^2\pi\Gamma^2(s/2)C} \int_0^t J(t-\tau) \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (11)$$

где функции  $q_{1,2}$  определяются распределением контактного давления в случае внедрения в упругое полупространство единичного штампа, форма контактирующей поверхности которого описывается степенной функцией ( $q_1$  – четный показатель степени,  $q_2$  – нечетный).

Для описания механического поведения использовалась модель стандартного вязкоупругого тела, функция релаксации которой имеет вид (3), а функция ползучести

$$J(t) = \frac{T_\varepsilon}{E_0 T_\sigma} \left( 1 - \left( 1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) e^{-\frac{t}{T_\varepsilon}} \right), \quad (12)$$

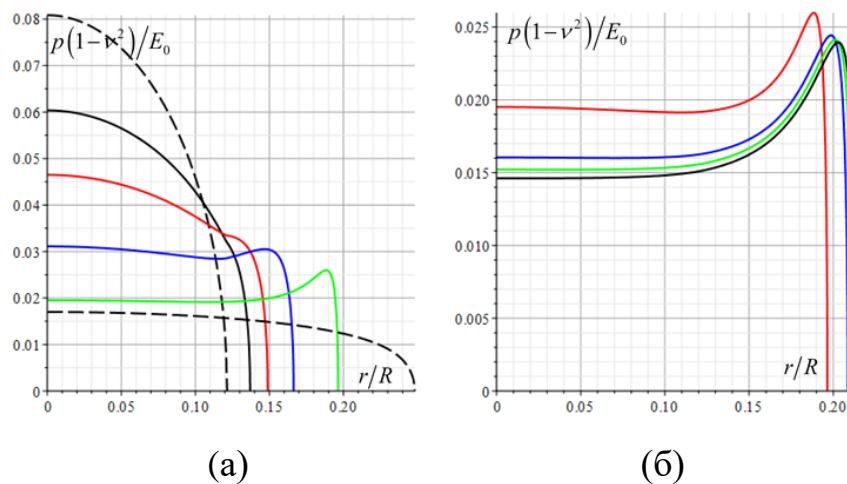
и модель Максвелла, функции релаксации и ползучести которой имеют следующий вид

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \text{ и } J(t) = \frac{1}{E_0} \left( 1 + \frac{t}{T_\sigma} \right). \quad (13)$$

Численные результаты были получены для системы сферических штампов с радиусом кривизны  $R$ , расположенных в узлах гексагональной решетки с шагом  $l$ . На рис.7 представлено распределение контактного давления в разные моменты времени (а) и в фиксированный момент времени при разном значении шага



решетки  $l$  (б) для модели стандартного вязкоупругого тела. Из полученных результатов следует, что со временем область отдельного пятна контакта увеличивается, а давление в центральной части области контакта уменьшается, стремясь к значению, характерному упругому полупространству с длительным модулем упругости. Также в случае модели стандартного вязкоупругого тела с большим значением отношения времени ползучести к времени релаксации и модели Максвелла со временем на краях области контакта появляются дополнительные максимумы давления. Это связано с неравномерным процессом релаксации. Анализ влияния плотности контакта показал, что сближение штампов ведет к уменьшению области контакта и увеличению давления в центральной части. И чем больше расстояние между штампами, тем ближе результат к случаю внедрения в вязкоупругое полупространство единичного штампа.



**Рисунок 7.** Распределение контактного давления под поверхность штампа в случае модели стандартного вязкоупругого тела с  $T_\varepsilon = 20T_\sigma$  (а) в разные моменты времени при  $l = 0.5R$  ( $t = 0.5T_\sigma$  – черная линия,  $t = T_\sigma$  – красная линия,  $t = 2T_\sigma$  – синяя линия,  $t = 5T_\sigma$  – зеленая линия; пунктир – мгновенное и длительное значения) и (б) в момент времени  $t = 5T_\sigma$  при разной плотности расположения штампов ( $l = 0.5R$  – красная линия,  $l = 0.75R$  – синяя линия,  $l = R$  – зеленая линия,  $l \rightarrow \infty$  – черная линия)

В работе также исследованы зависимости размеров пятен контакта и функции дополнительного смещения от времени для двух моделей вязкоупругого

тела. Получено, что и радиус единичного пятна контакта  $a$ , и величина дополнительного смещения  $d$  со временем возрастают. При этом при увеличении расстояния между штампами радиус  $a$  и дополнительное смещение  $d$  увеличиваются. При малой плотности расположения штампов в системе величина радиуса  $a$  стремится к значению, отвечающему внедрению в вязкоупругое полупространство единичного штампа.

Таким образом, в **третьей главе** представлено решение периодических контактных задач для упругого и вязкоупругого полупространства. Получены выражения для распределения контактного давления под отдельным штампом, радиуса отдельного пятна контакта, а также функции дополнительного смещения. Для случая одноуровневой системы штампов и упругого полупространства анализ влияния формы штампов показал, что увеличение показателя степени функции, описывающей форму контактирующей поверхности штампов, ведет к увеличению области контакта и уменьшению максимального контактного давления. В случае двухуровневой системы штампов установлено, что учет взаимного влияния штампов наиболее существенен при определении контактных характеристик, соответствующих штампам второго уровня. В задаче для вязкоупругого полупространства получены выражения, позволяющие определить изменение контактных характеристик во времени. Анализ результатов показал, что со временем происходит перераспределение контактного давления, и в случае более вязких тел это сопровождается появлением дополнительных максимумов давления на границе области контакта. Для всех рассмотренных задач проведен анализ влияния пространственного расположения штампов в системе.

В **четвертой главе** рассмотрено внедрение цилиндрического штампа с плоским шероховатым основанием в тонкий вязкоупругий слой под действием постоянной нагрузки  $P_0$ . Шероховатость цилиндра моделировалась периодической системой неровностей осесимметричной формы. Задача имеет два масштабных уровня: микроуровень (размер отдельного пятна контакта) и макроуровень (масштаб номинальной области контакта). Полученное в **третьей главе** решение задачи на микроуровне в каждой точке области контакта

определяет дополнительное смещение слоя  $d[p(x, y, t)]$ , которое связано с номинальным (осредненным) давлением в этой точке соотношением (10).

Определяющее соотношение для нахождения контактного давления на макроуровне с учетом дополнительной податливости слоя, исходя из принципа соответствия, имеет вид

$$D(t) = d[p(x, y, t)] + \frac{1-\nu^2}{\pi h} \iint_{x'^2+y'^2 < R} k \left( \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{h} \right) \left( \int_0^t J(t-\tau) \frac{\partial p(x', y', \tau)}{\partial \tau} d\tau \right) dx' dy', \quad (14)$$

где ядро интегрального оператора  $k(s)$  определяется способом закрепления слоя к недеформируемому основанию, на котором он лежит. В работе рассматривается случай очень тонкого слоя, когда для ядра применима следующая аппроксимация (Александров В.М., 1963)

$$k(s) \sim 2\pi B \delta(s), \quad (15)$$

где  $\delta(s)$  – двумерная дельта-функция, а постоянная  $B$  зависит от способа закрепления слоя. Если слой лежит на жестком основании без трения, то  $B = 1/2$ , а если жестко сцеплен с ним, то  $B = 4(\kappa - 1)/(\kappa + 1)^2$ ,  $\kappa = 3 - 4\nu$ . Использование приближения тонкого слоя приводит к равномерному распределению контактного давления под поверхностью цилиндра, и  $P = \pi R^2 p$ . Тогда связь глубины внедрения  $D$  и нагрузки будет

$$D(t) = \frac{s\Gamma^2(s/2)}{2^{2-s}\Gamma(s)} \frac{Ca^s(t)}{R_a^{s-1}} + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi R^2} \left( hB - \sqrt{A^2 - a^2(t)} \right) P_0 J(t), \quad (16)$$

где радиус отдельного пятна контакта определяется выражением (11).

Для описания механического поведения слоя использовалась модель стандартного вязкоупругого тела, функция ползучести которой определяется выражением (12). Также считалось, что неровности на торцевой поверхности цилиндра расположены в узлах гексагональной решетки с шагом  $l$ . Тогда

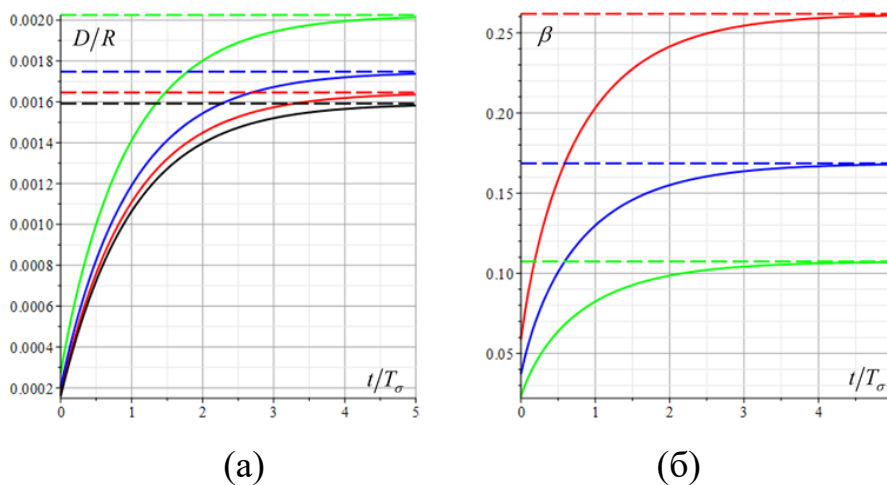
фактическая область контакта цилиндра со слоем будет определяться следующим выражением

$$A_r(t) = 2\pi \int_0^R r\beta(t) dr = \pi R^2 \beta(t) = \frac{2\pi a^2(t)}{\sqrt{3}l^2} A_n, \quad (17)$$

где  $A_n$  – площадь номинальной области контакта. Функция  $\beta(t)$ , таким образом, определяет относительную площадь контакта. В работе исследовалось влияние параметров микрорельефа поверхности цилиндра на зависимость глубины внедрения и относительной площади контакта от времени. На рис.8 представлены зависимости этих величин от времени для разных значений плотности расположения неровностей на поверхности цилиндра. Черная линия на рис.8(а) соответствует результатам, полученным для цилиндра с гладкой торцевой поверхностью. Из результатов следует, что наличие шероховатости на поверхности цилиндра ведет к увеличению глубины внедрения в каждый момент времени. И чем больше расстояние между неровностями, тем больше глубина внедрения штампа. При этом, как и следовало ожидать, уменьшение плотности расположения неровностей на поверхности цилиндра ведет к уменьшению относительной площади контакта. Влияние же изменения формы неровностей, характеризуемой параметром  $R_a$ , на глубину внедрения незначительно, что не скажешь о влиянии этого параметра на фактическую область контакта, которая может увеличиться в десятки раз.

Таким образом, в **четвертой главе** поставлена и решена задача о внедрении в тонкий вязкоупругий слой цилиндра с плоским шероховатым основанием. Проведен анализ зависимости глубины внедрения цилиндра и фактической площади контакта от времени. Исследовано влияния параметров микрорельефа поверхности цилиндра и вязкоупругих свойств слоя на макрохарактеристики контакта. Показано, что чем дальше расположены неровности микрорельефа друг от друга, тем больше глубина внедрения цилиндра в слой в каждый момент времени. Анализ зависимости глубины внедрения от величины приложенной к

цилиндру нагрузки показал, что учет микрорельефа поверхности цилиндра ведет к отклонению зависимости внедрения-нагрузка от линейной.



**Рисунок 8.** Зависимость глубины внедрения (а) и функции  $\beta$  (б) от времени для модели стандартного вязкоупругого тела с  $T = 10$  ( $l = 0.0025R$  – красная линия,  $l = 0.005R$  – синяя линия,  $l = 0.01R$  – зеленая линия);  $s = 2$ ,  $C = 1$ ,  $R_a = 0.01R$ ,

$$P_0 = 0.005E_0R^2 / (1 - \nu^2); \text{пунктир – длительное значение}$$

В **заключении** сформулированы **основные результаты** диссертационной работы.

### Основные результаты

Целью проведённого исследования являлась разработка методов решения задач единичного и множественного контакта упругих и вязкоупругих тел, а также анализ влияния параметров микрогеометрии поверхностей контактирующих тел и их механических свойств на характеристики контактного взаимодействия (распределение контактного давления, область фактического контакта, связь приложенной нагрузки с глубиной внедрения).

К основным результатам работы относятся

- 1) решение задачи контактного взаимодействия с упругим полупространством ограниченной системы одинаковых штампов со сферической формой контактирующих поверхностей и узких в плане штампов с учетом их взаимного влияния и исследование влияния пространственного расположения штампов на распределение нагрузок между ними;

- 2) постановка и решение контактной задачи о внедрении с постоянной скоростью в вязкоупругое полупространство, описываемое моделью стандартного вязкоупругого тела, единичного цилиндра с различной формой торцевой поверхности и анализ влияния формы цилиндра и вязкоупругих свойств материала полупространства на зависимость приложенной к цилиндру нагрузки от времени;
- 3) решение задачи о внедрении с постоянной скоростью в вязкоупругий слой, описываемый моделями с экспоненциальной и степенной функциями релаксации, с дальнейшим удержанием на заданной глубине цилиндрического штампа с плоским основанием в приближении тонкого и толстого слоев, а также анализ поведения зависимости нагрузки, приложенной к штампу, от времени на каждой стадии процесса;
- 4) построение решения задач контакта с упругим полупространством одноуровневой и двухуровневой периодической системы одинаковых осесимметричных штампов различной формы и оценка влияния плотности расположения штампов, их формы и высотного распределения на характеристики контакта;
- 5) расширение метода локализации на периодические контактные задачи для вязкоупругих тел и решение контактной задачи о внедрении в вязкоупругое полупространство одноуровневой системы осесимметричных штампов, а также анализ влияния вязкоупругих свойств полупространства и геометрических характеристик периодической системы штампов (форма поверхности единичного штампа и плотность их расположения) на характеристики контактного взаимодействия;
- 6) построение решения контактной задачи на макроуровне о внедрении под действием постоянной нагрузки в вязкоупругий слой цилиндра с плоской шероховатой торцевой поверхностью и исследование влияния микрогеометрии контактирующей поверхности цилиндра на зависимость глубины внедрения и фактической площади контакта от времени.

### Публикации автора по теме диссертации

1. Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью // **Российский журнал биомеханики**. 2017. Т. 21, № 4. С. 418-428.
2. Yakovenko A., Goryacheva I., Dosaev M. Contact characteristics of medical forceps indentation to soft tissue // **EuCoMeS 2018. Mechanisms and Machine Science**. 2019. V. 59. P. 3-10.
3. Яковенко А.А. Внедрение цилиндра с различной формой торцевой поверхности в вязкоупругое полупространство // **Российский журнал биомеханики**. 2020. Т. 24, № 3. С. 344–363.
4. Горячева И.Г., Яковенко А.А. Моделирование внедрения цилиндра в вязкоупругий слой // **Изв. РАН. МТТ**. 2020. Т. 55, № 5. С. 64-75.
5. Yakovenko A., Goryacheva I. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // **Tribol. Int**. 2021. V. 161. 107078.
6. Горячева И.Г., Яковенко А.А. Внедрение в тонкий вязкоупругий слой жесткого цилиндра с плоским шероховатым основанием // **ПМТФ**. 2021. Т. 62, № 5. С. 22-37.
7. Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью // **Сборник тезисов докладов Международной молодежной научной конференции «XLIII Гагаринские Чтения»**. 2017. С. 372.
8. Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью // **Труды 60-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Аэрокосмические технологии**. 2017. С. 21-23.
9. Яковенко А.А., Горячева И.Г. Внедрение зажимного инструмента в мягкую ткань // **Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские Чтения». Секция механики**. 2018. С.199-200.
10. Горячева И.Г., Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия мягких тканей с медицинским инструментом // **Материалы XIII**

- Всероссийской (с международным участием) конференции «Биомеханика-2018». 2018. С. 22.
11. Yakovenko A.A., Goryacheva I.G. Forceps surface geometry effect in contact with soft tissue // APM 2018. Book of Abstracts. 2018. P. 105.
  12. Горячева И.Г., Яковенко А.А. Задачи механики контактных взаимодействий при разработке зажимных медицинских инструментов // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды IX международной конференции. 2018. С. 128-132.
  13. Яковенко А.А. Влияние формы индентора на контактные характеристики взаимодействия с вязкоупругим основанием // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов «МИКМУС-2019»: Сборник трудов конференции. 2020 С. 269-272.
  14. Яковенко А.А. Внедрение жесткого цилиндра с различной формой основания в вязкоупругое полупространство // «Гагаринские Чтения - 2020»: Сборник трудов секции «Механика и моделирование материалов и технологий 2020». С. 121.
  15. Яковенко А.А. Внедрение штампа в вязкоупругое основание при наличии пригрузки // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XX Международной конференции. 2020. С. 193.
  16. Yakovenko A.A., Goryacheva I.G. Indentation of biomaterials with relaxation properties // International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics». Book of Abstracts. 2020. P. 79-80.
  17. Горячева И.Г., Яковенко А.А. Задача о внедрении жесткого цилиндра в вязкоупругий слой // Ломоносовский чтения. Научная конференция. Секция механики. Октябрь 2020 года. Тезисы докладов. 2020. С. 74-75.
  18. Яковенко А.А., Горячева И.Г. Моделирование взаимодействия с вязкоупругим полупространством системы параболических штампов // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Тезисы докладов. 2021. С. 216-217.



19. Яковенко А.А. Внедрение периодической системы инденторов в вязкоупругое полупространство под действием возрастающей нагрузки // Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции «XLVII Гагаринские чтения 2021». 2021. С. 1094.
20. Yakovenko A.A., Goryacheva I.G. Cylinder indentation into a viscoelastic layer taking into account the surface microrelief // XLIX International Conference “Advanced Problems in Mechanics” June 21-25, St. Petersburg, Russia. APM, BOOK OF ABSTRACTS. 2021. P. 76.
21. Yakovenko A.A., Goryacheva I.G. Indentation of a spherical punch into a viscoelastic base in the presence of additional loading // 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics – Book of Abstracts. 2021. P. 1655-1656.
22. Яковенко А.А. Влияние формы неровностей на характеристики периодического дискретного контакта // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2021, посвященная 60-летию первого полета человека в космос. Тезисы докладов. 2021. С. 158.
23. Яковенко А.А., Горячева И.Г. Моделирование внедрения цилиндра с шероховатым основанием в вязкоупругий слой на двух масштабных уровнях // Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Аэрокосмические технологии. 2021