

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Яковенко Анастасия Александровна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА УПРУГИХ И  
ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ**

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических  
наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН  
Горячева И.Г.

Москва 2022

## Оглавление

Введение.....	4
1. Исследования в области постановки и решения задач дискретного контакта.....	6
2. Аналитические методы решения задач дискретного контакта упругих тел.....	10
2.1. Периодические контактные задачи в пространственной постановке...	10
2.2. Контактные задачи о внедрении в деформируемое основание ограниченной системы штампов.....	11
3. Контакт упругих шероховатых тел с учетом их макро- и микрogeометрии.....	13
4. Задачи дискретного контакта с учетом несовершенной упругости взаимодействующих тел.....	14
5. Численный подход к решению задач дискретного контакта упругих и вязкоупругих тел.....	19
Глава 1: Моделирование внедрения ограниченной системы штампов в упругое полупространство.....	32
1.1. Постановка задачи.....	32
1.2. Моделирование внедрения системы сферических штампов и анализ влияния их пространственного расположения.....	34
1.3. Метод решения задачи о внедрении системы узких в пане штампов.....	39
1.4. Выводы.....	44
Глава 2: Моделирование внедрения цилиндрического штампа в вязкоупругое основание.....	45
2.1. Постановка задачи.....	45
2.2. Моделирование внедрения цилиндра с различной формой торцевой поверхности в вязкоупругое полупространство.....	47
2.3. Решение задачи о внедрении с удержанием цилиндра в тонкий и толстый вязкоупругий слой.....	58

2.4. Исследование упрощенных одномерных моделей.....	66
2.5. Выводы.....	68
Глава 3: Моделирование внедрения периодической системы штампов в упругое и вязкоупругое полупространство.....	71
3.1. Постановка задачи.....	71
3.2. Моделирование внедрения одноуровневой системы штампов в упругое полупространство и анализ влияния формы штампов на контактные характеристики.....	73
3.3. Решение задачи о внедрении двухуровневой системы штампов в упругое полупространство.....	77
3.4. Метод решения периодической задачи в случае вязкоупругого полупространства и анализ результатов для одноуровневой системы штампов.....	87
3.5. Выводы.....	97
Глава 4: Моделирование внедрения в вязкоупругое основание цилиндрического штампа с учетом микрорельефа его контактирующей поверхности.....	100
4.1. Постановка задачи.....	100
4.2. Решение контактной задачи на микроуровне.....	101
4.3. Решение контактной задачи на макроуровне.....	104
4.4. Численные результаты для модели стандартного вязкоупругого тела...	107
4.5. Выводы.....	113
Заключение.....	115
Список литературы.....	117

## Введение

Механика контактного взаимодействия является одним из разделов механики деформируемого твердого тела. Эта научная дисциплина имеет большую практическую значимость, так как предметом ее исследования являются процессы контактирования тел, которые в свою очередь определяют стабильное и безопасное функционирование оборудования, долговечность и эффективность инструментов, а также срок службы деталей во многих отраслях производственных и непроизводственных сфер.

В основе механики контактного взаимодействия лежит классическая работа Г. Герца 1882 г. о контакте двух осесимметричных упругих тел [1]. В своей работе он предположил, что в общем случае область контакта будет иметь эллиптическую форму, и определил распределение контактных давлений, вызывающих в телах соответствующие упругие перемещения. Однако теория Герца построена при нескольких предположениях относительно формы, размеров и механических свойств взаимодействующих тел. Помимо упругости материала тел, к ограничениям также относится и идеальная гладкость контактирующих поверхностей, что на практике, как правило, едва ли осуществимо.

В действительности поверхность тел геометрически неоднородна и обладает рельефом, представляющим собой совокупность неровностей различной формы и различных размеров. Принято выделять следующие виды отклонений профиля поверхности от макроформы тела [2]: макроотклонения, волнистость, шероховатость и субмикрощероховатость. Макроотклонения представляют собой нерегулярные отклонения поверхности (выпуклость, вогнутость, конусность и т.д.), обычно возникающие из-за недостаточной точности обрабатывающего инструмента, его износа, неверного режима обработки и др. Волнистостью называют совокупность периодических микроотклонений, близких по размеру выступов и впадин, возникающих вследствие колебаний инструмента, возникающих в процессе обработки. Волнистость характеризуется шагом волны и ее высотой, отношение между которыми больше 40. Под шероховатостью же

понимают совокупность микронеровностей, расстояние между которыми мало по сравнению с некоторой базовой длиной, равной длине участка, на котором шероховатость рассматривается. Шероховатость образует микрорельеф поверхности, который может иметь статический или регулярный характер и зависит от способа обработки, механических свойств материалов и колебаний в системе. И наконец, субмикрощероховатость представляет собой совокупность неровностей на микронеровностях, обусловленных структурой материала и его напряженным состоянием.

Наличие поверхностного рельефа тел приводит к тому, что фактическая область контакта тел является дискретной, то есть представляет собой совокупность отдельных пятен. При этом площадь фактического контакта может быть в десятки раз меньше, чем площадь номинальной области контакта, по которой соприкасались бы тела, если бы имели идеально гладкую поверхность. Информация о фактической области контакта имеет большое практическое значение, так как именно там наблюдается фактический контакт, а также протекают различные физические процессы, такие как адгезия, трение, разрушение, теплообмен, перенос электрического заряда и т.д. Следовательно, от размеров фактической области контакта будут зависеть изнашивание деталей, их тепло- и электропроводность, а также прочность их сопряжений. И контролируя геометрию контактирующих поверхностей тел, например, с помощью различных видов обработки поверхностей, можно добиваться необходимых триботехнических свойств изделий.

Задачи дискретного контакта возникают не только при рассмотрении взаимодействия тел с учетом реальной геометрии их поверхности, но также и при исследовании взаимодействия неоднородных тел с различного рода включениями и поверхностями, подвергнутыми локальным упрочнениям [3], композиционных материалов [4], тел сложной конфигурации и систем тел, расположенных достаточно близко друг к другу. К последнему типу относятся, например, подшипники качения, роликовые и шариковые [5], системы резцов в различных

режущих инструментах [6], а также широко распространенные в медицине зажимы [7].

Размеры фактической области контакта и плотность расположения отдельных пятен контакта определяются многими факторами, к которым помимо реальной геометрии контактирующих поверхностей взаимодействующих тел, относятся также и условия взаимодействия, и величина приложенной нагрузки, и механические свойства самих тел. Так, учет реологических свойств, которыми обладают многие материалы (полимеры [8], биоматериалы [9] и т.д.), может вносить значительные изменения в получаемые результаты. При этом все характеристики контактного взаимодействия будут зависеть от времени, и в течение всего процесса взаимодействия сближение тел и фактическая область контакта будут изменяться. Именно поэтому наряду с задачами дискретного контакта для упругих тел большой практический интерес представляют и контактные задачи для вязкоупругих тел.

## **1. Исследования в области постановки и решения задач дискретного контакта**

Исследованию задач дискретного контакта посвящено большое количество работ, особенно для случая упругих тел. При этом разработаны различные численные и аналитические методы решения, позволяющие рассмотреть широкий круг задач для разнообразных геометрий контактирующих поверхностей и механических свойств материалов взаимодействующих тел. В общем виде задача дискретного контакта можно сформулировать следующим образом [3,10]. Рассматривается взаимодействие двух тел, одно из которых имеет гладкую поверхность, а другое имеет заданную форму (к такой постановке можно свести и задачу о контакте двух шероховатых поверхностей, введя эквивалентную поверхность [11]). Вводится прямоугольная система координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oxy$  которой связана с гладкой поверхностью одного из тел, а ось  $Oz$  направлена вглубь этого тела. Форма шероховатой поверхности другого тела описывается

такой функцией  $z = -F(x, y)$ , что при сближении тел на некоторую величину  $D$  область фактического контакта  $\Omega$  состоит из конечного  $N$  или бесконечного  $N \rightarrow \infty$  числа пятен контакта  $\omega_i$ .

В пределах каждого пятна контакта  $\omega_i$  действуют контактные давления  $p_i(x, y)$ ,  $(x, y) \in \omega_i$ , под действием которых границы тел деформируются. Касательные напряжения в области контакта считаются пренебрежимо малыми. Суммарное перемещение  $u_z(x, y)$  границ тел в направлении оси  $Oz$  связано с контактными давлениями как

$$u_z(x, y) = A[p_1, p_2, \dots, p_N, \dots],$$

где оператор определяется моделью деформируемых тел.

Условие контакта, которое выполняется в каждой области  $\omega_i$ , имеет вид

$$u_z(x, y) = D - F(x, y).$$

Если при этом известна суммарная нагрузка  $P$ , приложенная вдоль вертикальной оси  $Oz$ , то для нахождения неизвестной величины сближения  $D$  к записанным уравнениям добавляется условие равновесия

$$\sum_{i=1}^N \iint_{\omega_i} p_i(x, y) dx dy = P.$$

В случае вязкоупругих тел необходимо также учитывать зависимость всех величин от времени и задать некоторое начальное условие, например, считать, что при  $t < 0$  тела были не деформированы и свободны от напряжений.

В зависимости от рассматриваемой задачи, форма контактирующей поверхности тел может описываться регулярной функцией, например, в случае тел, имеющих заданный рельеф, а также носить сложный статистический характер, что имеет место в случае тел с шероховатой поверхностью. В случае нерегулярного микрорельефа решение контактной задачи основывается на характеристиках напряженно-деформированного состояния единичной неровности и топографии шероховатой поверхности. Одной из самых распространенных моделей такого рода является модель Гринвуда-Вильямсона

[12]. Для описания шероховатости авторы предложили использовать набор сфер одинакового радиуса, высота которых является случайно величиной с некоторым заданным законом распределения. Упругая деформация отдельной сферы определяется соотношениями Герца, а фактическая область контакта и номинальное давление рассчитываются путем статистического суммирования. Другая форма неровностей была рассмотрена в работе [13], где шероховатости аппроксимировались эллиптическими параболоидами различного размера и ориентации. В работе [14] модель Гринвуда-Вильямсона сравнивается с двумя более общими изотропными и анизотропными моделями поверхностного микрорельефа, включая модель Буше-Гибсона-Томаса, и показывается, что она является удовлетворительной для оценки порядка величин контактных характеристик. Модель Гринвуда-Вильямсона подходит только для рассмотрения контакта двух шероховатых плоскостей, но интерес представляет также контакт шероховатых криволинейных поверхностей. Такая задача рассмотрена, например, в [15], где изучен упругий контакт гладкой сферы с шероховатой плоской поверхностью. Полученное авторами решение позволило оценить поправку, вносимую учетом шероховатости, сравнивая результаты с классическим решением Герца.

Другим подходом к описанию поверхностного рельефа является использование фрактальной геометрии. Многочисленные исследования показывают, что поверхности многих реальных тел имеют фрактальную природу [16]. Так, фрактальными являются поверхности разрушения металлов [17], поверхности пористых стекол [18] и других материалов. Для исследования контакта тел, поверхности которых обладают фрактальными свойствами, в работе [19] рассмотрено взаимодействие штампа, построенного с помощью Канторова множества, с упругим основанием, механическое поведение которого описывается моделью Винклера. Использование таких моделей позволило авторам получить связь приложенной нагрузки с глубиной внедрения. В работе [20] для моделирования фрактальной поверхности используется функция Вейерштрасса-Мандельброта, а для нахождения связи приложенной нагрузки и

реальной площади контакта используется теория Герца для отдельной гармоникой этой функции. Основное различие между фрактальной моделью, описанной в работе [20], и моделью Гринвуда-Вильямсона заключается в том, что фрактальная модель учитывает зависимость радиуса кривизны неровности от площади пятна контакта.

Несмотря на то, что описанные модели позволяют определять необходимые характеристики контактного взаимодействия и дают удовлетворительное согласие с некоторыми экспериментальными данными, они всё же не учитывают взаимного влияния пятен контакта. Однако при большой контактной плотности взаимодействие между отдельными неровностями в контакте может быть значительно.

Усовершенствованная модель Гринвуда-Вильямсона построена в работе [21]. В этой модели интегралы заменены конечными суммами, что позволяет избежать предположения о равенстве радиусов кривизны неровностей. Более того, в модель включен эффект взаимодействия, включая в смещение каждой неровности составляющую, вызванную Герцевским распределением давления под другими неровностями. Однако при этом считалось, что каждое пятно контакта увеличивается независимо от остальных. Учет возможного слияния пятен контакта к данной модели добавлен в работе [22]. Модернизация модели Гринвуда-Вильямсона, учитывающая взаимное влияние неровностей в контакте, представлена также в работе [23]. Влияние действия остальных неровностей при исследовании контакта одной рассматривается как дополнительное равномерное перемещение границы упругого полупространства от действия номинального давления. Это дополнительное перемещение находится как среднее перемещение границы в заданной области из-за равномерного давления, действующего на эту область. К другим модернизациям модель Гринвуда-Вильямсона можно отнести учет зависимости радиуса кривизны неровности от ее высоты, который сделан в работе [24].

## 2. Аналитические методы решения задач дискретного контакта упругих тел

### 2.1. Периодические контактные задачи в пространственной постановке

Учет взаимного влияния вносит серьезные усложнения в решения задач дискретного контакта. Поэтому для получения аналитического решения используют некоторые упрощения, обычно касающиеся геометрии шероховатости. Так, аналитическое решение можно получить для поверхностей с регулярной геометрией. В работе [25] рассмотрена периодическая контактная задача для поверхности с синусоидальной рельефом в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. В работе представлено выражение для давления при полном контакте, а также асимптотические решения для неполного контакта. Первое асимптотическое решение получено для малых номинальных давлений с использованием теории Герца, а второе – для больших давлений, когда малый зазор между поверхностями можно смоделировать дисковидными трещинами. Для промежуточных значений применялся численный метод, основанный на разложении в ряд Фурье и минимизации полной дополнительной энергии. Полученные авторами асимптотические зависимости были уточнены в работе [26] при рассмотрении внедрения в упругое полупространство неосесимметричного штампа для малых номинальных давлений и неосесимметричного нагружения трещины в упругом теле для случая высоких номинальных давлений.

Метод решения периодической контактной задачи о взаимодействии системы осесимметричных гладких инденторов и упругого полупространства был предложен в [27]. Разработанное в работе решение позволило сформулировать общий подход к решению задач множественного контакта, названный методом локализации. Согласно этому методу при исследовании напряженно-деформированного состояния тела вблизи отдельного пятна контакта можно с достаточной степенью точности определить, рассматривая реальные условия контакта лишь на близлежащих пятнах, а контактное давление на остальных

заменить действием номинального давления. Использование метода локализации в работе [27] позволило рассчитать контактные характеристики и внутренние напряжения в упругом полупространстве при внедрении в него одноуровневой периодической системы инденторов. Также был дан общий подход к решению задач для систем инденторов с различными высотными уровнями. Аналогичный подход к учету взаимного влияния неровностей в задачах контакта шероховатых поверхностей (дискретная модель шероховатости с заданным распределением неровностей по высоте) используется в [28] путем введения при рассмотрении контакта отдельной неровности равномерного давления, действующего внутри кольцевой области, размеры которой определяются геометрией шероховатости и количеством неровностей в контакте.

## **2.2. Контактные задачи о внедрении в деформируемое основание ограниченной системы штампов**

Если с телом контактирует конечное число неровностей, то номинальная область контакта будет ограниченной. При этом интерес представляет распределение нагрузок между отдельными пятнами контакта, которое определяется геометрическими характеристиками системы неровностей, а именно их высотным распределением и расстояниями между ними. Задача о взаимодействии с упругим полупространством двух круглых в плане штампа впервые была решена в работе [29]. Автор показал, что решение такой задачи сводится к решению бесконечной системы одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для случая внедрения в полупространство двух одинаковых цилиндров с плоским основанием, расстояние между которыми много больше их радиуса, на заданную глубину получили асимптотическое выражение для распределения контактных давлений и для нагрузки, приложенной к каждому штампу. Аналогичная задача о двух цилиндрах рассмотрена в работе [30], где с использованием решения Галина [31] задача сводится к системе двумерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для случая малых

отношений радиуса цилиндров к расстоянию между ними система решается методом последовательных приближений. В этой работе также представлены асимптотические выражения и для случая бесконечных периодических систем штампов. В работе [32] рассмотрен уже случай четырех цилиндров с плоским основанием. Таким образом, метод Андрейкива-Панасюка позволяет получить приближенное решение для системы  $N$  удаленных друг от друга круговых штампов. Случай двух цилиндров с плоским основанием, включая случай их жесткого соединения, также исследован в работе [33]. Для получения приближенного решения использовался метод ортогональных многочленов, а именно разложение по многочленам Якоби. Результаты упомянутых работ были проверены в работе [34]. Рассматривая ограниченную систему круглых в плане штампов, авторы показали, что можно получить хорошую аппроксимацию выражения для приложенных к штампам нагрузок без предварительного нахождения распределений напряжений. В основу метода также положено решение Галина [31] о распределении контактного давления под штампом при наличии вне области контакта дополнительного нагружения и условие малости радиусов пятен контакта относительно расстояний между ними. Сравнение показало, что полученные результаты хорошо согласуются с результатами работ [29,30], но отличны от результатов работ [32,33], которые, как поясняют авторы, не реалистичны. В работе [35] рассмотрена система штампов эллиптических в плане. Разработанный авторами метод применим для областей контакта произвольной формы, но так как для его использования необходимо знать смещение границы полупространства при внедрении в него штампа с плоским основанием этой же формы, применить его возможно только для эллипсов.

Взаимодействие ограниченной системы цилиндрических штампов с плоским основанием исследовалось также в работе [36]. При этом рассмотрена разноуровневая система штампов и с использованием решения Галина и аппроксимации сосредоточенных сил получено распределение давления под каждым штампом, распределение нагрузок и жесткость контакта. Задача для штампов в форме тел вращения, включая случай гладких поверхностей, когда

размер отдельного пятна контакта заранее не известен, решена в работе [37]. Для решения использован принцип суперпозиции и выделение отдельно составляющих перемещений от действия давлений в рассматриваемом пятне контакта и от влияния давлений на остальных пятнах контакта. Такой подход позволяет без определения действительных распределений давлений на каждом пятне контакта найти распределение нагрузок и жесткость системы. Метод решения задач, когда область контакта заранее не известна, представлен также в работе [38], где исследуется задача о взаимодействии с упругим полупространством системы штампов, области контакта которых близки к круговым. В частности, представлены приближенные формулы для случая двух шарообразных штампов. Взаимодействие с упругим полупространством двух параболических штампов с эллиптическими областями контакта рассмотрено в работе [39], где найдено асимптотическое решение для случая больших расстояний между штампами. В работе [40] задача о внедрении в полупространство конечной системы параболических штампов решена также методом сращиваемых асимптотических разложений [41].

### **3. Контакт упругих шероховатых тел с учетом их макро- и микрогеометрии**

При рассмотрении контактного взаимодействия тел с учетом их поверхностного микрорельефа можно выделить два масштабных уровня: микроуровень, который характеризуется размерами неровностей и расстоянием между ними, и макроуровень, который характеризуется размерами номинальной области контакта. Наличие микрорельефа приводит к тому, что контактные характеристики на макроуровне будут отличаться от случая взаимодействия абсолютно гладких тел. Учесть это можно с помощью континуальных моделей взаимодействия шероховатых тел. Первая такая модель была предложена Штаерманом И.Я. [42], который ввел понятие дополнительных нормальных перемещений границы упругого тела за счет местных деформаций микронеровностей поверхности. Штаерман И.Я. предположил, что эти

перемещения пропорциональны приложенному к телу нормальному давлению. Такое предположение аналогично моделированию шероховатости Винклеровским упругим слоем. В работе [43] дополнительная податливость упругого тела моделируется уже степенной зависимостью перемещений от давления с показателем  $\alpha$  ( $\alpha \leq 1$ ). Полученное при этом нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна решается методом последовательных приближений. Степенная функция зависимости дополнительного смещения от номинального давления не применима для случаев близких к полному контакту, так как она неограниченно возрастает. Метод определения функции дополнительного смещения с ограниченным ростом представлен в работах [3,10]. Для ее определения используется решение периодической контактной задачи, которая моделирует регулярный микрорельеф поверхности взаимодействующих тел. Полученная при этом функция стремится к постоянному значению при стремлении фактической области контакта к номинальной, что говорит об исчерпании дополнительной податливости шероховатого слоя.

#### **4. Задачи дискретного контакта с учетом несовершенной упругости взаимодействующих тел**

Наличие у материала реологических свойств проявляется в таких процессах, как ползучесть и релаксация. Появление временной зависимости приводит к тому, что при решении контактных задач теории вязкоупругости необходимо учитывать всю историю изменения напряженно-деформированного состояния тел. Разработаны эффективные методы решения статических и квазистатических задач теории линейной вязкоупругости, основанные на применении принципа Вольтерра [44,45] и принцип соответствия [46,47], которые позволяют найти решение вязкоупругой задачи, основываясь на решении соответствующей упругой задачи. Применение преобразования Лапласа для решения вязкоупругой задачи в общем виде представлено в работе [48]. И принцип соответствия, и принцип Вольтерра применимы только в том случае, когда тип граничных

условий остается неизменным в течение всего времени. Исходя из этого, можно заключить, что данные методы применимы для задач, где область контакта заранее известна. Так, в работе [49], принцип соответствия применен для получения аналитического решения задачи о внедрении в вязкоупругое полупространство осесимметричного индентора с плоским основанием.

Более общий подход к решению граничных задач линейной вязкоупругости представлен в работе [50]. Предложенный Радоком метод состоит в том, что решение задачи для вязкоупругих тел можно получить из решения упругой задачи с теми же граничными условиями, заменив в нем упругие постоянные соответствующими вязкоупругими операторами. Однако применимость этого метода ограничена случаем неубывающей со временем области контакта, что показано в работе [51], где решена контактная задача о внедрении в вязкоупругое полупространство сферического индентора (аналог задачи Герца). В работе [52] применение метода замены упругих постоянных вязкоупругими операторами расширено на случай, когда область контакта является непрерывной функцией времени и имеет единственный максимум. Автором также решена динамическая задача удара для материала Максвелла при условии малости времени удара по сравнению со временем релаксации. Аналогичная задача для гладкого индентора произвольной формы решена более простым методом в работе [53], где помимо этого дано общее выражение для поля напряжений и деформаций в вязкоупругом полупространстве при действии на его поверхности произвольно зависящего от времени нормального давления. В статье также представлено решение задачи о внедрении в вязкоупругое полупространство конического индентора и исследовано взаимодействие двух вязкоупругих тел. Задача о взаимодействии двух вязкоупругих тел, форма контактирующих поверхностей которых описывается квадратичной формой аналогично задаче Герца, также подробно изучена в работе [54], однако там исследуется только случай неубывающей области контакта. В работе [55] получено решение для осесимметричного индентора различной формы и области контакта, произвольно зависящей от времени. В работе [56] рассмотрено внедрение индентора произвольной формы, а

также исследован вопрос непрерывности решения в точках, где область контакта достигает своих минимальных и максимальных значений. Общий подход к решению широкого круга контактных задач вязкоупругости дан в работе [57], где дано решение основного интегрального уравнения вязкоупругой задачи в случае произвольно изменяющейся области контакта, односвязной или многосвязной. Относительно простой метод анализа взаимодействия индентора с полупространством представлен в работе [58], где получено более компактное выражение для изменения во времени глубины внедрения в стадии разгрузки. Эффективным подходом к решению задач контакта осесимметричного индентора с вязкоупругим полупространством является также и метод уменьшения размерности [59], который сводит трехмерную задачу с полупространством к одномерной задаче с основанием типа Винклера.

В работе [60] показано, что принцип соответствия применим и к задачам со смешанными граничными условиями, зависящими от времени, но при выполнении нескольких условий, касающихся вида решения соответствующей упругой задачи и изменения во времени части границы, где задан определенный тип граничных условий. Полученные в данной работе результаты были названы расширенным принципом соответствия. Затем в работе [61] было показано, что условия, касающиеся вида решения упругой задачи, необязательны для применимости данного подхода. Следовательно, расширенный принцип соответствия применим к граничным задачам со смешанным типом граничных условий, если граничная область, на которой заданы ненулевые граничные условия, расширяется со временем. Также в работе [62] показано, что для конического индентора, взаимодействующего с вязкоупругим полупространством, метод, предложенный Радаком, применим даже для уменьшающейся области контакта, но лишь в самом начале стадии разгрузки. Это возможно вследствие того, что область контакта продолжает какое-то время возрастать, несмотря на то, что нагрузка уже начала уменьшаться. Этот факт отмечался также Тингом в работе [55] и верен для любой геометрии индентора.

Представленный обзор существующих работ по исследованию контакта вязкоупругих тел позволяет сделать вывод, что и принцип соответствия, и метод замены упругих постоянных соответствующими вязкоупругими операторами являются эффективными способами решения широкого круга контактных задач в аналитическом виде.

Для исследования дискретного контакта вязкоупругих тел используются как аналитические, так и численные подходы. В основе аналитических подходов лежит модель шероховатости Гринвуда-Вильямсона и принцип соответствия (или подход Радока замены упругих постоянных вязкоупругими операторами) упругой и вязкоупругой задач.

Первой попыткой расширить применение модели Гринвуда-Вильямсона на вязкоупругий случай можно считать работу [63]. В ней рассматривается взаимодействие жесткой шероховатой поверхности с вязкоупругим основанием под действием постоянной приложенной нагрузки. При этом вязкоупругость основания учтена путем простой замены модуля упругости  $E$  зависящей от времени функцией релаксации  $E(t)$ . При этом авторы также не учитывают различие моментов вступления неровностей в контакт с основанием. Недостаток этот устранен в работе [64], где вместо решения Герца для единичной неровности используется решение Ли и Радока [51] о взаимодействии сферы с вязкоупругим полупространством. Различие моментов вступления в контакт неровностей разной высоты учитывается введением функции Хевисайда. Авторы показали, что простая замена модуля упругости функцией релаксации не справедлива и может быть использована только в случае, когда функция ползучести материала имеет степенную зависимость от времени с показателем степени, равным  $1/2$ . Возможность учета взаимного влияния неровностей представлена в работе [65]. Предложенный подход схож с подходом в упругом случае, когда перемещение границы полупространства на рассматриваемом пятне контакта от действия давления на остальных оценивается по теории Герца. Помимо статистической модели Гринвуда-Вильямсона для описания шероховатых поверхностей при

решении контактных задач в вязкоупругом случае также используется фрактальная геометрия. Так, например, в работах [66,67] получены аналитические зависимости нагрузки от сближения в случае контакта тел, механическое поведение которых описывается моделью Фойхта и стандартным вязкоупругим телом. Как и в аналогичной упругой задаче [19], авторы использовали одномерные модели типа Винклера.

Другой подход к решению задач контакта вязкоупругих тел с учетом шероховатости представлен в работе Перссона [68]. Автор, используя разработанную ранее теорию контакта тел с учетом шероховатости на различных масштабных уровнях [69], основанную на вероятностном подходе, исследовал изменение во времени области контакта вязкоупругого тела с жесткой шероховатой поверхностью. Так как в работе используется подход Радока, полученные результаты верны только для случая возрастающей области контакта, что выполняется при сжатии тел постоянным номинальным давлением. Расширение теории Перссона на вязкоупругие материалы и в случае убывающей области контакта представлено в работе [70]. С применением методов Тинга и Гринвуда построения вязкоупругого решения на основе упругого исследованы зависимости от времени области контакта и среднего расстояния между поверхностями, выражение для которого было получено Перссоном в работе [71], а также диссипация энергии. Теория контакта Перссона, которая была разработана с целью исследования трения шин о дорожное покрытие, дает довольно простые и удобные к применению результаты для случая нормального контакта шероховатых тел. Однако ее обоснование недостаточно строгое, особенно это относится к выводу ключевого уравнения диффузии для распределения напряжений (stress probability distribution), что отмечено в работе [72]. Кроме того, сравнения решения Перссона с другими численными и теоретическими решениями показывают, что существуют количественные расхождения в результатах их анализа.

Расширение модели контакта шероховатых тел с учетом взаимодействия неровностей, предложенной Огаром, на случай вязкоупругих материалов

представлено в работах [73,74]. В частности, в работе [73] путем введения зависящего от времени модуля упругости получено выражение, позволяющее исследовать изменения во времени относительной области контакта взаимодействия жесткой шероховатой поверхности с вязкоупругим полупространством.

## **5. Численный подход к решению задач дискретного контакта упругих и вязкоупругих тел**

Развитие вычислительной техники привело к широкому использованию численных методов для решения задач дискретного контакта в упругом и вязкоупругом случае. Различные численные методы (метод граничных элементов, метод конечных элементов) позволяют исследовать задачи со сложной геометрией контактирующих поверхностей без их модельного описания. Так, в работе [75] представлен метод численного решения задачи взаимодействия двух упругих шероховатых поверхностей произвольной формы. С использованием решения Буссинеска и итерационного метода определения области контакта представлен численный алгоритм нахождения распределения контактных давлений, приложенной нагрузки и реальной области контакта. Полученные результаты, а именно зависимость реальной области контакта от приложенной нагрузки, сравнивались с экспериментальными данными. В работе [76] для исследования контакта жесткой поверхности и упругого полупространства, поверхность которого имеет периодическую структуру, используется численный алгоритм, включающий быстрое преобразование Фурье и минимизацию полной дополнительной энергии. С использованием метода конечных элементов в работе [77] исследована задача для синусоидальной поверхности в двух направлениях. Полученные авторами результаты близки к результатам, полученным в работе [25]. Авторами также предложено аппроксимирующее выражение величины среднего зазора между поверхностями для промежуточных значений приложенных номинальных давлений. Ранее эмпирическая формула для

зависимости области контакта от всего диапазона номинальных давлений была предложена в работе [78], где рассматривалась многоуровневая модель шероховатости. Значения, полученные по этой формуле, также сравнивались с численными результатами в работе [77]. Уточнение решения контактной задачи для двумерной синусоидальной поверхности были сделаны в работе [79] с применением численного метода, а именно метода граничных элементов на основе быстрого преобразования Фурье, аналогично работе [76]. Авторами показано, что в зависимости области контакта от номинального давления есть точки перегиба, которые соответствуют изменениям формы области контакта. Подробный разбор метода граничных элементов для решения задачи безфрикционного нормального контакта дан в работе [80]. Авторами произведено сравнение нескольких оптимизационных алгоритмов решения задачи квадратичного программирования с неотрицательными ограничениями, к которой сведена контактная задача после дискретизации поверхности, и показано, что наиболее быстрым является метод неотрицательных наименьших квадратов (Non-Negative Least Squares). Сократить время решения задач контактирования шероховатых тел позволяет использование искусственных нейронных сетей, как это сделано в работе [81].

Широкое развитие получили численные методы решения задач дискретного контакта с учетом реологических свойств взаимодействующие тел. Так в работе [82] представлен алгоритм численного решения задачи о нормальном контакте системы разных по форме инденторов с вязкоупругим полупространством. Для решения используется двухмасштабный итерационный метод на основе локального метода обращения матрицы с двумя возможными алгоритмами: первый учитывает реальное распределение давлений на площадках контакта, а второй заменяет эти давления сосредоточенными силами. Такой подход является более эффективным для задач множественного контакта, чем стандартный метод обращения матрицы. Дальнейшее увеличение скорости расчета удалось добиться авторам работы [83]. Они предложили рассматривать задачу на макроуровне, рассматривая ограниченное число неровностей и только действующие на них

нагрузки. При этом взаимодействие между двумя неровностями описывается постоянным коэффициентом, а связь нагрузки на отдельную неровность с глубиной ее внедрения находится, исходя из соответствующей упругой связи с использованием метода замены упругих постоянных вязкоупругими операторами и предположения, что он будет выполняться даже в условиях уменьшения области контакта. Таким образом, авторам удалось свести задачу к системе нелинейных уравнений, которую они решали итерационным методом Ньютона. Сравнения результатов с полученными в работе [82] показало, что представленный метод дает практически идентичные результаты с меньшими вычислительными затратами. В работе [84] с использованием метода сопряженных градиентов представлено решение задачи контакта жесткого сферического индентора с гладкой поверхностью и вязкоупругого полупространства, поверхность которого имеет шероховатость. Для снижения вычислительных затрат авторы применяют быстрое преобразование Фурье. Аналогичный подход к численному решению задачи шероховатого вязкоупругого контакта представлен в работе [85], где подробно описан алгоритм решения контактной задачи, состоящий из двухуровневого вложенного цикла (внутренний моделирует мгновенное решение, а внешний – вязкоупругое изменение во времени).

Общей чертой численных расчетов задач вязкоупругости можно отметить дополнительную дискретизацию периода контактного взаимодействия. Именно за счет деления рассматриваемого отрезка времени на достаточно малые промежутки, где все величины можно считать постоянными, появляется возможность избавиться от временной зависимости. Тем самым уравнения становятся аналогичными упругому случаю, и появляется возможность решения вязкоупругих задач для произвольных программ нагружения.

Несмотря на широту круга задач, которые развитая к настоящему времени вычислительная техника позволяет решить с помощью численных методов, разработка аналитических моделей актуальна и по сей день. Во-первых, аналитические методы позволяют в явном виде выделить параметры, от которых

зависят построенные модели контактного взаимодействия, и оценить качественно и количественно их влияние на характеристики контактного взаимодействия (распределение контактного давления, область контакта). Во-вторых, полученные аналитические зависимости могут быть использованы при исследовании поведения более сложных систем взаимодействия, в которых рассматриваемый контакт является подсистемой (например, робототехнических систем), а также они используются при обработке экспериментальных данных. Именно необходимостью построения аналитических моделей контактного взаимодействия тел с различными механическими свойствами и различной поверхностной геометрией обосновывается актуальность данного исследования.

**Целью** диссертационной работы является постановка и решение контактных задач о взаимодействии упругих и вязкоупругих тел с учетом геометрии их контактирующих поверхностей (макроформа, микрорельеф) и анализ влияния параметров поверхностной геометрии на характеристики контактного взаимодействия деформируемых тел на макроуровне и микроуровне.

Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

- контактная задача о внедрении в упругое полупространство ограниченной системы штампов различной формы с учетом взаимного влияния пятен контакта;
- контактная задача о внедрении в вязкоупругое основание (слой и полупространство) единичного цилиндрического штампа с различной формой торцевой поверхности;
- контактная задача о внедрении в упругое и вязкоупругое полупространство периодической системы осесимметричных штампов различной формы с учетом взаимного влияния пятен контакта;
- контактная задача о внедрении в вязкоупругий слой цилиндрического штампа с учетом микрогеометрии его контактирующей поверхности.

**Научная новизна** работы состоит в следующем:

- построена аналитическая модель для исследования внедрения в упругое полупространство ограниченной системы узких в плане штампов с учетом их взаимного влияния;
- проведен анализ влияния формы штампа, внедряющегося с постоянной скоростью в вязкоупругое полупространство, а также механических свойств материала основания (характерных времен ползучести и релаксации, длительных и мгновенных модулей упругости) на характеристики контактного взаимодействия (распределение контактного давления, область контакта, приложенная к штампу нагрузка);
- исследовано влияние параметров нагружения (скорости внедрения, времени выдержки на заданной глубине) цилиндра, внедряющегося в вязкоупругий тонкий и толстый слой, и модели механического поведения вязкоупругого слоя на зависимость приложенной к штампу нагрузки от времени;
- получено решение периодической контактной задачи для двухуровневой системы осесимметричных штампов, внедряющихся в упругое полупространство, и проведен анализ влияния пространственного расположения штампов на контактные характеристики (размеры пятен контакта, распределение контактного давления, приложенные к штампам нагрузки);
- поставлена и решена периодическая контактная задача для системы осесимметричных штампов, внедряющихся в вязкоупругое полупространство под действием постоянного номинального давления, методом локализации и обосновано его применение для решения задач дискретного контакта вязкоупругих тел с неубывающей во времени областью контакта;
- выполнено обобщение метода решения задач контакта упругих тел с учетом шероховатости на двух масштабных уровнях на случай взаимодействия вязкоупругих тел.

**Достоверность** результатов исследования обеспечена сравнением полученных решений контактных задач в предельных случаях (малые и большие времена и скорости, малая плотность контакта) с известными аналитическими решениями (соответствующие упругие решения и решения для задач с единичной областью контакта) и с результатами численного моделирования, а также использованием для анализа полученных зависимостей (получения конкретных численных результатов) апробированных численных методов: методы численного интегрирования и численного решения нелинейных уравнений.

**Практическая значимость** работы заключается в том, что построенные модели контактного взаимодействия могут быть использованы при разработке нового медицинского оборудования, а также при обработке экспериментов по индентированию материалов, обладающих свойствами ползучести и релаксации. Более того, полученные результаты позволяют оценить влияние микрогеометрии контактирующих поверхностей на характеристики контактного взаимодействия (в частности, на размер фактической области контакта), от которых зависят многие практически важные свойства трибосопряжений (контактная жесткость, электро- и теплопроводность, износостойкость и другие).

**Методы исследования:**

- метод локализации, основанный на замене влияния отдаленных пятен контакта в периодической задаче дискретного контакта на действие равномерно распределенного номинального давления;
- метод соответствия решения задач в упругой и вязкоупругой постановках и метод замены упругих постоянных соответствующими вязкоупругими операторами для построения решения вязкоупругих задач на основе соответствующих известных упругих решений;
- методы численного интегрирования (метод Симпсона) и численного решения нелинейных уравнений (метод простой итерации, метод Ньютона, метод секущих).

**Положения, выносимые на защиту:**

- 1) построение решений контактных задач взаимодействия с упругим полупространством ограниченной системы узких в плане штампов, а также ограниченной и периодической системы осесимметричных штампов с учетом их взаимного влияния;
- 2) постановка и решение контактных задач взаимодействия с вязкоупругим полупространством цилиндрического штампа с различной формой торцевой поверхности и периодической системы одинаковых осесимметричных штампов, форма контактирующей поверхности которых описывается степенной функцией;
- 3) решение контактной задачи о внедрении в вязкоупругий слой цилиндра с плоским гладким и шероховатым основанием с применением приближенных решений для тонкого и толстого слоев;
- 4) анализ влияния макро- и микрогеометрии контактирующих поверхностей, определяемой формой отдельных неровностей (штампов), их пространственным расположением, механических свойств материалов взаимодействующих тел (упругие и вязкоупругие свойства), а также параметров нагружения (скорость внедрения или величина номинального давления) на характеристики контактного взаимодействия (относительное сближение под нагрузкой, фактическая и номинальная области контакта, распределение контактных давлений) и их изменение во времени.

**Апробация работы:** Основные результаты работы были представлены на 11 международных и 7 всероссийских конференциях:

- 1) XLIII международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, Россия, 5-20 апреля 2017;
- 2) 60-ая всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, Россия, 20-26 ноября 2017;
- 3) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2018», Москва, Россия, 16-25 апреля 2018;

- 4) XIII Всероссийская (с международным участием) конференция БИОМЕХАНИКА-2018, Краснодарский край, с. Дивноморское, Россия, 28 мая - 1 июня 2018;
- 5) International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics", (APM-2018), Санкт-Петербург, Россия, 25-30 июня 2018;
- 6) 7th European Conference on Mechanism Science (International Conference), Ахен, Германия, 4-6 сентября 2018;
- 7) IX международная конференция "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред", Горис, Армения, 1-6 октября 2018;
- 8) XXXI международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения (МИКМУС-2019), ИМАШ РАН, Москва, Россия, 4-6 декабря 2019;
- 9) XLVI международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, Россия, 13-17 апреля 2020;
- 10) XX международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на-Дону, Россия, 18-21 июня 2020;
- 11) XLVIII International Conference "Advanced Problems in Mechanics" (APM-2020), Санкт-Петербург, Россия, 21-26 июня 2020;
- 12) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2020», Москва, Россия, 26-30 октября 2020;
- 13) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2021», Москва, Россия, 20-26 апреля 2021;
- 14) международная молодёжная научная конференция «XLVII Гагаринские чтения», Москва, Россия, 20-23 апреля 2021;
- 15) XLIX International Summer School – Conference Advanced Problems in Mechanics (APM-2021), Санкт-Петербург, Россия, 21-25 июня 2021;
- 16) 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, ICTAM 2020+1, Милан, Италия, 22-27 августа 2021;

17) всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2021, посвященная 60-летию первого полета человека в космос, Сочи, Россия, 3-12 сентября 2021;

18) 64-я всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, Россия, 29 ноября - 3 декабря 2021;

Научные исследования, проведенные в диссертационной работе, осуществлялись в рамках грантов РФФИ: 16-58-52033, 19-58-52004, 20-01-00400, 20-31-90038; гранта РНФ 18-19-00574; Госзадания АААА-А20-120011690132-4 «Экспериментально-теоретическое изучение влияния геометрических и механических свойств поверхности и тонких поверхностных слоев на фрикционные характеристики и изнашивание элементов пар трения».

**Публикации автора по теме диссертации:** Основные результаты диссертации изложены в работах [86-108], изданных в периодических научных изданиях, сборниках материалов и тезисах докладов международных и всероссийских конференций. 6 статей [86-91] из списка публикаций напечатаны в журналах, входящих в перечень ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus, в том числе статья [90] опубликована в высокорейтинговом международном журнале.

Основные публикации:

- 1) Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью // Российский журнал биомеханики. 2017. Т. 21, № 4. С. 418-428.
- 2) Yakovenko A., Goryacheva I., Dosaev M. Contact characteristics of medical forceps indentation to soft tissue // EuCoMeS 2018. Mechanisms and Machine Science. 2019. V. 59. P. 3-10.
- 3) Яковенко А.А. Внедрение цилиндра с различной формой торцевой поверхности в вязкоупругое полупространство // Российский журнал биомеханики. 2020. Т. 24, № 3. С. 344–363.
- 4) Горячева И.Г., Яковенко А.А. Моделирование внедрения цилиндра в вязкоупругий слой // Изв. РАН. МТТ. 2020. Т. 55, № 5. С. 64-75.

- 5) Yakovenko A., Goryacheva I. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // Tribol. Int. 2021. V. 161. 107078.
- 6) Горячева И.Г., Яковенко А.А. Внедрение в тонкий вязкоупругий слой жесткого цилиндра с плоским шероховатым основанием // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 5. С. 22-37.

**Личный вклад автора:** В работах [86-91] автором построено решение контактных задач единичного и множественного контакта упругих и вязкоупругих тел, математические постановки которых были предложены научным руководителем Горячевой И.Г. Все необходимые расчёты были проведены автором самостоятельно, анализ полученных результатов проводился совместно с Горячевой И.Г.

**Структура и объем работы:** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объем работы составляет 127 страниц, включая 40 рисунков. Список литературы содержит 123 наименования.

Во введении представлен обзор литературы, посвященной исследованиям, тематика которых относится к данной диссертации. Представлены существующие постановки и методы исследования задач контакта шероховатых тел, подходы к решению задач контакта тел, обладающих релаксационными свойствами, а также сформулированы основные цели и задачи диссертационной работы, обоснованы актуальность и научная новизна исследования.

В первой главе рассмотрено контактное взаимодействие с упругим полупространством ограниченной системы одинаковых по форме штампов. Для системы сферических штампов исследовано влияние их пространственного расположения на распределение нагрузок и зависимости суммарной нагрузки, приложенной к системе, от глубины внедрения. Показано, что равномерное пространственное расположение штампов (в вершинах равностороннего треугольник, квадрата и т.д.) ведет к уменьшению величины суммарной нагрузки при фиксированной глубине внедрения. Для системы узких в плане штампов разработан метод решения, позволяющий получить аналитические зависимости

суммарной нагрузки и нагрузки, действующий на каждый штамп, от глубины внедрения системы в полупространство. Проанализировано влияние расстояния между штампами на характеристики контактного взаимодействия. Показано, что с уменьшением расстояния между штампами увеличивается глубина внедрения системы в полупространство при фиксированной приложенной нагрузке. Также определено высотное распределение штампов в системе, обеспечивающие равномерное распределение нагрузок между ними.

Во второй главе исследовано внедрение с постоянной скоростью в вязкоупругое полупространство единичного цилиндрического штампа с различной формой торцевой поверхности, а также внедрение с удержанием цилиндрического штампа с плоским основанием в вязкоупругий слой (приближения тонкого и толстого слоев). Для описания механического поведения полупространства и слоя использовалась модель стандартного вязкоупругого тела с экспоненциальной функцией релаксации. Для вязкоупругого слоя рассмотрена также модель со степенной функцией релаксации. Для каждого случая получены аналитические зависимости от времени нагрузки, приложенной к цилиндру, и распределения контактного давления под поверхностью цилиндра. Исследование влияния скорости нагружения показало, что при фиксированной глубине внедрения значение прикладываемой к цилиндру нагрузки меньше при малых скоростях внедрения. Для задачи о внедрении штампа в вязкоупругое полупространство также исследовано влияние формы основания цилиндра на контактное давление и приложенную к цилиндру нагрузку. Получено, что форма торцевой поверхности цилиндра существенно влияет на вид распределения контактного давления, но лишь на стадии возрастающей области контакта, когда угловые точки цилиндра еще не вступили в контакт с полупространством. Для внедрения цилиндра в вязкоупругий слой установлено, что результаты, полученные на стадии удержания цилиндра, могут быть использованы для определения длительных механических характеристик вязкоупругого слоя.

В третьей главе представлено исследование внедрения в упругое и вязкоупругое полупространство периодической системы одинаковых

осесимметричных штампов. Для описания механического поведения вязкоупругого полупространства использовались модель стандартного вязкоупругого тела и модель Максвелла. В случае упругого полупространства представлено решение для одноуровневой и двухуровневой систем штампов. В случае вязкоупругого решения исследован только случай одноуровневой системы. Получены выражения для распределения давления под отдельным штампом, радиуса отдельного пятна контакта, а также функции дополнительного смещения. Для случая одноуровневой системы штампов и упругого полупространства анализ влияния формы штампов показал, что увеличение показателя степени функции, описывающей форму контактирующей поверхности штампов, ведет к увеличению области контакта и уменьшению максимального контактного давления. В случае двухуровневой системы штампов установлено, что учет взаимного влияния штампов наиболее существенен при определении контактных характеристик, соответствующих штампам второго уровня. Для решения задачи взаимодействия периодической системы штампов и вязкоупругого полупространства представлено расширение применения принципа локализации для дискретного контакта тел, обладающих релаксационными свойствами. При этом получены выражения, позволяющие определить изменение контактных характеристик во времени. Анализ результатов выявил, что со временем происходит перераспределение контактного давления, и в случае более вязких тел это сопровождается появлением дополнительных максимумов на границе области контакта. Для всех рассмотренных задач проведен анализ влияния плотности расположения штампов в системе на исследуемые характеристики. Получено, что увеличение плотности контакта ведет к уменьшению размеров отдельного пятна контакта и увеличению контактного давления в центральной части области контакта.

В четвертой главе поставлена и решена задача о внедрении в тонкий вязкоупругий слой, механическое поведение которого описывается моделью стандартного вязкоупругого тела, под действием постоянной нагрузки цилиндра с плоским шероховатым основанием, микрорельеф которого описывается

периодической системой одинаковых неровностей. Для решения задачи на макроуровне с учетом параметров микрогеометрии используется функция дополнительной податливости шероховатого слоя, полученная в третьей главе при решении задачи контакта периодической системы штампов с вязкоупругим полупространством. Проведен анализ зависимости глубины внедрения цилиндра и фактической площади контакта от времени. Исследовано влияния форм микрорельефа торцевой поверхности цилиндра и вязкоупругих свойств слоя на макрохарактеристики контакта. Показано, что чем дальше расположены неровности микрорельефа друг от друга, тем глубже погружается цилиндр в слой при фиксированной приложенной нагрузке. Анализ зависимости глубины внедрения от величины приложенной к цилиндру нагрузки показал, что учет микрорельефа поверхности цилиндра ведет к отклонению зависимости внедрения-нагрузка от линейной.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Автор выражает большую признательность научному руководителю академику РАН д.ф.-м.н. И.Г. Горячевой, а также всем сотрудникам лаборатории трибологии ИПМех РАН за поддержку в проведении исследований.

## Глава 1: Моделирование внедрения ограниченной системы штампов в упругое полупространство

В данной главе рассматриваются задачи о внедрении в упругое полупространство ограниченной системы жестких выступов. Конечность числа выступов и учет их взаимного влияния ведут к неравномерности распределения нагрузок между отдельными пятнами контакта. Неравномерность этого распределения будет зависеть как от формы неровностей, включая высоты их распределения, так и от плотности их расположения в пределах номинальной области контакта. Далее представлено исследование влияния этих факторов на характеристики контактного взаимодействия.

### 1.1. Постановка задачи

Рассматривается внедрение системы  $N$  одинаковых по форме штампов в упругое полупространство под действием приложенной нагрузки  $P$ . Систему координат  $Oxuz$  введем таким образом, чтобы плоскость  $Oxy$  совпадала с недеформированной поверхностью полупространства, а ось  $Oz$  проходила через центр симметрии область контакта  $i^{0z0}$  штампа  $\omega_i$ . Для каждого  $i^{0z0}$  штампа определим следующие характеристики:  $f_i(x, y)$  – форма контактирующей поверхности,  $D_i$  – глубина внедрения,  $P_i$  – приложенная нагрузка. Расстояние между центрами симметрии  $i^{0z0}$  и  $j^{0z0}$  штампов обозначим как  $l_{ij}$ . Будем рассматривать малые деформации упругого полупространства, чтобы можно было применить теорию линейной упругости.

Для формулировки граничных условий, исходя из принципа суперпозиции, представим смещение границы упругого полупространства в направлении оси  $Oz$  внутри области контакта  $\omega_i$  в виде суммы двух слагаемых:  $u_z^{i(1)}(x, y)$ , которое определяется приложенным внутри рассматриваемого пятна контакта давлением

$p_i(x, y)$ , и  $u_z^{i(2)}(x, y)$ , обусловленное влиянием остальных пятен контакта, то есть приложенными внутри пятен контакта  $\omega_j$  давлениями  $p_j(x, y)$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ,  $j \neq i$ ). Для определения смещений  $u_z^{i(2)}(x, y)$  можно воспользоваться решением Буссинеска [31]. Тогда получим

$$u_z^{i(2)}(x, y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{j=1, j \neq i}^N \iint_{\omega_j} \frac{p_j(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(X_j + x' - x)^2 + (Y_j + y' - y)^2}}, \quad (1.1)$$

где  $\nu$  – это коэффициент Пуассона полупространства,  $E$  – его модуль упругости, а  $(X_j, Y_j)$  – это координаты центра симметрии области контакта  $\omega_i$ . Тогда мы получим следующие граничные условия смешанного типа

$$\begin{aligned} u_z^{i(1)}(x, y) + u_z^{i(2)}(x, y) &= D_i - f_i(x, y), \quad (x, y) \in \omega_i \\ \sigma_z(x, y) &= 0, \quad (x, y) \notin \omega_i \\ \tau_{zx}(x, y) &= \tau_{zy}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\sigma_z(x, y)$  – это нормальные граничные напряжения, а  $\tau_{zx}(x, y)$  и  $\tau_{zy}(x, y)$  – это касательные граничные напряжения, которыми в рассматриваемых задачах пренебрегают. В каждой области контакта также должно выполняться следующее условие равновесия

$$P_i = \iint_{\omega_i} p_i(x, y) dx dy. \quad (1.3)$$

Если все штампы связаны между собой, то для величины  $D_i$  можно записать

$$D_i = h_i - D,$$

где  $h_i$  – это распределение штампов по высоте, а  $D$  – величина сближения системы штампов с полупространством под действием приложенной нагрузки  $P$ . Если величина  $D$  неизвестна, то для ее определения используется следующее условие

$$P = \sum_{i=1}^N P_i. \quad (1.4)$$

## 1.2. Моделирование внедрения системы сферических штампов и анализ влияния их пространственного расположения

Рассмотрим систему сферических штампов с радиусами  $R$ . В данном случае удобнее перейти в цилиндрическую систему координат  $Or\theta z$ . В данной системе координат форма контактирующей поверхности штампов можно описать функцией  $f(r) = r^2/2R$ . Решение данной задачи представлено в [3] и имеет вид

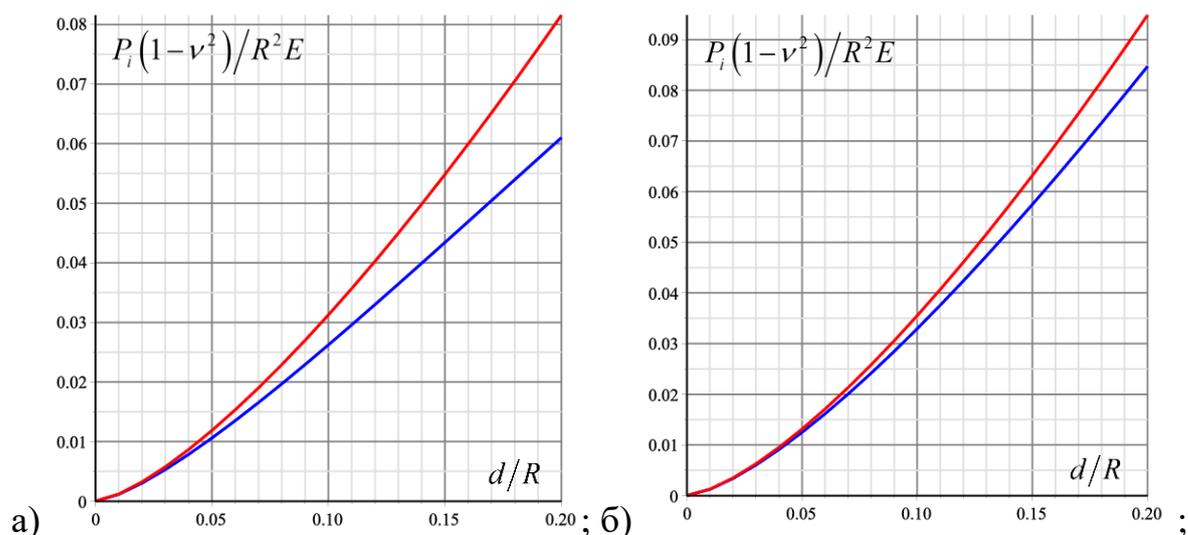
$$h_i - D = \frac{a_i^2}{R} + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{P_j}{\sqrt{l_{ij}^2 - a_i^2}} \quad (1.5)$$

$$P_i = \frac{4Ea_i^3}{3R(1-\nu^2)} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1, j \neq i}^N P_j \left( \frac{a_i}{\sqrt{l_{ij}^2 - a_i^2}} - \arcsin\left(\frac{a_i}{l_{ij}}\right) \right)$$

Здесь  $a_i$  – это радиус круговой области контакта  $\omega_i$ . К этой системе также добавляется условие (1.4). Это решение получено путем замены распределенного по пятнам контакта давлений в выражении (1.1) на сосредоточенные силы, определяемые условиями равновесия (1.3).

Пусть штампы расположены по высоте равномерно. Тогда величина  $h_i - D = d$  глубины внедрения каждого выступа в полупространство будет одинакова для всех  $i$ . Исследуем влияние пространственного расположения выступов на распределение нагрузок между ними и на зависимость приложенной к системе нагрузки от глубины внедрения ее в полупространство.

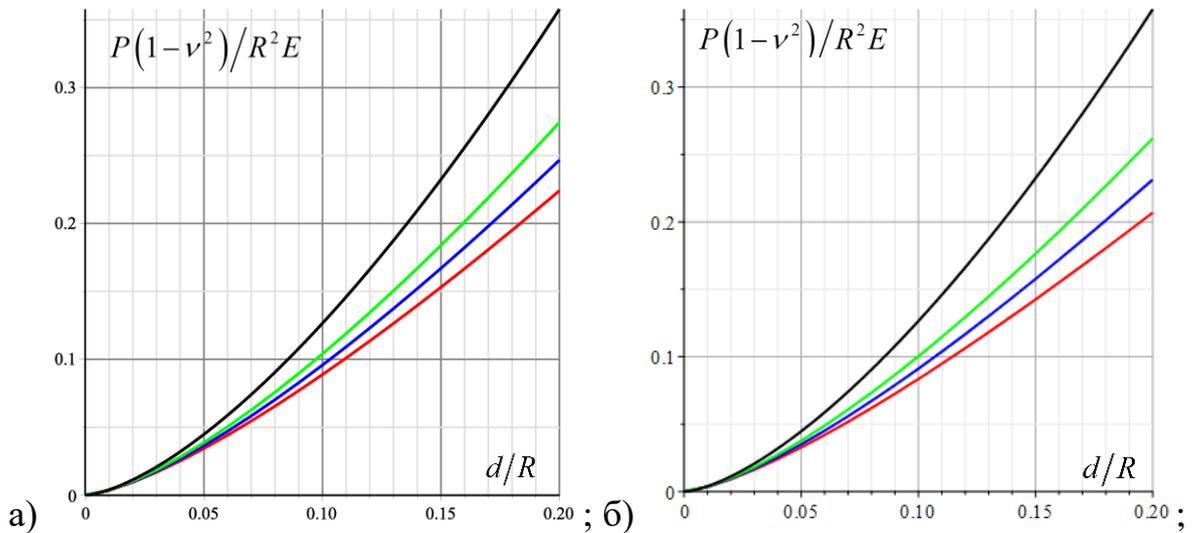
Рассмотрим сначала системы, состоящие из трех выступов, расположенных в линию с шагом  $l$  и в вершинах равностороннего треугольника также со стороной  $l$ . В первом случае вследствие симметрии нагрузки на первый и на третий штампы будут равны, а во втором случае будет наблюдаться равномерное нагружение штампов. На рис.1 представлены зависимости нагрузок на средний и крайние штампы в зависимости от глубины внедрения системы в полупространство для двух значений расстояния  $l$ . Из результатов следует, что нагрузка на центральный штамп будет меньше, чем на крайние, и чем ближе штампы расположены друг к другу, тем эта разница больше.



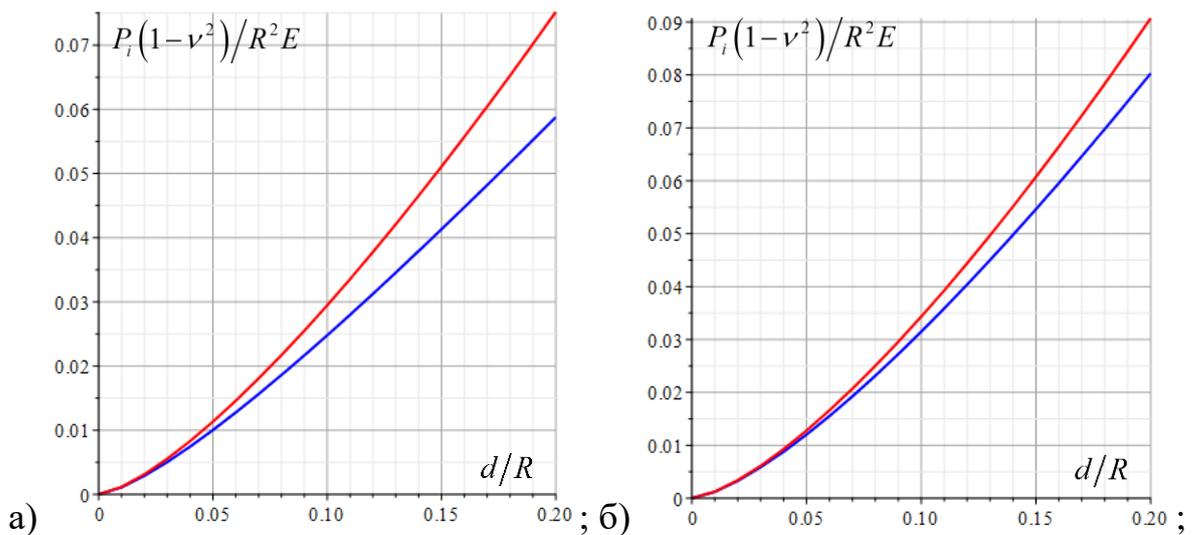
**Рисунок 1.** Зависимость нагрузок на каждый штамп ( $P_1$  – красная линия,  $P_2$  – синяя линия) от глубины внедрения:  $l = 0.75R$  (а);  $l = 1.5R$  (б)

На рис.2 представлено сравнение двух случаев расположения выступов, в линию и в вершинах треугольника. Анализ результатов показывает, что для достижения заданной глубины внедрения в случае расположения штампов в вершинах равностороннего треугольника необходима меньшая нагрузка. При этом нагрузка уменьшается с уменьшением расстояния между выступами. Также показано, что пренебрежение взаимным влиянием пятен контакта дает завышенное значение нагрузки при фиксированной глубине внедрения системы в полупространство.

Теперь рассмотрим системы, состоящие уже из четырех выступов, расположенных в линию с шагом  $l$  и в вершинах квадрата со стороной  $l$ . В первом случае для нагрузок на штампы имеем, что  $P_1 = P_4$  и  $P_2 = P_3$ , а во втором случае будет равномерное нагружение штампов. На рис.3 представлены зависимости нагрузок на первый и второй штамп в зависимости от глубины внедрения для двух значений расстояния  $l$ . Видно, что нагрузка на второй штамп меньше, чем на первый, и эта разница увеличивается с приближением штампов друг к другу. При этом нагрузка на крайние штампы на фиксированной глубине внедрения меньше, чем в случае системы с  $N = 3$ .

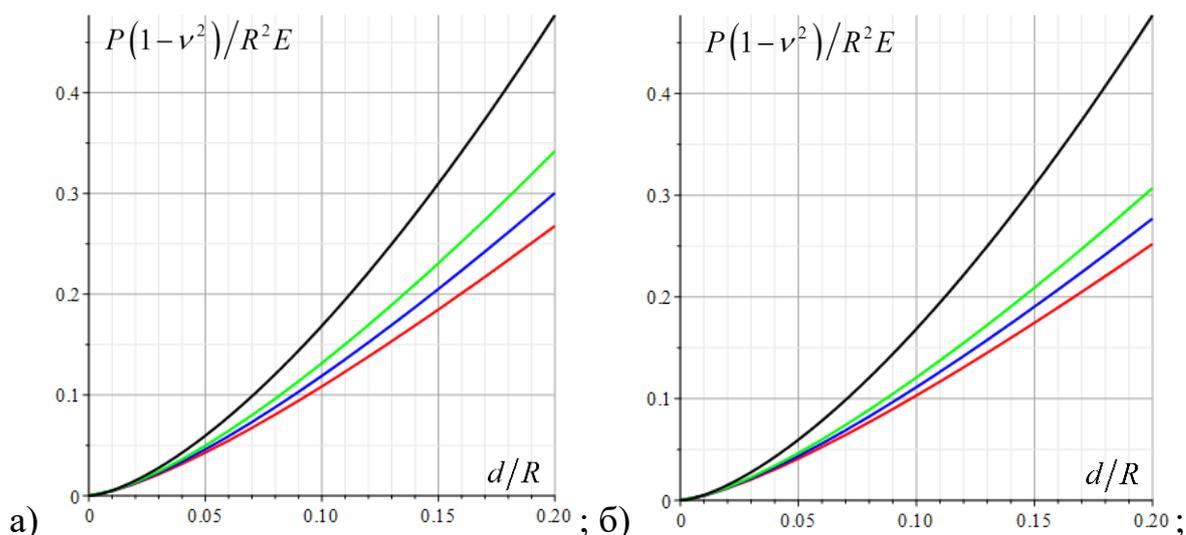


**Рисунок 2.** Зависимость приложенной к системе нагрузки от глубины внедрения, когда штампы расположены в линию (а) и в вершинах равностороннего треугольника (б) при разном значении  $l$  ( $l = 0.75R$  – красная линия,  $l = R$  – синяя линия,  $l = 1.5R$  – зеленая линия,  $l \rightarrow \infty$  – черная линия)



**Рисунок 3.** Зависимость нагрузок на каждый штамп ( $P_1$  – красная линия,  $P_2$  – синяя линия) от глубины внедрения:  $l = 0.75R$  (а);  $l = 1.5R$  (б)

На рис.4 дано сравнение двух случаев расположения выступов. Результаты показывают, что в случае системы штампов, расположенных в вершинах квадрата, для достижения заданной глубины внедрения необходима меньшая нагрузка, чем для случая расположения в линию. И эта разница заметнее, чем в случае системы из трех штампов. Таким образом, можно сделать вывод, что равномерное расположение выступов дает выгоду в нагрузке.



**Рисунок 4.** Зависимость приложенной к системе нагрузки от глубины внедрения, когда штампы расположены в линию (а) и в вершинах квадрата (б) при разном значении  $l$  ( $l = 0.75R$  – красная линия,  $l = R$  – синяя линия,  $l = 1.5R$  – зеленая линия,  $l \rightarrow \infty$  – черная линия)

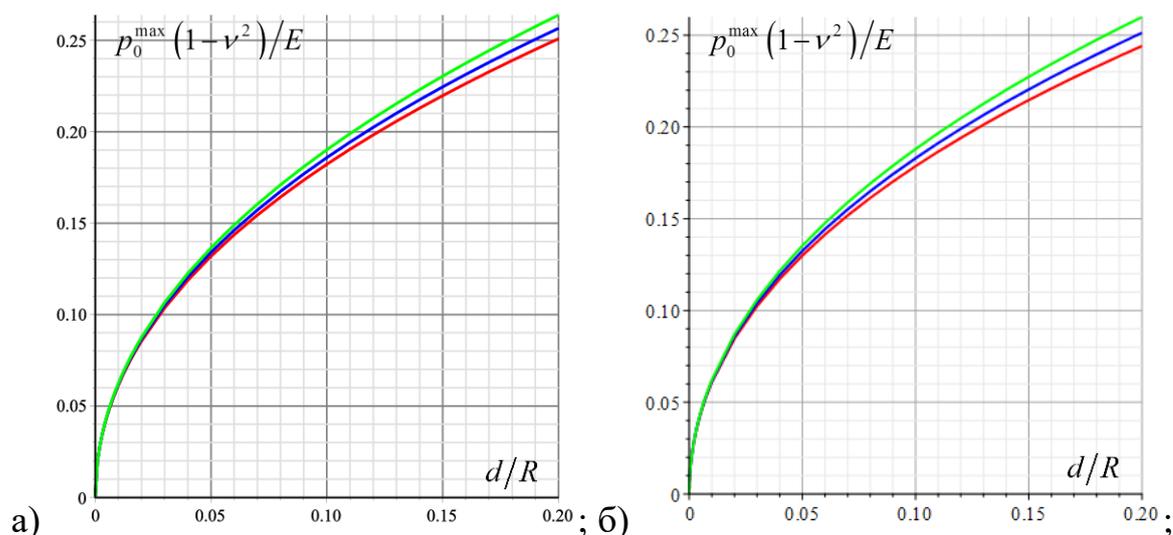
Система (1.5) во всех случаях решалась численно модифицированным методом Ньютона. Решение системы можно упростить, разложив функции, входящие в уравнения, по степеням  $a_i/l_{ij}$ . Так, например, выполнив разложение до  $(a_i/l_{ij})^2$  систему можно свести к одному нелинейному уравнению. В случае же симметричного расположения штампов (в вершинах равностороннего треугольника и квадрата) система (1.5) сводится к одному нелинейному уравнению.

Интерес представляет также зависимость максимальных контактных давлений от расстояния между выступами. Для оценки этой величины воспользуемся выражением Герца со значениями нагрузок на штампы, полученных в данной главе. Имеем следующее выражение для максимального контактного давления [109]

$$P_0^{\max} = \sqrt[3]{\frac{6E^2 \max_{i=1..N}(P_i)}{\pi^3 R^2 (1-\nu^2)^2}}. \quad (1.6)$$

Тогда, в случае расположения штампов в линию, максимальное давление будет наблюдаться в центральной точке областей контакта с полупространством

крайних выступов. На рис.5 представлены зависимости максимальных давлений от глубины внедрений для систем штампов, расположенных в линию. Получено, что уменьшение расстояния между выступами ведет к уменьшению величины максимального давления при фиксированной глубине внедрения. Также из результатов следует, что влияние расстояния и количества штампов на величину максимального давления меньше, чем на нагрузку.

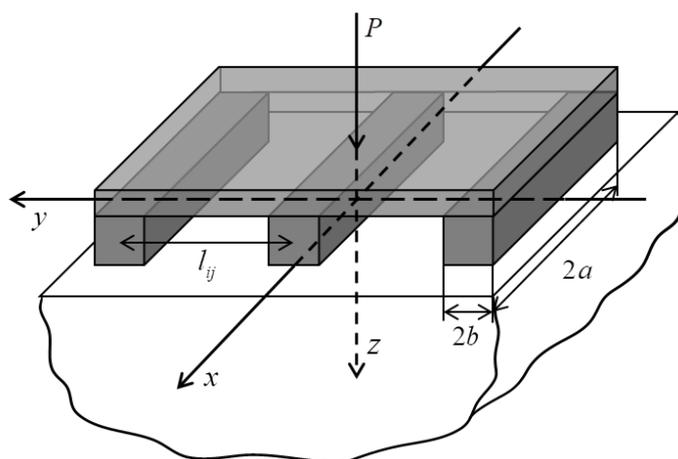


**Рисунок 5.** Зависимость максимального контактного давления от глубины внедрения для систем  $N = 3$  (а) и  $N = 4$  (б) при разном значении  $l$  ( $l = 0.75R$  – красная линия,  $l = R$  – синяя линия,  $l = 1.5R$  – зеленая линия)

Стоит отметить, что при численном решении системы (1.5) помимо распределения нагрузок между штампами определялись также и размеры пятен контакта. Поэтому аналогично тому, как это сделано для нагрузок, можно проанализировать влияние пространственного расположения штампов в системе на размеры пятен контакта каждого штампа с упругим полупространством. Определение напряжений, нагрузок и областей контакта для системы штампов, форма которых описывается функцией  $f(r) = Br^4$ , представлено в работе [110]. Однако там исследовалась конкретная система, состоящая из 9 штампов, равномерно расположенных по квадратной области.

### 1.3. Метод решения задачи о внедрении системы узких в плане штампов

Пусть теперь система состоит из штампов, представляющих собой в плане вытянутые вдоль оси  $Ox$  прямоугольники, и расположенных перпендикулярно оси  $Oy$  так, что центры их симметрии лежат на этой оси равномерно (рис.6). Длинная сторона штампов имеет размер  $2a$ , а короткая –  $2b$ . При этом  $b \ll a$ , а штампы могут иметь различную высоту.



**Рисунок 6.** Схема контакта с упругим полупространством ограниченной системы узких в плане штампов

Исходя из условия узости штампов, предположим, что учет взаимного влияния штампов не изменяет распределение давления в поперечном направлении, то есть вдоль оси  $Oy$ , и оно соответствует решению плоской задачи, а именно [31]

$$p(x, y) = \frac{p(x)}{\pi \sqrt{b^2 - y^2}},$$

где  $p(x)$  – величина давления на единицу длины штампа. Тогда, исходя из решения Галина для узкой балки, вертикальные смещения границы полупространства вдоль оси  $Ox$  будут определяться следующей формулой

$$u_z(x, 0) = \frac{p(x)}{k}, \quad (1.7)$$

где  $k = \pi E / 2(1 - \nu^2) \ln(a/b)$  – коэффициент постели. Опять же, исходя из условия  $b \ll a$ , при рассмотрении контакта с полупространством фиксированного  $i^{020}$

штампа давления  $p_j(x, y)$  под остальными заменим действием погонных нагрузок  $p_j(x)$ , действующих по отрезкам вдоль прямых  $y = l_{ij}$ . Тогда, исходя из (1.2) и с учетом того, что  $p_j(x, y) = \delta(y) p_j(x)$  ( $\delta(y)$  – дельта-функция Дирака), получим следующее условие контакта

$$\frac{p_i(x)}{k} + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{j=1, j \neq i}^N \int_{-a}^a \frac{p_j(x') dx'}{\sqrt{(x' - x)^2 + l_{ij}^2}} = D_i, \quad -a \leq x \leq a. \quad (1.8)$$

Если далее предположить, что погонные нагрузки под  $j^{\text{блм}}$  штампами являются равномерными, то есть  $p_j(x) = P_j/2a$ , то равенство (1.8) примет следующий вид

$$\frac{p_i(x)}{k} + \frac{1-\nu^2}{2\pi a E} \sum_{j=1, j \neq i}^N P_j \ln \left( \frac{\sqrt{(a-x)^2 + l_{ij}^2} + a - x}{\sqrt{(a+x)^2 + l_{ij}^2} - a - x} \right) = D_i, \quad -a \leq x \leq a.$$

Здесь использовалась формула «длинного логарифма», а именно  $\int dx/\sqrt{x^2 + a} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$ . Таким образом, получаем следующее выражение для давления на единицу длины  $i^{\text{озо}}$  штампа

$$p_i(x) = k \left( D_i - \frac{1-\nu^2}{2\pi a E} \sum_{j=1, j \neq i}^N P_j \ln \left( \frac{\sqrt{(a-x)^2 + l_{ij}^2} + a - x}{\sqrt{(a+x)^2 + l_{ij}^2} - a - x} \right) \right), \quad -a \leq x \leq a. \quad (1.9)$$

Если проинтегрировать равенство (1.8) по всей длине штампа, то с учетом условия равновесия  $\int_{-a}^a p_i(x) dx = P_i$  получим следующее равенство

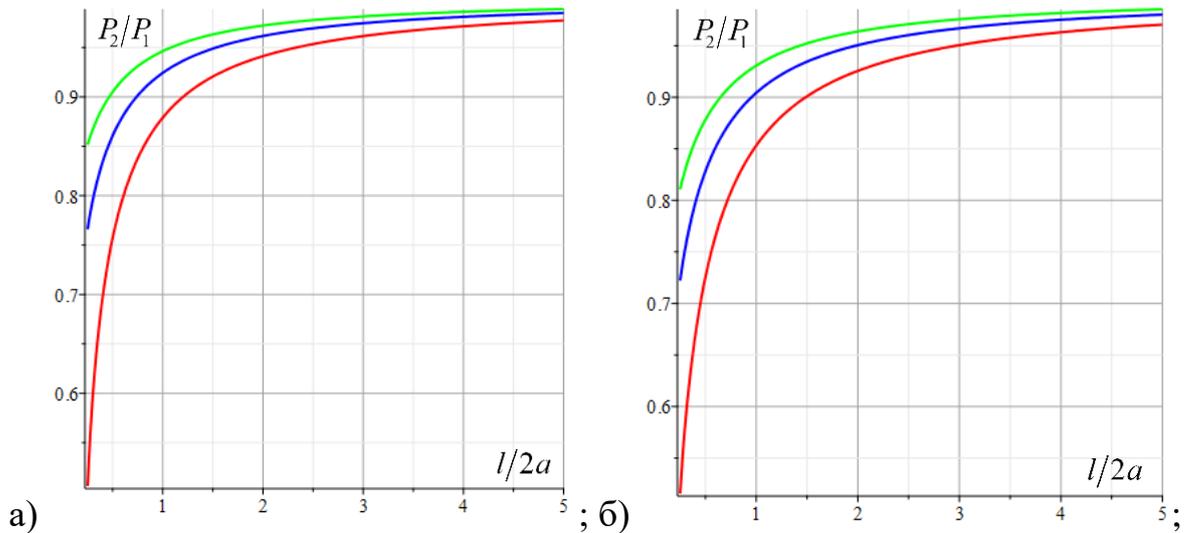
$$P_i = k \left( 2a D_i - \frac{1-\nu^2}{\pi a E} \sum_{j=1, j \neq i}^N P_j \left( a \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + l_{ij}^2} + 2a}{\sqrt{4a^2 + l_{ij}^2} - 2a} \right) + l_{ij} - \sqrt{4a^2 + l_{ij}^2} \right) \right). \quad (1.10)$$

Интеграл от натурального логарифма, входящего в выражение (1.9), получен с помощью метода интегрирования по частям.

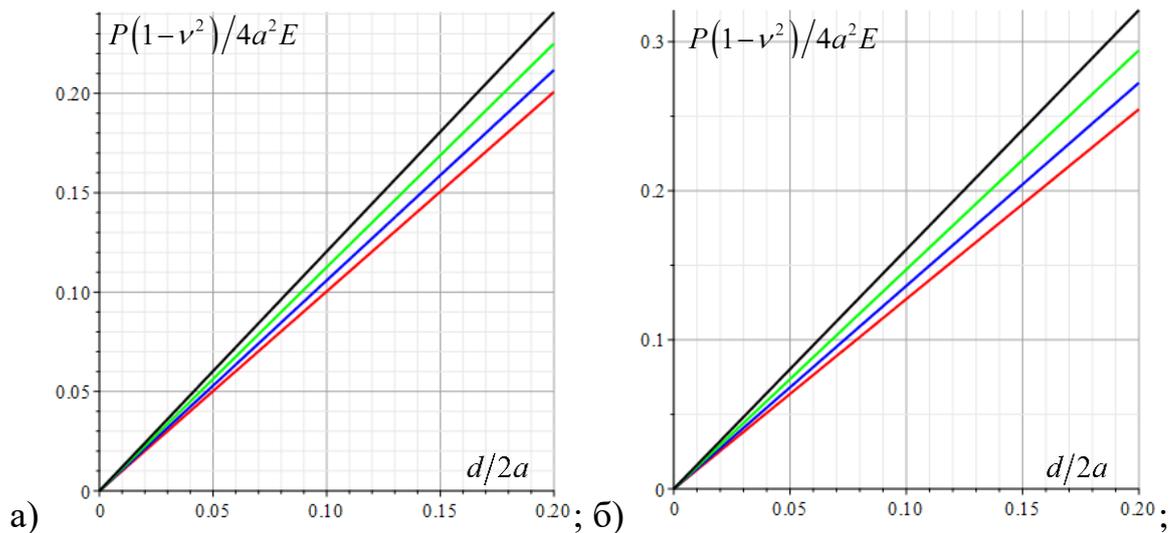
При выводе соотношения (1.9) использовались упрощающие предположения, что налагает на расстояния между выступами некоторые ограничения. Так, например, предполагается, что каждый штамп контактирует по всей своей длине  $2a$ . Однако при достаточно близком контакте условие полного

контакта потребовало бы наличия растягивающих напряжений, то есть отрицательных давлений  $p_i(x)$ , что не соответствует действительности. Это условие необходимо принимать во внимание. Также используемое решение для узкой балки верно, если достаточно мала величина  $a/\ln(\ln(a/b))$  или давление слабо изменяется в промежутке этой длины (это связано с асимптотическим представлением давления через сингулярный интеграл) [31]. Это условие накладывает ограничения на толщину штампов, а также и на расстояние между ними, так как оно влияет на поведение давления под штампом.

Рассмотрим сначала равноуровневые системы ( $D_i = h_i - D = d$ ) из трех и четырех выступов с расстоянием между соседними штампами, равным  $l$ . На рис.7 представлена зависимость разницы в нагрузках на крайние и центральные штампы в зависимости от расстояния между ними. При этом рассмотрены штампы разной толщины, что характеризует коэффициент постели  $k$ . Из результатов следует, что уменьшения расстояния между штампами ведет к увеличению разницы в нагрузках между крайними и центральными. Анализ влияния толщины штампов показывает, что чем уже штампы, то есть чем больше параметр  $a/b$ , тем равномернее нагружена система. На рис.8 представлены зависимости суммарной нагрузки, приложенной к системам штампов, от глубины внедрения. Результаты показывают, что, как и в случае сферических штампов, уменьшение расстояния между штампами ведет к уменьшению величины нагрузки, необходимой для достижения заданной глубины внедрения. Также видно, что для системы, состоящей из четырех штампов, при фиксированной глубине внедрения нагрузка больше при любой плотности расположения штампов в системе, чем для системы трех штампов.



**Рисунок 7.** Зависимость отношения нагрузок на центральные и крайние штампы от расстояния между ними для систем  $N = 3$  (а) и  $N = 4$  (б) при разном значении  $a/b$  ( $a = 10b$  – красная линия,  $a = 30b$  – синяя линия,  $a = 100b$  – зеленая линия)



**Рисунок 8.** Зависимость приложенной к системе нагрузки от глубины внедрения для систем  $N = 3$  (а) и  $N = 4$  (б) при  $a = 50b$  и разном значении  $l$  ( $l = 2a$  – красная линия,  $l = 3a$  – синяя линия,  $l = 6a$  – зеленая линия,  $l \rightarrow \infty$  – черная линия)

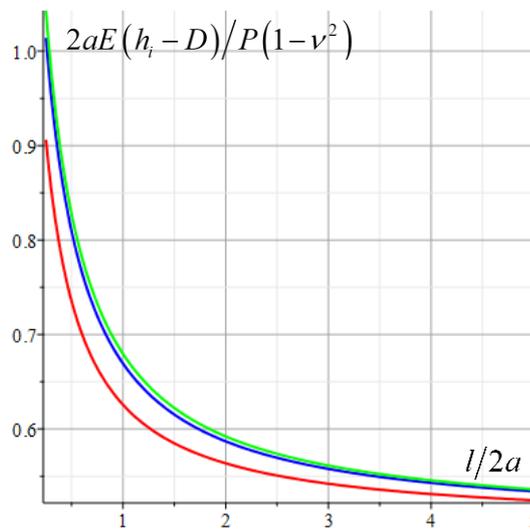
Система (1.10) в отличие от системы (1.5) решается аналитически и выражения для  $P_i$  можно записать в явном виде. Однако формулы довольно громоздки, поэтому здесь не приводятся.

Проанализируем решение рассматриваемой задачи на больших расстояниях. При  $l \rightarrow \infty$ , исходя из (1.10), имеем

$$P_i \rightarrow 2ak \left( D_i - \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{P_j}{l_{ij}} \right) \rightarrow 2akD_i. \quad (1.11)$$

Отсюда следует, что на больших расстояниях влияние остальных штампов на фиксированный соответствует влиянию сосредоточенных сил, и чем больше расстояния между штампами, тем ближе распределение нагрузок к равномерному.

Пусть теперь выступы имеют некоторое распределение по высоте  $h_i$ . Найдем такое  $h_i$ , при котором все штампы нагружены равномерно, то есть  $P_i = P/N$ . На рис.9 представлен график зависимости соотношения высот от расстояния между штампами для системы  $N = 5$ . Так как зависимость глубины внедрения  $D_i$  каждого штампа от нагрузки, к нему приложенной, линейна, то графики построены для углового коэффициента. Из результатов следует, что для равномерного нагружения штампов необходимо, чтобы крайние штампы имели меньшую высоту, чем центральные. Также результаты показывают, что с увеличением расстояния между штампами условие равномерности нагружения выполняется для равноуровневой системы, что подтверждает выражение (1.11).



**Рисунок 9.** Зависимость глубин внедрения штампов от расстояния между ними для системы  $N = 5$  при разном значении  $a = 50b$  (первый и пятый штампы – красная линия, второй и четвертый штампы – синяя линия, третий штамп – зеленая линия)

## 1.4. Выводы

В данной главе рассмотрены задачи о взаимодействии с упругим полупространством без трения ограниченной системы выступов. Получено решение для двух форм штампов с учетом влияния пятен контакта друг на друга. Учет взаимного влияния позволяет получить распределение нагрузок между штампами, а также определить высотное распределение штампов, позволяющее обеспечить условие равного нагружения.

Несмотря на то, что построенные модели основаны на некоторых упрощениях, они позволяют проанализировать влияние расположения штампов в системе на распределение нагрузок, а также на зависимость глубины внедрения всей системы в упругое полупространство от приложенной к ней нагрузки. Показано, что для систем, в которых штампы расположены в линию, наибольшая нагрузка наблюдается на крайних штампах, а наименьшая – на центральных. Отсюда также следует тот факт, что равномерное распределение нагрузок будет наблюдаться в системах, где крайние штампы имеют высоты меньше, чем центральные.

Анализ зависимости нагрузки, приложенной к системе, от глубины внедрения ее в упругое полупространство показал, что учет взаимного влияния пятен контакта приводит к уменьшению нагрузки при фиксированной глубине. Более того, чем ближе расположены штампы, тем меньшая нагрузка необходима для достижения заданной глубины внедрения. Путем сравнения различных пространственных расположений штампов в системе получено, что равномерное расположение штампов, например, в вершинах квадрата или равностороннего треугольника, также ведет к снижению суммарной нагрузки при фиксированной глубине.

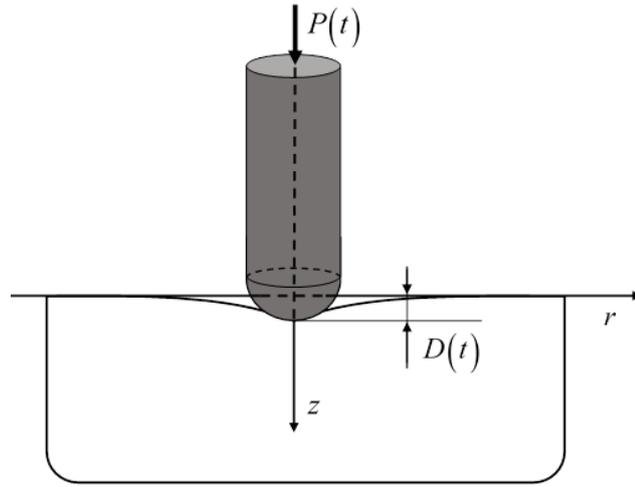
Таким образом, полученное решение показало, что в случае плотного расположения штампов в системе пренебрежение взаимным влиянием пятен контакта может привести к значительным ошибкам в определении характеристик контактного взаимодействия.

## Глава 2: Моделирование внедрения цилиндрического штампа в вязкоупругое основание

В данной главе рассматриваются задачи о внедрении в вязкоупругое основание (полупространство и слой) единичного штампа. Учет вязкоупругих свойств основания ведет к изменению всех контактных характеристик во времени. При этом могут наблюдаться такие процессы, как ползучесть и релаксация, что также приводит к перераспределению давления в области контакта. Зависимость контактных характеристик от времени определяется не только механическими свойствами основания, но также и параметрами нагружения, а именно скоростью процессов. Далее представлено решение задач для различных форм штампов, параметров нагружения, а также механических свойств основания.

### 2.1. Постановка задачи

Рассматривается внедрение единичного осесимметричного штампа в вязкоупругое основание под действием приложенной нагрузки  $P(t)$  на глубину  $D(t)$  (рис.10). Введем цилиндрическую систему координат так, чтобы ось  $Oz$  совпадала с осью симметрии штампа, а плоскость  $z=0$  – с недеформированной поверхностью полупространства. В данной системе координат форма контактирующей поверхности штампа описывается функцией  $f(r)$ . В силу осесимметричной формы штампа область контакта его с основанием будет иметь форму круга с радиусом  $a(t)$ .



**Рисунок 10.** Схема контакта единичного штампа с основанием

Для описания механического поведения материала деформируемого основания используется линейная теория вязкоупругости. Определяющие соотношения, связывающие напряжения  $\sigma_{ij}(r, z, t)$  и деформации  $\varepsilon_{ij}(r, z, t)$ , через девиаторные и объемные компоненты в случае однородного изотропного материала запишутся в следующем виде [47]

$$s_{ij}(r, z, t) = \int_{-\infty}^t G_1(t - \tau) \frac{\partial e_{ij}(r, z, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{и} \quad \sigma_{kk}(r, z, t) = \int_{-\infty}^t G_2(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon_{kk}(r, z, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2.1)$$

$$s_{ij}(r, z, t) = \sigma_{ij}(r, z, t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}(r, z, t), \quad s_{ii}(r, z, t) = 0,$$

$$e_{ij}(r, z, t) = \varepsilon_{ij}(r, z, t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(r, z, t), \quad e_{ij}(r, t) = 0,$$

где  $s_{ii}(r, z, t)$  и  $e_{ij}(r, z, t)$  – девиаторные компоненты напряжений и деформаций соответственно,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, а  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$  – функции релаксации, соответствующие состояниям сдвига и объемного расширения. Напряжения и деформации предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими функциями времени. Для простоты предположим, что либо коэффициент Пуассона материала  $\nu$  не зависит от времени, либо материал является несжимаемым, то есть  $\nu = 1/2$ . Тогда функции релаксации на сдвиг и на объемное расширение будут связаны соотношением

$$G_1(t) = \frac{1-2\nu}{1+\nu} G_2(t).$$

При этом функция релаксации при простом сдвиге будет  $G(t) = G_1(t)/2$ , а функция релаксации при одноосном растяжении –  $E(t) = (1+\nu)G_1(t)$ .

Рассматриваемая задача является смешанной краевой задачей, где на одной части границы заданы перемещения, а на другой – напряжения. На поверхности основания граничные условия задачи в отсутствии трения имеют следующий вид

$$\begin{aligned} u_z(r,t) &= D(t) - f(r)H(t), \quad r \leq a(t) \\ \sigma_z(r,t) &= -p(r,t) = 0, \quad r > a(t) \\ \tau_{rz}(r,t) &= \tau_{z\theta}(r,t) = 0, \quad 0 < r < \infty \end{aligned}$$

Здесь  $u_z(r,t)$  – вертикальное смещение границы вязкоупругого основания,  $\sigma_z(r,t)$ ,  $\tau_{rz}(r,t)$  и  $\tau_{z\theta}(r,t)$  – нормальные и касательные граничные напряжения,  $p(r,t)$  – контактное давление, а  $H(t)$  – функция Хевисайда. К граничным условиям (2.2) добавляются условия на бесконечности (например, стремление напряжений к нулю), а в случае вязкоупругого слоя – также условия на поверхности  $z = h$ , где  $h$  – это толщина слоя.

Сила  $P(t)$ , приложенная к штампу, определяется условием равновесия, а именно

$$P(t) = 2\pi \int_0^{a(t)} rp(r,t)dr. \quad (2.3)$$

В качестве начальных условий примем отсутствие каких-либо напряжений и деформаций при  $t < 0$ .

## **2.2. Моделирование внедрения цилиндра с различной формой торцевой поверхности в вязкоупругое полупространство**

Рассмотрим внедрение с постоянной скоростью  $V$  жесткого осесимметричного штампа в вязкоупругое полупространство. Штмп

представляет собой цилиндр радиуса  $R$  с формой основания, описываемой степенной функцией  $f(r) = Ar^n$ , где  $n = 1, 2, \dots$  ( $n = 1$  соответствует конической форме, а  $n = 2$  – параболической). Для цилиндра с плоским основанием считаем, что  $f(r) = 0$ . Момент  $t_*$  вступления в контакт с полупространством угловых точек определяется условием  $a(t_*) = R$ .

В рассматриваемом случае область контакта будет монотонно увеличиваться до размеров поперечного сечения цилиндра, а затем будет постоянна. Тогда с учетом граничных условий (2.2) рассматриваемую задачу можно рассматривать как суперпозицию двух задач: первая – внедрение до глубины  $D_* = Vt_*$  гладкого индентора с формой контактирующей поверхности  $f(r)$  и дальнейшее его удержание на этой глубине, а вторая – внедрение цилиндра с плоским основанием радиуса  $R$ , начиная с момента  $t_*$ . К первой задаче, исходя из неубывания области контакта, применим метод Радока замены упругих постоянных соответствующими вязкоупругими операторами [51]. К решению же второй задачи с учетом условия постоянства области контакта можно применить принцип соответствия [46]. Таким образом, решение рассматриваемой вязкоупругой задачи строится из решения аналогичной упругой задачи путем замены констант материала интегральными операторами.

Решение рассматриваемой задачи в упругом случае представлено в [31]. Выражение для контактных давлений с использованием функции Хевисайда можно записать в следующем виде

$$p(r, t) = \frac{EA}{\pi(1-\nu^2)} \left( q_{1,2}(r, t) (H(t) - H(t - t_*)) + \right. \\ \left. + \left( q_{1,2}(r, t_*) + \frac{V(t - t_*)}{A\sqrt{R^2 - r^2}} \right) H(t - t_*) \right), \quad r < a(t) \leq R, \quad (2.4)$$

где  $q_{1,2}(r, t)$  определяет распределение контактных давлений для случаев четных и нечетных  $n$ , соответственно. В четном случае, когда  $n = 2m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , как получено в [42], имеем следующую формулу

$$q_1(r, t) = a^{n-1}(t) \left( \frac{n!!}{(n-1)!!} \right)^2 \sqrt{1 - \left( \frac{r}{a(t)} \right)^2} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{(2i-3)!!}{(2i-2)!!} \left( \frac{r}{a(t)} \right)^{n-2i}. \quad (2.5)$$

В нечетном же случае, когда  $n = 2m + 1$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , имеем [111]

$$q_2(r, t) = \frac{\pi r^{n-1}}{2} \left( \frac{n!!}{(n-1)!!} \right)^2 \left( \operatorname{arch} \left( \frac{a(t)}{r} \right) + \sqrt{1 - \left( \frac{r}{a(t)} \right)^2} \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!} \left( \frac{a(t)}{r} \right)^{2i} \right). \quad (2.6)$$

Радиус области контакта, входящий в выражения (2.5) и (2.6), до момента  $t_*$  определяется следующим образом

$$a(t) = \frac{n+1}{2n} \kappa(n) \sqrt[n]{\frac{Vt}{A}}, \quad (2.7)$$

где  $\kappa(n) = 2^{2/n} n^{(n-1)/n} (\Gamma(n))^{1/n} (\Gamma(n/2))^{-2/n} / (n+1)$ , а  $\Gamma(n)$  – гамма-функция. Отсюда можно получить выражение для момента  $t_*$ , а именно

$$t_* = \frac{A}{V} \left( \frac{2nR}{(n+1)\kappa(n)} \right)^n. \quad (2.8)$$

Выражение для нагрузки, приложенной к штампу, записывается следующим образом

$$P(t) = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \kappa(n) A^{\frac{1}{n}} (Vt)^{\frac{n+1}{n}} (H(t) - H(t-t_*)) + \left( \kappa(n) A^{\frac{1}{n}} (Vt_*)^{\frac{n+1}{n}} Vt_* + 2V(t-t_*)R \right) H(t-t_*) \right). \quad (2.9)$$

В случае цилиндра с плоским основанием  $t_* = 0$  и выражения для давлений и нагрузки при  $t \geq 0$  принимают вид

$$p(r, t) = \frac{EVt}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{R^2 - r^2}}, \quad r < R, \quad (2.10)$$

$$P(t) = \frac{2EVtR}{1-\nu^2}. \quad (2.11)$$

Перейдем к вязкоупругому случаю. С учетом постоянства коэффициента Пуассона для получения вязкоупругого решения заменим модуль упругости  $E$  в

упругом решении на интегральный оператор с ядром  $E(t)$ . Для контактного давления, исходя из (2.4), получим ( $r < a(t) \leq R$ )

$$p(r,t) = \frac{A}{\pi(1-\nu^2)} \begin{cases} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial q_{1,2}(r,\tau)}{\partial \tau} d\tau, & t \leq t_* \\ \left( \int_0^{t_*} E(t-\tau) \frac{\partial q_{1,2}(r,\tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{V}{A\sqrt{R^2-r^2}} \int_{t_*}^t E(t-\tau) d\tau \right), & t \geq t_* \end{cases} \quad (2.12)$$

где функции  $q_{1,2}(r,t)$  определяются выражениями (2.5) и (2.6). Используя выражение (2.9), для приложенной к штампу нагрузки получим

$$P(t) = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{cases} \kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} V^{\frac{n+1}{n}} \frac{n+1}{n} \int_0^t E(t-\tau) \tau^{\frac{1}{n}} d\tau, & t \leq t_* \\ \left( \kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} V^{\frac{n+1}{n}} \frac{n+1}{n} \int_0^{t_*} E(t-\tau) \tau^{\frac{1}{n}} d\tau + 2VR \int_{t_*}^t E(t-\tau) d\tau \right), & t \geq t_* \end{cases} \quad (2.13)$$

Связь радиуса области контакта с величиной внедрения для вязкоупругого случая будет такой же, как и для упругого случая, то есть согласно выражению (2.7).

Для случая, когда угловые точки штампа находятся в контакте с вязкоупругим полупространством с самого начала процесса внедрения, применим принцип соответствия. Решение данной задачи можно найти в [112]. Там даны выражения для зависимостей нагрузки (глубины внедрения) от времени при условии постоянной глубины внедрения (постоянной приложенной нагрузки). Релаксация давления под поверхностью штампов с  $n=4$  и  $n=6$  исследовано численным методом в работе [113] при условии постоянной приложенной нагрузки.

Для плоского же цилиндра с учетом (2.10) и (2.11) получим следующее решение ( $r < R$ )

$$p(r,t) = \frac{V}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{R^2-r^2}} \int_0^t E(t-\tau) d\tau, \quad r < R, \quad (2.14)$$

$$P(t) = \frac{2VR}{1-\nu^2} \int_0^t E(t-\tau) d\tau. \quad (2.15)$$

Рассмотрим для определенности конкретную вязкоупругую модель, а именно модель стандартного вязкоупругого тела. Функция релаксации для данной модели при условии постоянного коэффициента Пуассона имеет вид [114]

$$E(t) = \frac{T_\sigma E_0}{T_\varepsilon} \left( 1 + \left( \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} - 1 \right) e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \right), \quad (2.16)$$

где  $E_0$  – это мгновенный модуль упругости, а  $T_\sigma$  и  $T_\varepsilon$  – время релаксации и ползучести. Эта модель характеризуется конечными процессами релаксации и ползучести, так как имеет конечный длительный модуль упругости  $E_\infty = E_0 T_\sigma / T_\varepsilon$ . Подставляя выражение для функции релаксации (2.16) в выражения (2.14) и (2.15) для цилиндра с плоским основанием, получим следующий результат

$$p(r, t) = \frac{VT_\sigma E_0}{\pi(1-\nu^2)T_\varepsilon \sqrt{R^2 - r^2}} \left( t + (T_\varepsilon - T_\sigma) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \right) \right), \quad r < R, \quad (2.17)$$

$$P(t) = \frac{2VRT_\sigma E_0}{(1-\nu^2)T_\varepsilon} \left( t + (T_\varepsilon - T_\sigma) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \right) \right). \quad (2.18)$$

Для цилиндра с заданной формой основания найдем сначала значение следующего интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^t E(t-\tau) \tau^{\frac{1}{n}} d\tau &= \frac{T_\sigma E_0}{T_\varepsilon} \int_0^t \left( 1 + \left( \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} - 1 \right) e^{-\frac{t-\tau}{T_\sigma}} \right) \tau^{\frac{1}{n}} d\tau = \\ &= \frac{T_\sigma E_0}{T_\varepsilon} \left( \frac{n}{n+1} t^{\frac{n+1}{n}} + \left( \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} - 1 \right) e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T_\sigma}} \tau^{\frac{1}{n}} d\tau \right). \end{aligned}$$

Для интеграла из второго слагаемого в скобках запишем

$$\int_0^t e^{\frac{\tau}{T_\sigma}} \tau^{\frac{1}{n}} d\tau = T_\sigma t^{\frac{1}{n}} \left( e^{\frac{t}{T_\sigma}} - \frac{1}{n} \int_0^{\frac{t}{T_\sigma}} e^{\frac{1}{n} s} s^{\frac{1-n}{n}} ds \right) = T_\sigma t^{\frac{1}{n}} \left( e^{\frac{t}{T_\sigma}} - \Phi \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n} + 1; \frac{t}{T_\sigma} \right) \right),$$

где  $\Phi(a, c; x)$  – это вырожденная гипергеометрическая функция [115]. При вещественных значениях параметров  $a$  и  $c$  функция  $\Phi(a, c; x)$  вещественная для вещественных значений  $x$ . Таким образом, для нагрузки с учетом (2.8) получим

$$P(t) = \frac{VT_\sigma E_0}{(1-\nu^2)T_\varepsilon} \begin{cases} \kappa(n) A^{\frac{1}{n}} (Vt)^{\frac{1}{n}} \left( t + (T_\varepsilon - T_\sigma) \frac{n+1}{n} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \Phi_n(t) \right) \right), & t \leq t_* \\ 2R \left( t - \frac{1}{n+1} t_* + (T_\varepsilon - T_\sigma) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \Phi_n(t_*) \right) \right), & t \geq t_* \end{cases} \quad (2.19)$$

где  $\Phi_n(t) \equiv \Phi(1/n, (n+1)/n; t/T_\sigma)$ . Для контактного давления имеем следующее выражение ( $r < a(t) \leq R$ )

$$p(r, t) = \frac{AT_\sigma E_0}{\pi(1-\nu^2)T_\varepsilon} \begin{cases} \left( q_{1,2}(r, t) + \left( \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} - 1 \right) e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T_\sigma}} \frac{\partial q_{1,2}(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right), & t \leq t_* \\ \left( q_{1,2}(r, t_*) + \left( \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} - 1 \right) e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \int_0^{t_*} e^{\frac{\tau}{T_\sigma}} \frac{\partial q_{1,2}(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \right. \\ \left. + \frac{V}{A\sqrt{R^2 - r^2}} \left( t - t_* + (T_\varepsilon - T_\sigma) \left( 1 - e^{-\frac{t-t_*}{T_\sigma}} \right) \right) \right), & t \geq t_* \end{cases} \quad (2.20)$$

где функции  $q_{1,2}(r, t)$  определяются выражениями (2.5) и (2.6).

Посмотрим на асимптотику полученных выражения в случае больших и малых скоростей  $V$  внедрения штампа в полупространство. Для штампа с плоским основанием, исходя из выражений (2.17) и (2.18) с подстановкой  $t = D/V$ , очевидно, что зависимости нагрузки и контактного давления от внедрения при малых и больших скоростях  $V$  стремятся к выражениям (2.10) и (2.11) с длительным  $E_\infty$  и мгновенным  $E_0$  модулями упругости соответственно. Исследуем асимптотику выражения для нагрузки, приложенной к штампу с заданной формой. Для этого запишем выражение (2.19) в зависимости от глубины внедрения  $D$ . Получим

$$P(t) = \frac{T_\sigma E_0}{(1-\nu^2)T_\varepsilon} \begin{cases} \kappa(n) A^{\frac{1}{n}} D^{\frac{1}{n}} \left( D + V(T_\varepsilon - T_\sigma) \frac{n+1}{n} \left( 1 - e^{-\frac{D}{VT_\sigma}} \Phi_n\left(\frac{D}{VT_\sigma}\right) \right) \right), & t \leq t_* \\ 2R \left( D - \frac{1}{n+1} D_* + V(T_\varepsilon - T_\sigma) \left( 1 - e^{-\frac{D}{VT_\sigma}} \Phi_n\left(\frac{D_*}{VT_\sigma}\right) \right) \right), & t \geq t_* \end{cases}$$

где  $D_* = Vt_*$ . Воспользуемся тем, что вырожденная гипергеометрическая функция представляет собой ряд Куммера, то есть

$$\Phi(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

и тем, что  $\Phi(a, c; x) \rightarrow (\Gamma(c)/\Gamma(a))e^x x^{a-c}$  при  $x \rightarrow \infty$  [115]. Тогда для малых скоростей внедрения имеем

$$P(t) = \frac{T_\sigma E_0}{(1-\nu^2)T_\varepsilon} \begin{cases} \kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} D^{\frac{n+1}{n}}, & t \leq t_* \\ 2R \left( D - \frac{1}{n+1} D_* \right), & t \geq t_* \end{cases}$$

что с учетом (2.8) совпадает с выражением (2.9) при  $E = E_\infty$ . При больших скоростях  $V$  имеем

$$P(t) = \frac{E_0}{1-\nu^2} \begin{cases} \kappa(n) A^{-\frac{1}{n}} D^{\frac{n+1}{n}}, & t \leq t_* \\ 2R \left( D - \frac{1}{n+1} D_* \right), & t \geq t_* \end{cases}$$

что с учетом (2.8) также совпадает с выражением (2.9) только при  $E = E_0$ .

Исследуем также поведение выражения (2.19) для форм поверхности основания цилиндра, приближающейся к плоской, то есть при больших значениях показателя степенной функции или при малых значениях параметра  $A$  относительно радиуса цилиндра  $R$ . Для  $n \rightarrow \infty$  при фиксированных остальных параметрах момент времени  $t_*$  также стремится к бесконечности. Поэтому для нагрузки имеем в этом случае

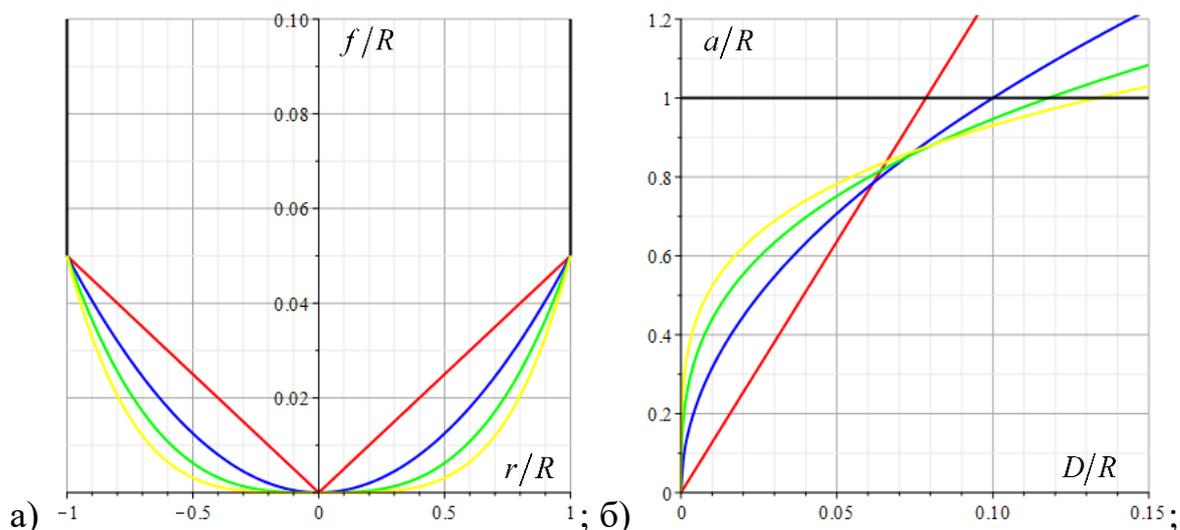
$$P(t) \rightarrow \frac{2VT_\sigma E_0 R}{(1-\nu^2)T_\varepsilon} \sqrt[n]{\frac{Vt}{A}} \left( t + (T_\varepsilon - T_\sigma) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \right) \right).$$

где использовано, что  $\Phi_n(t) \rightarrow 1$  и  $a(t) \rightarrow R$  при  $n \rightarrow \infty$  и фиксированной величине  $AR^n$ , что характеризует высоту выпуклой части. Полученное выражение совпадает с выражением (2.18) для цилиндра с плоским основанием. При  $A \rightarrow 0$  момент времени  $t_*$  стремится к нулю, тогда для нагрузки получим

$$P(t) \rightarrow \frac{2VT_{\sigma}E_0R}{(1-\nu^2)T_{\varepsilon}} \left( t + (T_{\varepsilon} - T_{\sigma}) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_{\sigma}}} \right) \right).$$

где использовано, что  $\Phi_n(0) = 0$ . Полученное выражение также совпадает с (2.18).

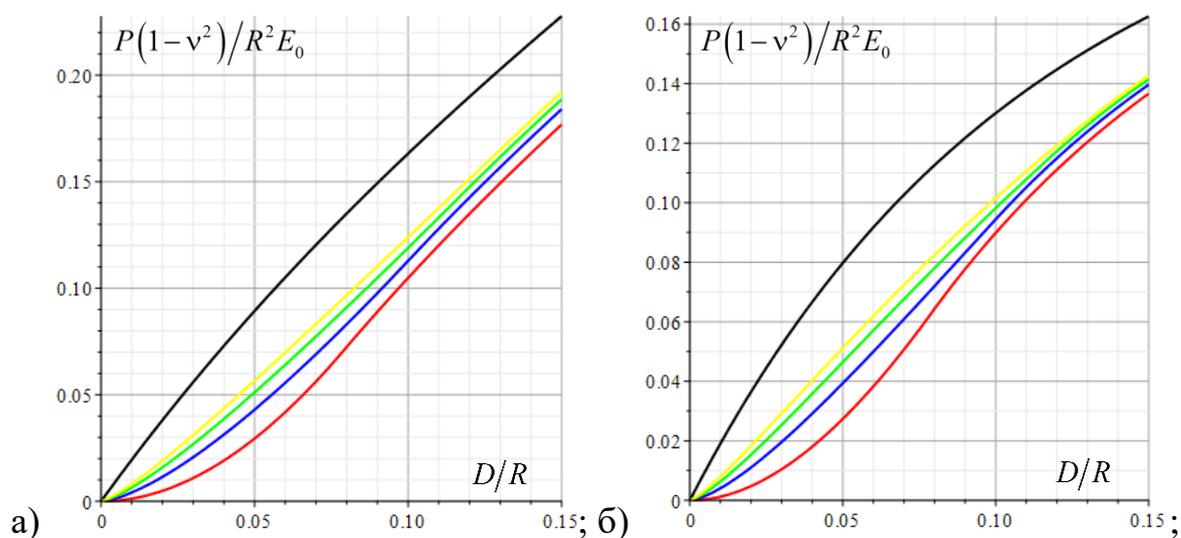
Рассмотрим цилиндры с одинаковой глубиной выпуклой части. Для этого зафиксируем величину  $AR^n$ . На рис.11 представлены профили штампов в случае одинаковой величины  $AR^n$  для разных значений показателя степени функции, описывающей форму основания, а также зависимость области контакта от глубины внедрения для рассматриваемых форм штампов. Из графика (б) следует, что чем больше показатель степени  $n$ , тем больше глубина внедрения, на которой в контакт с полупространством вступают угловые точки.



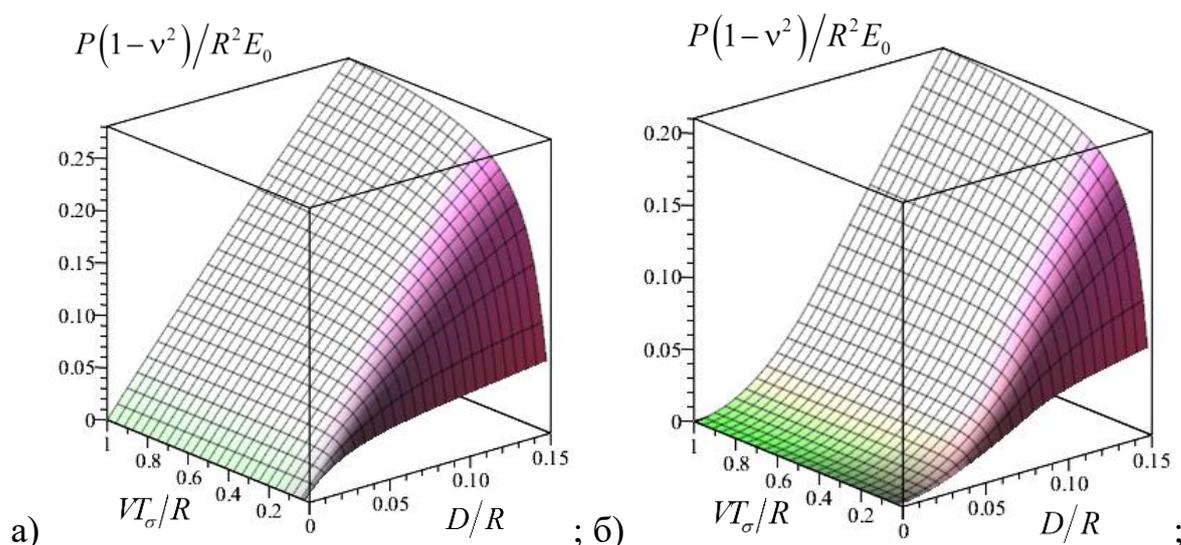
**Рисунок 11.** Профили оснований цилиндров (а) и зависимость радиуса области контакта от глубины внедрения (б) для  $A = 0.05R^{n-1}$  и  $n = 1$  (красная линия),  $n = 2$  (синяя линия),  $n = 3$  (зеленая линия),  $n = 4$  (желтая линия) при  $V = R/10T_{\sigma}$

На рис.12 и 13 представлены зависимости нагрузок, приложенных к штампам разной формы, от глубины внедрения их в полупространство. Из результатов (рис.12) следует, что на одной и той же глубине значение нагрузки минимально для цилиндра с коническим основанием, а максимально – для цилиндра с плоским основанием. Анализ влияния вязкости материала полупространства, а именно коэффициента  $T = T_{\varepsilon}/T_{\sigma}$ , показывает, что учет

вязкости полупространство ведет к изменению вида зависимости нагрузки от внедрения. При этом, чем больше коэффициент  $T$  при фиксированном мгновенном модуле упругости, тем меньше значение нагрузки на фиксированной глубине. Это верно для всех форм основания цилиндра. Анализ влияния скорости на зависимость нагрузки от глубины внедрения (рис.13) показывает, что при фиксированной глубине внедрения значение прикладываемой к штампу нагрузки, меньше при малых скоростях внедрения. Также из результатов следует, что влияние скорости внедрения на зависимость нагрузки от глубины уменьшается с увеличением значения скорости. То же самое характерно и для уменьшения значений скоростей внедрения. Это подтверждает асимптотические зависимости, полученные для больших и малых скоростей, которые демонстрируют упругое поведение с мгновенным и длительным модулями упругости для этих случаев.

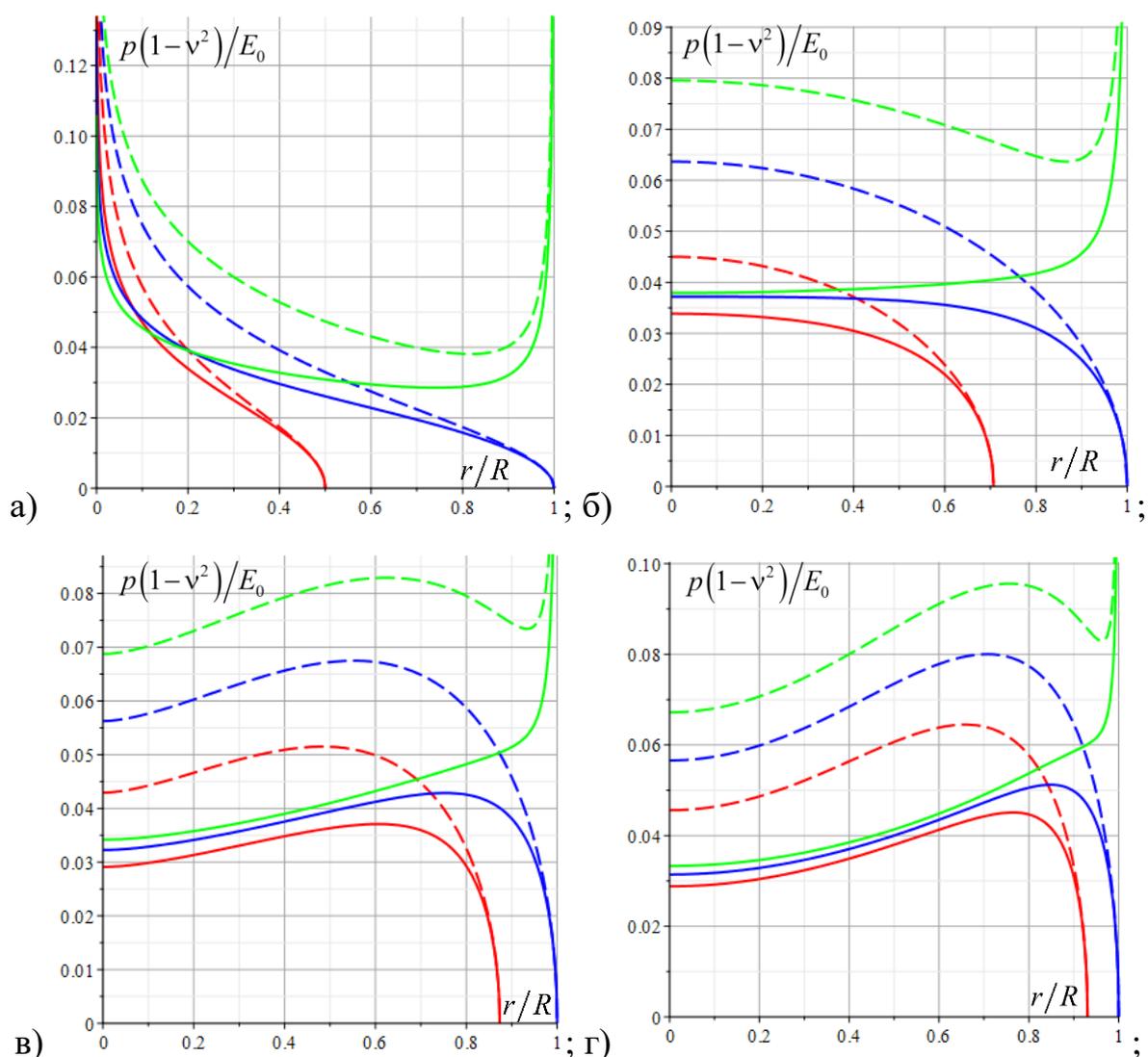


**Рисунок 12.** Зависимость нагрузки от глубины внедрения в случае плоского штампа (черная линия) и штампов с  $A = 0.05R^{n-1}$  и  $n = 1$  (красная линия),  $n = 2$  (синяя линия),  $n = 3$  (зеленая линия),  $n = 4$  (желтая линия) при  $V = R/10T_\sigma$  и  $T = 2$  (а);  $T = 20$  (б)



**Рисунок 13.** Зависимость нагрузки от глубины для разных скоростей внедрения для штампа с плоским основанием (а) и с  $A = 0.05R^{n-1}$ ,  $n = 1$  (б);  $T = 10$

На рис.14 представлено распределение давления под поверхностью штампов с разной формой основания в разные моменты времени. Результаты показывают, что в стадии возрастающей со временем области контакта распределение контактного давления значительно зависит от формы контактирующей поверхности штампа. Так, в случае конического основания цилиндра в центральной точке области контакта наблюдаются бесконечные давления. А в случае параболической формы центральная точка будет точкой максимального контактного давления. В стадии постоянной области контакта, когда угловые точки находятся в контакте с полупространством, для всех форм основания цилиндра на краях области контакта давления не ограничены. При внедрении цилиндра с плоским основанием с самого начала процесса внедрения контактные давления на границе области контакта являются неограниченными. Анализ влияния вязкоупругих свойств полупространства показывает, что в каждый момент времени контактное давление будет меньше, чем в случае упругого полупространства (пунктирные линии на рис.14). И чем дольше контактирует штамп с полупространством, тем эта разница больше. Таким образом, максимальная релаксация контактных напряжений наблюдается в центральной части области контакта.



**Рисунок 14.** Распределение контактного давления под поверхностью цилиндра с

$A = 0.05R^{n-1}$  и  $n = 1$ :  $t = \pi T_\sigma / 8$  – красная линия,  $t = \pi T_\sigma / 4$  – синяя линия,  $t = 3\pi T_\sigma / 8$  – зеленая линия (а);  $n = 2$ :  $t = T_\sigma / 2$  – красная линия,  $t = T_\sigma$  – синяя линия,  $t = 3T_\sigma / 2$  – зеленая линия (б);  $n = 3$ :  $t = \pi T_\sigma / 4$  – красная линия,  $t = 3\pi T_\sigma / 8$  – синяя линия,  $t = 3\pi T_\sigma / 8$  – зеленая линия (в);  $n = 4$ :  $t = T_\sigma$  – красная линия,  $t = 4T_\sigma / 3$  – синяя линия,  $t = 5T_\sigma / 3$  – зеленая линия (г);  $V = R/10T_\sigma$  и  $T = 10$

Интегралы, входящие в выражение для контактного давления (2.20), брались численно, а именно методом Симпсона. Исключение составляет случай  $n = 2$ . Для этой формы штампа интегралы берутся, и результат можно записать в явном виде, используя мнимую часть функции ошибок  $erfi$  или функцию Доусона.

### 2.3. Решение задачи о внедрении с удержанием цилиндра в тонкий и толстый вязкоупругий слой

Рассмотрим внедрение жесткого осесимметричного штампа в вязкоупругий слой толщины  $h$ , лежащий на жестком основании. Штмп представляет собой цилиндр радиуса  $R$  с плоской торцевой поверхностью. Таким образом, область контакта будет постоянна и представляет собой круг радиуса  $R$ . Будут исследованы две асимптотики: тонкий и толстый слой. Для этого введем коэффициент относительной толщины слоя  $\lambda$ , который равен отношению толщины слоя к радиусу области контакта, то есть  $\lambda = h/R$ . Тогда для тонкого слоя имеем условие, что  $\lambda < 1$ , а для толстого –  $\lambda > 1$ . Условия закрепления слоя к жесткому основанию определяют граничные условия при  $z = h$  помимо равенства нулю нормальных перемещений  $u_z(r, t)$ . Если слой жестко сцеплен с основанием, то на нижней границе добавляется условие равенство нулю также и перемещений  $u_r(r, t)$  и  $u_\theta(r, t)$ . Если же слой лежит на основании без трения, то дополнительным условием будет равенство нулю касательных напряжений  $\tau_{rz}(r, t)$  и  $\tau_{\theta z}(r, t)$ .

Процесс внедрения цилиндра в слой состоит из двух стадий: погружение с постоянной скоростью  $V$  до заданной глубины  $D_*$  и дальнейшее удержание на этой глубине. Зависимость глубины внедрения от времени можно описать следующей функцией

$$D(t) = \begin{cases} Vt, & t \leq t_* \\ D_*, & t \geq t_* \end{cases} \quad (2.21)$$

При этом величина максимальной глубины внедрения  $D_* = Vt_*$  должна удовлетворять условию малости деформации, чтобы механическое поведение слоя можно было описать линейной теорией вязкоупругости.

Поскольку радиус области контакта постоянен, тип граничных условий в каждой точке остается неизменным в течение всего процесса нагружения.

Поэтому для решения контактной задачи также можно воспользоваться принципом соответствия [46]. В упругом случае основное уравнение, связывающее вертикальные перемещения поверхности основания и контактные давления  $p(r, t)$ , при осесимметричном нагружении имеет вид [116]

$$u_z(r, t) = \frac{2h(1-\nu^2)}{E} \int_0^R K\left(\frac{r}{h}, \frac{\rho}{h}\right) p(\rho, t) \rho d\rho, \quad (2.22)$$

где  $K(x, y) = \int_0^\infty L(u) J_0(xu) J_0(yu) du$ ,  $J_0(x)$  – функция Бесселя первого рода, а функция  $L(u)$  зависит от способа крепления слоя к жесткому основанию, а именно ( $\kappa = 3 - 4\nu$ )

$$L(u) = \frac{2\kappa \sinh(2u) - 4u}{2\kappa \cosh(2u) + 1 + \kappa^2 + 4u^2} \text{ в случае сцепления,}$$

$$L(u) = \frac{\cosh(2u) - 1}{\sinh(2u) + 2u} \text{ при отсутствии трения.}$$

Приближенное решение уравнения (2.22) можно получить с использованием асимптотических методов для случаев больших и малых значений коэффициента  $\lambda$ . Так, для больших  $\lambda$  в [116] получено следующие выражения для контактного давления и нагрузки, приложенной к осесимметричному штампу с плоским основанием,

$$p(r, t) = \frac{ED(t)}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{R^2 - r^2}} \left( 1 + \frac{2a_0}{\pi\lambda} + \left(\frac{2a_0}{\pi\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2a_0}{\pi\lambda}\right)^3 + \left(\frac{2a_0}{\pi\lambda}\right)^4 - \right. \\ \left. - \frac{8a_1}{3\pi\lambda^3} + \frac{8a_1}{\pi\lambda^3} \frac{r^2}{R^2} \left( 1 + \frac{2a_0}{\pi\lambda} \right) \right) = \frac{E}{1-\nu^2} D(t) g_1(r, \lambda), \quad r < R,$$

$$P(t) = \frac{2ERD(t)}{1-\nu^2} \left( 1 + \frac{2a_0}{\pi\lambda} + \left(\frac{2a_0}{\pi\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2a_0}{\pi\lambda}\right)^3 + \left(\frac{2a_0}{\pi\lambda}\right)^4 + \frac{8a_1}{3\pi\lambda^3} \left( 1 + \frac{4a_0}{\pi\lambda} \right) \right) = \\ = \frac{E}{1-\nu^2} D(t) G_1(\lambda),$$

где  $a_m = \left( (-1)^m / (2m!!)^2 \right) \int_0^\infty (1-L(u)) u^{2m} du$ ,  $m=0,1,\dots$ . Заметим, что если слой жестко сцеплен с основанием, коэффициенты  $a_m$  зависят от коэффициента Пуассона через функцию  $L(u)$ . Выражения записаны с точностью до  $O(1/\lambda^5)$ . Для  $\lambda \geq 2$  погрешность записанных формул не превышает 3%. При стремлении  $\lambda$  к бесконечности, то есть когда толщина слоя значительно больше радиуса пятна контакта, записанное решение стремится к решению для случая полупространства, которое описывается формулами (2.10) и (2.11).

В случае тонкого упругого слоя для цилиндра с плоским основанием в [116,117] получены следующие выражения ( $r < R$ )

$$p(r,t) = \frac{ED(t)}{2(1-\nu^2)A_0\lambda R} \left( \operatorname{erf} \sqrt{\frac{A_1(R^2-r^2)}{2\lambda R^2}} + \sqrt{\frac{2A_0\lambda R^2}{\pi(R^2-r^2)}} e^{-A_1(R^2-r^2)/2\lambda R^2} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} D(t) g_2(r,\lambda),$$

$$P(t) = \frac{\pi ERD(t)}{2(1-\nu^2)A_0\lambda} \left( \left( 1 + \lambda \left( \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} - \frac{1}{A_1} \right) \right) \operatorname{erf} \sqrt{\frac{A_1}{2\lambda}} + \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi A_1}} e^{-F/2\lambda} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} D(t) g_2(\lambda),$$

где  $\operatorname{erf}(x)$  – функция ошибок (или интеграл вероятности), а постоянные  $A_0$  и  $A_1$  определяются функцией  $L(u)$ . В [116] указано, что погрешность этих формул для  $\lambda \leq 0.5$  не превышает 4%.

Исходя из принципа соответствия, вязкоупругое решение, основываясь на представленных асимптотических решениях, с учетом выражения для внедрения (2.21) будет иметь следующий вид ( $r < R$ )

$$p(r,t) = \frac{V}{1-\nu^2} g_{1,2}(r,\lambda) T(t,t_*) \text{ и } P(t) = \frac{V}{1-\nu^2} G_{1,2}(\lambda) T(t,t_*), \quad (2.23)$$

$$T(t,t_*) = \begin{cases} \int_0^t E(t-\tau) d\tau, & t \leq t_* \\ 0 & \\ \int_{t_*}^t E(t-\tau) d\tau, & t \geq t_* \end{cases} \quad (2.24)$$

Зависимость контактного давления и приложенной к цилиндру нагрузки от времени одинакова для тонкого и толстого слоев вследствие линейной зависимости соответствующих выражений от глубины внедрения.

Рассмотрим уже упомянутую модель стандартного вязкоупругого тела, функция релаксации которой определяется формулой (2.16). Функция  $T(t, t_*)$  для этой модели примет следующий вид

$$T(t, t_*) = \frac{T_\sigma E_0}{T_\varepsilon} \begin{cases} \left( t + (T_\varepsilon - T_\sigma) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \right) \right), & t \leq t_* \\ \left( t_* + (T_\varepsilon - T_\sigma) \left( e^{-\frac{t-t_*}{T_\sigma}} - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \right) \right), & t \geq t_* \end{cases} \quad (2.25)$$

Рассмотрим также степенную функцию релаксации следующего вида [118]

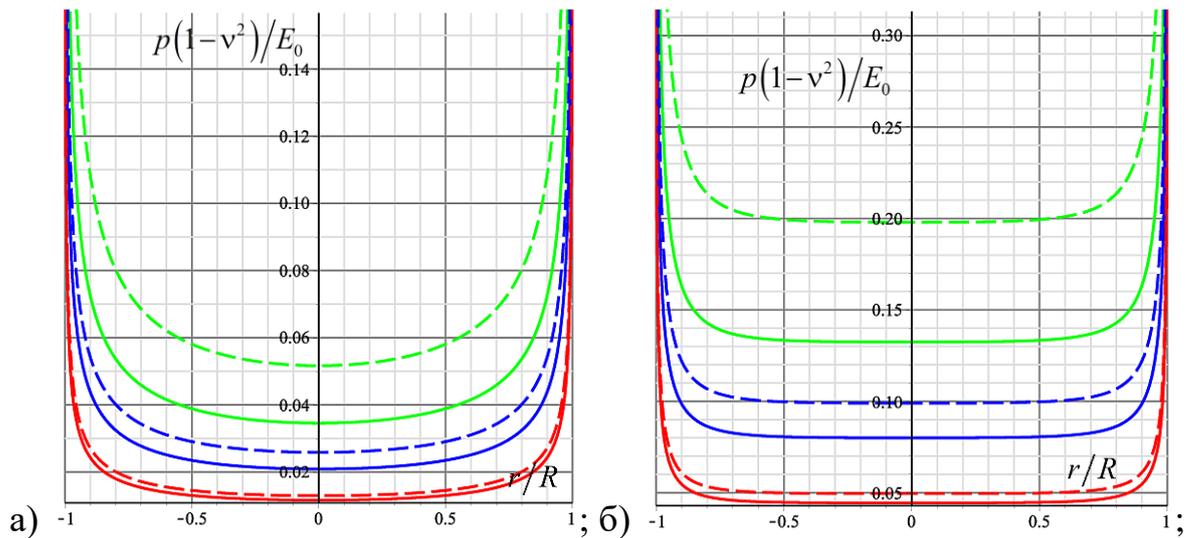
$$E(t) = \frac{A}{(\theta t)^\gamma} + E_\infty, \quad (2.26)$$

где  $A$  имеет размерность давления,  $\theta$  – размерность, обратную времени,  $\gamma \in (0, 1)$ , а  $E_\infty$  соответствует длительному модулю упругости. Подставляя (2.26) в (2.24), для функции  $T(t, t_*)$  получим

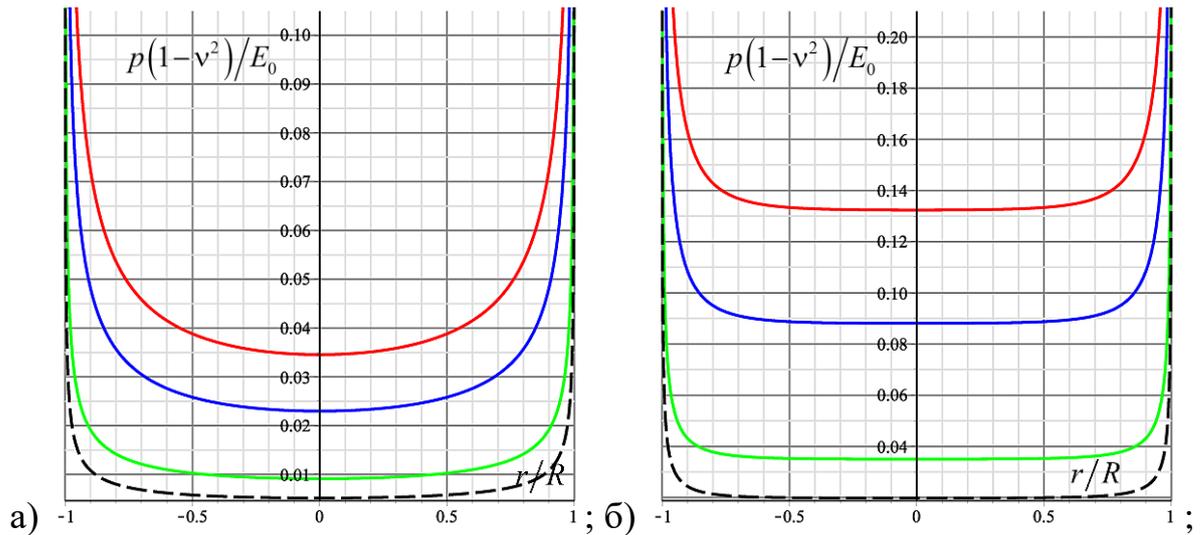
$$T(t, t_*) = E_\infty \begin{cases} \left( t + \frac{A t^{1-\gamma}}{E_\infty (1-\gamma) \theta^\gamma} \right), & t \leq t_* \\ \left( t_* + \frac{A (t^{1-\gamma} - (t-t_*)^{1-\gamma})}{E_\infty (1-\gamma) \theta^\gamma} \right), & t \geq t_* \end{cases} \quad (2.27)$$

Так как способ закрепления слоя к жесткому основанию влияет только на значения числовых параметров  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $A_0$  и  $A_1$  в асимптотических выражениях для давления и нагрузки и не влияют на зависимость этих величин от координаты  $r$  и от времени, то рассмотрим только случай отсутствия трения. На рис.15 представлено распределение контактных давлений в случае модели стандартного вязкоупругого тела до момента остановки  $t_* = T_\sigma$  для случаев толстого (а) и тонкого (б) слоев. Из результатов следует, что для вязкоупругого слоя давление

во всей области контакта в каждый момент времени меньше, чем в случае упругого слоя ( $T=1$ ) при фиксированном мгновенном модуле упругости. Также видно, что в случае тонкого слоя распределение контактного давления является более равномерным в центральной части области контакта, чем для случая толстого слоя. При этом давление в каждой точке области контакта будет меньше для толстого слоя, чем для тонкого, и наименьшее значение будет для случая вязкоупругого полупространства. На рис.16 результаты представлены уже для стадии удержания, то есть для  $t \geq t_* = T_\sigma$ . Результаты показывают, что в стадии удержания со временем давление в каждой точке области контакта уменьшается со временем, стремясь к значению, характерному упругому слою с длительным модулем упругости.

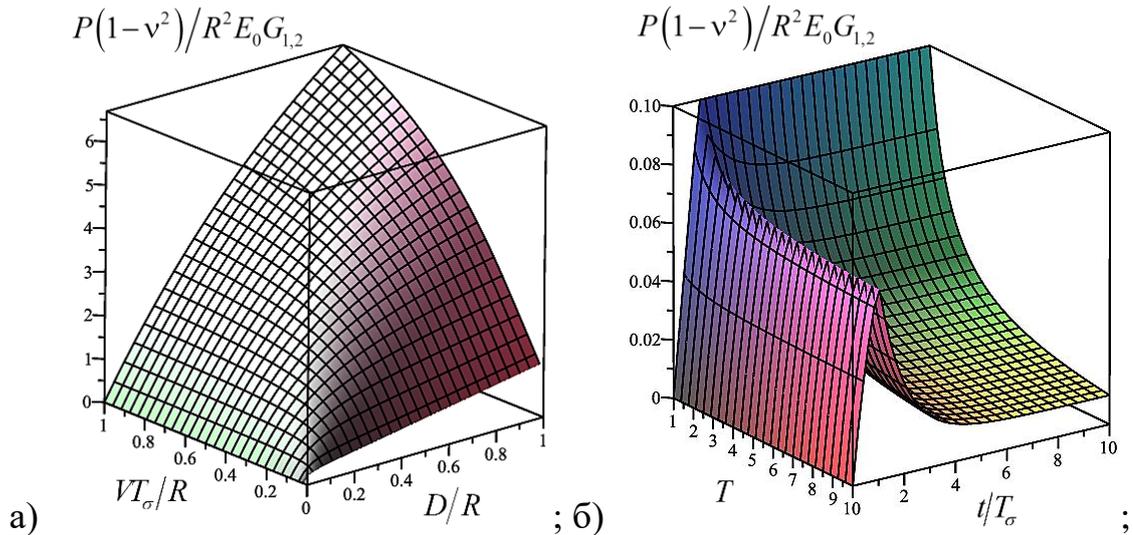


**Рисунок 15.** Распределение контактного давления в разные моменты времени стадии погружения ( $t = T_\sigma/4$  – красная линия,  $t = T_\sigma/2$  – синяя линия,  $t = T_\sigma$  – зеленая линия) при  $V = R/10T_\sigma$  и  $T = 10$  для случая толстого слоя с  $\lambda = 2$  (а) и тонкого слоя с  $\lambda = 0.5$  (б); пунктир – упругий слой



**Рисунок 16.** Распределение контактного давления в разные моменты времени стадии удержания ( $t = T_\sigma$  – красная линия,  $t = 3T_\sigma/2$  – синяя линия,  $t = 3T_\sigma$  – зеленая линия) при  $V = R/10T_\sigma$  и  $T = 10$  для случая толстого слоя с  $\lambda = 2$  (а) и тонкого слоя с  $\lambda = 0.5$  (б); пунктир – упругий слой

На рис.17(а) представлена зависимость нагрузки, приложенной к цилиндру, от глубины и скорости внедрения для модели стандартного вязкоупругого тела. Результаты показывают, что, как и в случае вязкоупругого полупространства, увеличение скорости внедрения ведет к увеличению значения нагрузки на фиксированной глубине. При этом при малых и больших значениях скоростей влияние изменения скорости погружения на зависимость нагрузки от глубины внедрения минимальна. На рис.17(б) представлен график зависимости нагрузки от времени и значения коэффициента  $T$ , характеризующего отношение времен ползучести и релаксации материала вязкоупругого слоя, для всего процесса взаимодействия. Из результатов следует, что в отличие от упругого случая ( $T = 1$ ) временная зависимость нагрузки в стадии внедрения не является линейной, а в стадии удержания не является постоянной величиной. При этом чем больше значение коэффициента  $T$  при фиксированном мгновенном модуле упругости, тем меньше значение нагрузки на максимальной глубине внедрения  $D_*$  и после длительного промежутка удержания.



**Рисунок 17.** Зависимость нагрузки от глубины при  $T = 10$  и разных скоростях внедрения (а) и от времени при  $V = R/10T_σ$  и разных коэффициентах  $T$  (б)

Анализ стадии нагружения показал, что значение коэффициента  $T$  влияет как на величину силы, приложенной к цилиндру, так и на скорость ее изменения в течение всего процесса взаимодействия. Как следует из (2.23) и (2.25), скорость изменения нагрузки в стадии внедрения удовлетворяет следующему соотношению

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{VG_{1,2}(\lambda)E_0}{(1-v^2)T} \left( 1 + (T-1)e^{-\frac{t}{T_σ}} \right),$$

из которого следует, что скорость роста нагрузки со временем падает. При этом чем больше вязкость материала слоя, тем это падение больше. В стадии удержания скорость релаксации нагрузки удовлетворяет следующему соотношению

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{VG_{1,2}(\lambda)E_0}{1-v^2} \left( 1 - \frac{1}{T} \right) e^{-\frac{t}{T_σ}} \left( 1 - e^{-\frac{t_*}{T_σ}} \right).$$

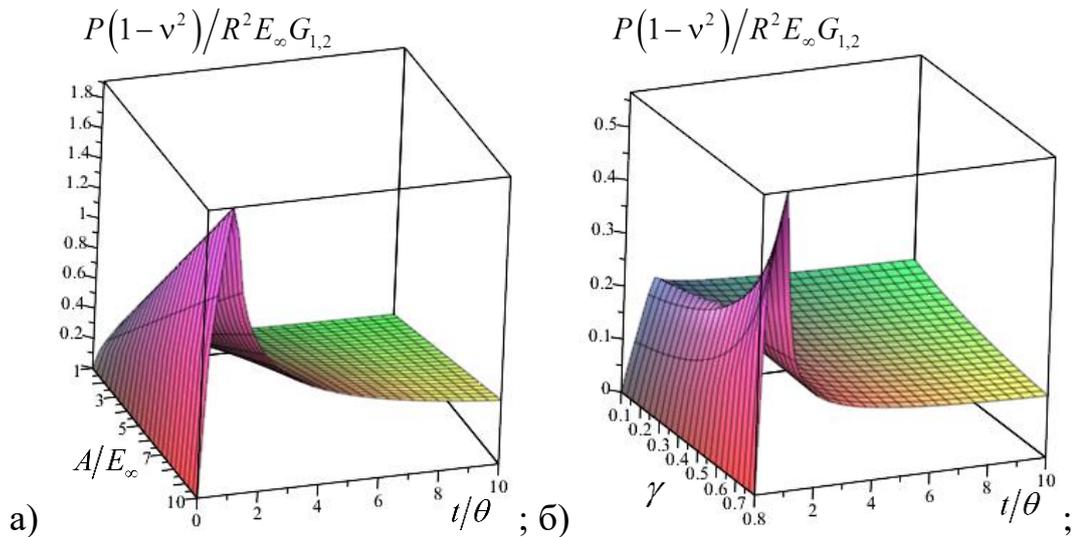
Отсюда следует, что скорость релаксации со временем уменьшается. Ее значение прямо пропорциональна параметру  $(1-1/T)$ , характеризующему вязкость материала слоя. Таким образом, поведение функции  $P(t)$  на стадии удержания позволяет сделать выводы о релаксационных свойствах материала. Также экспериментальные данные, полученные на этой стадии процесса, позволяют

определить длительный модуль упругости материала по значению горизонтальной асимптоты, соответствующей упругому решению с длительным модулем упругости.

На рис.18 исследование зависимости нагрузки от времени представлено для случая степенной функции релаксации с различными значениями параметров  $A$  (а) и  $\gamma$  (б). Влияние изменения скорости нагружения на зависимость  $P(t)$  будет аналогично модели стандартного вязкоупругого тела. Результаты показывают, что для рассматриваемой модели характерна высокая скорость роста нагрузки в начальный период внедрения цилиндра и высокая скорость релаксации контактных давлений в начале удержания цилиндра на заданной глубине. Эта скорость увеличивается с увеличением параметра  $\gamma$ . Этот вывод вытекает и из анализа производной функции изменения нагрузки со временем на разных стадиях процесса внедрения, а именно

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{VG_{1,2}(\lambda)}{1-\nu^2} \begin{cases} \left( \frac{A}{(\theta t)^\gamma} + E_\infty \right), & t \leq t_* \\ \frac{A}{\theta^\gamma} \left( \frac{1}{t^\gamma} - \frac{1}{(t-t_*)^\gamma} \right), & t > t_* \end{cases}$$

В стадии удержания скорость релаксации при  $t \rightarrow t_* + 0$ , в отличие от модели стандартного вязкоупругого тела, стремится к бесконечности. Горизонтальной асимптотой при больших временах удержания является значение, характерное упругому слою с длительным модулем упругости  $E_\infty$ .



**Рисунок 18.** Зависимость нагрузки от времени при  $\gamma = 0.5$  и разных коэффициентах  $A$  (а); при  $A = E_\infty$  и разных показателях степени  $\gamma$  (б);  $V = R/10\theta$

## 2.4. Исследование упрощенных одномерных моделей

В первом приближении для описания поведения вязкоупругого основания можно использовать упрощенные одномерные модели. Рассмотрим одну из таких моделей, а именно стержневую модель стандартного вязкоупругого тела [44]. При этом основание моделируется не как сплошная среда, а как слой толщины  $h$ , состоящий из не взаимодействующих пружинно-демпферных блоков. Определяющие соотношения, связывающие вертикальные смещения границы слоя и контактные давления, для этой модели имеет вид

$$p(r,t) + T_\sigma \frac{\partial p(r,t)}{\partial t} = \frac{T_\sigma E_0}{T_\varepsilon h} \left( u_z(r,t) + T_\varepsilon \frac{\partial u_z(r,t)}{\partial t} \right). \quad (2.28)$$

Для цилиндра с плоским основанием в случае внедрения его с постоянной скоростью  $V$  получим следующие выражения для давления и прикладываемой нагрузки

$$p(r,t) = p(t) = \frac{T_\sigma E_0}{T_\varepsilon h} \left( t + (T_\varepsilon - T_\sigma) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \right) \right), \quad r \leq R,$$

$$P(t) = \frac{\pi T_\sigma E_0 V R^2}{T_\varepsilon h} \left( t + (T_\varepsilon - T_\sigma) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \right) \right). \quad (2.29)$$

Отсюда следует, что в случае цилиндра с плоским основанием одномерные модели дают для распределения контактного давления равномерный результат. Выражение же для нагрузки (2.27) совпадает с формулой (2.18) для полупространства, если заменить  $\pi R/h$  на  $2/(1-\nu^2)$ , и с формулой (2.23) для слоя, если ту же величину заменить на  $Q_{1,2}(\lambda)/R(1-\nu^2)$ .

Для цилиндра со сферическим основанием ( $f(r) = Ar^2$ ) получим следующий результат

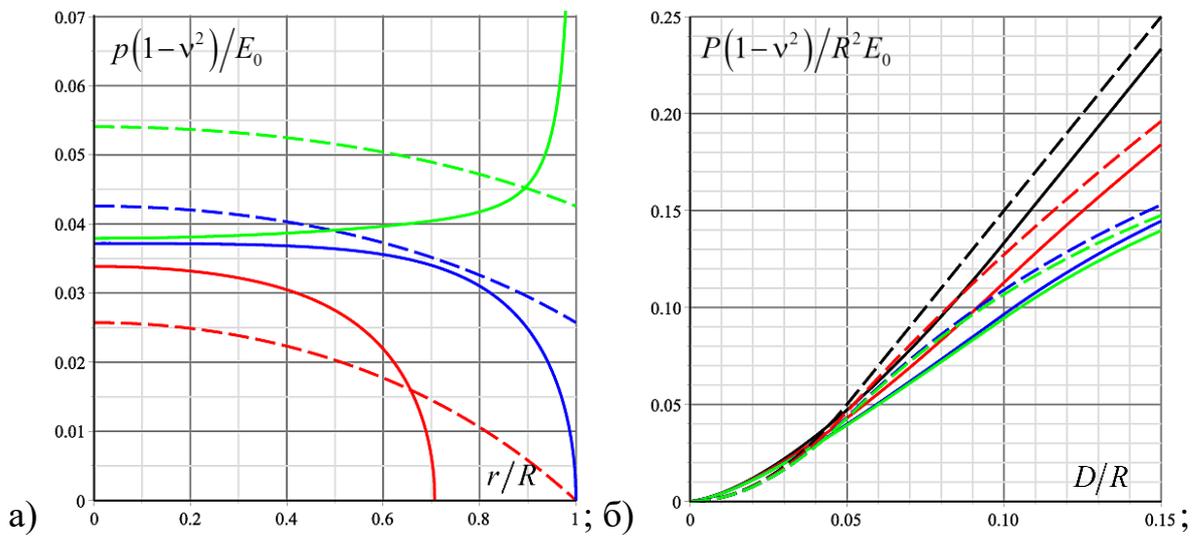
$$p(r,t) = \frac{T_\sigma E_0}{T_\varepsilon h} \left( V \left( t - (T_\sigma - T_\varepsilon) \left( 1 - e^{-\frac{Ar^2 - t}{VT_\sigma - T_\sigma}} \right) \right) - Ar^2 \right), \quad r \leq a(t) \leq R, \quad (2.30)$$

$$P(t) = \frac{\pi T_\sigma E_0}{T_\varepsilon h} \begin{cases} \frac{V^2}{2A} \left( t^2 - 2(T_\sigma - T_\varepsilon) \left( t - T_\sigma \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \right) \right) \right), & t \leq t_* \\ \left( R^2 V (t - T_\sigma + T_\varepsilon) + \frac{V^2 T_\sigma}{A} (T_\sigma - T_\varepsilon) e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \left( e^{\frac{AR^2}{VT_\sigma}} - 1 \right) - \frac{AR^4}{2} \right), & t \geq t_* \end{cases} \quad (2.31)$$

При этом радиус области контакта до момента вступления в контакт с основанием угловых точек будет  $a(t) = \sqrt{Vt/A}$ . Откуда для момента вступления угловых точек получим выражение  $t_* = AR^2/V$ .

Сравним результаты для сферического основания цилиндра в случае полупространства и одномерной модели, взяв для нее  $h = \pi R(1-\nu^2)/2$ . На рис.19(a) представлено распределение контактного давления в разные моменты времени для двух моделей: полупространство и стерженьковая модель. Из результатов следует, что одномерная модель основания до момента вступления в контакт угловых точек дает завышенные значения радиуса пятна контакта и заниженное значение давления в центральной части контактной области. Затем, когда область контакта постоянна, значение контактного давления в центральной

части в случае одномерных моделей наоборот, больше значений, характерных модели вязкоупругого полупространства. При этом также одномерная модель дает ограниченные значения давлений на границе контактной области. На рис.19(б) представлено сравнение нагрузок, полученных для двух моделей, в зависимости от глубины внедрения для разных значений коэффициента  $T$ . Результаты показывают, что одномерные модели в стадии возрастающей области контакта дают заниженные результаты, а в стадии постоянной контактной области – завышенные.



**Рисунок 19.** Распределение контактного давления в разные моменты времени ( $t = T_\sigma/2$  – красная линия,  $t = T_\sigma$  – синяя линия,  $t = 3T_\sigma/2$  – зеленая линия) при  $T = 10$  (а) и зависимость нагрузки от глубины внедрения при разных коэффициентах  $T$  ( $T = 1$  – черная линия,  $T = 2$  – красная линия,  $T = 10$  – синяя линия,  $T = 20$  – зеленая линия) (б);  $V = R/10T_\sigma$  и  $A = 0.05R^{n-1}$ ; сплошная линия – модель полупространства, пунктирная линия – одномерная модель

## 2.5. Выводы

В данной главе рассмотрены задачи о внедрении с постоянной скоростью в вязкоупругое основание жесткого цилиндра с различной формой торцевой поверхности в отсутствие трения. Исследовано два вида основания: вязкоупругое полупространство и вязкоупругий слой, лежащий на жестком основании. Для

каждого случая получены аналитические зависимости приложенной к цилиндру нагрузки от времени (или глубины внедрения), а также выражения, позволяющие получить распределение контактных давлений под поверхностью цилиндра в каждый момент времени. Для каждой модели исследовано влияние скорости внедрения и вязкоупругих свойств основания на характеристики контактного взаимодействия.

В случае вязкоупругого полупространства рассмотрены цилиндры, контактирующая поверхность которых имеет форму, описываемую степенной функцией радиуса. При этом процесс внедрения разделяется на два этапа: с возрастающей областью контакта и с постоянной, когда в контакт с полупространством вступили угловые точки. Для каждого этапа процесса построены графики распределения контактного давления в различные моменты времени. Произведено сравнение результатов для различных форм. Показано, что форма торцевой поверхности существенно влияет на вид распределения лишь на первом этапе. Также представлены зависимости приложенной к цилиндру нагрузки от глубины внедрения. Получено, что увеличение показателя степени функции, описывающей форму торцевой поверхности цилиндра, ведет к увеличению величины приложенной нагрузки при фиксированной глубине внедрения. Максимальное же значение нагрузки наблюдается для цилиндра с плоским основанием.

Для вязкоупругого слоя рассмотрен цилиндр с плоским основанием, но в процесс к стадии внедрения добавляется стадия удержания цилиндра на заданной глубине. Рассмотрены два приближения: толстого и тонкого слоя. Выражения для контактных давлений и нагрузки в двух этих случаях будут иметь одинаковую зависимость от времени вследствие линейности упругого решения от глубины внедрения. Это позволяет выделить функцию времени отдельным множителем. Для каждого случая представлено распределение контактного давления в разные моменты времени, а также зависимости нагрузки от времени для каждой стадии процесса. Показано, что результаты, полученные на стадии удержания, позволяют

определить длительный модуль упругости вязкоупругого слоя, что можно использовать в экспериментах.

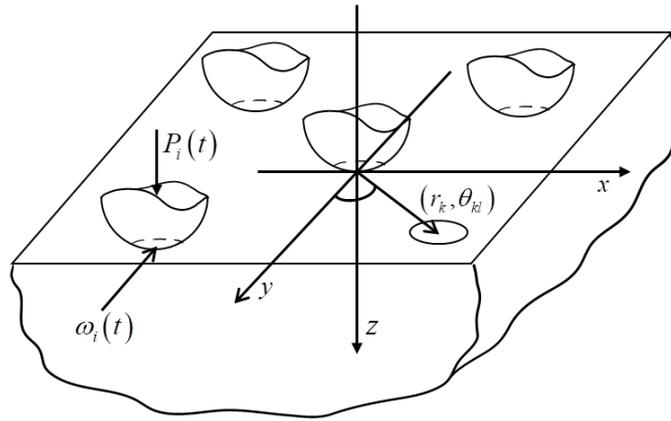
Также представлены результаты, полученные с использованием одномерных вязкоупругих моделей. Показано, что в случае цилиндра с плоским основанием стерженьковые модели не дают информации о распределении контактного давления. Однако они могут быть использованы для исследования зависимости приложенной к цилиндру нагрузки от времени, так как в этом случае можно получить зависимости, соответствующие полупространству и слою, подбором коэффициентов. Произведено также сравнение в случае цилиндра со сферическим основанием. Получено, что для нагрузки до момента вступления в контакт с основанием угловых точек одномерные модели дают заниженный результат, а после – завышенный.

### Глава 3: Моделирование внедрения периодической системы штампов в упругое и вязкоупругое полупространство

В данной главе рассматриваются задачи о внедрении в упругое и вязкоупругое полупространство периодической системы штампов. Рассмотрены случаи одноуровневой и двухуровневой систем. Учет взаимного влияния пятен контакта приводит к изменению распределения контактных давлений и размеров контактных областей. Все контактные характеристики в этом случае будут зависеть от плотности расположения штампов в системе, а в случае двухуровневой модели также и от высотной разницы уровней. При этом опять же вследствие наличия у полупространства вязкоупругих свойств приводит к появлению зависимости напряженно-деформированного состояния от времени. Далее представлено исследование влияния геометрических параметров системы штампов и вязкоупругих свойств материала полупространства на характеристики контактного взаимодействия.

#### 3.1. Постановка задачи

Рассматривается внедрение периодической системы осесимметричных штампов в полупространство под действием заданного номинального (осредненного) давления  $\bar{p}(t)$  (рис.20). Зафиксируем произвольный штамп и свяжем с ним цилиндрическую систему координат так, чтобы ось  $Oz$  совпадала с осью симметрии штампа, а плоскость  $z=0$  – с недеформированной поверхностью полупространства. В данной системе координат форма контактирующей поверхности штампа описывается функцией  $f(r)$ . Считается, что все выступы имеют одинаковую форму. Область контакта при этом будет состоять из отдельных пятен контакта  $\omega_i(t)$ . Силой трения между штампами и полупространством пренебрегаем.



**Рисунок 20.** Схема контакта периодической системы штампов с полупространством

Для описания механического поведения материала полупространства используется линейная теория. В случае вязкоупругого полупространства также предполагается, что коэффициент Пуассона материала  $\nu$  не зависит от времени.

Граничные условия задачи на поверхности полупространства имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \tau_{zr}(r, \theta, t) = \tau_{z\theta}(r, \theta, t) = 0, \quad (r, \theta) \in \Omega \\ u_z(r, \theta, t) = D(t) - f_i(r, \theta)H(t), \quad (r, \theta) \in \omega_i(t) \\ \sigma_z(r, \theta, t) = -p(r, \theta, t) = 0, \quad (r, \theta) \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $\Omega$  – вся поверхность полупространства,  $u_z(r, \theta, t)$  – вертикальное смещение границы вязкоупругого основания,  $\sigma_z(r, \theta, t)$ ,  $\tau_{zr}(r, \theta, t)$  и  $\tau_{z\theta}(r, \theta, t)$  – нормальные и касательные граничные напряжения,  $p(r, \theta, t)$  – контактное давление,  $D(t)$  – величина внедрения, а  $H(t)$  – функция Хевисайда. Функция  $f_i(r, \theta)$  в системе координат, связанной с  $i^{\text{blm}}$  штампом равна  $f(r)$ . Считаем, что до начала взаимодействия, то есть при  $t < 0$ , полупространство было не напряжено и находилось в состоянии покоя.

К граничным условиям (3.1) добавляется также условия равновесия для каждого штампа, определяющие величину нагрузки  $P_i(t)$ , приложенной к ним. В случае одноуровневой задачи в силу равномерного распределения штампов все

пятна контакта  $\omega_i(t)$  будут иметь одинаковую форму, и нагрузки  $P_i(t)$  также будут одинаковые. Тогда условие равновесия для всех штампов будет иметь вид

$$P(t) = \iint_{\omega(t)} p(r, \theta, t) dr d\theta. \quad (3.2)$$

В случае двухуровневой системы вместо одного уравнения (3.2) будем иметь два, записанных для каждого уровня. Также можно записать связь нагрузки  $P(t)$ , приложенной к каждому штампу, и номинального давления, а именно

$$\bar{p}(t) = \bar{N}P(t), \quad (3.3)$$

где  $\bar{N}$  – среднее число пятен контакта на единицу площади. Для двухуровневой системы в правой части равенства (3.3) будет стоять сумма двух слагаемых, отвечающих каждому уровню.

### 3.2. Моделирование внедрения одноуровневой системы штампов в упругое полупространство и анализ влияния формы штампов на контактные характеристики

Рассмотрим сначала задачу о внедрении периодической системы штампов в упругое полупространство. В этом случае переменную  $t$ , входящую в определяющие соотношения, можно рассматривать как параметр и не указывать в явном виде. Для одноуровневой системы штампов, в предположении, что отдельное пятно контакта представляет собой круг радиуса  $a$ , в [3] показано, что контактное давление  $p(r, \theta)$  под отдельным штампом определяется решением следующего интегрального уравнения

$$p(r, \theta) - \int_0^a \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=1}^{\infty} K_i(r', \theta', r, \theta) \right) p(r', \theta') r' dr' d\theta' = G(r), \quad (3.4)$$

где общий член бесконечного ряда имеет вид

$$K_i(r', \theta', r, \theta) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{r - a^2}} \sum_{j=1}^{m_i} (K_{ij}(r', \theta', a, \theta) - K_{ij}(r', \theta', r, \theta)), \quad (3.5)$$

$$K_{ij}(r', \theta', r, \theta) = \frac{\sqrt{r_i^2 + r'^2 + 2r_i r' \cos(\theta_{ij} - \theta) - a^2}}{(r \cos \theta - r' \cos \theta' - r_i \cos \theta_{ij})^2 + (r \sin \theta - r' \sin \theta' - r_i \sin \theta_{ij})^2}.$$

Здесь  $m_i$  отвечает числу штампов, удаленных на одинаковое расстояние  $r_i$  от фиксированного. Правая же часть уравнения (3.4) представляет собой давление под единичным штампом и имеет вид

$$G(r) = \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \int_0^a \Delta f(r') \left( \int_0^{2\pi} \frac{2r'}{R(r, r', \theta')} \arctan \frac{\sqrt{a^2 - r^2} \sqrt{a^2 - r'^2}}{aR(r, r', \theta')} d\theta' \right) dr', \quad (3.6)$$

$$R(r, r', \theta') = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta' + r'^2},$$

где  $E$  и  $\nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона полупространства соответственно. Явный вид функции  $G(r)$  для различных форм штампа дан во второй главе.

Интегрально уравнение (3.4) с необходимой степенью точности можно решить с применением принципа локализации. В [3] показано, что замена суммирования в (3.4) при  $i > n$  интегрированием по области, равной внешности круга радиуса  $A_n$ , эквивалентна замене действия штампов вне области  $r > A_n$  на действие номинального давления  $\bar{p}$  в этой области. Необходимая точность достигается увеличением числа  $n$ . Радиус круга  $A_n$ , исходя из (3.3), определяется следующим образом

$$A_n^2 = \frac{1}{\pi \bar{N}} \left( 1 + \sum_{i=1}^n m_i \right). \quad (3.7)$$

С применением принципа локализации уравнение (3.4) примет следующий вид

$$p(r, \theta) - \int_0^a \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^n K_i(r', \theta', r, \theta) p(r', \theta') r' dr' d\theta' = G(r) + \frac{2}{\pi} \bar{N} P \arctan \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{A_n^2 - a^2}}. \quad (3.8)$$

Так как упругое полупространство загружено по всей области, то смещение его границы будет бесконечной величиной. Следовательно, и для глубины внедрения  $D$  мы получим бесконечное значение. Поэтому в периодических задачах рассматривается функция дополнительного смещения  $d$ , равная разнице

величины  $D$  и смещению границы полупространства, всюду нагруженного номинальным давлением. Тогда, исходя из принципа локализации, для функции  $d$  получим следующее выражение

$$d = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( \int_0^a \int_0^{2\pi} p(r, \theta) dr d\theta - 2\pi \bar{N} P A_n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{p(r, \theta) r dr d\theta}{R^2(r, r_i, \theta - \theta_{ij})} \right). \quad (3.9)$$

Рассмотрим одноуровневую систему штампов, контактирующая поверхность которой описывается функцией  $f(r) = Cr^s/R_a^{s-1}$ ,  $s=1,2,\dots$ , где  $R_a$  – величина, характеризующая размер штампа,  $C$  – безразмерная константа. Для простейшего случая, когда при рассмотрении единичного штампа действие всех остальных заменяется номинальным давлением, исходя из (3.8) и (3.9), с учетом (3.3) получим следующие выражения

$$p(r) = \frac{EC}{\pi(1-\nu^2)R_a^{s-1}} q_{1,2}(r) + \frac{2P}{\pi^2 A^2} \arctan \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{A^2 - a^2}}, \quad (3.10)$$

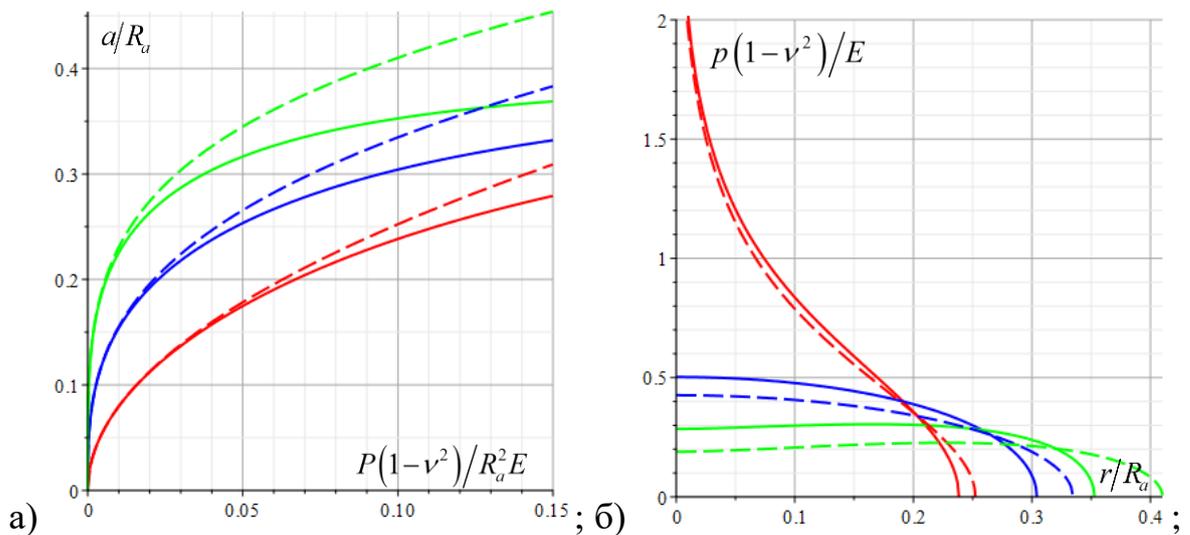
$$d = 2^{s-2} s \frac{\Gamma^2(s/2)}{\Gamma(s)} \frac{Ca^s}{R_a^{s-2}} - \frac{2(1-\nu^2)\bar{P}}{E} \sqrt{A^2 - a^2}, \quad (3.11)$$

где  $A \equiv A_0$ ,  $\Gamma(x)$  – гамма-функция, а функции  $q_{1,2}(r)$  в зависимости от числа  $n$  (четное или нечетное) определяются формулами (2.5) и (2.6) второй главы. Квадрат радиус  $A^2$ , исходя из (3.7), равен  $1/\pi\bar{N}$ . Связь радиуса отдельного пятна контакта с приложенным к системе номинальным давлением, исходя из (3.2) и (3.3), будет следующая

$$\frac{a^{s+1}}{\arccos(a/A) + (a/A)\sqrt{1-(a/A)^2}} = \frac{(s+1)\Gamma(s)(1-\nu^2)R_a^{s-1}P}{2^{s-2}s^2\pi\Gamma^2(s/2)CE}. \quad (3.12)$$

Из анализа полученных результатов следует, что характеристики контактного взаимодействия помимо нагрузки, приложенной к системе, зависят также от плотности расположения штампов, то есть величины  $\bar{N}$ . В [3] даны численные результаты для сферических штампов, расположенных в узлах гексагональной решетки с шагом  $l$ . При этом также представлены результаты не

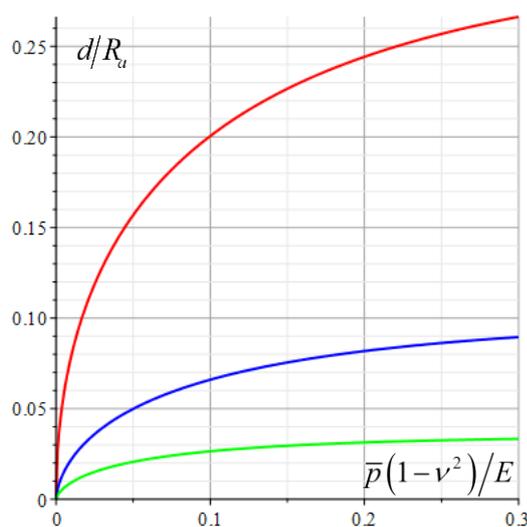
только для простейшего случая применения принципа локализации с  $n=0$ , но и для  $n=1$  и  $n=2$ . На рис.21 представлено исследование влияния формы штампов на радиус отдельного пятна контакта и распределение контактного давления также для случая гексагональной решетки с фиксированным шагом. Нелинейное уравнение (3.12) решалась численно, а именно методом секущих. В этом случае связь радиуса круга  $A$  с шагом решетки  $l$  будет  $A^2 = \sqrt{3}l^2/2\pi$ . На графиках также приведены результаты для случая внедрения в полупространство единичного штампа (пунктирные линии). Из результатов следует, что с увеличением показателя степени  $s$  радиус отдельного пятна контакта возрастает, а давление в центральной части контактной области уменьшается. Сравнение с результатами, полученными при решении задачи о внедрении в упругое полупространство единичного штампа, показало, что учет взаимного влияния пятен контакта уменьшает контактный радиус и увеличивает давление в центральной части области контакта.



**Рисунок 21.** Зависимость радиуса отдельного пятна контакта от нагрузки, приложенной к единичному штампу (а) и распределение контактного давления при  $P = 0.1ER_a^2/(1-\nu^2)$  (б) для системы штампов с  $C=1$  и  $s=1$  (красная линия),  $s=2$  (синяя линия),  $s=3$  (зеленая линия);  $l = 0.75R_a$

Интерес представляет также функция дополнительного смещения  $d$  и ее зависимость от величины номинального давления. На рис.22 представлены

графики зависимости функции  $d$  от номинального давления для разных форм штампов. Из результатов следует, что увеличение показателя степени функции, описывающей форму контактной поверхности штампов, ведет к уменьшению величины дополнительного смещения. Исходя из результатов, представленных в [3], к такому же результату ведет и уменьшение шага гексагональной решетки. Таким образом, можно сделать вывод, что чем больше плотность контакта штампов с полупространством, тем меньше по величине будет дополнительное смещение.



**Рисунок 22.** Зависимость функции дополнительного смещения от номинального давления для системы штампов с  $C=1$  и  $s=1$  (красная линия),  $s=2$  (синяя линия),  $s=3$  (зеленая линия) и  $l=0.75R_a$

Стоит отметить, что исследование влияние формы штампов периодической системы на контактные характеристики с учетом адгезии выполнено в работе [119], но только для четной степени функции  $f(r)$ , то есть для  $s=2m$ ,  $m=1,2,\dots$

### 3.3. Решение задачи о внедрении двухуровневой системы штампов в упругое полупространство

Рассмотрим внедрение в упругое полупространство двухуровневую периодическую систему штампов с заданной разницей высот  $\Delta h$ . Для определенности возьмем систему, где на каждом уровне штампы расположены в

узлах квадратичной решетки с шагом  $l$ , то есть в вершинах квадрата. Также рассмотрим конкретную форму штампов, а именно сферическую. Тогда  $f(r) = r^2/2R$ , где  $R$  – это радиус кривизны. Будем считать, что область контакта штампа каждого  $i^{020}$  уровня ( $i = 1, 2$ ) с полупространством представляет собой круг радиуса  $a_i$ , что накладывает определенные ограничения на плотность расположения инденторов.

Для решения поставленной задачи также воспользуемся методом локализации. Рассмотрим сначала фиксированный штамп первого уровня. Исходя из метода локализации, учтем влияние только близ лежащих четырех штампов второго уровня, расположенных на расстоянии  $B = l/\sqrt{2}$ , а действие всех остальных штампов обоих уровней заменим действием номинального давления  $\bar{p}$ , равномерно распределенного вне круга радиуса  $A_1$ , зависящего от плотности расположения штампов в системе. Исходя из (3.3), в случае квадратичной решетки с  $\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = 1/l^2$  для номинального давления получим следующее выражение

$$\bar{p} = \frac{1}{l^2}(P_1 + P_2), \quad (3.13)$$

где  $P_i$  – нагрузка, приложенная к единичному штампу  $i^{020}$  уровня. Так как в рассмотрение берется реальное распределение контактных давлений лишь под фиксированным штампом первого уровня и под четырьмя ближайшими к нему штампами второго уровня, то для нахождения радиуса  $A_1$  получим следующее условие

$$\pi A_1^2 \bar{p} = P_1 + 4P_2. \quad (3.14)$$

Для упрощения расчетов заменим также действие контактного давления под рассматриваемыми четырьмя штампами второго уровня на действие нагрузки интенсивности  $4P_2$ , распределенной по окружности радиуса  $B$ , а именно  $p(r, \theta) = 2P_2 \delta(r - B)/\pi r$ ,  $\delta(r)$  – дельта-функция Дирака. Тогда для контактного

давления  $p_1(r, \theta)$  под фиксированным штампом первого уровня, по аналогии с (3.8), получим следующее выражение

$$p_1(r, \theta) = p_1(r) = \frac{2E\sqrt{a_1^2 - r^2}}{(1-\nu^2)\pi R} + \frac{4P_2}{\pi^2(B^2 - r^2)} \sqrt{\frac{a_1^2 - r^2}{B^2 - a_1^2}} + \frac{2\bar{p}}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{a_1^2 - r^2}}{\sqrt{A_1^2 - a_1^2}}\right), \quad r \leq a_1. \quad (3.15)$$

Для получения второго слагаемого правой части использовалось свойство дельта-функции, а также значение следующего интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{C_1 - C_2 \cos \gamma} = \frac{2\pi}{\sqrt{C_1^2 - C_2^2}}, \quad C_1 > |C_2|.$$

Зафиксируем теперь произвольный штамп второго уровня. Для расчета распределения давления  $p_2(r, \theta)$  под этим штампом из (3.8) получим выражение, аналогичное (3.15), а именно

$$p_2(r) = \frac{2E\sqrt{a_2^2 - r^2}}{(1-\nu^2)\pi R} + \frac{4P_1}{\pi^2(B^2 - r^2)} \sqrt{\frac{a_2^2 - r^2}{B^2 - a_2^2}} + \frac{2\bar{p}}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{a_2^2 - r^2}}{\sqrt{A_2^2 - a_2^2}}\right), \quad r \leq a_2. \quad (3.16)$$

Для радиуса круга  $A_2$ , аналогично первому уровню, получим

$$\pi A_2^2 \bar{p} = 4P_1 + P_2. \quad (3.17)$$

К уравнениям (3.13)-(3.17), исходя из (3.2), добавляются также два уравнения равновесия для каждого штампа  $i^{200}$  уровня ( $i = 1, 2$ )

$$P_i = 2\pi \int_0^{a_i} p_i(r) r dr. \quad (3.18)$$

Мы получили семь уравнений (3.13)-(3.18), связывающих восемь неизвестных  $p_1(r)$ ,  $p_2(r)$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $A_1$  и  $A_2$ . Для замыкания системы необходимо добавить уравнение, определяющее разницу высот штампов первого и второго уровней. Для этого найдем сначала вертикальные смещения центральных точек областей контакта с полупространством штампов первого  $u_z^1(0)$  и второго  $u_z^2(0)$  уровней. Исходя из выражения для вертикальных

смещений границы упругого полупространства под действием заданного давления [109], получим следующее выражение для центральной точки области контакта с полупространством штампа  $i^{o2o}$  уровня

$$u_z^i(0) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( \int_0^{a_i} \int_0^{2\pi} p_i(r, \theta) dr d\theta + \frac{4P_j}{B} + 2\pi \bar{p} (A_\infty - A_i) \right), \quad j \neq i.$$

Постоянная  $A_\infty$ , входящая в это выражение, определяет вертикальное смещение границы полупространства от действия на него по всей границе постоянного номинального давления  $\bar{p}$  и является бесконечной величиной. Для разницы перемещений, определяемой разницей высот штампов  $\Delta h$ , получим ограниченную величину, а именно

$$\begin{aligned} \Delta h = u_z^1(0) - u_z^2(0) = \\ = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( 2\pi \int_0^{a_1} p_1(r) dr - \frac{4}{B} (P_1 - P_2) - 2\pi \bar{p} (A_1 - A_2) - 2\pi \int_0^{a_2} p_2(r) dr \right). \end{aligned}$$

Подставив в полученное равенство выражения для контактных давлений (3.15) и (3.16), окончательно получим следующую формулу для разницы высот  $\Delta h$

$$\begin{aligned} \Delta h = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( \frac{E\pi}{(1-\nu^2)R} (a_1^2 - a_2^2) - \right. \\ \left. - \left( \frac{4P_1}{\sqrt{B^2 - a_2^2}} - \frac{4P_2}{\sqrt{B^2 - a_1^2}} \right) - 2\pi \bar{p} \left( \sqrt{A_1^2 - a_1^2} - \sqrt{A_2^2 - a_2^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Упростим полученную систему уравнений, исключив из нее контактные давления  $p_1(r)$  и  $p_2(r)$ . Для этого проинтегрируем выражения (3.15) и (3.16) по соответствующим областям контакта. С учетом условий равновесия (3.18), получим для нагрузки на штамп  $i^{o2o}$  уровня ( $i = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} P_i = \frac{4Ea_i^3}{3(1-\nu^2)R} + \frac{8P_j}{\pi} \left( \frac{a_i}{\sqrt{B^2 - a_i^2}} - \arcsin\left(\frac{a_i}{B}\right) \right) + \\ + 2\bar{p} \left( A_i^2 \arcsin\left(\frac{a_i}{A_i}\right) - a_i \sqrt{A_i^2 - a_i^2} \right), \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В итоге имеем следующие шесть неизвестных величин  $P_1, P_2, a_1, a_2, A_1, A_2$  и для их определения имеем систему, состоящую из шести уравнений: (3.13), (3.14), (3.17), (3.19) и два уравнения (3.20). Решив данную систему, используя выражения (3.15) и (3.16), затем можно определить распределение контактных давлений под штампами каждого уровня.

Таким образом, зная геометрические параметры системы и приложенное к ней номинальное давление можно определить нагрузку, действующую на штампы каждого уровня, размер пятен контакта и распределение контактных давлений. Анализ полученных уравнений показывает, что решение поставленной задачи помимо величины номинального давления  $\bar{p}$  зависит также от плотности расположения штампов (шага решетки  $l$ ) и их высотного распределения (разницы высот  $\Delta h$ ).

Если же не учитывать взаимное влияние штампов, а исходить из теории Герца, то неизвестные величины  $P_1, P_2, a_1$  и  $a_2$  будут определяться следующими четырьмя уравнениями

$$l^2 \bar{p} = P_1 + P_2, \quad P_1 = \frac{4Ea_1^3}{3(1-\nu^2)R}, \quad P_2 = \frac{4Ea_2^3}{3(1-\nu^2)R} \quad \text{и} \quad h = \frac{a_1^2 - a_2^2}{R}. \quad (3.21)$$

Отметим, что в данном случае рассмотрена двухуровневая система сферических штампов, расположенных в узлах квадратичной решетки. Но аналогичным способом можно исследовать любую разноуровневую периодическую систему осесимметричных штампов. В [3] даны общие выражения и результаты для трехуровневой системы штампов, расположенной в узлах гексагональной решетки, но только для распределения контактного давления под штампами каждого уровня для одного значения общей нагрузки.

В зависимости от величины номинального давления, приложенной системы, в контакте с полупространством находятся штампы либо только одно, либо двух уровней. Введем величину критического номинального давления  $\bar{p}_*$  так, что при  $\bar{p} < \bar{p}_*$  в контакте с полупространством будет только первый уровень штампов, а при  $\bar{p} \geq \bar{p}_*$  будет наблюдаться двухуровневый контакт. Найдем величину  $\bar{p}_*$ .

Определим характеристики напряженно-деформированного состояния полупространства, когда с ним в контакте находятся штампы только первого уровня, то есть при  $\bar{p} < \bar{p}_*$ . Контактное давление  $p_1(r)$  под фиксированным штампом первого уровня в этом случае определяется формулой (3.10), где  $s = 2$ ,  $B = 1/2R$ ,  $A_1 = l/\sqrt{\pi}$ , а  $\bar{p} = P_1/l^2$ . Связь радиуса отдельного пятна контакта  $a_1$  с нагрузкой  $P_1$  находится из решения уравнения (3.12). Вертикальные смещения  $u_z^1(r)$  границы полупространства в центральной точке области контакта будут определяться следующим выражением

$$\frac{a^{s+1}}{\arccos(a/A) + (a/A)\sqrt{1-(a/A)^2}} = \frac{(s+1)\Gamma(s)(1-\nu^2)R_a^{s-1}P}{2^{s-2}s^2\pi^2(s/2)CE}. \quad (3.22)$$

Чтобы найти значение  $\bar{p}_*$ , при котором в контакт с полупространством вступят штампы второго уровня, найдем упругие смещения  $u_z(r)$  границы полупространства в центре окружности радиуса  $B$ , на которую действует нагрузка интенсивности  $4P_1$ , моделирующая четыре штампа первого уровня, а вне круга радиуса  $A > l/\sqrt{2}$  действует номинальное давление  $\bar{p}$ , моделирующее действие всех остальных штампов первого уровня. Для радиуса круга  $A$ , внутри которого расположено четыре штампа первого уровня, исходя из условия равновесия, имеем формулу  $A = 2l/\sqrt{\pi} = 2A_1$ . Поместим начало системы координат в центр окружности и обозначим вертикальные смещения  $u_z(r)$  в этой точке за  $h_0$ . Тогда для  $h_0$  получим

$$h_0 = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( \frac{4}{B} P_1 + 2\pi \bar{p} (A_\infty - A) \right).$$

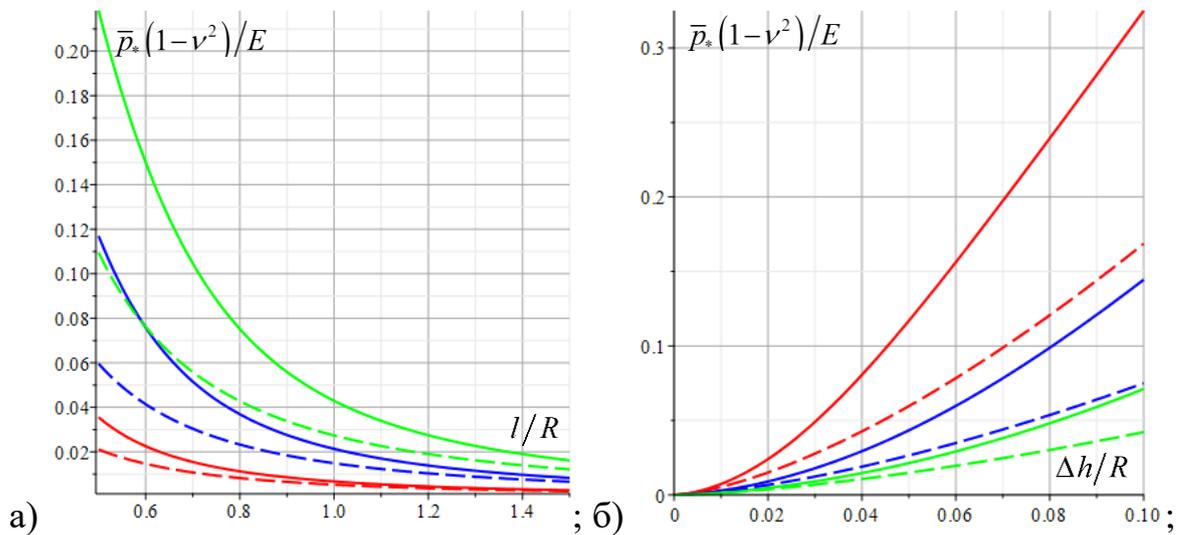
Вычитая из (3.22) выражение для  $h_0$  и приравнявая эту разность к  $\Delta h$ , получим уравнение, определяющее величину  $\bar{p}_*$ , а именно

$$\Delta h = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( \frac{Ea_1^2\pi}{(1-\nu^2)R} - 2\pi\bar{p}_*\sqrt{A_1^2 - a_1^2} - \frac{4\pi}{B}\bar{p}_*A_1^2 + 2\pi\bar{p}_*A \right). \quad (3.23)$$

Если же находить выражения для  $\Delta h$  без учета взаимного влияния штампов, то есть по теории Герца, то с учетом (3.21) для критического значения номинального давления получим следующее выражение

$$\bar{p}_*^H = \frac{4E\sqrt{R(\Delta h)^3}}{3(1-\nu^2)l^2}. \quad (3.24)$$

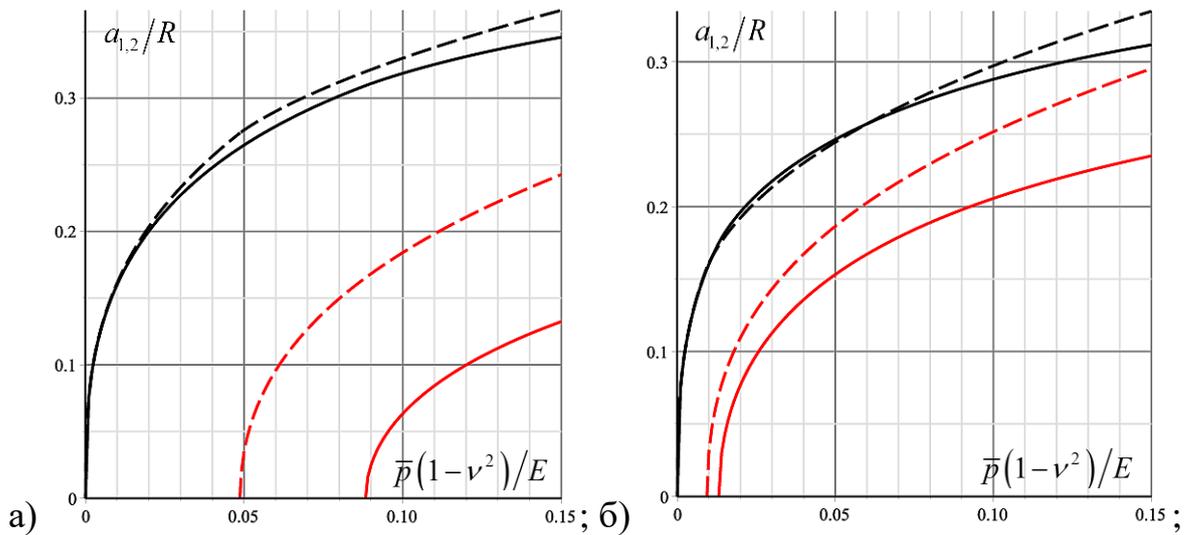
На рис.23 представлено сравнение величин  $\bar{p}_*$  и  $\bar{p}_*^H$  в зависимости от шага решетки  $l$  и высотной разницы уровней  $\Delta h$ . Исходные системы нелинейных уравнений решались численно с применением модифицированного метода Ньютона и метода простых итераций в случае теории Герца. Из результатов следует, что чем дальше расположены штампы в системе и чем меньше разница высот, тем меньшее номинальное давление нужно, чтобы обеспечить двухуровневый контакт. Также видно, что теория Герца дает двухуровневый контакт системы для меньших номинальных давлений при всех значениях параметров решетки ( $\Delta h$  и  $l$ ).



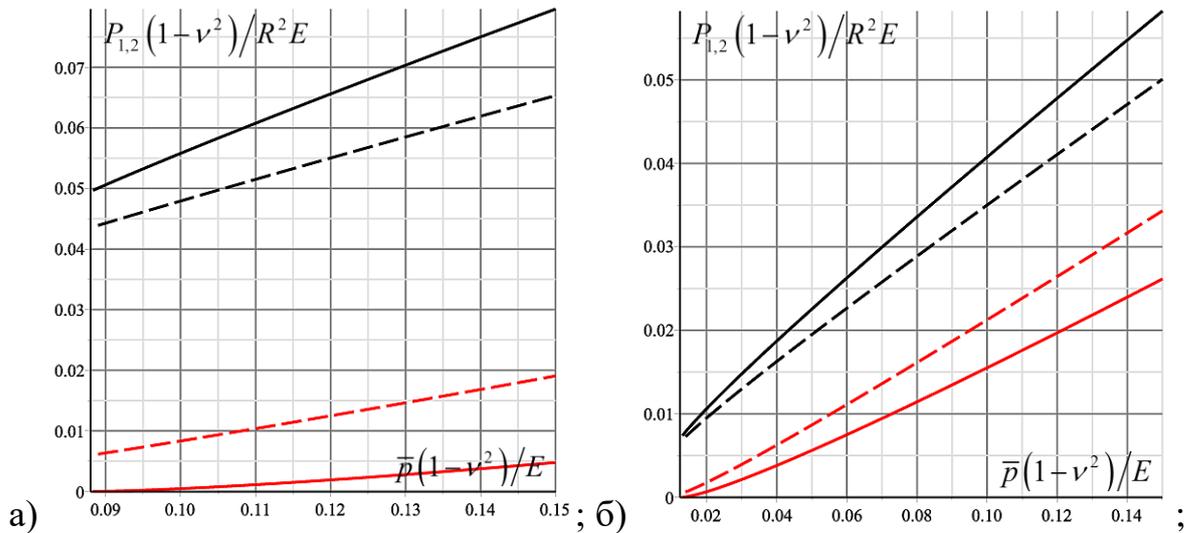
**Рисунок 23.** Зависимость критического номинального давления  $\bar{p}_*$  от шага решетки (а) при  $\Delta h = 0.025R$  (красная линия),  $\Delta h = 0.05R$  (синяя линия),  $\Delta h = 0.075R$  (зеленая линия) и высотной разницы уровней (б) при  $l = 0.5R$  (красная линия),  $l = 0.75R$  (синяя линия),  $l = R$  (зеленая линия); пунктирная линия

–  $\bar{p}_*^H$

На рис.24 представлены зависимости размеров пятен контакта с полупространством штампов обоих уровней от номинального давления для двух значений разницы высот  $\Delta h$ . Пунктиром на графиках обозначены результаты, полученные без учета взаимного влияния, то есть по формулам (3.21). На рис.25 аналогичные результаты представлены для нагрузок  $P_1$  и  $P_2$ . Из результатов следует, что при исследовании нагрузок теория Герца для штампов первого уровня дает заниженные результаты, а для штампов второго – наоборот, завышенные. Для радиусов же областей контакта теория Герца для штампов обоих уровней в большинстве случаев дает завышенные значения. Более того, чем больше разница высот, тем больше разница в результатах по сравнению с теорией Герца, особенно для характеристик, относящихся к штампам второго уровня.



**Рисунок 24.** Зависимость радиуса отдельного пятна контакта  $a_{1,2}$  ( $a_1$  – черная линия,  $a_2$  – красная линия) от номинального давления  $\bar{p}$  при  $l = 0.75R$ ,  $\Delta h = 0.075R$  (а) и  $\Delta h = 0.025R$  (б)

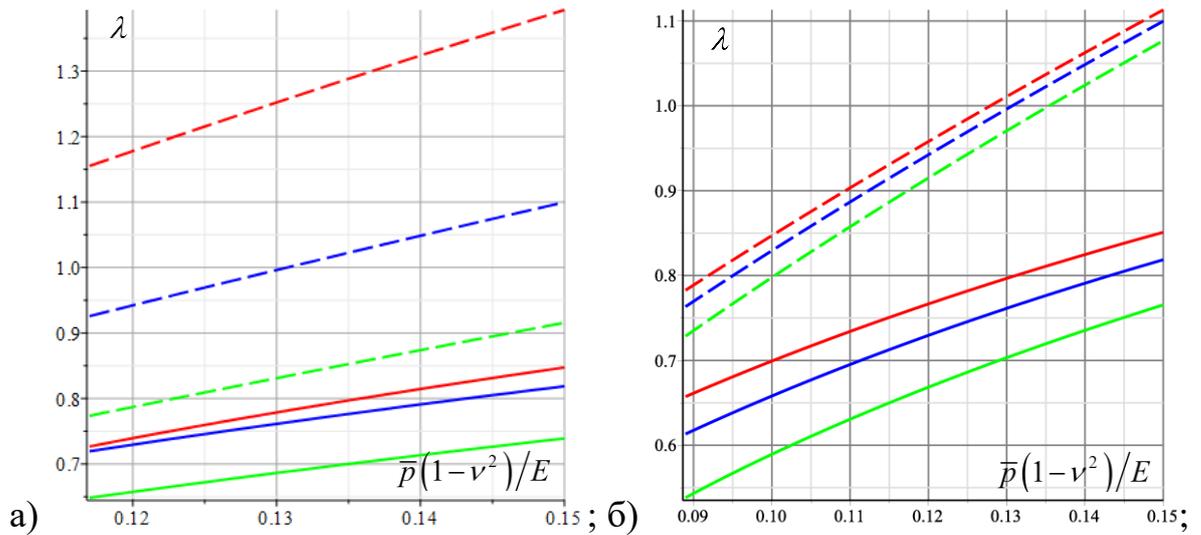


**Рисунок 25.** Зависимость нагрузок  $P_{1,2}$  ( $P_1$  – черная линия,  $P_2$  – красная линия) от номинального давления  $\bar{p}$  при  $l = 0.75R$ ,  $\Delta h = 0.075R$  (а) и  $\Delta h = 0.025R$  (б)

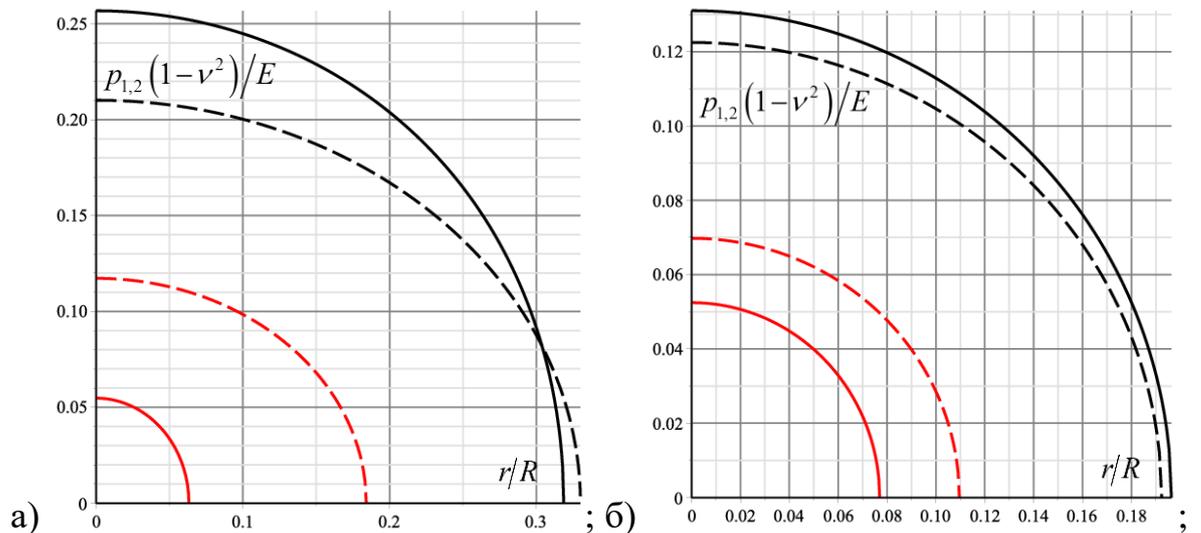
Исследуем фактическую площадь контакта в зависимости от номинального давления при разной плотности контакта и разном высотном распределении штампов. Для этого введем функцию  $\lambda = \pi(a_1^2 + a_2^2)/l^2$ , характеризующую относительную площадь контакта. На рис.26 представлена зависимость  $\lambda$  от номинального давления для разных значений высотного распределения штампов и разных значений расстояния между ними. Результаты показывают, что теория Герца (пунктирная линия на графиках) дает завышенные значения фактической области контакта. И чем ближе расположены штампы, тем разница в результатах больше. Анализ влияния плотности контакта показывает, что уменьшение расстояния между штампами ведет к увеличению фактической площади контакта. Из анализа влияния разницы высот следует, что увеличение  $\Delta h$  ведет к уменьшению фактической области контакта.

На рис.27 представлено распределение давления под штампами двух уровней при фиксированном номинальном давлении для двух значений разницы высот. Номинальное давление при построении графиков в каждом случае было чуть большим критического значения  $\bar{p}_*$ . Пунктирные линии так же соответствуют результатам, полученным с помощью теории Герца. Видно, что во всех случаях отличия от теории Герца больше для штампов второго уровня. При

этом для штампов первого уровня в случае меньшей разницы высот отличие от теории Герца незначительное.



**Рисунок 26.** Зависимость относительной площади контакта от номинального давления при  $\Delta h = 0.05R$  (а) и  $l = 0.5R$  (красная линия),  $l = 0.75R$  (синяя линия),  $l = R$  (зеленая линия); при  $l = 0.75R$  (б) и  $\Delta h = 0.025R$  (красная линия),  $\Delta h = 0.05R$  (синяя линия),  $\Delta h = 0.075R$  (зеленая линия)



**Рисунок 27.** Распределение давления  $p_{1,2}(r)$  на отдельном пятне контакта ( $p_1(r)$  – черная линия,  $p_2(r)$  – красная линия) при  $l = 0.75R$  и  $\Delta h = 0.075R$ ,  $\bar{p} = 0.1E/(1-\nu^2)$  (а);  $\Delta h = 0.025R$ ,  $\bar{p} = 0.02E/(1-\nu^2)$  (б)

### 3.4. Метод решения периодической задачи в случае вязкоупругого полупространства и анализ результатов для одноуровневой системы штампов

Рассмотрим теперь вязкоупругое полупространство и одноуровневую периодическую систему штампов осесимметричной формы. Для решения задачи в вязкоупругом случае воспользуемся расширенным принципом соответствия [60]. Согласно этому принципу, к рассматриваемой смешанной задаче с граничными условиями (3.1) применим принцип соответствия, если область, где заданы смещения  $u_z(r, \theta, t)$ , является не убывающей функцией времени. Тогда, если смещения соответствующей упругой задачи  $u_z^e(r, \theta, t)$  не зависят от модуля упругости, а контактные давления  $p^e(r, \theta, t)$  можно представить в виде произведения двух функций,  $k(\nu, E)$  и  $q(r, \theta, t)$ , то для вязкоупругого решения получим

$$u_z(r, \theta, t) = u_z^e(r, \theta, t),$$

$$p(r, \theta, t) = \int_{0^-}^t K(t - \tau) \frac{\partial q(r, \theta, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

где  $q(r, \theta, t)$  не зависит от упругих постоянных, а  $K(t - \tau)$  – это обратное преобразование Лапласа от функции  $k(p\nu^*(p), pE^*(p))/p$ , где  $\nu^*(p)$  и  $E^*(p)$  – это преобразование Лапласа от соответствующих функций релаксации. Нижний предел интеграла взят в таком виде, чтобы учесть возможный скачок в нуле.

Решение соответствующей упругой задачи, а именно контактные давления  $p^e(r, \theta)$ , определяются интегральным уравнением (3.4). Если мы умножим правую и левую часть этого уравнения на множитель  $(1 - \nu^2)/E$ , то получим

$$q(r, \theta) - \int_0^a \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=1}^{\infty} K_i(r', \theta', r, \theta) \right) q(r, \theta) r' dr' d\theta' = G'(r), \quad (3.29)$$

$$G'(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \Delta f(r') \left( \int_0^{2\pi} \frac{2r'}{R(r, r', \theta')} \arctan \frac{\sqrt{a^2 - r^2} \sqrt{a^2 - r'^2}}{aR(r, r', \theta')} d\theta' \right) dr',$$

где  $q(r, \theta) = (1 - \nu^2) p^e(r, \theta) / E$ . Отсюда получаем, что  $p^e(r, \theta) = k(\nu, E) q(r, \theta)$ , где  $k(\nu, E) = E / (1 - \nu^2)$ , а функция  $q(r, \theta)$ , исходя из интегрального уравнения (3.29), не зависит от упругих постоянных. Упругие смещения в линейной теории определяются контактными давлениями следующим образом [31]

$$u_z^e(r, \theta) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p^e(r', \theta') r' dr' d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}}.$$

Отсюда видно, что если  $p^e(r, \theta) = k(\nu, E) q(r, \theta)$ , то смещения  $u_z^e(r, \theta)$  не зависят от упругих постоянных. Следовательно, исходя из расширенного принципа соответствия, в случае постоянного коэффициента Пуассона получим, что

$$u_z^e(r, \theta, t) = u_z(r, \theta, t),$$

$$p(r, \theta, t) = \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{0^-}^t E(t - \tau) \frac{\partial q(r, \theta, \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

Используя связь функции релаксации  $E(t)$  с соответствующей ей функцией ползучести  $J(t)$  [47], вместо последнего равенства можно записать

$$q(r, \theta, t) = (1 - \nu^2) \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{\partial p(r, \theta, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.30)$$

Таким образом, получаем, что в случае возрастающей области контакта системы с полупространством решение вязкоупругой задачи  $p(r, \theta, t)$  определяется решением интегрального уравнения (3.29) посредством соотношения (3.30).

Интегральное уравнение (3.29) исследовано в п.3.2 настоящей главы при рассмотрении соответствующей упругой задачи. Следовательно, используя принцип соответствия, мы сразу можем записать выражение для функции  $q(r, \theta, t)$ . Тогда в простейшем случае, исходя из (3.10), получим

$$q(r, \theta, t) = q(r, t) = \frac{C}{\pi R_a^{s-1}} q_{1,2}(r) + \frac{2Q(t)}{\pi^2 A^2} \arctan \frac{\sqrt{a^2(t) - r^2}}{\sqrt{A^2 - a^2(t)}},$$

где величина  $Q(t)$  в случае увеличивающихся пятен контакта связана с приложенной к отдельному штампу нагрузкой  $P(t)$  следующим образом

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_0^{a(t)} \int_0^{2\pi} q(r', \theta', t) r' dr' d\theta' = (1 - \nu^2) \int_0^{a(t)} \int_0^{2\pi} \left( \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{\partial p(r', \theta', \tau)}{\partial \tau} d\tau \right) r' dr' d\theta' = \\ &= (1 - \nu^2) \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \int_0^{a(\tau)} \int_0^{2\pi} p(r', \theta', \tau) r' dr' d\theta' \right) d\tau = (1 - \nu^2) \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Окончательно, с учетом (3.30) для контактных давлений  $p(r, \theta, t)$  получим

$$\begin{aligned} p(r, t) &= \frac{C}{\pi(1 - \nu^2) R_a^{s-1}} \int_{0^-}^t E(t - \tau) \frac{\partial q_{1,2}(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ &+ \frac{2}{\pi^2 A^2} \int_{0^-}^t E(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \left( \int_{0^-}^{\tau} J(\tau - s) \frac{dP(s)}{ds} ds \right) \arctan \left( \frac{\sqrt{a^2(\tau) - r^2}}{\sqrt{A^2 - a^2(\tau)}} \right) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где  $r \leq a(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ . Исходя из равенства вертикальных смещения упругой и вязкоупругой задач, для функции дополнительного смещения  $d(t)$  с учетом (3.11) получим

$$d(t) = 2^{s-2} s \frac{\Gamma^2(s/2) C a^s(t)}{\Gamma(s) R_a^{s-1}} - 2(1 - \nu^2) \left( \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{d\bar{p}(\tau)}{d\tau} d\tau \right) \sqrt{A^2 - a^2(t)}. \quad (3.32)$$

Связь же радиуса отдельного пятна контакта и нагрузки, приложенной к отдельному штампу, с учетом (3.12) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{a^{s+1}(t)}{\arccos(a(t)/A) + (a(t)/A) \sqrt{1 - (a(t)/A)^2}} &= \\ &= \frac{(s+1) \Gamma(s) (1 - \nu^2) R_a^{s-1}}{2^{s-2} s^2 \pi^2 (s/2) C} \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Рассмотрим случай постоянного номинального давления, тогда  $\bar{p}(t) = \bar{p}_0 H(t)$ , где  $\bar{p}_0$  – это константа. С учетом (3.3) это влечет за собой

постоянство нагрузки  $P(t)$ , а именно  $P(t) = P_0 H(t)$ , где  $P_0 = \bar{p}_0 / \bar{N}$ . В этом случае уравнение (3.33) примет вид

$$\frac{a^{s+1}(t)}{\arccos(a(t)/A) + (a(t)/A)\sqrt{1-(a(t)/A)^2}} = \frac{(s+1)\Gamma(s)(1-\nu^2)R_a^{s-1}P_0}{2^{s-2}s^2\pi^2(s/2)C} J(t).$$

Левая часть полученного равенства является монотонно возрастающей функцией радиуса области контакта, а правая представляет собой константу, умноженную на функцию  $J(t)$ . Поскольку функция релаксации  $J(t)$  для вязкоупругих материалов монотонно возрастает со временем [120], то получаем, что в случае постоянного номинального давления радиус области контакта будет возрастать со временем. Следовательно, применение в данном случае расширенного принципа соответствия справедливо.

Выпишем решение задачи для случая постоянного номинального давления. Для определенности возьмем сферическую форму штампов. В этом случае  $s = 2$ ,  $C = 1/2$ , а  $R_a \equiv R$  – радиус кривизны. Тогда формулы (3.31)-(3.33) примут вид

$$p(r,t) = \frac{2}{\pi(1-\nu^2)R} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \sqrt{a^2(\tau) - r^2}}{\partial \tau} d\tau + \frac{2P_0}{\pi^2 A^2} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( J(\tau) \arctan \left( \frac{\sqrt{a^2(\tau) - r^2}}{\sqrt{A^2 - a^2(\tau)}} \right) \right) d\tau, \quad r \leq a(\tau), \quad (3.34)$$

$$d(t) = \frac{a^2(t)}{R} - 2(1-\nu^2)\bar{p}_0 J(t) \sqrt{A^2 - a^2(t)}, \quad (3.35)$$

$$\frac{a^3(t)}{\arccos(a(t)/A) + (a(t)/A)\sqrt{1-(a(t)/A)^2}} = \frac{3(1-\nu^2)R}{2\pi} P_0 J(t). \quad (3.36)$$

Таким образом, задавая конкретный вид функции ползучести  $J(t)$ , уравнение (3.36) позволяет определить радиус области контакта  $a(t)$ . Затем, исходя из формул (3.34) и (3.35) рассчитывается распределение контактного давления  $p(r,t)$  и дополнительное смещение  $d(t)$  в каждый момент времени.

Рассмотрим для определенности модель стандартного вязкоупругого тела. Функция релаксации для данной модели при условии постоянного коэффициента Пуассона имеет описывается формулой (2.16), а функция ползучести имеет следующий вид [114]

$$J(t) = \frac{T_\varepsilon}{E_0 T_\sigma} \left( 1 - \left( 1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) e^{-\frac{t}{T_\varepsilon}} \right). \quad (3.37)$$

Подставляя выражение (3.37) для функции ползучести в (3.35) и (3.36), мы получим выражения, позволяющие определить функцию дополнительного смещения и радиус отдельного пятна контакта в каждый момент времени.

Для упрощения расчетов контактного давления перейдем от интегрирования по времени к интегрированию по новой переменной. В силу монотонности функции  $a(t)$ , существует обратная к ней функция  $t(a)$ . Исходя из (3.36) и (3.37), для нее получим

$$t(a) = -T_\varepsilon \ln \left( \frac{T_\varepsilon}{T_\varepsilon - T_\sigma} \left( 1 - \frac{2\pi E_0 T_\sigma a^3}{3(1-\nu^2) R P_0 T_\varepsilon \left( \arccos(a/A) + (a/A) \sqrt{1-(a/A)^2} \right)} \right) \right). \quad (3.38)$$

Тогда, проинтегрировав (3.34) по частям и перейдя в интеграле к новой переменной, для контактного давления получим

$$p(r, a) = \frac{2E_0}{\pi R(1-\nu^2)} \left( \sqrt{a^2 - r^2} + \frac{2\varphi(a)}{3A^2} - \left( \frac{1}{T_\sigma} - \frac{1}{T_\varepsilon} \right) e^{\frac{t(a)}{T_\sigma}} \int_{a_0}^a e^{-\frac{t(s)}{T_\sigma}} \left( \sqrt{s^2 - r^2} + \frac{2\varphi(s)}{3A^2} \right) \frac{dt(s)}{ds} ds \right), \quad r \leq a, \quad (3.39)$$

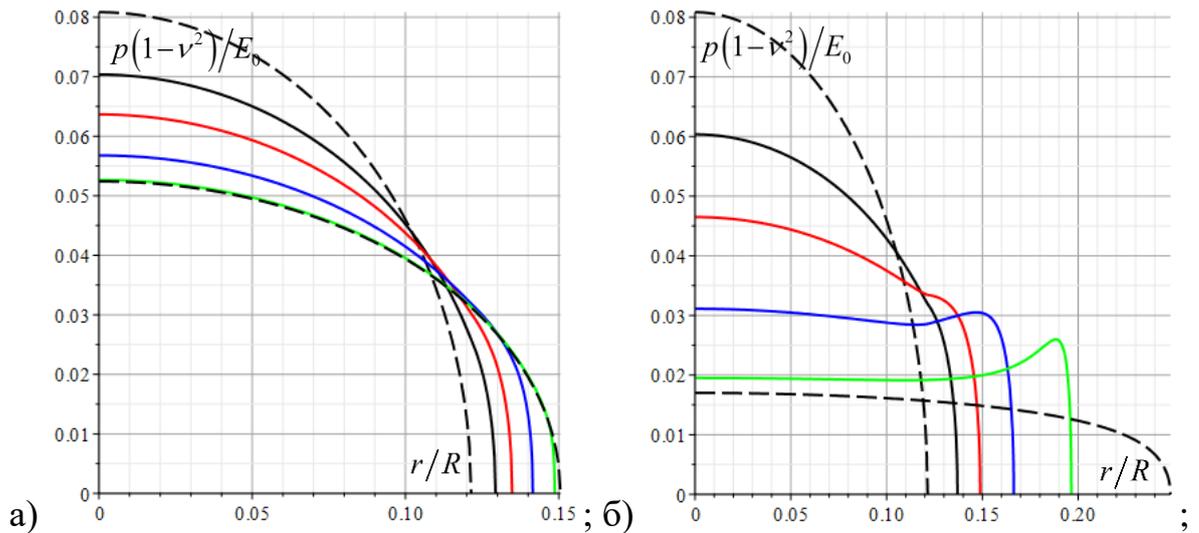
где  $a_0 \equiv a(0)$  и введена следующая функция

$$\varphi(x) = \frac{x^3 \arctan \left( \sqrt{x^2 - r^2} / \sqrt{A^2 - x^2} \right)}{\arccos(x/A) + (x/A) \sqrt{1-(x/A)^2}}. \quad (3.40)$$

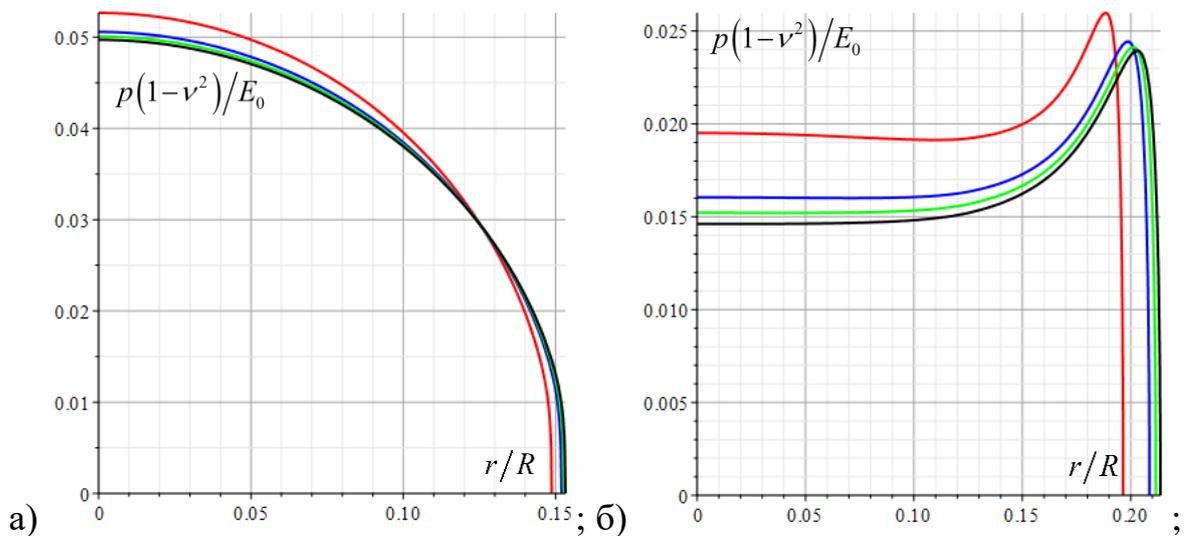
Таким образом, определив для конкретного момента времени радиус пятна контакта, решив уравнение (3.36), используя полученные выражения, можно определить распределение контактного давления в этот момент времени.

Рассмотрим, как и в п.3.2, систему штампов, расположенных в узлах гексагональной решетки с шагом  $l$ . На рис.28 представлено распределение контактного давления на отдельном пятне контакта в разные моменты времени для двух значений коэффициента  $T$ , равного отношению времени ползучести  $T_\varepsilon$  к времени релаксации  $T_\sigma$ . Пунктирные линии на графиках обозначают мгновенное распределение давления и длительное, то есть соответствующее упругому полупространству с длительным модулем упругости. Из результатов следует, что со временем увеличивается область отдельного пятна контакта, а давление в центральной части уменьшается, стремясь к длительному значению. Также для случая большего коэффициента  $T$  наблюдается появление на краях области контакта дополнительных максимумов. Это связано с тем, что точки границы полупространства, которые в момент  $t=0$  не находились в контактной области, вступают в контакт со штампов позже. Поэтому процесс релаксации происходит неравномерно. Это характерно и для внедрения в вязкоупругое полупространство единичного штампа, что отмечалось многими авторами [51,109].

На рис.29 представлено распределение контактного давления в фиксированный момент времени для решеток с разным значением шага. Результаты показывают, что сближение штампов ведет к уменьшению области контакта и увеличению давления в центральной части. И чем дальше расположены штампы в системе, тем ближе результат к случаю внедрения в вязкоупругое полупространство единичного штампа ( $l \rightarrow \infty$  на графиках). Результаты для единичного штампа представлены, например, в работе [121]. При численных расчетах и построениях всех графиков для решения нелинейного уравнения (3.36) использовался численный метод секущих, а для взятия интеграла, входящего в выражение (3.39), – численный метод Симпсона.



**Рисунок 28.** Распределение контактного давления для модели стандартного вязкоупругого тела с  $T = 2$  (а) и  $T = 20$  (б) для системы штампов с  $l = 0.5R$  в момент времени  $t = 0.5T_\sigma$  (черная линия),  $t = T_\sigma$  (красная линия),  $t = 2T_\sigma$  (синяя линия),  $t = 5T_\sigma$  (зеленая линия) при  $P_0 = 0.0025E_0R^2/(1-\nu^2)$



**Рисунок 29.** Распределение контактного давления для модели стандартного вязкоупругого тела с  $T = 2$  (а) и  $T = 20$  (б) в момент времени  $t = 5T_\sigma$  для системы штампов с  $l = 0.5R$  (красная линия),  $l = 0.75R$  (синяя линия),  $l = R$  (зеленая линия),  $l \rightarrow \infty$  (черная линия) при  $P_0 = 0.0025E_0R^2/(1-\nu^2)$

Рассмотрим еще одну вязкоупругую модель, а именно модель Максвелла. Функции релаксации и ползучести для этой модели имеют следующий вид [114]

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \text{ и } J(t) = \frac{1}{E_0} \left( 1 + \frac{t}{T_\sigma} \right). \quad (3.41)$$

Как видно из (3.41) эта модель обладает неограниченной ползучестью и имеет нулевой длительный модуль упругости, то есть  $E_\infty = 0$ . Отсюда следует в частности то, что время процесса должно быть ограничено, что соблюдалось условие малых деформаций.

Подставляя выражение (3.41) для функций релаксации и ползучести в (3.35) и (3.36), мы получим выражения для функции дополнительного смещения и радиуса пятна контакта. Выпишем также вид функции  $t(a)$ , а именно

$$t(a) = T_\sigma \left( \frac{2\pi E_0 a^3}{3(1-\nu^2) R P_0 \left( \arccos(a/A) + (a/A) \sqrt{1-(a/A)^2} \right)} - 1 \right). \quad (3.42)$$

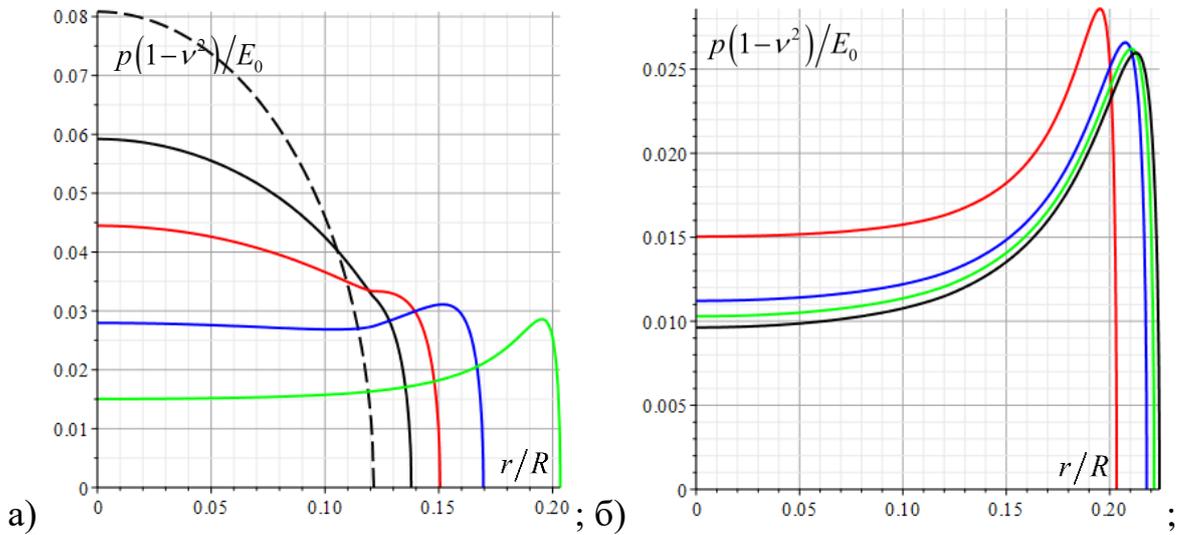
Функция (3.42) позволяет определить зависимость контактного давления  $p(r, a)$  от радиуса пятна контакта по следующей формуле

$$p(r, a) = \frac{2E_0}{\pi R(1-\nu^2)} \left( \sqrt{a^2 - r^2} + \frac{2\varphi(a)}{3A^2} - \frac{1}{T_\sigma} e^{\frac{t(a)}{T_\sigma}} \int_{a_0}^a e^{-\frac{t(s)}{T_\sigma}} \left( \sqrt{s^2 - r^2} + \frac{2\varphi(s)}{3A^2} \right) \frac{dt(s)}{ds} ds \right), \quad r \leq a. \quad (3.43)$$

где функция  $\varphi(x)$  определяется формулой (3.40).

На рис.30 представлено распределение контактного давления в случае модели Максвелла в разные моменты времени (а) и для системы штампов с разным шагом гексагональной решетки (б). Из результатов следует, что со временем давление в центральной части области контакта уменьшается и на краях области, как и в случае стандартного тела с большим коэффициентом  $T$ , появляются дополнительные максимумы. Увеличение же плотности расположения штампов в системе ведет, наоборот, к повышению давления в центральной части контактного пятна. Схожесть результатов модели стандартного тела с большим коэффициентом  $T$  с результатами модели

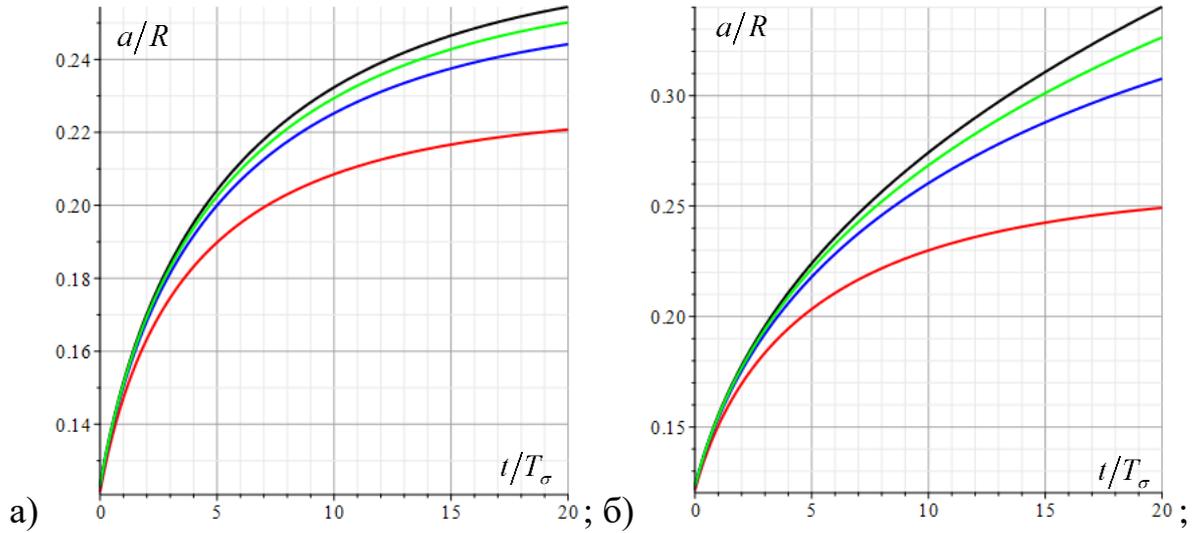
Максвелла следует из того факта, что вторую модель можно получить из первой, устремив  $T_\varepsilon$  к бесконечности.



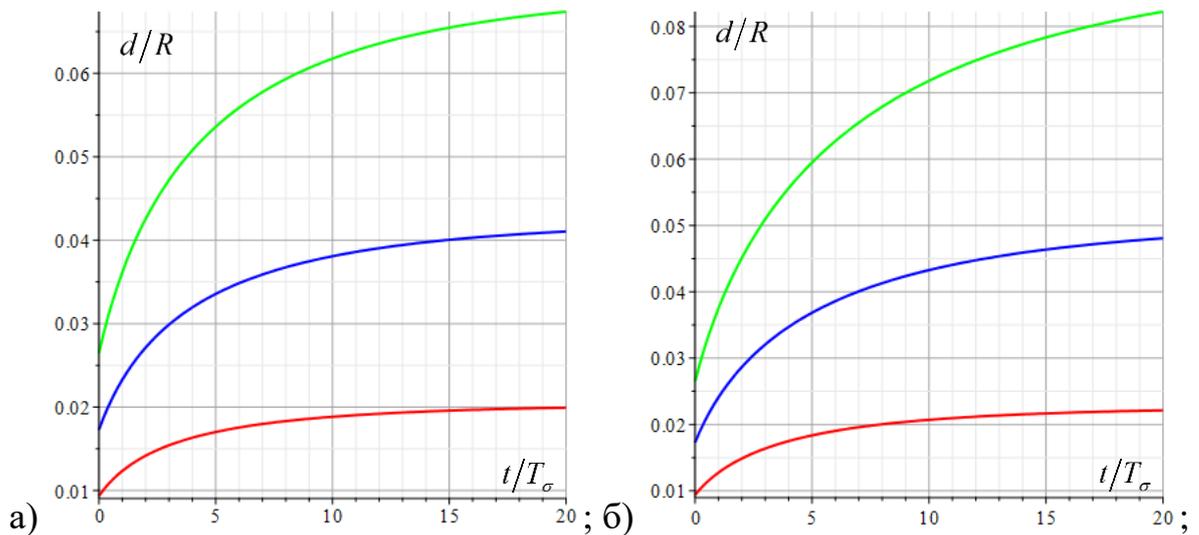
**Рисунок 30.** Распределение контактного давления для модели Максвелла для системы штампов с  $l = 0.5R$  (а) в момент времени  $t = 0.5T_\sigma$  (черная линия),  $t = T_\sigma$  (красная линия),  $t = 2T_\sigma$  (синяя линия),  $t = 5T_\sigma$  (зеленая линия) и в момент времени  $t = 5T_\sigma$  (б) для системы штампов с  $l = 0.5R$  (красная линия),  $l = 0.75R$  (синяя линия),  $l = R$  (зеленая линия),  $l \rightarrow \infty$  (черная линия) при  $P_0 = 0.0025E_0R^2/(1-\nu^2)$

Сравним результаты для двух рассмотренных моделей. На рис.31 представлена зависимость от времени радиуса отдельного пятна контакта для систем с разным шагом  $l$ . Из результатов следует, что с увеличением расстояния между штампами радиус отдельного пятна контакта увеличивается, стремясь к значению, характерному единичному штампу, то есть рассчитанному по теории Герца. Также видно, что для модели Максвелла в каждый момент времени радиус пятна контакта больше в сравнении с моделью стандартного тела. На рис.32 представлены результаты для функции дополнительного смещения. При этом фиксировалось не величина  $P_0$ , а величина номинального давления, то есть  $\bar{p}_0$ . Результаты показывают, что увеличение шага решетки ведет к увеличению значения функции дополнительного смещения. Из сравнения же результатов, полученных для двух моделей, следует, что, как и в случае пятна контакта, модель

Максвелла дает большее значение величины  $d(t)$  в каждый момент времени в сравнении с моделью стандартного вязкоупругого тела.

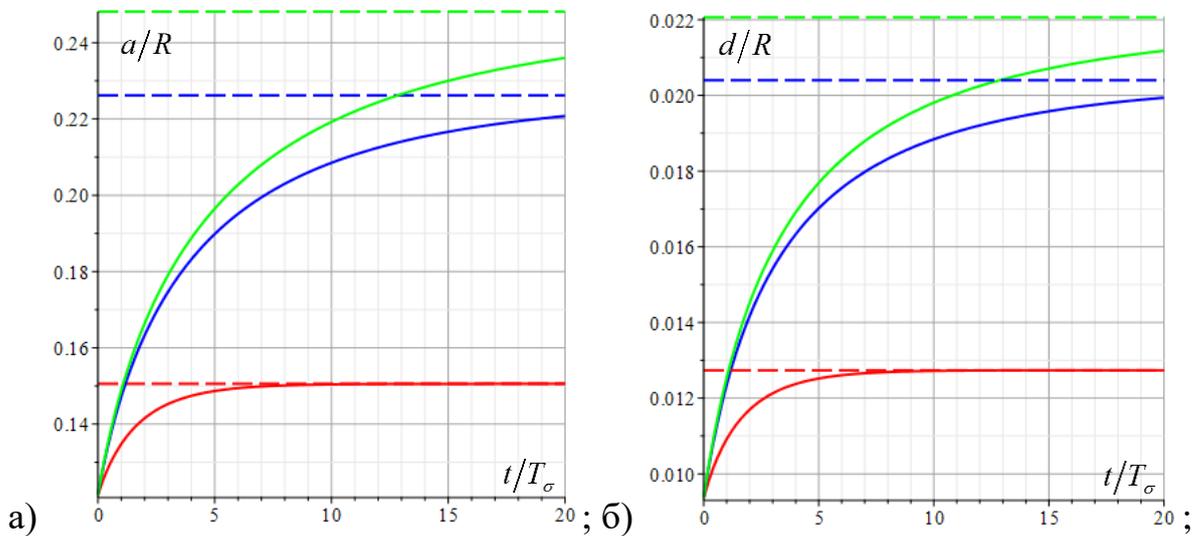


**Рисунок 31.** Зависимость радиуса пятна контакта от времени для модели стандартного вязкоупругого тела с  $T = 10$  (а) и модели Максвелла (б) для системы штампов с  $l = 0.5R$  (красная линия),  $l = 0.75R$  (синяя линия),  $l = R$  (зеленая линия),  $l \rightarrow \infty$  (черная линия) при  $P_0 = 0.0025E_0R^2 / (1 - \nu^2)$



**Рисунок 32.** Зависимость функции дополнительного смещения от времени для модели стандартного вязкоупругого тела с  $T = 10$  (а) и модели Максвелла (б) для системы штампов с  $l = 0.5R$  (красная линия),  $l = 0.75R$  (синяя линия),  $l = R$  (зеленая линия) при  $\bar{p}_0 = 0.01155E_0 / (1 - \nu^2)$

Так как в случае модели стандартного вязкоупругого тела определяющим параметром помимо шага решетки является коэффициент  $T$ , то на рис.33 представлены зависимости  $a(t)$  и  $d(t)$  для разных значений этого коэффициента. Из результатов следует, что увеличение отношения времен ползучести и релаксации ведет к увеличению исследуемых контактных характеристик в каждый момент времени при фиксированном мгновенном модуле упругости. Также из графиков видно, что со временем результаты стремятся к значениям, характерным упругому полупространству с длительным модулем упругости (пунктирные линии на графиках).



**Рисунок 33.** Зависимость радиуса пятна контакта (а) и функции дополнительного смещения (б) от времени для модели стандартного вязкоупругого тела с  $T = 2$  (красная линия),  $T = 10$  (красная линия),  $T = 20$  (красная линия) для системы

$$\text{штампов с } l = 0.5R \text{ при } P_0 = 0.0025E_0R^2 / (1 - \nu^2)$$

### 3.5. Выводы

В данной главе рассмотрены задачи о внедрении в упругое и вязкоупругое полупространство периодической системы осесимметричных штампов под действием заданной нагрузки в отсутствии трения. Исследован как случай одноуровневой системы штампов, так и двухуровневый случай. Для каждой

задачи получены аналитические выражения для распределения контактного давления под отдельным штампом, радиуса отдельного пятна контакта и функции дополнительного смещения. В каждом случае исследовано влияние геометрических параметров периодической системы штампов на контактные характеристики. Решение задач строилось с применением принципа локализации.

Для случая одноуровневой системы штампов, внедряющихся в упругое полупространство, рассмотрены различные формы контактирующей поверхности штампов, которые могут быть описаны степенной функцией. Исследовано влияния показателя степени на размеры пятен контакта и распределение контактного давления. Показано, что увеличение показателя степени ведет к увеличению радиуса отдельного пятна контакта и уменьшению давления в центральной части контактной области. При этом также уменьшается и величина дополнительного смещения. В случае двухуровневой системы штампов, внедряющихся в упругое полупространство, помимо влияния плотности расположения штампов в системе исследовано также влияние на контактные характеристики разницы высот двух уровней. Показано, что учет взаимного влияния штампов особенно важен при определении характеристик, относящихся к штампам второго уровня. Также получено, что увеличение расстояния между штампами уменьшение разницы высот уровней ведет к уменьшению величины номинального давления, при котором наступает двухуровневый контакт.

Задача для вязкоупругого полупространства решалась с помощью расширенного принципа соответствия. При этом рассмотрен случай постоянного номинального давления, что обеспечивает возрастание каждого пятна контакта в течение всего процесса взаимодействия. Стоит отметить, что аналогичным методом можно исследовать случай возрастающего со временем номинального давления. Для описания механического поведения полупространства использовались две модели: модель стандартного вязкоупругого тела и модель Максвелла. Для каждой модели в случае одноуровневой системы сферических штампов представлено исследование изменения во времени распределения контактного давления, фактической области контакта и функции

дополнительного смещения. Анализ результатов показывает, что со временем происходит перераспределение контактного давления, сопровождающееся появлением дополнительных максимумов на границе области контакта. Для модели стандартного вязкоупругого тела показано, что со временем все характеристики контактного взаимодействия стремятся к значениям, соответствующим упругому полупространству с длительным модулем упругости.

## Глава 4: Моделирование внедрения единичного штампа с учетом микрорельефа поверхности в вязкоупругое основание

В данной главе рассматривается задача о внедрении в вязкоупругий слой цилиндрического штампа, торцевая поверхность которого обладает микрорельефом. Рассмотрен случай цилиндра с плоским основанием, покрытым периодической системой осесимметричных неровностей. Задача решается на двух масштабных уровнях с использованием решений, полученных в предыдущих главах. Учет шероховатости поверхности штампа приводит к изменению величины жесткости и фактической области контакта. Учет вязкоупругих свойств слоя приводит к появлению зависимости всех контактных характеристик от времени. Далее представлено исследование влияния геометрических параметров торцевой поверхности цилиндра и вязкоупругих свойств материала слоя на характеристики контактного взаимодействия.

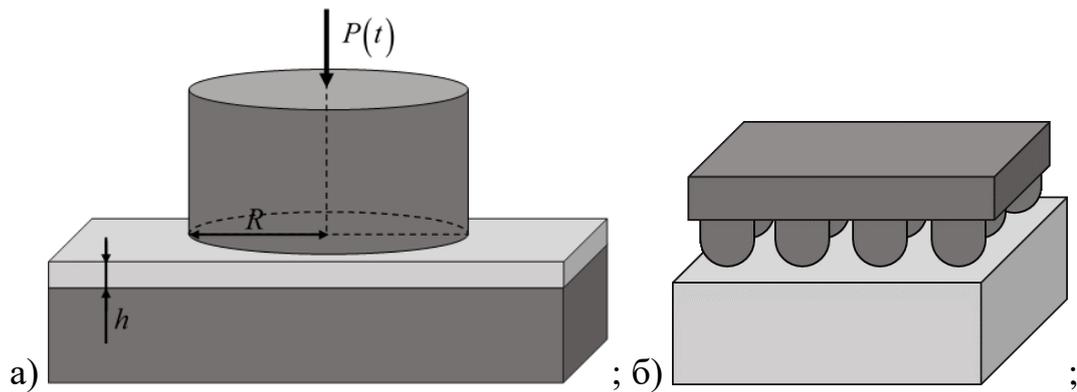
### 4.1. Постановка задачи

Рассматривается внедрение цилиндрического штампа с плоским основанием радиуса  $R$  в вязкоупругий слой толщины  $h$ , лежащий на жестком основании. К цилиндру приложена заданная постоянная нагрузка  $P(t) = P_0 H(t)$ . Торцевая поверхность цилиндра имеет шероховатость, моделируемую периодической системой одинаковых неровностей. Рассматривается случай, когда каждая неровность имеет осесимметричную форму, описываемую функцией  $f(r) = Cr^s / R_a^{s-1}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , где  $R_a$  – величина, характеризующая размер выступа, а  $C$  – безразмерная константа. Таким образом, область контакта будет представлять собой совокупность отдельных пятен контакта. Считается, что каждое пятно контакта имеет форму круга радиуса  $a(t)$ . При этом предполагается, вследствие малости размеров неровностей, что  $a(t) \ll R$ .

Задача рассматривается на двух масштабных уровнях (рис.34):

- микроуровень, отвечающий масштабу отдельного пятна контакта, характеризуемого его радиусом  $a(t)$ , при этом  $a(t) \ll h$ ;
- макроуровень, соответствующий масштабу номинальной области контакта, характеризуемой радиусом цилиндра  $R$ .

Такой подход к решению задач о внедрении жестких шероховатых тел в упругий слой или упругое полупространство был разработан в [10]. В данной главе будет дано его обобщение на случай вязкоупругих материалов.



**Рисунок 34.** Схема контакта на макроуровне (а) и на микроуровне (б)

#### 4.2. Решение контактной задачи на микроуровне

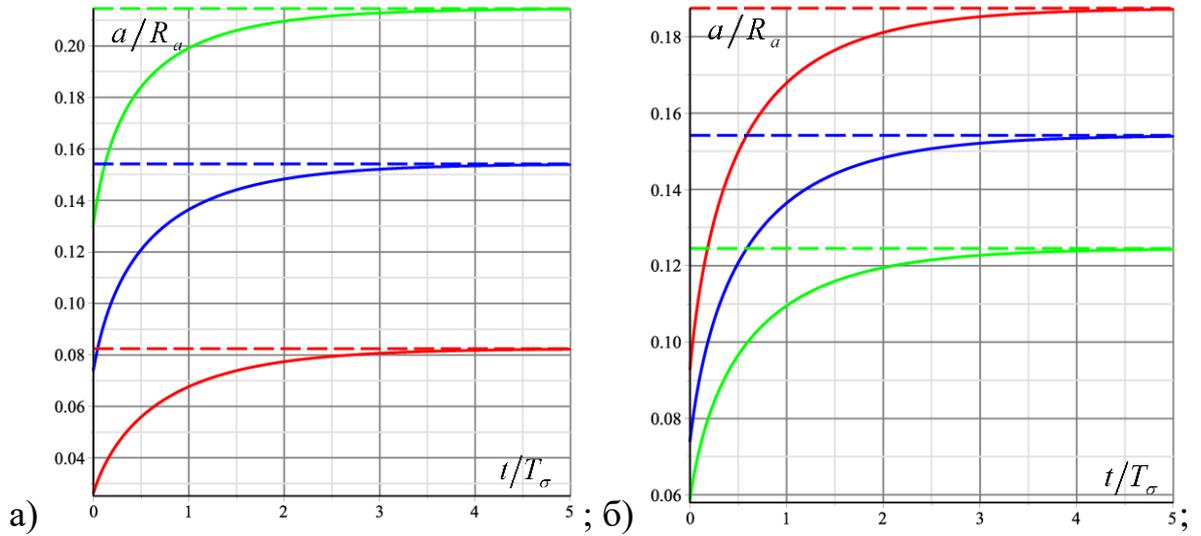
Предположения о малости размеров отдельного пятна контакта относительно размеров номинальной области контакта и толщины вязкоупругого слоя приводят на микроуровне к задаче о внедрении периодической системы одинаковых штампов в вязкоупругое полупространство. Решение этой задачи с помощью расширенного принципа соответствия и принципа локализации получено в п.3.4. Распределение контактного давления в каждый момент времени определяется формулой (3.31), функция дополнительного смещения – формулой (3.32), а связь радиуса области контакта с полупространством отдельного штампа и приложенной к нему нагрузкой – формулой (3.33). Номинальное давление  $\bar{p}(t)$ , входящее в формулу (3.32), равно  $\bar{N}P_a(t)$ , где  $\bar{N}$  – среднее число неровностей на

единице площади поверхности цилиндра, а  $P_a(t)$  – нагрузка, приложенная к отдельной неровности.

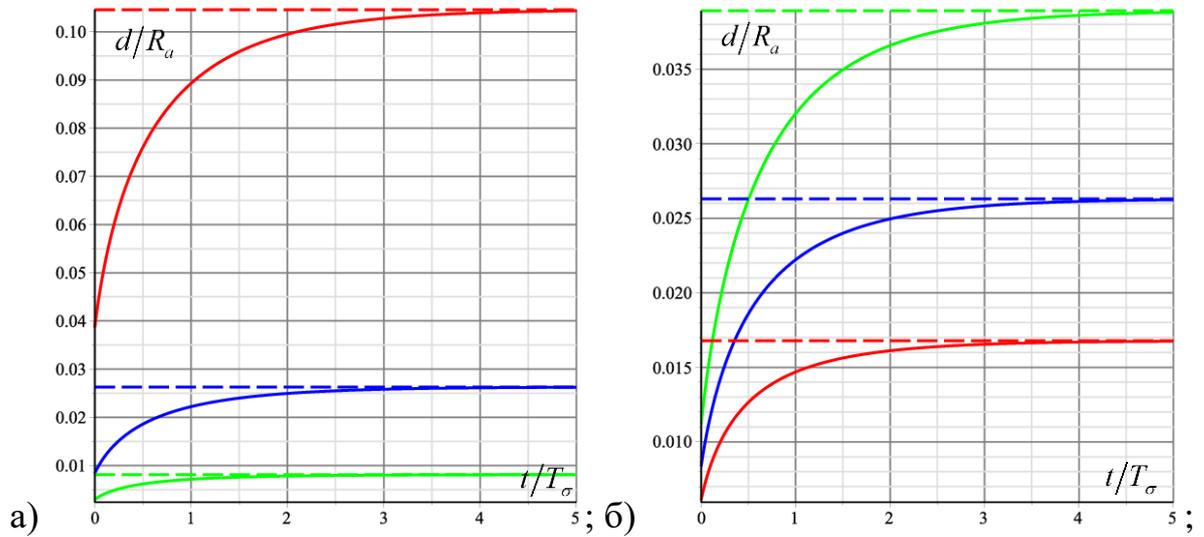
Для дальнейшего построения решения задачи на макроуровне особый интерес представляют формулы для функции дополнительного смещения и радиуса отдельного пятна контакта. В п.3.4 эти характеристики были исследованы для случая гексагональной решетки штампов, имеющих только сферическую форму. Для полноты картины проанализируем влияние формы неровностей. Рассмотрим также случай постоянного номинального давления, то есть  $\bar{p}(t) = p_0 H(t)$ , а также модель стандартного вязкоупругого тела, определяемую формулами (2.16) и (3.37).

На рис.35 представлены зависимости размеров отдельного пятна контакта от времени для разных значений показателя степени функции, описывающей форму контактирующей поверхности неровностей (а), а также разного значения коэффициента  $C$  этой функции (б). На графиках пунктиром отмечен случай упругого полупространства ( $T=1$ ). Из результатов следует, что к увеличению размеров отдельного пятна контакта ведет увеличение показателя степени функции  $f(r)$ , а также уменьшение коэффициента  $C$ . Однако, это влияние различно. Так, для всех рассмотренных коэффициентов  $C$  при  $s=2$  радиус области контакта ко времени  $t=5T_0$  увеличился примерно в два раза. А если зафиксировать  $C$  и менять  $s$ , то получим, что для  $s=1$  радиус увеличился примерно в полтора раза, а для  $s=3$  – более чем в три раза. Также из графиков видно, что со временем результаты стремятся к значению, характерному упругому полупространству с длительным модулем упругости.

На рис.36 аналогичные результаты представлены для функции дополнительного смещения  $d(t)$ .



**Рисунок 35.** Зависимость радиуса пятна контакта от времени для модели стандартного вязкоупругого тела с  $T = 10$  при  $\bar{p}_0 = 0.005E/(1-\nu^2)$  и  $l = 0.5R_a$  для штампов с  $C=1$  (а) и  $s=1$  (красная линия),  $s=2$  (синяя линия),  $s=3$  (зеленая линия); для штампов с  $s=2$  (б) и  $C=0.5$  (красная линия),  $C=1$  (синяя линия),  $C=2$  (зеленая линия)



**Рисунок 36.** Зависимость функции дополнительного смещения от времени для модели стандартного вязкоупругого тела с  $T = 10$  при  $\bar{p}_0 = 0.005E/(1-\nu^2)$  и  $l = 0.5R_a$  для штампов с  $C=1$  (а) и  $s=1$  (красная линия),  $s=2$  (синяя линия),  $s=3$  (зеленая линия); для штампов с  $s=2$  (б) и  $C=0.5$  (красная линия),  $C=1$  (синяя линия),  $C=2$  (зеленая линия)

Из результатов следует, что увеличение показателя степени функции  $f(r)$  и уменьшения ее коэффициента  $C$  приводят к уменьшению величины функции дополнительного смещения в каждый момент времени. При этом для рассмотренных значений параметров увеличение  $d(t)$  к концу рассматриваемого временного промежутка по сравнению с начальным значением будет примерно трехкратное. Наибольшее увеличение, а именно в три с половиной раза, наблюдается для штампов с  $s = 2$  и  $C = 2$ .

### 4.3. Решение контактной задачи на макроуровне

Перейдем к рассмотрению задачи на макроуровне. Совместим плоскость  $z = 0$  декартовой системы координат с недеформируемой поверхностью слоя, а ось  $Oz$  – с осью симметрии цилиндра по направлению вглубь слоя. В [3] показано, что при найденном решении задачи на микроуровне контактное давление  $p(x, y)$  под поверхностью штампа находится из следующего интегрального уравнения

$$D - d[p(x, y)] = \iint_{\Omega} K(x, y, x', y') p(x', y') dx' dy', \quad (x, y) \in \Omega. \quad (4.1)$$

Здесь  $\Omega$  – номинальная область контакта,  $D$  – глубина внедрения штампа в основание,  $d[p(x, y)]$  – дополнительная податливость основания, вызванная наличием шероховатости на контактирующей поверхности штампа. Ядро интегрального оператора  $K(x, y, x', y')$  зависит от свойств деформируемого основания. Так, для слоя толщины  $h$  ядро  $K(x, y, x', y')$  можно записать в следующем виде [116]

$$K(x, y, x', y') = \frac{1 - \nu^2}{\pi h E} k \left( \frac{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}{h} \right), \quad (4.2)$$

$$k(s) = \int_0^{\infty} L(u) J_0(us) du.$$

Здесь  $J_0(u)$  – функция Бесселя нулевого порядка, а  $L(u)$  зависит от способа закрепления слоя к недеформируемому основанию, как уже упоминалось во второй главе.

При выводе интегрального уравнения (4.1) считается, что изменение давления  $p(x, y)$  на масштабах, соизмеримых с характерными расстояниями между пятнами контакта, пренебрежимо мало. Тогда при использовании принципа локализации к исследованию внедрения в полупространство отдельной неровности с вершиной в точке  $(x_0, y_0)$  получим, что номинальное давление, действующее в круге радиуса  $A$ , равно  $p(x_0, y_0)$ , а функция дополнительного смещения  $d$  будет определять дополнительную податливость  $d[p(x_0, y_0)]$  в точке  $(x_0, y_0)$ .

Для вязкоупругого основания, вследствие аналогичности подхода к решению задачи на микроуровне, получим такое же интегральное уравнение, что и (4.1). При этом функция дополнительного смещения  $d[p(x, y, t)]$  найдена в п.3.4 при условии, что все пятна контакта являются не убывающими функциями времени. Правая же часть интегрального уравнения определяет смещения границы основания при действии по всей области контакта заданного давления  $p(x, y, t)$ . В вязкоупругом случае эти смещения можно найти с использованием обычного принципа соответствия, так как для цилиндра с плоским основанием номинальная область контакта представляет собой круг постоянного радиуса  $R$ . Таким образом, для определения контактного давления  $p(x, y, t)$ , возникающего под поверхностью цилиндра с плоским шероховатым основанием при внедрении его в вязкоупругий слой, получим следующее интегральное уравнение

$$D(t) = d[p(x, y, t)] + \frac{1-\nu^2}{\pi h} \iint_{x'^2+y'^2 < R} k \left( \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{h} \right) \left( \int_0^t J(t-\tau) \frac{\partial p(x', y', \tau)}{\partial \tau} d\tau \right) dx' dy', \quad (4.3)$$

где  $(x, y)$  принадлежат номинальной области контакта, то есть кругу радиуса  $R$ .

Для замыкания системы необходимо записать условие равновесия, а именно

$$P(t) = \iint_{x^2+y^2 < R} p(x, y, t) dx dy. \quad (4.4)$$

Рассмотрим случай тонкого слоя, когда  $h \ll R$ . Тогда для интеграла  $k(s)$ , определяющего ядро (4.2), можно принять следующее асимптотическое приближение [122]

$$k(s) \sim 2\pi B \delta(s),$$

где  $\delta(s)$  – двумерная дельта-функция, а постоянная  $B$  зависит от способа закрепления слоя к жесткому основанию. Если слой лежит на жестком основании без трения, то  $B = 1/2$ , а если жестко сцеплен с ним, то  $B = 4(\kappa - 1)/(\kappa + 1)^2$ ,  $\kappa = 3 - 4\nu$  [116]. Тогда для связи вертикальных смещений границы слоя  $u_z(x, y, t)$  и давлений  $p(x, y, t)$ , их вызывающих, получим

$$u_z(x, y, t) \sim 2hB(1 - \nu^2) \left( \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{\partial p(x, y, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right), \quad r < R. \quad (4.5)$$

Соотношение (4.5) справедливо не во всей области контакта, а только в ее внутренней части. Однако, чем меньше толщина слоя, тем больше область, в которой это соотношение верно. Значение толщины слоя, для которого применима данная аппроксимация, в зависимости от размеров области контакта даны в [122].

Объединяя соотношения (4.3) и (4.5), а также используя найденное при решении задачи на микроуровне выражение (3.32) для функции  $d(t)$ , в цилиндрической системе координат получим следующую зависимость глубины внедрения  $D(t)$  от контактного давления  $p(r, t)$ , действующего под поверхностью цилиндра, при  $r < R$

$$D(t) = \frac{s\Gamma^2(s/2) Ca^s(t)}{2^{2-s}\Gamma(s) R_a^{s-1}} + 2 \left( hB - \sqrt{A^2 - a^2(t)} \right) (1 - \nu^2) \left( \int_{0^-}^t J(t - \tau) \frac{\partial p(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right). \quad (4.6)$$

Радиус отдельного пятна контакта  $a(t)$ , входящий в выражение (4.6), определяется выражением (3.33). Заметим, что использование функции дополнительной податливости, полученной для внедрения периодической системы штампов в упругое полупространство, правомерно, поскольку выбор модели полупространства (или слоя) определяется отношением размера единичного пятна контакта к толщине деформируемого основания.

Как следует из полученного выражения (4.6), контактное давление  $p(r, t)$  распределено под поверхностью цилиндра равномерно, то есть  $p(r, t) \equiv p(t)$ , что связано с использованием аппроксимации тонкого слоя (4.5). Тогда, исходя из условия равновесия (4.4),  $p(t) = P(t)/\pi R^2$ . Окончательно получим следующую систему двух уравнений для определения зависимости глубины внедрения и радиуса единичного пятна контакта от времени при заданной постоянной нагрузке, приложенной к цилиндру, интенсивности  $P_0$

$$D(t) = \frac{s\Gamma^2(s/2)Ca^s(t)}{2^{2-s}\Gamma(s)R_a^{s-1}} + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi R^2} \left( hB - \sqrt{A^2 - a^2(t)} \right) P_0 J(t), \quad (4.7)$$

$$\frac{a^{s+1}(t)}{A^2 \arccos(a(t)/A) + a(t)\sqrt{A^2 - a^2(t)}} = \frac{(s+1)\Gamma(s)R_a^{s-1}(1-\nu^2)}{2^{s-2}s^2\Gamma^2(s/2)C\pi R^2} J(t) P_0. \quad (4.8)$$

#### 4.4. Численные результаты для модели стандартного вязкоупругого тела

Рассмотрим модель стандартного вязкоупругого тела, функция ползучести  $J(t)$  которой определяется формулой (3.37). Соотношения (4.7) и (4.8) для этой модели примут вид

$$D(t) = \frac{s\Gamma^2(s/2)Ca^s(t)}{2^{2-s}\Gamma(s)R_a^{s-1}} + \frac{2(1-\nu^2)T_\varepsilon P_0}{\pi R^2 E_0 T_\sigma} \left( hB - \sqrt{A^2 - a^2(t)} \right) \left( 1 - \left( 1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) e^{-\frac{t}{T_\varepsilon}} \right), \quad (4.9)$$

$$\frac{a^{s+1}(t)}{A^2 \arccos(a(t)/A) + a(t)\sqrt{A^2 - a^2(t)}} = \frac{(s+1)\Gamma(s)R_a^{n-1}(1-\nu^2)T_\varepsilon P_0}{2^{s-2}s^2\Gamma^2(s/2)C\pi R^2 E_0 T_\sigma} \left(1 - \left(1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon}\right) e^{-\frac{t}{T_\varepsilon}}\right). \quad (4.10)$$

Размер отдельного пятна контакта, определяемый решением уравнения (4.10), характеризует фактическую площадь контакт цилиндра со слоем  $A_r(t)$ . Для определенности будем считать, что неровности, формирующие микрорельеф торцевой поверхности цилиндра, располагаются в узлах гексагональной решетки с шагом  $l$ . Тогда зависимость фактической области контакта цилиндром со слоем от времени будет определяться следующим выражением

$$A_r(t) = 2\pi \int_0^R r\beta(t)dr = \pi R^2 \beta(t), \quad (4.11)$$

где функция  $\beta(t)$  характеризует отношение фактической области контакта  $A_r(t)$  к номинальной  $A_n$ , равной  $\pi R^2$ . Для гексагональной решетки с шагом  $l$   $\beta(t) = 2\pi a^2(t)/\sqrt{3}l^2$ .

Соотношения (4.9)-(4.11) показывают, что, как и характеристики на микроуровне, контактные характеристики на макроуровне, помимо величины приложенной к цилиндру нагрузки  $P_0$  и от характеристик вязкоупругого слоя ( $h$ ,  $B$ ,  $\nu$ ,  $E_0$ ,  $T_\sigma$  и  $T_\varepsilon$ ), зависят также и от микрогеометрии торцевой поверхности цилиндра ( $C$ ,  $R_a$ ,  $s$  и  $l$ ).

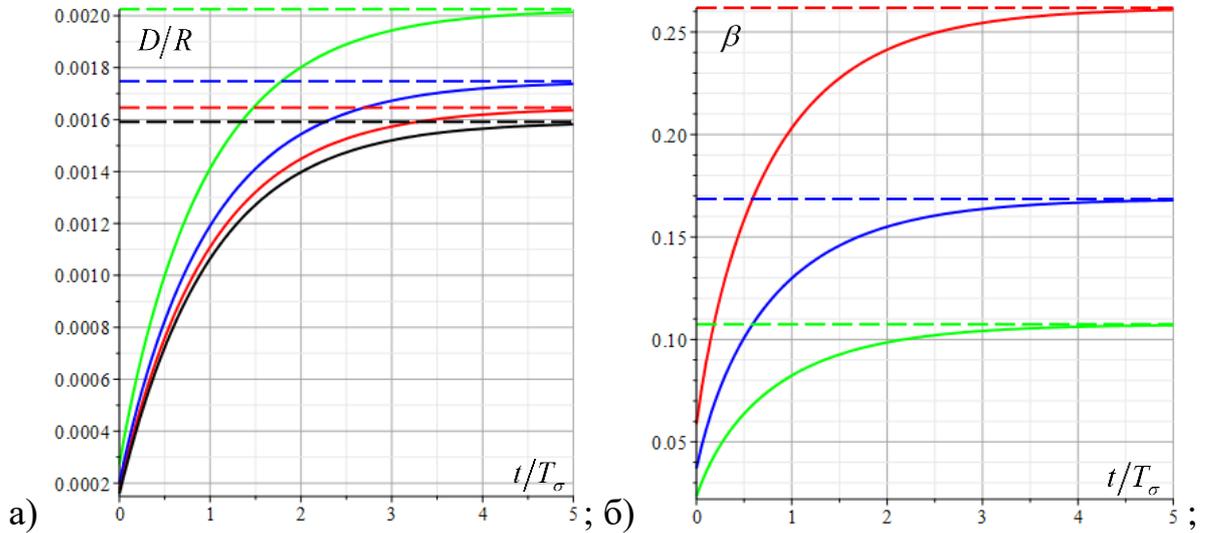
Параметры, характеризующие толщину слоя ( $h/R$ ) и способ его закрепления к жесткому основанию ( $B$ ), входят только в выражение (4.9), определяющее глубину внедрения  $D(t)$  цилиндра в слой, причем линейно. Их влияние на зависимость макрохарактеристик от времени очевидна. Для определенности примем, что  $B = 0.5$ ,  $h = 0.1R$  и исследуем влияние параметров микрогеометрии, а именно плотности расположения неровностей на поверхности основания цилиндра  $l$  и их формы, и вязкоупругих свойств слоя, то есть

коэффициента  $T = T_\varepsilon / T_\sigma$ , на глубину внедрения  $D(t)$  и фактическую область контакта  $A_r(t)$ .

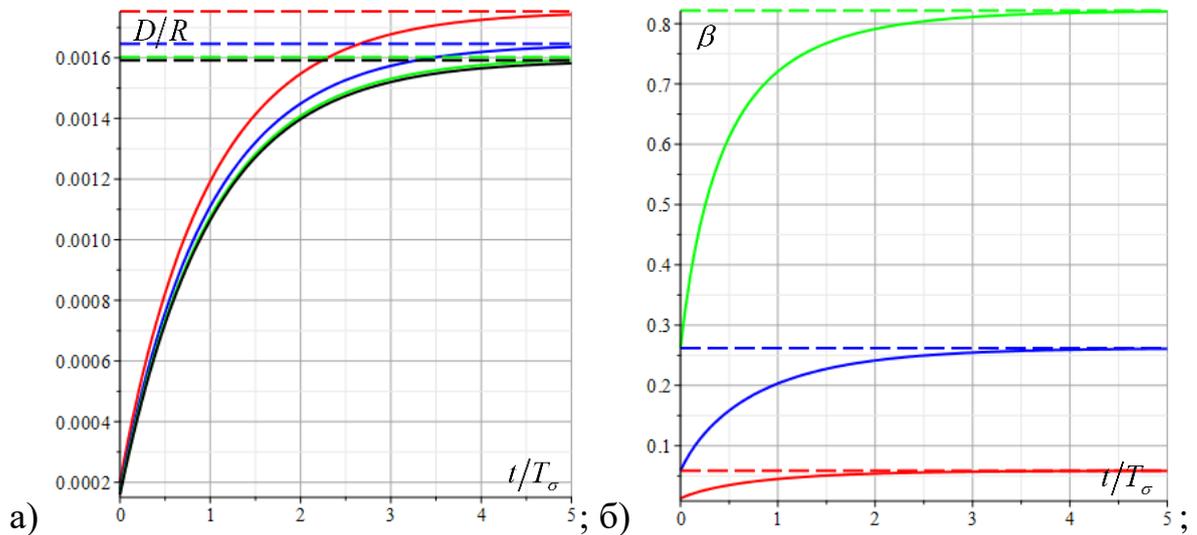
На рис.37 представлены временные зависимости глубины внедрения  $D(t)$  цилиндра в слой (а) и функции  $\beta(t)$ , которая характеризует отношение фактической площади контакта  $A_r(t)$  к номинальной  $A_n$  (б) для разных значений расстояния между неровностями, то есть шага гексагональной решетки. Пунктиром на графиках отмечен случай упругого слоя, то есть когда  $T = 1$ . Черная линия на рис.37(а) соответствует цилиндру с гладкой торцевой поверхностью. Из результатов следует, что наличие шероховатости на поверхности цилиндра ведет к увеличению глубины внедрения в каждый момент времени. И чем больше расстояние между неровностями, тем больше величина  $D(t)$ . При этом, как и следовало ожидать, уменьшение плотности расположения неровностей на поверхности цилиндра ведет к уменьшению фактической площади контакта. Так, для рассматриваемых значений шага гексагональной решетки она составляет на больших временах десятые доли номинальной области контакта, а в начале процесса взаимодействия – менее семи сотых.

Так как влияние на дополнительную податливость слоя вследствие шероховатости контактирующей поверхности цилиндра такие безразмерные параметры, как  $s$  и  $C$ , определяющие форму неровностей, были исследованы в п.4.2, то проанализируем влияние на контактные макрохарактеристики характерного размера неровностей  $R_a$ . На рис.38 представлены зависимости глубины внедрения цилиндра в слой и относительной фактической области контакта от времени для разных значений отношения  $R_a$  к радиусу цилиндра  $R$ . Пунктирные линия на графиках соответствуют упругому случаю, а черная линия на рис.38(а) – цилиндру с гладкой торцевой поверхностью. Из результатов следует, что увеличение характерного размера неровностей  $R_a$  относительно радиуса цилиндра  $R$  ведет к уменьшению глубины внедрения цилиндра в слой и к увеличению фактической площади контакта в каждый момент времени. При этом

влияние изменения величины  $R_a$  на глубину внедрения незначительно, что не скажешь для фактической области контакта, которая может увеличиться в десятки раз.

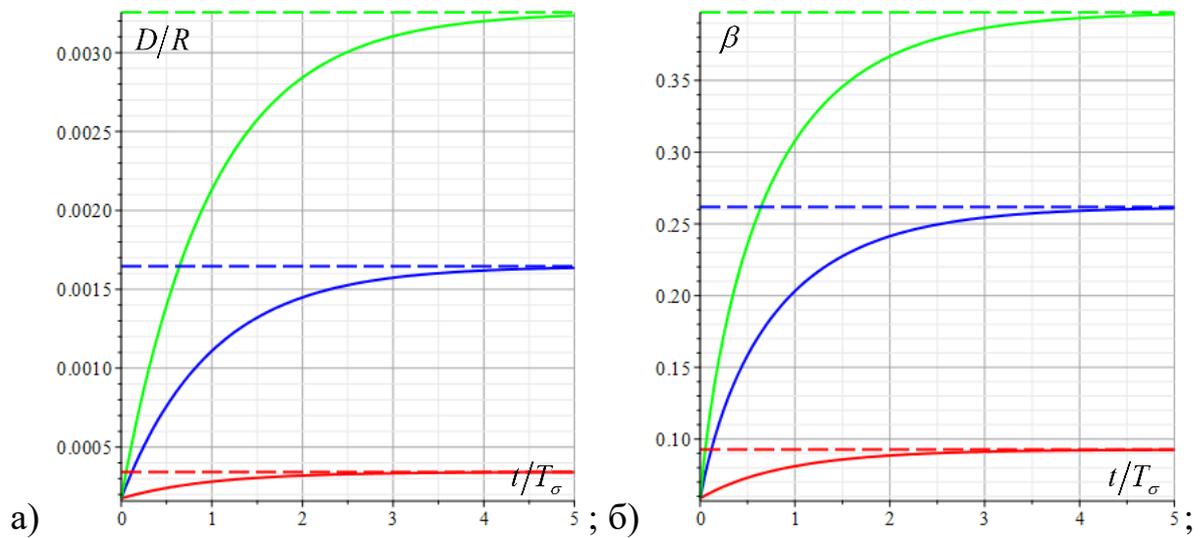


**Рисунок 37.** Зависимость глубины внедрения (а) и функции  $\beta$  (б) от времени для модели стандартного вязкоупругого тела с  $T=10$  при  $P_0 = 0.005E_0R^2/(1-\nu^2)$  и неровностей с  $s=2$ ,  $C=1$ ,  $R_a = 0.01R$  и  $l = 0.0025R$  (красная линия),  $l = 0.005R$  (синяя линия),  $l = 0.01R$  (зеленая линия)



**Рисунок 38.** Зависимость глубины внедрения (а) и функции  $\beta$  (б) от времени для модели стандартного вязкоупругого тела с  $T=10$  при  $P_0 = 0.005E_0R^2/(1-\nu^2)$  и неровностей с  $l = 0.0025R$ ,  $s=2$ ,  $C=1$  и  $R_a = 0.001R$  (красная линия),  $R_a = 0.01R$  (синяя линия),  $R_a = 0.1R$  (зеленая линия)

На рис.39 представлены графики временных зависимостей глубины внедрения и относительной фактической площади контакта для разных значений коэффициента  $T$  слоя, характеризующего его вязкоупругие свойства. Из результатов следует, что при фиксированном мгновенном модуле упругости  $E_0$  увеличение коэффициента  $T$  ведет к увеличению и глубины внедрения цилиндра в слой, и фактической площади контакта в каждый момент времени. При этом увеличение коэффициента  $T$  в десять раз (с  $T=2$  до  $T=20$ ) увеличивает фактическую площадь контакта до четырех раз, а глубину внедрения – до восьми. На больших же временах все зависимости стремятся к постоянным значениям, характерным процессу внедрения шероховатого цилиндра в упругий слой с длительным модулем упругости  $E_\infty = E_0 T_\sigma / T_\varepsilon$ .

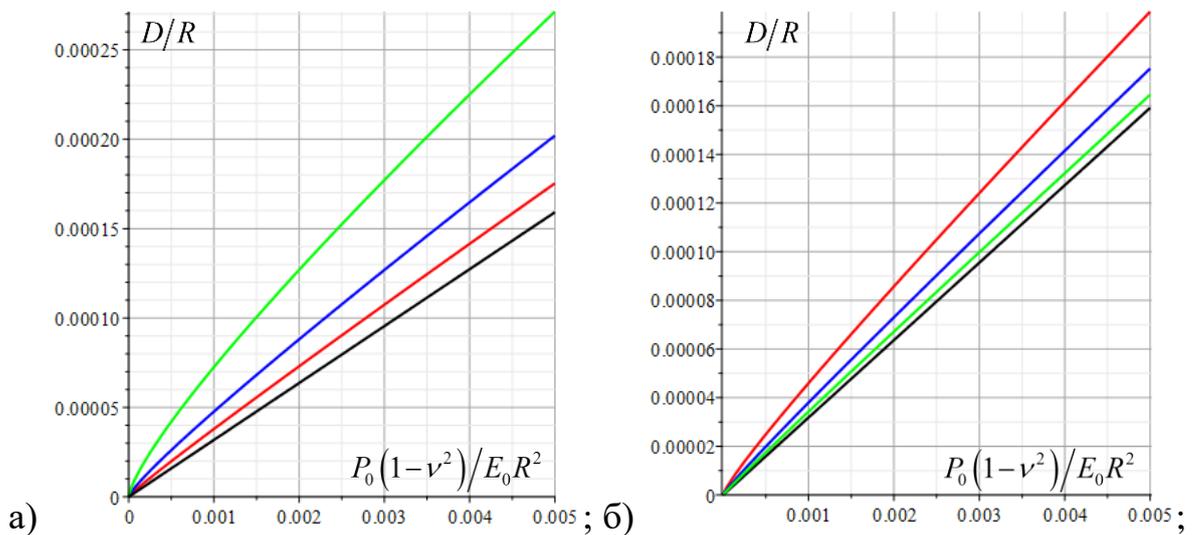


**Рисунок 39.** Зависимость глубины внедрения (а) и функции  $\beta$  (б) от времени для модели стандартного вязкоупругого тела с  $T = 2$  (красная линия),  $T = 10$  (синяя линия),  $T = 20$  (зеленая линия) при  $P_0 = 0.005E_0R^2/(1-\nu^2)$  и неровностей с

$$l = 0.0025R, s = 2, C = 1 \text{ и } R_a = 0.01R$$

Проанализируем также зависимость глубины внедрения цилиндра в слой от величины приложенной к нему нагрузки в фиксированный момент времени. Это позволит исследовать влияние шероховатости поверхности цилиндра на нормальную контактную жесткость, характеризуемую отношением нагрузки к глубине внедрения. На рис.40 представлены зависимости глубины внедрения

цилиндра в слой от величины приложенной к нему нагрузки для разных значений расстояний между неровностями (а) и их характерных размеров (б). Черные линии на графиках соответствуют случаю цилиндра с гладкой поверхностью. Как следует из результатов, в этом случае глубина внедрения зависит от нагрузки линейно, то есть величина жесткости постоянна. Наличие же шероховатости на поверхности цилиндра ведет к уменьшению величины жесткости и отклонению зависимости глубины внедрения от нагрузки от линейного вида. При этом, чем дальше расположены неровности и чем меньше их характерный размер, тем жесткость будет меньше.



**Рисунок 40.** Зависимость глубины внедрения цилиндра в слой в момент времени  $t = T_\sigma$  от приложенной к нему нагрузки для неровностей с  $s = 2$ ,  $C = 1$ ,  $R_a = 0.01R$  (а) и  $l = 0.0025R$  (красная линия),  $l = 0.005R$  (синяя линия),  $l = 0.01R$  (зеленая линия);  $l = 0.0025R$  (б) и  $R_a = 0.001R$  (красная линия),  $R_a = 0.01R$  (синяя линия),  $R_a = 0.1R$  (зеленая линия)

Стоит также отметить, что изменение расстояния между неровностями оказывает большее влияние на величину жесткости, чем изменение характерных размеров неровностей. В работе [123] проведен подробный теоретический и экспериментальный анализ зависимости нормальной жесткости от микрогеометрии контактирующей поверхности тел. Там также отмечено, что наличие шероховатости контактирующих поверхностей ведет к уменьшению величины жесткости и чем дальше расположены неровности, тем больше

жесткость будет отличаться от номинального значения, то есть случая гладких поверхностей.

#### 4.5. Выводы

В данной главе рассмотрена задача о внедрении в вязкоупругий слой жесткого цилиндра с плоским шероховатым основанием. Шероховатость торцевой поверхности цилиндра моделируется периодической системой одинаковых осесимметричных неровностей. Исследован случай тонкого слоя и постоянной нагрузки, приложенной к цилиндру. Задача рассмотрена на двух масштабных уровнях: микроуровень, соответствующий размеру отдельного пятна контакта, и макроуровень, соответствующий размерам основания цилиндра. На каждом масштабном уровне получены аналитические выражения зависимостей контактных характеристик от времени и исследовано влияние на них микрогеометрии контактирующей поверхности цилиндра.

Решение задачи на микроуровне, а именно задачи о внедрении в вязкоупругое полупространство периодической системы штампов, получено в третьей главе. В данной главе исследовано влияние формы штампов на размеры отдельного пятна контакта и функцию дополнительного смещения. Показано, что увеличение показателя степени функции  $f(r)$ , описывающей форму неровностей, ведет к увеличению размеров пятен контакта и уменьшению функции дополнительного смещения. К аналогичному результату ведет и уменьшение значения безразмерной константы, входящей в функцию  $f(r)$ .

Решение задачи на макроуровне строится с применением континуальной модели шероховатости, то есть введением в основное определяющее уравнение задачи дополнительной податливости. Определяющее соотношение задачи о внедрении цилиндра в вязкоупругий слой получено с использованием аппроксимации тонкого слоя и принципа соответствия. Дополнительная податливость слоя равна функции дополнительного смещения, найденной для

вязкоупругого случая при решении периодической задачи на микроуровне. Получено выражение для глубины внедрения в слой и для фактической площади контакта. Для модели стандартного вязкоупругого тела исследованы зависимости от времени глубины внедрения и относительной фактической площади контакта, а также проанализировано влияние на них микрогеометрии контактирующей поверхности цилиндра и вязкоупругих свойств материала слоя. Показано, что наличие шероховатости ведет к увеличению глубины внедрения в каждый момент времени. При этом чем менее плотно расположены неровности на поверхности цилиндра, тем глубже он будет погружен в слой. Для упругого случая также исследовано влияние шероховатости на величину нормальной жесткости. Получено, что зависимость глубины внедрения от приложенной нагрузки в отличие от случая гладкого цилиндра не является линейной, особенно для малых значений нагрузок.

Таким образом, показано, что учет шероховатости контактирующих поверхностей важен при исследовании контактных характеристик на макроуровне. Особенно это имеет значение при большой дискретности поверхностей, то есть при больших расстояниях между неровностями или при малых контактных плотностях. Пренебрежение микрогеометрией тел может приводить к ошибочным результатам как при определении жесткости системы, так и при оценке фактической контактной площади.

## Заключение

Целью проведённого исследования являлась разработка методов решения задач единичного и множественного контакта упругих и вязкоупругих тел, а также анализ влияния параметров микрогеометрии поверхностей контактирующих тел и их механических свойств на характеристики контактного взаимодействия (распределение контактного давления, область фактического контакта, связь приложенной нагрузки с глубиной внедрения).

К основным результатам работы относятся

- 1) решение задачи контактного взаимодействия с упругим полупространством ограниченной системы одинаковых штампов со сферической формой контактирующих поверхностей и узких в плане штампов с учетом их взаимного влияния и исследование влияния пространственного расположения штампов на распределение нагрузок между ними;
- 2) постановка и решение контактной задачи о внедрении с постоянной скоростью в вязкоупругое полупространство, описываемое моделью стандартного вязкоупругого тела, единичного цилиндра с различной формой торцевой поверхности и анализ влияния формы цилиндра и вязкоупругих свойств материала полупространства на зависимость приложенной к цилиндру нагрузки от времени;
- 3) решение задачи о внедрении с постоянной скоростью в вязкоупругий слой, описываемый моделями с экспоненциальной и степенной функциями релаксации, с дальнейшим удержанием на заданной глубине цилиндрического штампа с плоским основанием в приближении тонкого и толстого слоев, а также анализ поведения зависимости нагрузки, приложенной к штампу, от времени на каждой стадии процесса;
- 4) построение решения задач контакта с упругим полупространством одноуровневой и двухуровневой периодической системы одинаковых осесимметричных штампов различной формы и оценка влияния плотности

расположения штампов, их формы и высотного распределения на характеристики контакта;

- 5) расширение метода локализации на периодические контактные задачи для вязкоупругих тел и решение контактной задачи о внедрении в вязкоупругое полупространство одноуровневой системы осесимметричных штампов, а также анализ влияния вязкоупругих свойств полупространства и геометрических характеристик периодической системы штампов (форма поверхности единичного штампа и плотность их расположения) на характеристики контактного взаимодействия;
- 6) построение решения контактной задачи на макроуровне о внедрении под действием постоянной нагрузки в вязкоупругий слой цилиндра с плоской шероховатой торцевой поверхностью и исследование влияния микрогеометрии контактирующей поверхности цилиндра на зависимость глубины внедрения и фактической площади контакта от времени.

**Список литературы**

1. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // J. Reine und angew. Mathematik. 1882. № 92. P. 156-171.
2. Демкин Н.Б., Рыжов Э.В. Качество поверхности и контакт деталей машин. М.: Машиностроение, 1981. 244 с.
3. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
4. Любичева А.Н. Установившееся решение периодической задачи об изнашивании композиционного материала вязкоупругим телом // Трение и износ. 2006. Т. 27, № 5. С. 465-472.
5. Шмелев А.В., Котов С.Ю., Беляев Г.Я. Численное исследование напряженно-деформированного состояния деталей подшипников качения // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. 2017. Т. 68, № 1. С. 27-32.
6. Горячева И.Г., Красник В.Г., Чекина О.Г. Сопротивление породы проникновению штампа вблизи стенки скважины // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1992. Т. 28, №1. С. 39-44.
7. Dargahi J., Najarian S., Najarian K. Development and three-dimensional modelling of a biological-tissue grasper tool equipped with a tactile sensor // Can. J. Electr. Comput. Eng. 2005. V. 30, № 4. P. 225-230.
8. Тобольский А. Свойства и структура полимеров. М: Химия. 1964. 322 с.
9. Бранков Г. Основы биомеханики. М.: Мир, 1981. 254 с.
10. Goryacheva I.G. Mechanics of discrete contact // Tribol. Int. 2006. V. 39, № 5. P. 381-386.
11. Kragelsky I.V., Demkin N.B. Contact area of rough surfaces // Wear. 1960. V. 3, № 3. P. 170-187.
12. Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces // Proc. Math. Phys. Eng. Sci. 1966. V. 295, № 1442. P. 300-319.
13. Bush A., Gibson R., Thomas T. The elastic contact of a rough surface // Wear. 1975. V. 35, № 1. P. 87-111.

14. McCool J.I. Comparison of models for the contact of rough surfaces // *Wear*. 1986. V. 107, № 1. P. 37-60.
15. Greenwood J.A., Tripp J.H. The elastic contact of rough spheres // *J. Appl. Mech.* 1967. V. 34, № 1. 1967. P. 153-159.
16. Voss R.F. Fractals in nature: From characterization to simulation // *The Science of Fractal Images*, eds. Peitgen H.O. and Saupe D. Springer-Verlag, New York. 1988. P. 21-70.
17. Mandelbrot B., Passoja D., Paullay A. Fractal character of fracture surfaces of metals // *Nature*. 1984. V. 308, № 19. P. 721-722.
18. Höhr A., Neumann H., Schmidt P., Pfeifer P., Avnir D. Fractal surface and cluster structure of controlled-pore glasses and Vycor porous glass as revealed by small-angle x-ray and neutron scattering // *Phys. Rev. B*. 1988. V. 38, № 2. P. 1462-1467.
19. Бородич Ф.М., Мосолов А.Б. Фрактальная шероховатость в контактных задачах // *ПММ*. 1992. Т. 56, № 1. С. 786-795.
20. Majumdar A., Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces // *J. Tribol.* 1991. V. 113, № 1. P. 1-11.
21. Ciavarella M., Delfino V., Demelio G. A “re-vitalized” Greenwood and Williamson model of elastic contact between fractal surfaces // *J. Mech. Phys. Solids*. 2006. V. 54, № 12. P. 2569-2591.
22. Afferrante L., Carbone G., Demelio D. Interacting and coalescing Hertzian asperities: A new multiasperity contact model // *Wear*. 2012. V. 278-279. P. 28-33.
23. Ciavarella M., Greenwood J.A., Paggi M. Inclusion of “interaction” in the Greenwood and Williamson contact theory // *Wear*. 2008. V. 265, № 5-6. P. 729-734.
24. Carbone G. A slightly corrected Greenwood and Williamson model predicts asymptotic linearity between contact area and load // *J. Mech. Phys. Solids*. 2009. V. 57, № 7. P. 1093-1102.

25. Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G. The contact of elastic regular wavy surfaces // *Int. J. Mech. Sci.* 1985. V. 27, № 6. P. 383–396.
26. Tsukanov I.Y. An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces // *Tribol. Lett.* 2019. V. 67, № 4. 107.
27. Горячева И.Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // *ПММ.* 1998. Т. 62, № 6. С. 1036-1044.
28. Огар П.М., Горохов Д.Б., Елсуков В.К. Упругий контакт жесткой шероховатой поверхности с низко модульным полупространством // *Проблемы механики и машиностроения.* 2017. Т. 34, № 2. С. 7-12.
29. Collins W.D. Some coplanar punch and crack problems in three-dimensional elasticity // *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.* 1963. V. 274, № 1359. P. 507-528.
30. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е. Об одной задаче предельного равновесия для неограниченного хрупкого тела с трещиной // *Прикл. механика.* 1070. Т. 6, № 6. С. 25-29.
31. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
32. Андрейкив А.Е., Дубецкий С.А. Давление системы четырех штампов на упругое полупространство. *Прикл. механика.* 1973. Т. 9, № 6. С. 102-104.
33. Марзицин Б.М., Попов Г.Я. Пространственная контактная задача с двумя круговыми участками контакта // *Прикл. механика.* 1975. Т. 11, № 9. С. 8-15.
34. Gladwell G.M.L., Fabrikant V.I. The interaction between a system of circular punches on an elastic half space // *J. Appl. Mech.* 1982. V. 49, № 2. P. 341-344.
35. Fabrikant V.I. Several Elliptical Punches on an Elastic Half Space // *J. Appl. Mech.* 1986. V. 53, № 2. P. 390-394.
36. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
37. Goryacheva I.G., Dobychin M.N. Multiple contact model in the problems of tribomechanics // *Tribol. Int.* 1991. V. 24, № 1. P. 29-35.

38. Андрейкив А.Е. Вдавливание в упругое полупространство системы штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. №2. С. 125-131.
39. Александров В.М., Шматкова А.А. Вдавливание параболического штампа в упругий слой и двух параболических штампов в упругое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1998. №4. С. 149-155.
40. Аргатов И.И. Давление на упругое полупространство системы штампов в форме эллиптических параболоидов // Изв. АН СССР. МТТ. 2001. №2. С. 54-64.
41. Аргатов И.И., Назаров С.А. Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта // В кн. Механика контактных взаимодействий / Под ред. Воровича И.И. и Александрова В.М. М.: Физматлит, 2001. С. 73-82.
42. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270 с.
43. Горячева И.Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // ПММ. 1979. Т. 43, № 1. 1979. С. 99-105.
44. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
45. Громов В.Г. К вопросу о решении граничных задач линейной вязкоупругости // Механика полимеров. 1967. Т. 3, № 6. С. 999-1008.
46. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. М.: Мир, 1965. 199 с.
47. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 340 с.
48. Lee E.H. Stress analysis in visco-elastic bodies // Q. Appl. Math. 1955. V. 13, № 2. P. 183-190.
49. Cheng L., Xia X., Yu W., Scriven L., Gerberich W. Flat-punch indentation of viscoelastic material // J. Polym. Sci. B Polym. Phys. 2000. V. 38, № 1. P. 10-22.
50. Radok J.R.M. Visco-elastic stress analysis // Q. Appl. Math. 1957. V. 15, № 2. P. 198-202.

51. Lee E.H., Radok J.R.M. The contact problem for viscoelastic bodies // J. Appl. Mech. 1960. V. 27, № 3. P. 438-444.
52. Hunter S.C. The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half space // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8, № 4. P. 219-234.
53. Graham G.A.C. The contact problem in the linear theory of viscoelasticity // Int. J. Eng. Sci. 1965. V. 3, № 1. P. 27-46.
54. Yang W.H. The contact problem for viscoelastic bodies // J. Appl. Mech. 1966. V. 33, № 2. P. 395-401.
55. Ting T.C.T. The contact stresses between a rigid indenter and a viscoelastic half-space // J. Appl. Mech. 1966. V. 33, № 4. P. 845-854.
56. Graham G.A.C. The contact problem in the linear theory of viscoelasticity when the time dependent contact area has any number of maxima and minima // Int. J. Eng. Sci. 1967. V. 5, № 6. P. 495-514.
57. Ting T.C.T. Contact problems in the linear theory of viscoelasticity // J. Appl. Mech. 1968. V. 35, № 2. P. 248-254.
58. Greenwood J.A. Contact between an axisymmetric indenter and a viscoelastic half-space // Int. J. Mech. Sci. 2010. V. 52, № 6. P. 829-835.
59. Argatov I.I., Popov V.L. Rebound indentation problem for a viscoelastic half-space and axisymmetric indenter - Solution by the method of dimensionality reduction // J. Appl. Math. 2016. V. 96, № 8. P. 956-967.
60. Graham G.A.C. The correspondence principle of linear viscoelasticity theory for mixed boundary value problems involving time-dependent boundary regions // Q. Appl. Math. 1968. V. 26, № 2. P. 167-174.
61. Ting T.C.T. A mixed boundary value problem in viscoelasticity with time-dependent boundary regions // Developments in Mechanics. Proceedings of the 11th Midwestern Mechanics Conference. 1969. P. 591-599.
62. Vandamme M., Ulm F.-J. Viscoelastic solutions for conical indentation // Int. J. Solids Struct. 2006. V. 43, № 10. P. 3142-3165.
63. Creton C., Leibler L. How does tack depend on time of contact and contact pressure? // J. Polym. Sci. B Polym. Phys. 1996. V. 34, № 3. P. 545-554.

64. Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M. The mechanics of tack: Viscoelastic contact on a rough surface // *J. Polym. Sci. B Polym. Phys.* 2000. V. 38, № 11. P. 1485-1495.
65. Deladi E.L., de Rooij M.B., Schipper D.J. Deterministic model for rubber-metal contact including the interaction between asperities // *Proceedings of the World Tribology Congress III.* 2005. P. 329-330.
66. Abuzeid O.M. A linear viscoelastic creep-contact model of a flat fractal surface: Kelvin-Voigt medium // *Ind. Lubr. Tribol.* 2004. V. 56, № 6. P. 334-340.
67. Abuzeid O.M., Eberhard P. Linear viscoelastic creep model for the contact of nominal flat surfaces based on fractal geometry: standard linear solid (SLS) material // *J. Tribol.* 2007. V. 129, № 3. P. 461-466.
68. Persson B.N.J., Albohr O., Creton C., Peveri V. Contact area between a viscoelastic solid and a hard, randomly rough, substrate // *J. Chem. Phys.* 2004. V. 120, № 18. P. 8779-8793.
69. Persson B.N.J. Theory of rubber friction and contact mechanics // *J. Chem. Phys.* 2001. V. 115, № 8. P. 3840-3861.
70. Papangelo A., Ciavarella M. Viscoelastic normal indentation of nominally flat randomly rough contacts // *Int. J. Mech. Sci.* 2021. V. 211, № 1. 106783.
71. Persson B.N.J. Relation between interfacial separation and load: A general theory of contact mechanics // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99, № 12. 125502.
72. Manners W., Greenwood J.A. Some observations on Persson's diffusion theory of elastic contact // *Wear.* 2006. V. 261, № 5-6. P. 600-610.
73. Огар П.М., Шермета Р.Н., Лханаг Д. Герметичность металлополимерных стыков шероховатых поверхностей. Братск: Издательство БрГУ, 2006. 159 с.
74. Огар П.М., Беляева О.В., Алпатов Ю.Н. Контактное взаимодействие жесткой шероховатой поверхности с упругим полупространством через слой вязкоупругого покрытия // *Системы. Методы. Технологии.* 2011. Т. 10, № 2. С. 10-14.

75. Ju Y., Zheng L. A full numerical solution for the elastic contact of three-dimensional real rough surfaces // *Wear*. 1992. V. 157, № 1. P. 151-161.
76. Stanley H.M., Kato T. An FFT-based method for rough surface contact // *J. Tribol.* 1997. V. 119, № 3. P. 481-485.
77. Rostami A., Jackson R.L. Predictions of the average surface separation and stiffness between contacting elastic and elastic-plastic sinusoidal surfaces // *Proc. IMechE Part J: J. Engineering Tribology*. 2013. V. 227, № 12. P. 1376-1385.
78. Jackson R.L., Streater J.L. A multi-scale model for contact between rough surfaces // *Wear*. 2006. V. 261, № 11-12. P. 1337-1347.
79. Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.F. The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // *Tribol. Lett.* 2014. V. 56, № 1. P. 171-183.
80. Bemporad A., Paggi M. Optimization algorithms for the solution of the frictionless normal contact between rough surfaces // *Int. J. Solids Struct.* 2015. V. 69-70. P. 94-105.
81. Kalliorinne K., Larsson R., Pérez-Ràfols F., Liwicki M., Almqvist A. Artificial neural network architecture for prediction of contact mechanical response // *Front. Mech. Eng.* 2021. V. 6. 579825.
82. Kozhevnikov I.F., Duhamel D., Yin H.P., Feng Z.-Q. A new algorithm for solving the multi-indentation problem of rigid bodies of arbitrary shapes on a viscoelastic half-space // *Int. J. Mech. Sci.* 2010. V. 52, № 3. P. 399-409.
83. Dubois G., Cesborn J., Yin H.P., Anfosso-Lédée F. Macro-scale approach for rough frictionless multi-indentation on a viscoelastic half-space // *Wear*. 2011. V. 272, № 1. P. 69-78.
84. Chen W.W., Wang Q.J., Huan Z., Luo X. Semi-analytical viscoelastic contact modeling of polymer-based materials // *J. Tribol.* 2011. V. 133, № 4. 041404.
85. Spinu S., Cerlinka D. Modelling of rough contact between linear viscoelastic materials // *Model. Simul. Eng.* 2017. V. 2017. 2521903.

86. Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью // Российский журнал биомеханики. 2017. Т. 21, № 4. С. 418-428.
87. Yakovenko A., Goryacheva I., Dosaev M. Contact characteristics of medical forceps indentation to soft tissue // EuCoMeS 2018. Mechanisms and Machine Science. 2019. V. 59. P. 3-10.
88. Яковенко А.А. Внедрение цилиндра с различной формой торцевой поверхности в вязкоупругое полупространство // Российский журнал биомеханики. 2020. Т. 24, № 3. С. 344–363.
89. Горячева И.Г., Яковенко А.А. Моделирование внедрения цилиндра в вязкоупругий слой // Изв. РАН. МТТ. 2020. Т. 55, № 5. С. 64-75.
90. Yakovenko A., Goryacheva I. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // Tribol. Int. 2021. V. 161. 107078.
91. Горячева И.Г., Яковенко А.А. Внедрение в тонкий вязкоупругий слой жесткого цилиндра с плоским шероховатым основанием // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 5. С. 22-37.
92. Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью // Сборник тезисов докладов Международной молодежной научной конференции «XLIII Гагаринские Чтения». 2017. С. 372.
93. Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью // Труды 60-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Аэрокосмические технологии. 2017. С. 21-23.
94. Яковенко А.А., Горячева И.Г. Внедрение зажимного инструмента в мягкую ткань // Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские Чтения». Секция механики. 2018. С.199-200.
95. Горячева И.Г., Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия мягких тканей с медицинским инструментом //

- Материалы XIII Всероссийской (с международным участием) конференции «Биомеханика-2018». 2018. С. 22.
96. Yakovenko A.A., Goryacheva I.G. Forceps surface geometry effect in contact with soft tissue // APM 2018. Book of Abstracts. 2018. P. 105.
97. Горячева И.Г., Яковенко А.А. Задачи механики контактных взаимодействий при разработке зажимных медицинских инструментов // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды IX международной конференции. 2018. С. 128-132.
98. Яковенко А.А. Влияние формы индентора на контактные характеристики взаимодействия с вязкоупругим основанием // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов «МИКМУС-2019»: Сборник трудов конференции. 2020. С. 269-272.
99. Яковенко А.А. Внедрение жесткого цилиндра с различной формой основания в вязкоупругое полупространство // «Гагаринские Чтения - 2020»: Сборник трудов секции «Механика и моделирование материалов и технологий». 2020. С. 121.
100. Яковенко А.А. Внедрение штампа в вязкоупругое основание при наличии пригрузки // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XX Международной конференции. 2020. С. 193.
101. Yakovenko A.A., Goryacheva I.G. Indentation of biomaterials with relaxation properties // International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics». Book of Abstracts. 2020. P. 79-80.
102. Горячева И.Г., Яковенко А.А. Задача о внедрении жесткого цилиндра в вязкоупругий слой // Ломоносовский чтения. Научная конференция. Секция механики. Октябрь 2020 года. Тезисы докладов. 2020. С. 74-75.
103. Яковенко А.А., Горячева И.Г. Моделирование взаимодействия с вязкоупругим полупространством системы параболических штампов // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Тезисы докладов. 2021. С. 216-217.

104. Яковенко А.А. Внедрение периодической системы инденторов в вязкоупругое полупространство под действием возрастающей нагрузки // Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции «XLVII Гагаринские чтения 2021». 2021. С. 1094.
105. Yakovenko A.A., Goryacheva I.G. Cylinder indentation into a viscoelastic layer taking into account the surface microrelief // XLIX International Conference “Advanced Problems in Mechanics” June 21-25, St. Petersburg, Russia. APM, BOOK OF ABSTRACTS. 2021. P. 76.
106. Yakovenko A.A., Goryacheva I.G. Indentation of a spherical punch into a viscoelastic base in the presence of additional loading // 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics – Book of Abstracts. 2021. P. 1655-1656.
107. Яковенко А.А. Влияние формы неровностей на характеристики периодического дискретного контакта // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2021, посвященная 60-летию первого полета человека в космос. Тезисы докладов. 2021. С. 158.
108. Яковенко А.А., Горячева И.Г. Моделирование внедрения цилиндра с шероховатым основанием в вязкоупругий слой на двух масштабных уровнях // Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Аэрокосмические технологии. 2021.
109. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
110. Almuramady N., Borodich F.M., Goryacheva I.G., Torskaya E.V. Damage of functionalized self-assembly monomolecular layers applied to silicon microgear MEMS // Tribol. Int. 2019. V. 129. P. 202-213.
111. Маховская Ю.Ю. Моделирование адгезионного взаимодействия деформируемых тел: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук: 01.02.04. М., 2017. 286 с.
112. Fu G. Theoretical study of complete contact indentations of viscoelastic materials // J. Mater. Sci. 2004. V. 39, № 8. P. 2877-2878.

113. Spinu S., Cerlinca D. The viscoelastic contact between high-order polynomial surfaces // *TEHNOMUS Journal*. 2018. V. 25. P. 15-20.
114. Chen D.-L., Yang P.-F., Lai Y.-S. A review of three-dimensional viscoelastic models with an application to viscoelasticity characterization using nanoindentation // *Microelectron. Reliab.* 2012. V. 52, № 3. P. 541-558.
115. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.
116. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
117. Александров В.М., Бабешко В.А., Кучеров В.А. Контактные задачи для упругого слоя малой толщины // *ПММ*. 1966. Т. 30, № 1. С. 124-142.
118. Park S.W. Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control // *Int. J. Solids Struct.* 2001. V. 38, № 44-45. P. 8065-8092.
119. Маховская Ю.Ю. Дискретный контакт упругих тел при наличии адгезии // *Изв. РАН. МТТ*. 2003. № 2. С. 49-61.
120. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 277 с.
121. Spinu S., Cerlinca D. A robust algorithm for the contact of viscoelastic materials // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2016. V. 145, № 4. 042034.
122. Александров В.М. Некоторые контактные задачи для упругого слоя // *ПММ*. 1963. Т. 27, № 4. С. 758-764.
123. Li S., Yao Q., Li Q., Feng X.-Q., Gao H. Contact stiffness of regularly patterned multi-asperity interfaces // *J. Mech. Phys. Solids*. 2018. V. 111. P. 277-289.