

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Афанасьев Владислав Сергеевич

**ПОВЫШЕНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ**

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Баничук Н.В.

Москва - 2022

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Моделирование механического поведения продольно движущегося материала при постоянной и непостоянной транспортной скорости.....	30
1.1. Нестационарные поперечные колебания термоупругой панели, продольно движущейся с постоянной скоростью	31
1.1.1. Основные соотношения, описывающие механическое поведение продольно движущейся панели	31
1.1.2. Анализ неустановившихся колебаний панели	34
1.1.3. Примеры применения метода Галёркина	35
1.2. Поперечные колебания неразрезного ортотропного материала при постоянной транспортной скорости.....	44
1.2.1. Основные соотношения.....	44
1.2.2. Оценка мембранного и изгибного сопротивления термоупругой ортотропной пластины	47
1.3. Движение материала с непостоянной скоростью, учет вклада составляющей гравитационного воздействия в продольное натяжение движущегося полотна.....	50
1.3.1. Основные соотношения.....	51
1.3.2. Приведение определяющего уравнения динамики к гипергеометрическому уравнению Гаусса	53
1.4. Выводы.....	56
Глава 2. Устойчивость продольного движения материалов при термомеханических воздействиях	58
2.1. Устойчивость движущейся продольно термоупругой неразрезной панели	58

2.2. Устойчивость продольно движущегося ортотропного термоупругого полотна	62
2.3. Об устойчивости нагретого полотна при движении по цилиндрической поверхности	67
2.3.1. Основные соотношения для движущегося полотна.....	68
2.3.2. Стационарный случай.....	70
2.3.3. Движение вдоль кругового цилиндра	71
2.4. Об устойчивости продольного движения вязкого материала	78
2.4.1. Основные соотношения.....	79
2.4.2. Стационарное решение.....	80
2.4.3. Исследование устойчивости	81
2.5. Выводы.....	83

Глава 3. Вопросы оптимизации в задачах о повышении стабильности продольного движения материалов	85
3.1. Оптимальное подавление поперечных колебаний вращающихся упругих стержней.....	85
3.1.1. Основные соотношения задачи оптимизации для вращающегося упругого стержня	86
3.1.3. Итерационный алгоритм для вращающегося упругого стержня.....	91
3.1.4. Пример приближенного решения задачи оптимизации для вращающегося упругого стержня	92
3.2. О гашении колебаний быстро вращающихся дисков	97
3.2.1. Основные соотношения задачи оптимизации для упругого вращающегося диска	98
3.2.2. Сопряженная система и необходимые условия оптимальности для упругого вращающегося диска.....	101
3.2.3. Алгоритм определения управляющих воздействий.....	104
3.2.4. Реализация метода Галёркина для упругого вращающегося диска .	105
3.2.5. Пример построения решения для упругого вращающегося диска...	107

3.3 Оптимизация структуры продольно движущегося слоистого полотна .	109
3.3.1. Постановка задачи для слоистого полотна	110
3.3.2. Оптимизация структуры слоистого полотна.....	114
3.3.3. Численное решение на основе генетического алгоритма.....	116
3.4. Выводы.....	123
Заключение.....	125
Список литературы	127
Список рисунков	141

Введение

Обзор основных исследований по механике движущихся материалов

Изучение нестационарных поперечных колебаний и устойчивости однородных термоупругих, ортотропных или слоистых продольно движущихся материалов является одним из приоритетных направлений в области механики движущихся деформируемых твердых тел. Примеры движущихся материалов можно видеть во многих технологических процессах. Это струны, ленты, ремни, мембраны, полотна и пластинчатые системы, которые широко используются в производстве или являются продукцией этого производства, например, в производстве бумаги. Важной частью изучения движения материалов является поиск критических скоростей и условий потери устойчивости, при которых движущиеся материалы теряют стабильность. Зачастую это приводит к порче продукции, поломкам оборудования, чрезмерным тратам материалов и крупным финансовым потерям.

Многие подробно изученные традиционные движущиеся тонкостенные элементы конструкций, такие, например, как крылья самолетов или части оболочек ракет, не относятся к рассматриваемым в работе движущимся материалам, так как могут быть исследованы как стационарные объекты в Лагранжевой (движущейся вместе с телом) системе координат. Для движущихся материалов такая точка зрения в данной работе не рассматривается. Рассмотрение движения материала по мере прохождения наблюдаемого участка в исключительно Лагранжевой постановке не представляется эффективным, как это было бы сделано в классической строительной механике, потому что в данном случае в постановке Лагранжа границы наблюдаемого участка находятся в движении. Изучаемые в работе движущиеся с высокой скоростью материалы рассматриваются в Эйлеровой (стационарной) системе координат, когда материал движется, а граничные

условия принимаются стационарными. Движение материала в Эйлеровой постановке меняет характер проблемы, поднимая новые вопросы. Как известно, изменение системы координат не изменит поведения изучаемой физической системы, но следует иметь в виду, что ключевым фактором при рассмотрении движения в Эйлеровой постановке является инерция движущегося материала, которая вызывает инерционные эффекты. Это приводит к необходимости учета инерционных воздействий, включая Кориолисовы силы.

Движущиеся материалы, как правило, моделируются одномерными или двумерными элементами (струны, мембраны, балки, пластины), совершающими продольное движение и поперечные колебания. При исследовании устойчивости и поиске критических значений удобно создавать математическую модель, которая значительно упрощает задачи, связанные с движением материала, при этом обеспечивая понимание исследуемых явлений, качественно и количественно.

Рассмотрим пример математической модели механики бумагоделательного процесса. Серьёзной и известной проблемой является то, что измерения внутри бумагоделательной машины либо очень дороги, либо зачастую невозможны. Более того, полностью детально отследить модель всего процесса целиком невозможно даже с использованием доступных сегодня вычислительных методов и мощностей. Контроль и анализ подобных систем и увеличение их эффективности – это цели, которых можно достичь путем моделирования. Важнейшим параметром в анализе таких систем является скорость движущегося материала. Используя теорию малых смещений, которая линеаризует поведение материала в простейшей модели равновесия, мы можем найти такие критические условия и критическое значение для скорости материала, достигнув которых, деформации и колебания материала начинают неограниченно нарастать. Чтобы подробно изучить устойчивость продольно движущегося материала, необходимо

включить в модель технологического процесса различные возможные возмущения, например, такие как неоднородность натяжений материала. Низкая изгибная жесткость материала также способствует увеличению относительной значимости инерционных эффектов, в том числе возникающих при механических взаимодействиях с окружающей средой (воздухом, жидкостью), особенно, когда материал достаточно легкий и инерционный вклад окружающего воздуха на ускорение материала является значимым. Важно также учитывать такие факторы, как влияние структурной неоднородности материала, температурных воздействий, а также неопределенностей, вызванных несовершенствами технологии (например, непостоянной скоростью) или начальными дефектами структуры.

Увеличение скорости движения является тем требованием, которое лежит в основе рентабельности производства, обеспечивает его экономическую эффективность. При этом движение должно оставаться стабильным. Для расширения диапазона допустимых скоростей и повышения стабильности движения необходимо определить критические значения скорости, при которых наступает неустойчивость, установить зависимость этих значений от основных параметров, и подобрать эти параметры наилучшим образом.

При определенных условиях (например, при приложении внешних воздействий) в системе могут возникнуть нестационарные поперечные колебания. Для подавления возникающих поперечных колебаний и повышения стабильности движения в этом случае может быть применен метод «активного» воздействия с использованием систем актюаторов. Важной проблемой в этом направлении является разработка оптимальной программы приложения гасящих нагрузок.

Анализ устойчивости имеет богатую историю. Стабильность параболических форм, частично погруженных в однородную среду была рассмотрена в двухтомном труде Архимеда «О плавучих телах». Эти книги,

датируемые третьим веком до н.э., можно рассматривать как самые старые работы по анализу устойчивости из сохранившихся [1] (Russo (2004)).

Современный анализ статической устойчивости берет начало с таких работ как исследование Эйлером в 1766 г. [2] дифференциального уравнения, описывающего изгиб балки. Метод Эйлера был расширен анализом динамической устойчивости линейных упругих систем Болотина [3] (1963 г.). Согласно [4] (Mote и Wickert (1991)), нестабильное поведение некоторых продольно движущиеся материалов математически схоже с продольным изгибом колонны, находящейся под давлением, что позволяет применять статические и динамические методы к движущимся материалам.

Первое исследование в области движущихся материалов было проведено в [5] (Skutch (1897)) и первоначально издавалось на немецком языке. Первая англоязычная статья по этой теме была опубликована полвека спустя [6] (Sack (1954)). В этих исследованиях рассматривались колебания движущейся струны. Вскоре интерес к этой области механики возрос. В исследовании [7] (Archibald и Emslie (1958)) несколько лет спустя были представлены два способа вывода уравнения движущейся струны. Первое аналитическое решение задачи движущейся струны касалось свободных колебаний. Оно было получено в [8] (Swore и Ames (1963)) с использованием метода преобразования координат.

Проблемы динамики и устойчивости движущихся материалов в современном виде были впервые рассмотрены в статье [9] (Mote (1972)). Собственные частоты колебаний в таких работах обычно анализируются вместе с устойчивостью. Влияние аксиального движения полотна на частотный спектр и собственные функции колебаний исследовались в работах [7,10] (Archibald и Emslie (1958) и Simpson (1973)). В этих статьях было показано, что собственная частота каждой моды уменьшается при увеличении транспортной скорости, и что движущиеся струна и балка испытывают дивергенцию на достаточно высокой скорости. Однако в случае струны эти

результаты были противопоставлены выводам работы [11] (Wang и др. (2005)), которые, с использованием механики Гамильтона, показали, что идеальная струна остается устойчивой на любой скорости. Дальнейшие исследования движущейся балки были проведены в работах [12] (Parker (1998)), а также [13] (Kong и Parker (2004)), где было получено приближенное аналитическое выражение для собственных частот движущихся балок с малой изгибной жесткостью.

Были сделаны прогнозы реакции опоры для конкретных случаев, таких как гармоническое воздействие [14] (Miranker (1960)) или постоянная поперечная точечная сила [15] (Chonan (1986)). Произвольные возбуждения и начальные условия были проанализированы с помощью модального анализа и метода функции Грина в статье [16] (Wickert и Mote (1990)). В результате были явно определены критические скорости движущихся струн и балок.

Потеря устойчивости изучалась с применением динамических и статических методов в статье [17] (Wickert (1992)). С помощью численного анализа было показано, что во всех случаях неустойчивость возникает при нулевой частоте а критическая скорость совпадает с соответствующей скоростью, полученной из статического анализа.

Исследования двумерных моделей также проводились с 1990-х годов. В [18] (Lin и Mote (1995)) изучалась продольно движущаяся мембрана в двумерной формулировке, и определялось распределение напряжений при поперечной нагрузке. В статье [19] (Shin et al. (2005)) изучены плоские колебания продольно движущейся мембраны. Также путем численного анализа ими было установлено, что для мембраны с граничными условиями без учета трения, динамическая устойчивость сохраняется до достижения критической скорости, при которой возникает статическая неустойчивость (выпучивание, отклонение от оси продольного движения, дивергенция). В [20] (Lin и Mote (1996)) продолжили свое исследование, предсказав неустойчивость, сопровождающуюся образованием морщин или складок

полотна (wrinkling) в случае небольшой изгибной жесткости. Lin продолжил исследования устойчивости в работе [21] (1997).

Было обнаружено, что проблема колебаний для продольно движущегося материала не является тривиальной. В силу того, что материал считается непрерывным в продольном направлении, уравнение движения для поперечных колебаний будет содержать дополнительные члены, представляющие Кориолисову и центробежную силы, действующие на материал. Следовательно, резонансные частоты будут зависеть от продольной скорости аксиально движущегося материала, как отмечено в [7] (Archibald и Emslie (1958) а также, [8] Swope и Ames (1963), [10] Simpson (1973) и [22] Mujumdar и Dauglas (1976)).

В 1970-х годах было обнаружено, что еще один важный фактор влияет на устойчивость продольного движения материала, особенно в случаях, когда материал считается легким. Этим фактором является взаимодействие между материалом и окружающей средой [23 – 25] (Баничук Н.В., Миронов А.А. (1975, 1976, 1979)). Известно влияние взаимодействия между движущимся материалом и окружающим воздухом на критическую скорость [26,27] (Pramila (1986), Frondelius et al. (2006)) и динамику реакции материала [28] (Kulachenko et al. (2007)). Перечисленные исследования были посвящены бумагоделательным машинам, но схожие феномены имеют место в других областях. Например, это отражено в работе [29] (Hosaka и Crandall (1992)), посвященной колебаниям эластичного диска, вращающегося над слоем воздуха.

Простейший подход, позволяющий рассматривать жидкостные взаимодействия – это предположить потенциальный поток. Таким образом, окружающий воздух считается несжимаемым и невязким, а поток считается безвихревым. Экспериментальные исследования и некоторые теоретические оценки, например, в [26] (Pramila (1986)), показывают, что в случае нормальных колебаний, сопоставление экспериментальных и теоретических

результатов выявляет, что предположения, основанные на теории потенциального потока находятся приблизительно в пределах 10% от результатов экспериментальных измерений. Для того, чтобы решить задачу гидродинамики и вычислить реакцию окружающей среды, использовался метод конечных элементов, например, в [30] (Niemi и Pramila (1986)).

Тесно связанной с выше описанными явлениями является проблема реакции стационарного материала на окружающий аксиально движущийся поток. Было отмечено, что эта проблема, в свою очередь, связана с классической задачей о трубе, транспортирующей жидкость. Однако, случай материала, окруженного аксиальным потоком жидкости, является более сложным чем случай трубы из-за необычной природы аэродинамических реакций. Проблемы гибких конструкций в аксиальном потоке были широко изучены и описаны в двухтомной работе [31] (Païdoussis (2004)).

Возвращаясь к движущимся материалам, отметим, что динамические свойства движущихся пластин были изучены в [32] (Shen et al. (1995)), а также в [19,33] (Shin et al. (2005), Shin C. H. and Chung J. T. (2004)). Свойства движущегося бумажного полотна исследовались в двухтомной работе [34] (Kulachenko et al. (2007)). Результаты, показывающие, что дивергенция при продольном движении балок наступает при существенно высоких скоростях, были получены также для балок и пластин, взаимодействующих с внешней средой, в работах [35] (Chang и Moretti (1991), [36,37] (Banichuk et al. (2010a, 2011a)). Некоторые особенности задач об устойчивости и колебаниях прямоугольных пластин обсуждались в работе [38] (Баничук, Ишлинский (1995)). В [39,40] (Banichuk et al. (2010b, 2011b)) исследования проведены для двумерной модели полотна, рассматриваемого как движущаяся пластина, подверженная однородному натяжению, но без влияния внешней среды. Далее эти исследования были продолжены в [41] (Banichuk et al. (2013)) и [42] (Tuovinen (2011)) для случая с линейным неоднородным распределением натяжения.

Механическое поведение бумажного полотна в условиях, когда не возникает его разрушение, то есть в условиях непрерывного безаварийного производственного процесса, может быть удовлетворительно описано моделью упругой ортотропной пластины. Коэффициенты жесткости пластины, которые характеризуют натяжение и изгиб бумажного полотна, были оценены для различных типов бумаги во многих работах. Отметим, например, статьи [43–46] (Göttsching и Baumgarten (1976), Thorpe (1981), Skowronski и Robertson (1985) и Seo (1999)). Деформационные свойства листа бумаги при растягивающем напряжении или деформации используются при моделировании осевого движения бумажного полотна. В частности, эти свойства важны для моделирования неустойчивости полотна.

В работе [47] (Natami et al. (2009)), свободные колебания движущейся ортотропной прямоугольной пластины были изучены для докритических и сверхкритических скоростей, а также флаттер и дивергенция пластины при сверхкритической скорости. Эта работа ограничивается исследованием в условиях шарнирного опирания на всех границах. Фундаментальные вопросы, связанные с исследованием движения ортотропного материала, обсуждались в книге [48] (Marynowski (2008)).

Свободные колебания стационарных ортотропных прямоугольных пластин также были подробно изучены. Классической цитируемой работой в этой области является книга [49] (Gorman (1982)). В [50] (Biancolini et al. (2005)) рассмотрены все комбинации шарнирно опертых и жестко защемленных граничных условий. В [51] (Xing и Liu (2009)) получены такие же решения для свободных колебаний стационарных прямоугольных ортотропных пластин. В этой работы были рассмотрены три комбинации шарнирно опертых (*S* – simply supported) и жестко защемленных (*C* – clamped) граничных условий: *SSCC*, *SCCC* и *CCCC*. Вибрации и выпучивание нагруженных стационарных ортотропных пластин были изучены в [52] (Kshirsagar и Bhaskar (2008)). Были определены критические нагрузки

выпучивания для всех комбинаций граничных условий, (S), (C) и (F – свободный край).

В последнее время исследователи уделяют большое внимание моделям материала, которые также являются важным инструментом в анализе устойчивости движущегося полотна. Разнообразные применяемые материалы часто имеют вязкоупругие характеристики (см., например, работу [53] (Fung et al. (1997))), и, как следствие, вязкоупругие движущиеся материалы были широко изучены. В производстве бумаги влажные участки бумажного полотна очень вязкие и, следовательно, вязкоупругость должна быть взята в расчёт в моделях (например, в работе [54] (Alava и Niskanen (2006))). Также известно, что могут возникать явления пластичности [55] (Erkkilä et al. (2013)).

Первые исследования поперечных колебаний вязкоупругих материалов, движущихся между двумя шарнирными опорами были сделаны в работе [53] (Fung et al. (1997)) для модели струны. Продолжая это исследование, авторы изучили эффекты демпфирования материала в [56] (Fung et al. (1998)).

Различные исследования движущихся вязкоупругих материалов, касающиеся струн и балок были проведены в первом десятилетии XXI века. В [57] (Chen и Zhao (2005)) представлен модифицированный метод конечных разностей для упрощения нелинейной модели аксиально движущейся вязкоупругой струны и были численно изучены свободные поперечные колебания упругих и вязкоупругих струн. В [58,59] (Oh et al. (2004), Lee и Oh (2005)) изучены критические скорости, собственные значения и натуральные моды продольно движущихся вязкоупругих балок с использованием модели спектральных элементов. Было исследовано динамическое поведение продольно движущихся вязкоупругих балок с помощью модального анализа, произведен детальный анализ собственных значений и установлено, что вязкоупругость не влияет на критическую скорость балки.

Сравнение двух различных моделей внутреннего демпфирования для движущихся нелинейно вязкоупругих балок было проведено в [60] (Marynowski и Kapitaniak (2002)). Для линеаризованной модели Кельвина-Фойгта было обнаружено, что балка испытывает дивергенцию при некоторой критической скорости. В случае нелинейной модели Бюргерса, критическая скорость падала, когда внутреннее демпфирование возрастало, и было обнаружено, что потеря устойчивости балки наступает в форме флаттера.

Также были проведены исследования поперечных колебаний продольно движущихся вязкоупругих пластин. В [61] (Yang et al. (2012)) изучались колебания, бифуркация и неопределенность продольного движения вязкоупругих пластин с помощью метода конечных разностей и нелинейной модели поперечных смещений. Исследование концентрировалось на бифуркации и неопределенности, но также изучались динамические характеристики линеаризованной упругой модели с помощью анализа собственных значений.

Вопрос о том, какую производную по времени (материальную или частную) применять в определяющих соотношениях для вязкоупругих движущихся материалов, обсуждался в случае широко используемой модели Кельвина-Фойгта. В [62] (Mockensturm и Guo (2005)) было предложено использовать материальную производную. Были изучены нелинейные колебания и динамическая реакция продольно движущихся вязкоупругих струн и обнаружены серьезные несоответствия в частотах, при которых наблюдаются нетривиальные предельные циклы, при сравнении моделей с материальными производными по времени и моделей с частными производными. Материальные производные по времени были использованы во многих исследованиях, касающихся продольно движущихся вязкоупругих балок (например, в работах [63 – 66] (Chen et al. (2008), Chen и Ding (2010), Chen и Wang (2009), и Ding и Chen (2008)). В [67] (Kurki и Lehtinen (2009)) независимо было предложено при исследовании внутривоскостных

перемещений движущейся вязкоупругой пластины в определяющих соотношениях использовать материальные производные по времени.

Результаты, обобщающие многолетние исследования авторов в области механики движущихся материалов отражены в монографии [68] (Banichuk et al. (2014)). Основное внимание в книге уделяется динамике поперечных колебаний и анализу устойчивости изотропных и ортотропных движущихся упругих и вязкоупругих материалов с учетом и без взаимодействия жидкости с конструкцией с использованием аналитических и полуаналитических подходов. Также обсуждаются такие темы, как разрушение и усталость, в контексте движущихся материалов. Последняя часть книги посвящена задачам оптимизации, связанным с физическими ограничениями, возникающими в результате анализа устойчивости и усталости, включая неопределенности в данных о параметрах.

В работе [69] (Kurki et al. (2016)) анализируется поле осевых напряжений для движущегося материала в модели Кельвина-Фойгта. Устойчивость продольного движения пластины Кирхгоффа с учетом взаимодействия с потенциальным потоком воздуха или жидкости в направлении, перпендикулярном движению пластины, обсуждалась в [70] (Jeronen, J., Saksa, T., Tuovinen, T. (2016)). Было показано, что даже при малых скоростях обтекающего потока форма потери устойчивости пластины в поперечном направлении может стать антисимметричной. Исследование [71] (Saksa, T., Jeronen, J. (2016)) анализу устойчивости продольно движущихся вязкоупругих балок в модели Пойнтинга-Томсона. Термомеханическое воздействие на движущиеся материалы учитывалось наряду с внутрисекторным натяжением в [72 – 75] (Баничук Н.В., Иванова С.Ю. (2016), Баничук Н.В., Афанасьев В.С., Шевченко А.В. (2018), Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. (2018), Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Афанасьев В.С. (2018)). Отметим также работы [76,77] (Chen L.-Q., Tang Y.-Q. (2012), Chen L.-Q. (2013)), где изучались

вопросы устойчивости ускоренно движущихся вязкоупругих балок и пластин с учетом переменности сил натяжения.

В монографии [78] (N. Vanichuk, A. Barsuk, J. Jeronen, et al. (2020).) в систематической форме были представлены основы теории продольно движущихся материалов, включая модели как упругих, так и вязкоупругих материалов, а также связь между балочными и панельными математическими моделями, обсуждены вопросы, возникающие при формулировании граничных условий именно для продольно движущихся материалов. Были проанализированы некоторые задачи с продольно движущимися изотропными и ортотропными упругими пластинами, получены аналитические решения для свободных колебаний продольно движущихся струн с демпфированием и без него. Была подробно представлена простая модель взаимодействия потока жидкости и продольно движущейся в этом потоке панели.

Как уже отмечалось выше, для подавления возникающих поперечных колебаний и повышения стабильности движения может быть применен метод «активного» воздействия на движущийся материал с использованием систем актюаторов. Проблемам управления динамическими колебательными системами посвящено много исследований. Отметим в данном контексте монографию [79] (Черноусько, Акуленко, Соколов (1980)), где были развиты приближенные методы оптимального управления, опирающиеся на сочетание теории оптимального управления и теории колебаний. В книге [80] (Баничук, Карпов, Климов и др. (1997)), посвященной механике больших космических конструкций, среди прочих аспектов исследовались вопросы управления сложными гибкими объектами. Методы гашения колебаний элементов механических конструкций с распределенными параметрами, таких как мембраны и струны, начали интенсивно развиваться с 70-х годов двадцатого века. Наиболее значимый вклад внесла работа [81] (Lagness J. (1983)), в которой управление процессом подавления колебаний осуществлялось с помощью функции, стоящей в правой части уравнения. Задачи оптимального проектирования упругих конструкций, оснащенных актюаторами, впервые

рассматривались в [82,83]. (Баничук Н.В., Братусь А.С. (1993), Banichuk N.V., Bratus A.S., Posviansky V.P. (1994)). На основе применения развитых методов управления системами с распределенными параметрами в стационарных системах [84,85] (Бутковский А.Г. (1975), Lions J.L. (1988)) численно были решены задачи подавления поперечных колебаний струн, балок и мембран [86 – 89] (Асланов С.Ж., Михайлов И.Е., Муравей Л.А. (2006), Атамуратов А.Ж., Михайлов И.Е., Муравей Л.А. (2016), Атамуратов А.Ж., Михайлов И.Е., Таран Н.А. (2018), Михайлов И.Е. (2019), Mikhailov I.E., Suvorov I.A. (2019)). Отметим, что в перечисленных выше работах [86 – 89] элементы конструкций не совершали аксиального (продольного) движения. В [90, 91] (Banichuk N. V., Ivanova S. Y. (2018), Banichuk N.V. et al. (2018)) были начаты исследования вопросов гашения поперечных колебаний продольно движущихся панелей при нестационарных нагрузках. Движение струны и упругого полотна рассматривалось также при численном решении в [92, 93] (Mikhailov I.E., Suvorov I.A. (2019, 2021)).

Актуальность темы и степень ее разработанности

Проблема изучения колебаний и устойчивости движущихся материалов с целью повышения стабильности движения является актуальной как в теоретическом плане, так и в прикладных аспектах, и соответствует проводимым в настоящее время фундаментальным и прикладным научным исследованиям в США, Канаде, Германии, Японии, Финляндии, Швеции и других странах. Изучение потери устойчивости движущихся материалов сводилось ранее к рассмотрению идеализированных систем и не включало многие существенные факторы. Вопросы подавления возникающих колебаний остаются слабо изученными, особенно это касается активного подавления колебаний и оптимизации управления процессом подавления колебаний движущихся материалов. Рассматриваемые в диссертации динамические процессы лежат в основе многих производств, таких как производство бумаги, картона, различных пленок и волокон, а также в основе

транспортных систем (движущиеся транспортерные ленты и ременные передачи). Актуальность темы заключается в необходимости разработки и применения новых математических моделей, описывающих динамику поведения движущихся материалов и включающих в рассмотрение термомеханические нагрузки, анизотропию, структурную неоднородность, непостоянство транспортной скорости и активную систему подавления колебаний.

Цели и задачи

Целью работы является разработка методов повышения стабильности продольного движения материалов на основе определения безопасных диапазонов изменения параметров, влияющих на динамический процесс, определения оптимальной структуры материала, а также оптимальной программы приложения к системе управляющих воздействий, гасящих возникающие колебания.

При проведении исследований были поставлены и решены следующие задачи:

1. Моделирование механического поведения продольно движущегося материала при постоянной и непостоянной транспортной скорости с учетом термомеханических воздействий, ортотропных свойств материала, структурной неоднородности (слоистые материалы) и возможности приложения активного воздействия для подавления колебаний.
2. Задачи об устойчивости в стационарной постановке (рассматривается явление дивергенции) продольного движения с постоянной скоростью упругих материалов при термомеханических воздействиях:
 - об устойчивости движущейся продольно термоупругой неразрезной панели;
 - об устойчивости продольно движущегося ортотропного термоупругого полотна;

- об устойчивости нагретого полотна при движении по цилиндрической поверхности;
 - об устойчивости продольного движения вязкого материала
3. Задачи повышения стабильности продольного движения материалов с применением оптимизационных методов, основанных на активных и пассивных подходах:
- оптимальное подавление поперечных колебаний вращающихся упругих стержней;
 - о гашении колебаний быстро вращающихся дисков;
 - оптимизация структуры продольно движущегося слоистого полотна с целью повышения критической скорости потери устойчивости.

Научная новизна работы заключается

- в построении и развитии новых моделей для описания динамики и устойчивого поведения движущегося материала с учетом взаимодействия с тепловыми полями, учетом структурной неоднородности, ортотропных материалов, особенностей технологического процесса, а также в применении этих моделей для решения ряда конкретных задач;
- в определении на основе выведенных соотношений критических величин для скорости и температуры, приводящих к потере устойчивости движения (дивергенции) и анализе зависимости этих величин от определяющих параметров задачи;
- в применении методов оптимизации, разработанных для систем с распределенными параметрами и основанных на проведении анализа чувствительности основных характеристик подавления колебаний (целевых функционалов) к вариациям управляющих воздействий и выводе необходимых условий оптимальности;

- в разработке и применении алгоритма последовательной оптимизации для построения оптимальных программ управляющих воздействий, подавляющих поперечные колебания материала и стабилизирующих его движение;
- в разработке и применении на основе полученных эффективных характеристик для слоистого материала оптимизационного метода поиска нелокального экстремума для определения наилучшего распределения слоев, максимизирующего критическую скорость продольного движения и повышающего, тем самым, стабильность процесса;
- в создании и применении вычислительной программы на основе эволюционных методов оптимизации (генетического алгоритма).

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы заключается в междисциплинарном подходе к рассматриваемой проблеме, разработке и применении новых математических моделей, описывающих динамику взаимодействия движущихся материалов с учетом взаимодействия с тепловыми полями, учетом структурной неоднородности, ортотропных свойств, особенностей технологического процесса и включающих в рассмотрение активную систему подавления колебаний. Отметим также разработку и применение для решения поставленных задач эффективных оптимизационных методов, включающих эволюционные и генетические алгоритмы, как для последовательной оптимизации программы подавляющих воздействий, так и для поиска оптимальных внутренних структур, обеспечивающих стабильность движения.

Практическая значимость работы заключается в возможности получения качественных и количественных оценок для основных параметров, характеризующих движение материалов в реальных технологических процессах, и применения этих оценок для расширения диапазона стабильного функционирования и роста экономической эффективности производства.

Методы исследования:

- полуаналитический метод решения начально-краевых задач с частными производными с помощью представлений решений в рядах (метод Галёркина);
- метод малого параметра;
- методы оптимизации для систем с распределенными параметрами, основанные на анализе чувствительности целевых функционалов задачи к вариациям основных параметров системы (переменных проектирования, управляющих функций) и выводе необходимых условий экстремума;
- эволюционные оптимизационные методы поиска нелокального экстремума на основе генетического алгоритма.

Положения, выносимые на защиту:

- методы решения задач повышения стабильности продольного движения материалов с учетом взаимодействия с тепловыми полями, наличием структурной неоднородности, ортотропных свойств, особенностей технологического процесса, а также системы активного подавления колебаний;
- методика определения оптимальных подавляющих воздействий для гашения колебаний движущегося материала на заданном отрезке времени с помощью выполнения итерационного алгоритма;
- методика определения оптимальной слоистой структуры движущегося материала с помощью численного метода на основе генетического алгоритма.

Достоверность результатов исследования обеспечена:

- сравнением полученных с использованием развитых моделей результатов, учитывающих дополнительные факторы, с ранее полученными решениями на основе более простых, идеализированных моделей;
- применением многократно апробированных методов, таких как метод Галёркина, метод малого параметра, методы оптимизации для систем с распределенными параметрами, анализ чувствительности, эволюционные

оптимизационные методы поиска нелокального экстремума на основе генетического алгоритма

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на всероссийской и трех международных конференциях:

- 1) 6th International Conference on Engineering Optimization. EngOpt 2018, Лиссабон, Португалия, 17 сентября - 19 ноября 2018;
- 2) Всероссийская конференция молодых учёных-механиков, YSM-2020, г. Сочи, 3-13 сентября 2020
- 3) XLVIII International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics” November 09-13, 2020, St. Petersburg, Russia, Санкт – Петербург, 9-13 ноября 2020
- 4) Международный Научный Симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвящённый 110-летию со дня рождения А.А.Ильюшина, Москва, 20-21 января 2021

Научные исследования, отраженные в диссертационной работе, осуществлялись в рамках выполнения тематики Госзадания ИПМех РАН (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) «Фундаментальные вопросы механики и оптимизации процессов деформирования, разрушения, износа и аддитивного роста элементов конструкций, работающих в нормальных и экстремальных условиях», гранта РФФ 17-19-01247 и грантов РФФИ: 17-08-00775, 20-08-00082а.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в работах, изданных в периодических научных изданиях и сборниках материалов международных и всероссийских конференций. Все статьи из списка публикаций напечатаны в журналах, входящих в перечень ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus.

Основные публикации:

1. Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Афанасьев В. С. Нестационарные поперечные колебания движущегося с постоянной скоростью термоупругого полотна // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2017. — № 11. — С. 78–83. = Banichuk N. V., Ivanova S. Y., Afanas'ev V. S. Nonstationary transversal vibrations of thermoelastic web with a constant velocity motion // Russian Mathematics. — 2017. — Vol. 61, no. 11. — P. 69–73.
2. Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Афанасьев В. С. Механика продольно движущегося и колеблющегося в поперечном направлении ортотропного термоупругого полотна // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2018. — № 7. — С.67–72. = Banichuk N. V., Ivanova S. Y., Afanas'ev V. S. Mechanics of axially moving and vibrating in transverse direction orthotropic thermoelastic web // Russian Mathematics. — 2018. — Vol. 62, no. 7. — P. 58–62.
3. Баничук Н. В., Афанасьев В. С., Шевченко А. В. О неустойчивости продольного движения вдоль цилиндрической поверхности термоупругого полотна, моделируемого растягиваемой нагретой струной // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2018. — № 2. — С.44–47. = Banichuk N. V., Afanas'ev V. S., Shevchenko A. V. Instability of a longitudinal movement along the cylindrical surface for a thermoelastic web simulated by stretched and heated string // Mechanics of Solids. — 2018. — Vol. 53, no. 2. — P. 156–158.
4. Banichuk N. V., Ivanova S. Y., Afanas'ev V. S. On axial constant acceleration movement and small transverse vibrations of membrane panel // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40, no. 3. — P. 274–277.
5. Optimization of axially moving layered web / N. Banichuk, S. Ivanova, A. Sinitsin, V. Afanas'ev // EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International

- Conference on Engineering Optimization. — Springer International Publishing, 2019. — P. 657–665.
6. Баничук Н. В., Афанасьев В. С., Иванова С. Ю. О статической бифуркации движущейся нагретой панели, обтекаемой идеальной жидкостью // Прикладная математика и механика. — 2020. — Т. 84, № 2. — С. 234–241. = Banichuk N. V., Afanas'ev V. S., Ivanova S. Y. On the static bifurcation of a moving heated panel streamlined by an ideal fluid // Mechanics of Solids. — 2020. — Vol. 55, no. 7. — P. 1071–1076.
 7. Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Афанасьев В. С. О поперечных колебаниях продольно движущихся панелей, описываемых гипергеометрическим уравнением // Проблемы прочности и пластичности. — 2020. — Т. 82, № 1. — С. 16–23.
 8. Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Афанасьев В. С. Об устойчивости одномерного движения вязкого материала // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2020. — № 10. — С. 86–90. = Banichuk N. V., Ivanova S. Y., Afanas'ev V. S. On stability of one-dimensional movement of viscous material // Russian Mathematics. — 2020. — Vol. 64, no. 10. — P. 79–82.
 9. Афанасьев В. С., Баничук Н. В. Оптимальное подавление поперечных колебаний вращающихся упругих стержней // Проблемы прочности и пластичности. — 2021. — Т. 83, № 1. — С. 49–60.
 10. Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Афанасьев В. С. Гашение поперечных колебаний быстро вращающегося диска // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2022. — № 1. — С. 68–76. = Banichuk N. V., Ivanova S. Y., Afanas'ev V. S. Damping the transverse vibrations of a rapidly rotating disc // Mechanics of Solids. — 2022. — Vol. 57, no. 1. — P. 57–64.

Личный вклад автора

В работах (1-4,6,7) математические постановки задач были предложены научным руководителем Н.В. Баничуком, автор участвовал в выполнении необходимых математических выкладок, в том числе для примеров применения полуаналитического метода Галёркина, им проведены самостоятельно соответствующие расчеты и построены графики, результаты обсуждались совместно с соавторами статей. В работе (5) постановка задачи и анализ результатов были проведены совместно с соавторами, автором самостоятельно написана вычислительная программа и проведены расчёты. В работах (8-10) автор принимал участие в обсуждении постановок и методах решения задач, расчеты для конкретных примеров были проведены им самостоятельно, анализ результатов проведен вместе с научным руководителем Н.В. Баничуком.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём работы составляет 142 страницы, включая 37 рисунков и одну таблицу. Список литературы содержит 120 наименований.

Во **Введении** представлен обзор современного состояния исследований в области механики движущихся материалов, сформулированы основные цели и задачи диссертационной работы, обоснованы актуальность, научная новизна, теоретическая и практическая значимость исследования. Также перечислены основные публикации по теме диссертации.

В **Главе 1** разработаны механические модели и выведены основные соотношения для исследования динамики движущихся материалов, которые учитывают взаимодействия с тепловыми полями, наличие ортотропных свойств материала, а также некоторые особенности технологических процессов. Приведены примеры применения этих моделей для расчета неустановившихся поперечных колебаний. В разделе 1.1 представлены в безразмерной форме основные соотношения для продольно движущегося и

совершающего поперечные колебания упругого полотна, подверженного термомеханическим нагрузкам, и предложен метод расчета неустановившихся термоупругих колебаний. Полотно моделируется упругой неразрезной панелью, движущейся с постоянной транспортной скоростью через систему роликовых опор (шарнирное опирание). Рассмотрение проводится в Эйлеровой системе координат и ограничивается одним пролетом. В разделе 1.2 рассматривается продольное движение с постоянной транспортной скоростью ортотропного термоупругого материала, моделируемого неразрезной термоупругой пластиной. Учитывались тепловые деформации натяжения и изгиба движущейся пластины. Основное внимание уделено уравнению продольного движения и поперечным деформациям ортотропного термоупругого материала. Раздел 1.3 посвящен изучению движения материала с непостоянной скоростью с учетом вклада составляющей гравитационного воздействия в продольное натяжение движущегося полотна. Материал моделируется неразрезной мембранной панелью. Предполагается, что соседние опоры расположены на разных уровнях по высоте относительно друг друга, что реализуется, например, в сушильной части бумагоделательной машины в соответствии с технологическими условиями производства. Осевое движение мембранной панели является ускоренным и происходит под действием заданного продольного натяжения и аксиальной составляющей гравитационного воздействия. Выводится уравнение, описывающее движение панели, и показывается, что с помощью ряда преобразований оно может быть сведено к гипергеометрическому уравнению Гаусса, решение которого можно представить в виде гипергеометрического ряда.

В **Главе 2** на основе применения моделей, предложенных в Главе 1, решены некоторые задачи об устойчивости продольного движения материалов в стационарной постановке (задачи о дивергенции), определены факторы, влияющие на критические параметры устойчивости движения материала, и даны рекомендации по повышению стабильности. В разделе 2.1 исследуется

устойчивость движущейся продольно термоупругой неразрезной панели, испытывающей температурное воздействие, и определяется критическая температура, при которой реализуется статическая форма потери устойчивости (дивергенция) панели при заданных значениях осевого натяжения и транспортной скорости. Также приведено выражение для зависимости величины критической скорости движения панели от температуры и других параметров задачи. Построены графики, иллюстрирующие изменение критических величин скорости и температуры. Раздел 2.2 посвящен задаче о дивергенции ортотропной термоупругой панели (одномерной пластины). Получено выражение для критической скорости дивергенции с учетом нагрева и свойств ортотропного материала. Движение нагретого полотна вдоль гладкой цилиндрической поверхности рассматривается в разделе 2.3. Материал моделируется растягиваемой нагретой струной (одномерной мембраной). При действии центробежных сил и нагреве происходит «отлипание» материала и выпучивание в направлении, перпендикулярном цилиндрической поверхности (статическая форма потери устойчивости). Определена критическая скорость потери устойчивости для случая движения вокруг кругового цилиндра. В разделе 2.4 рассматривается одномерное движение растягиваемой струи (волокна) из вязкого материала. С применением законов сохранения массы и количества движения показано, что стационарное течение характеризуется экспоненциальным уменьшением толщины струи и согласованным экспоненциальным возрастанием ее скорости. Выводятся уравнения для возмущений переменных состояния, зависящие от определяющего параметра (обратного числу Рейнольдса), характеризующего комбинированное влияние вязкости, плотности, начальной скорости и длины рассматриваемого интервала. Для малых значений параметра первоначальные оценки позволяют предположить динамическую устойчивость одноосного движения материала.

Глава 3 посвящена применению оптимизационных подходов к вопросам повышения стабильности движения материалов. В ней также используются разработанные модели и учитывается наличие систем активного подавляющего воздействия на возникшие колебания. Построены оптимальные алгоритмы подавления колебаний для быстро вращающихся стержней и дисков. С помощью применения эволюционного численного метода поиска нелокального экстремума (генетический алгоритм) решена задача повышения стабильности движения слоистого полотна и найдено оптимальное распределение слоев. В разделе 3.1 рассмотрена задача о подавлении колебаний вращающегося стержня. Предложен итерационный алгоритм оптимального подавления возникающих поперечных колебаний на конечном интервале времени, основанный на применении метода Галёркина и выводе необходимых условий оптимальности. Приведен пример, иллюстрирующий реализацию предложенного алгоритма и показывающий эффективность указанного метода подавления колебаний. В разделе 3.2 рассматривается вращение тонкого упругого диска вокруг его оси. Предполагается, что диск жестко закреплен в центре и совершает малые поперечные колебания, описываемые в рамках мембранной модели. Для подавления колебаний гибкий диск подвергается внешним механическим воздействиям. Процесс демпфирования колебаний оценивается квадратичным энергетическим критерием и оптимизируется с применением современной теории оптимального управления. Выведены условия оптимальности, применяемые для подавления упругих колебаний на конечном интервале времени, и приведен разработанный итерационный алгоритм демпфирования колебаний, проиллюстрированный на примере аналитического определения стабилизирующего воздействия. Оптимизации структуры продольно движущегося слоистого полотна с целью максимизации критической скорости потери устойчивости посвящен раздел 3.3. Предполагается, что полотно симметрично составлено по отношению к срединной плоскости из упругих слоев, характеризующихся некоторыми основными параметрами: массой на

единицу площади, модулем Юнга, коэффициентом Пуассона и расстоянием от срединной плоскости. Выводятся аналитические выражения для эффективных характеристик полотна. В результате композитная структура может рассматриваться как эффективно изотропная и однородная пластина, для которой можно применять известные формулы, определяющие критическую скорость потери устойчивости. Критическая скорость дивергенции принимается в качестве оптимизируемого критерия качества. Формулируется изопериметрическая задача оптимизации, в которой роль изопериметрического условия играет полная масса пластины. Для решения сформулированной оптимизационной задачи максимизации критической скорости дивергенции за счет выбора наилучшего распределения слоев применяется эволюционный метод нелокальной оптимизации (генетический алгоритм).

В Заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. Николаю Владимировичу Баничуку. Автор также благодарит соавторов – С.Ю. Иванову, А.В. Сеницына, А.В. Шевченко и сотрудников Лаборатории механики и оптимизации конструкций ИПМех РАН за внимание, полезные замечания и поддержку в проведении исследований.

Глава 1. Моделирование механического поведения продольно движущегося материала при постоянной и непостоянной транспортной скорости

Изучение движения ленты, полотна или панели из упругого или термоупругого материала представляет собой важную теоретическую и прикладную задачу [68] (Banichuk N. et al. (2014)). Важные аспекты возникающей проблемы обусловлены влиянием температур, сил, действующих в плоскости движущегося полотна (панели), влиянием внешних сил, свойствами и структурой материала, а также факторами несовершенства [68]. Динамические исследования ранее проводились для движущихся полотен (материалов) в рамках одномерных [6, 7, 94, 10] (Sack R.A. (1954), Archibald F.R. and Emslie A.G. (1958), Mote C.D. (1968), Simpson A. (1973)) и двумерных [18, 21, 39, 36] (Lin C.C. and Mote C.D. (1995), Lin C.C. (1997), Banichuk N. et al. (2010b), Banichuk N. et al. (2010a)) моделей. При этом не учитывалось влияние ряда важных факторов, таких как влияние структурной неоднородности материала, температурных факторов, а также неопределенностей, вызванных несовершенствами технологии (например, непостоянной скоростью) или начальными дефектами структуры. В этой главе представлены некоторые механические модели, которые могут использоваться для исследования процессов динамического поведения упругих материалов с учетом термомеханических воздействий. На основе применения этих моделей во второй и третьей главах будут определены факторы, влияющие на критические параметры устойчивости движения материала, и даны рекомендации по повышению стабильности, а также построены оптимальные алгоритмы активного подавляющего воздействия на возникающие колебания.

1.1. Нестационарные поперечные колебания термоупругой панели, продольно движущейся с постоянной скоростью

В разделе приведены в безразмерной форме основные соотношения для продольно движущегося и совершающего поперечные колебания упругого полотна, подверженного термомеханическим нагрузкам, и предложен метод расчета неустановившихся термоупругих колебаний. Полотно моделируется упругой неразрезной панелью, движущейся с постоянной транспортной скоростью через систему роликовых опор (шарнирное опирание). Рассмотрение проводится в Эйлеровой системе координат и ограничивается одним пролетом.

1.1.1. Основные соотношения, описывающие механическое поведение продольно движущейся панели

Уравнение поперечных колебаний движущегося с постоянной скоростью V_0 вдоль оси Ox и опертого в точках $x = -l$, $x = l$ (рис. 1.1) термоупругого неразрезного полотна (неразрезной панели) толщины h ($h \ll l$) записывается в виде

$$m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \left(T_0 - \frac{Eh}{1-\nu} \varepsilon_0 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (1+\nu) \frac{\partial^2 \kappa_0}{\partial x^2} \right] + g(x, t), \quad (1.1)$$

$$(x, t) \in [-l \leq x \leq l] \times [0 \leq t < \infty),$$

где x и t – пространственная и временная переменные, m – масса, приходящаяся на единицу длины панели, $w = w(x, t)$ – поперечное перемещение, D – изгибная жесткость, известная также как цилиндрическая жесткость [95] (Тимошенко С.П. и Войновский-Кригер С (1975)) и определяемая выражением $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, l – половина пролета панели.

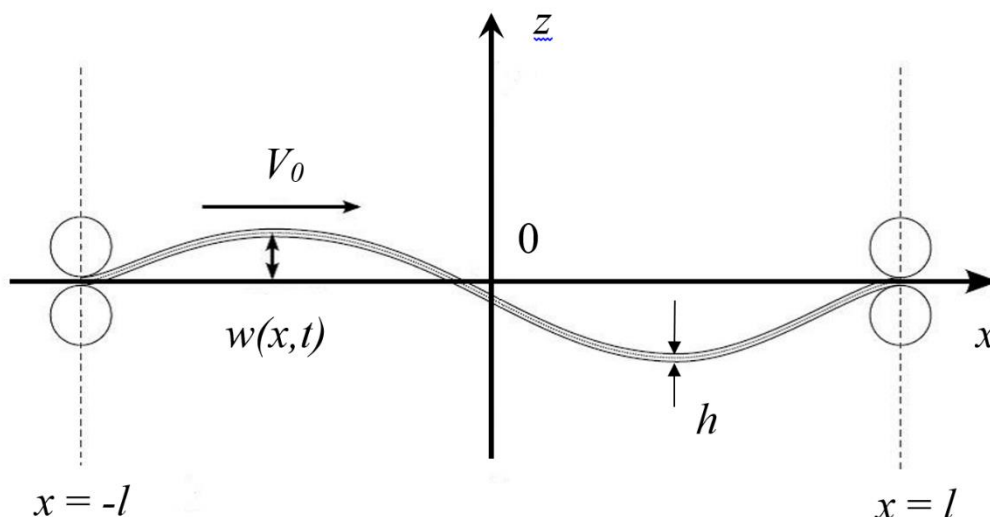


Рис. 1.1. Движущаяся неразрезная панель

Выражение, записанное в левой части уравнения (1.1) в круглых скобках, представляет собой вторую материальную производную (полное ускорение). Слагаемые $\partial^2 w / \partial t^2$, $2V_0 \partial^2 w / \partial x \partial t$, $V_0 \partial^2 w / \partial x^2$ описывают, соответственно, локальное, Кориолисово и центробежное ускорения. Выражение, записанное в правой части уравнения (1.1), включает восстанавливающую силу $T_0 \partial^2 w / \partial x^2$ заданного натяжения T_0 , упругое сопротивление изгибу $D \partial^4 w / \partial x^4$, температурные воздействия $(Eh \varepsilon_\theta / (1 - \nu)) \partial^2 w / \partial x^2$ и $D(1 + \nu) \partial^2 \kappa_\theta / \partial x^2$, а также прикладываемое внешнее силовое воздействие $g(x, t)$. Обобщенные тепловые деформации задаются формулами [96] (Коваленко А. Д. (1975))

$$\varepsilon_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_\theta \theta dz, \quad \kappa_\theta = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_\theta z \theta dz.$$

Здесь α_θ – коэффициент линейного теплового расширения, $\theta = \theta_\alpha - \theta_0$ – температурное отклонение, где θ_0 – температура, при которой отсутствуют тепловые деформации, а θ_α – действительная температура материала панели (θ , θ_α , θ_0 измеряются в градусах Кельвина). В дальнейшем предполагается,

что структура панели и распределение температур однородны по толщине панели, то есть $\alpha_0(z) = \text{const}$, $\theta(z) = \text{const}$, и, следовательно,

$$\varepsilon_0 = \alpha_0 \theta, \quad \kappa_0 = 0. \quad (1.2)$$

Введем для удобства безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{w}{h}(l\tilde{x}, \tau\tilde{t}), \\ \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{t}) &\equiv \frac{l}{T_0} g(l\tilde{x}, \tau\tilde{t}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

и обозначения

$$\alpha = \frac{l}{\tau} \left(\frac{m}{T_0} \right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{D}{l^2 T_0}, \quad \nu_0 = V_0 \left(\frac{m}{T_0} \right)^{1/2}, \quad e = \frac{Eh\alpha_0\theta}{(1-\nu)T_0}, \quad (1.4)$$

где l , h , τ – характерные параметры модели, а знак «тильда» у безразмерных величин в дальнейшем опускается. С использованием безразмерных величин (1.3), (1.4) и выражений (1.2) уравнение колебаний движущегося материала (1.1) записывается следующим образом:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\alpha\nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (\nu_0^2 + e - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = g(x, t) \quad (1.5)$$

в области независимых безразмерных переменных

$$(x, t) \in \Omega \quad (-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty). \quad (1.6)$$

Нестационарное уравнение в частных производных (1.5) реализуется в области Ω (1.6) при граничных условиях шарнирного опирания

$$w(-1, t) = 0, \quad w(1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(-1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1, t) = 0 \quad (1.7)$$

и следующих начальных условиях:

$$w(x, 0) = g_1(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = g_2(x). \quad (1.8)$$

Здесь $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – заданные при $-1 \leq x \leq 1$ начальное распределение поперечных перемещений и начальное распределение поперечных скоростей, соответственно.

1.1.2. Анализ неустановившихся колебаний панели

Для решения нестационарного уравнения в частных производных (1.5) с граничными и начальными условиями (1.7), (1.8), описывающего неустановившиеся колебания в области Ω (1.6), применим метод Галёркина и представим искомое решение в виде ряда

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \Psi_n(x), \quad (1.9)$$

в котором $\Psi_n(x)$ – функции формы

$$\Psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}(x+1)\right), \quad x \in [-1, 1], \quad (1.10)$$

удовлетворяющие граничным условиям (1.7), а $f_n(t)$ – неизвестные функции времени, подлежащие определению. С этой целью подставим (1.3), (1.4) в (1.5) и умножим (1.5) на $\Psi_j(x)$. После интегрирования возникающего произведения по переменной x на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ и выполнения элементарных преобразований с учетом выражений

$$A_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_n(x) \Psi_j(x) dx = \delta_{jn}, \quad (1.11)$$

$$B_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_j(x) \frac{d\Psi_n(x)}{dx} dx = \begin{cases} 0, & j = n, \\ \frac{nj}{n^2 - j^2} [(-1)^{j+n} - 1], & j \neq n, \end{cases} \quad (1.12)$$

$$C_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_j(x) \frac{d^2\Psi_n(x)}{dx^2} dx = -\left(\frac{j\pi}{2}\right)^2 \delta_{jn}, \quad (1.13)$$

$$D_{jn} = \int_{-1}^1 \Psi_j(x) \frac{d^4 \Psi_n(x)}{dx^4} dx = \left(\frac{j\pi}{2} \right)^4 \delta_{jn}, \quad (1.14)$$

$$G_j = \int_{-1}^1 \Psi_j(x) g(x, t) dx, \quad (1.15)$$

будем иметь систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha^2 A_{jn} \frac{d^2 f_n}{dt^2} + 2\alpha v_0 B_{jn} \frac{df_n}{dt} + [(v_0^2 + e - 1) C_{jn} + \beta D_{jn}] f_n \right\} - G_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

С учетом значений коэффициентов (1.11) – (1.14) и функций (1.15) (δ_{jn} – функция Кронекера) определение функций $f_n(t)$ сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.16) с начальными условиями

$$f_j(0) = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 \Psi_j(x) g_1(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.17)$$

$$\frac{df_j}{dt}(0) = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 \Psi_j(x) g_2(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

1.1.3 Примеры применения метода Галёркина

В качестве примера рассмотрим сначала случай применения метода Галёркина с одной функцией формы $\Psi_1(x)$ и функцией времени $f_1(t)$. Предположим, что заданы следующие распределения: $g_1(x) = \Psi_1(x)$, $g_2(x) = 0$, $x \in [-1, 1]$ и $g(x, t) = 1$ в области Ω . Определим функцию $G_1(t)$ по формуле (1.15)

$$G_1(t) = \int_{-1}^1 \Psi_1(x) g(x, t) dx = \int_{-1}^1 \sin\left(\pi \frac{x+1}{2}\right) dx = \frac{4}{\pi}.$$

Для определения функции времени $f_1(t)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\alpha^2 \frac{d^2 f_1}{dt^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left[-(v_0^2 + e - 1) + \beta \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right] f_1 - \frac{4}{\pi} = 0, \quad (1.19)$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + C_1 (f_1 + C_2) = 0, \quad (1.20)$$

где приняты обозначения

$$C_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha^2}, \quad C_2 = \frac{G_1}{\gamma_1}, \quad \gamma_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left[-(v_0^2 + e - 1) + \beta \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right],$$

с начальными условиями

$$f_1(0) = \int_{-1}^1 (\Psi_1(x))^2 dx = 1, \quad \left(\frac{df_1}{dt}\right)_{t=0} = 0. \quad (1.21)$$

Решение уравнения (1.20) с начальными условиями (1.21) имеет вид

$$f_1(t) = (1 - C_2) \cos(\sqrt{C_1} t) + C_2 \quad (1.22)$$

Поперечные колебания панели в этом случае будут описываться соотношением

$$\begin{aligned} w(x, t) &= f_1(t) \Psi_1(x) = \\ &= \left[(1 - C_2) \cos(\sqrt{C_1} t) + C_2 \right] \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

На рис. 1.2 представлены формы колебаний (1.23) движущейся панели в различные моменты времени t для значений параметров задачи $C_1 = 60.65$, $C_2 = 2.09$.

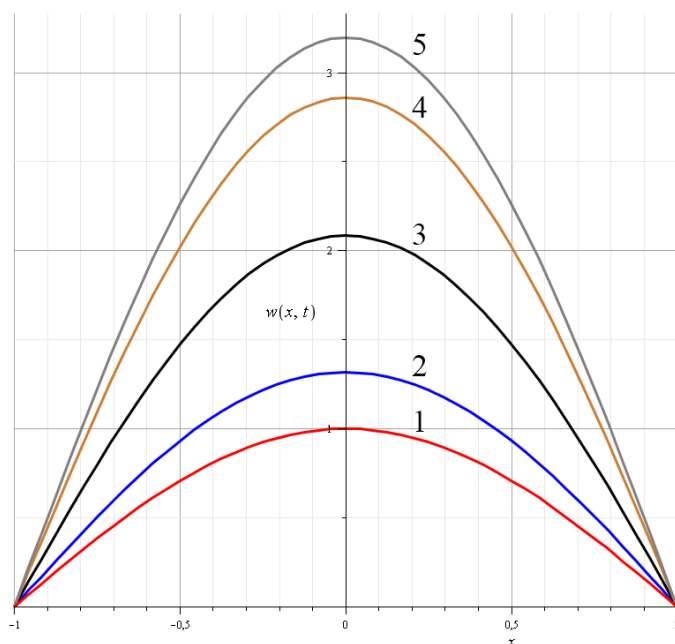


Рис. 1.2. Зависимость формы колебаний функции $w(x, t)$ для моментов времени: $t = 0(1)$, $0.1(2)$, $0.2(3)$, $0.3(4)$, $0.4(5)$

Применение метода Галёркина с двумя функциями формы $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$ и функциями времени $f_1(t)$, $f_2(t)$ приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\alpha^2 \frac{d^2 f_1}{dt^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left[-(v_0^2 + e - 1) + \beta \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right] f_1 - \frac{4}{\pi} - \frac{8\alpha v_0}{3} \frac{df_2}{dt} = 0, \quad (1.24)$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 f_2}{dt^2} + \pi^2 \left[-(v_0^2 + e - 1) + \pi^2 \beta \right] f_2 + \frac{2}{\pi} + \frac{8\alpha v_0}{3} \frac{df_1}{dt} = 0, \quad (1.25)$$

где учтено, что

$$G_1(t) = \int_{-1}^1 \Psi_1(x) g(x, t) dx = \int_{-1}^1 \sin\left(\pi \frac{x+1}{2}\right) dx = \frac{4}{\pi},$$

$$G_2(t) = \int_{-1}^1 \Psi_2(x) g(x, t) dx = \int_{-1}^1 \sin(\pi(x+1)) dx = -\frac{2}{\pi}.$$

Уравнения (1.24) и (1.25) могут быть представлены в виде

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + S_1 f_1 - S_2 - \kappa \frac{df_2}{dt} = 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{d^2 f_2}{dt^2} + S_3 f_2 - S_4 + \kappa \frac{df_1}{dt} = 0, \quad (1.27)$$

где введены обозначения

$$S_1 = C_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha^2}, \quad S_2 = \frac{G_1}{\alpha^2}, \quad S_3 = \frac{\gamma_2}{\alpha^2}, \quad S_4 = \frac{G_2}{\alpha^2},$$

$$\kappa = \frac{8v_0}{3\alpha}, \quad \gamma_2 = \pi^2 [-(v_0^2 + e - 1) + \beta\pi^2].$$

В предположении, что $g_1(x) = \Psi_1(x)$, $g_2(x) = 0$, $x \in [-1, 1]$, начальные условия для системы уравнений (1.26), (1.27) имеют вид

$$f_1(0) = \int_{-1}^1 (\Psi_1(x))^2 dx = 1, \quad \left(\frac{df_1}{dt} \right)_{t=0} = 0.$$

$$f_2(0) = \int_{-1}^1 \Psi_2(x) \Psi_1(x) dx = 0, \quad \left(\frac{df_2}{dt} \right)_{t=0} = 0. \quad (1.28)$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ определяются из решения системы уравнений (1.26) – (1.27) с начальными условиями (1.28) с применением метода Рунге–Кутты. При этом динамика колебательного процесса описывается выражениями

$$w(x, t) = f_1(t) \Psi_1(x) + f_2(t) \Psi_2(x) =$$

$$= f_1(t) \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) + f_2(t) \sin(\pi(x+1)). \quad (1.29)$$

На рис. 1.3 (а,б,в) и рис. 1.4 (а,б,в) показаны, соответственно, распределения величин $f_1(t) \Psi_1(x)$ и $f_2(t) \Psi_2(x)$ для различных моментов времени t и значений параметров $S_1 = 60.655$, $S_2 = 127.32$, $S_3 = 242.95$, $S_4 = -63.66$.

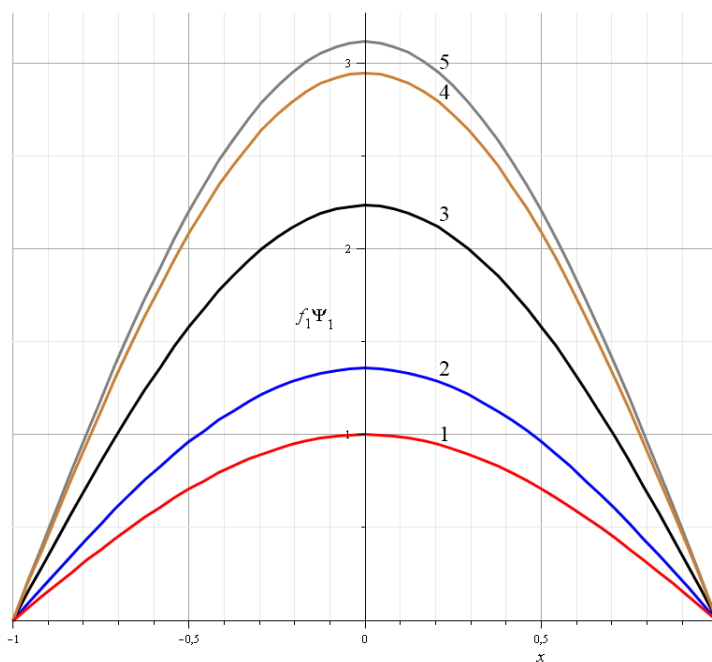


Рис. 1.3 (а). Зависимость распределения величины $f_1(t)\Psi_1(x)$ для моментов времени: $t = 0(1), 0.1(2), 0.2(3), 0.3(4), 0.38(5)$



Рис. 1.3 (б). Зависимость распределения величины $f_1(t)\Psi_1(x)$ для моментов времени: $t = 0.38(1), 0.5(2), 0.6(3), 0.7(4), 0.83(5)$

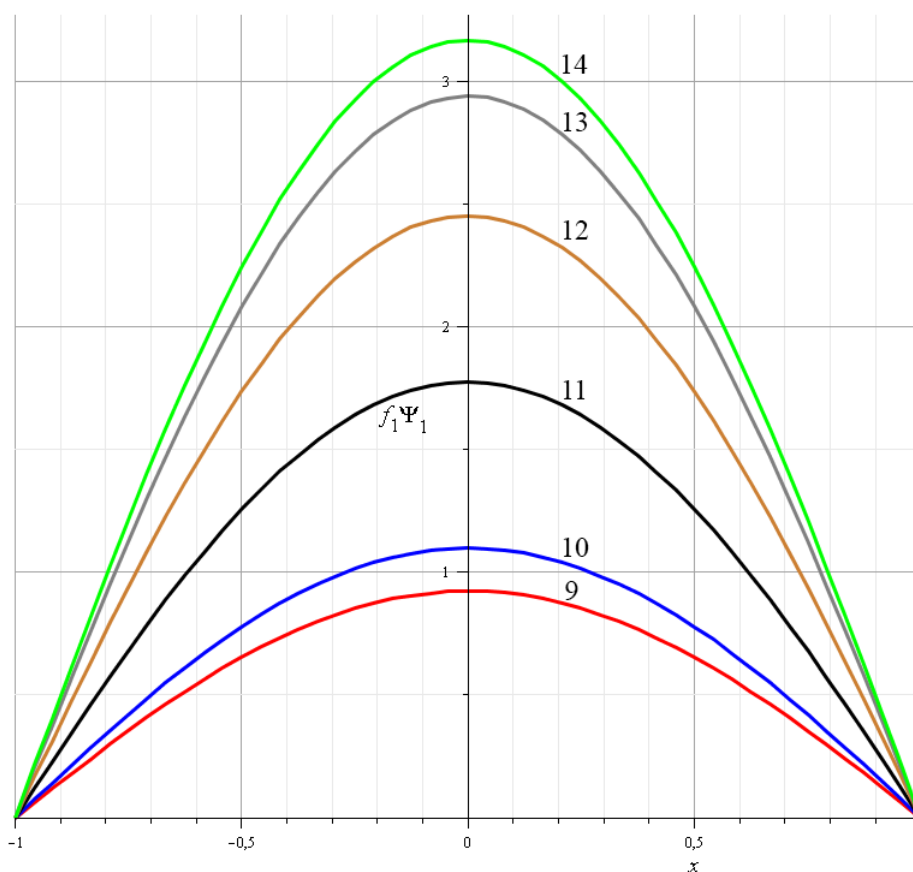


Рис. 1.3 (в). Зависимость распределения величины $f_1(t)\Psi_1(x)$ для моментов времени: $t = 0.81(1)$, $0.9(2)$, $1.0(3)$, $1.1(4)$, $1.2(5)$, $1.3(6)$

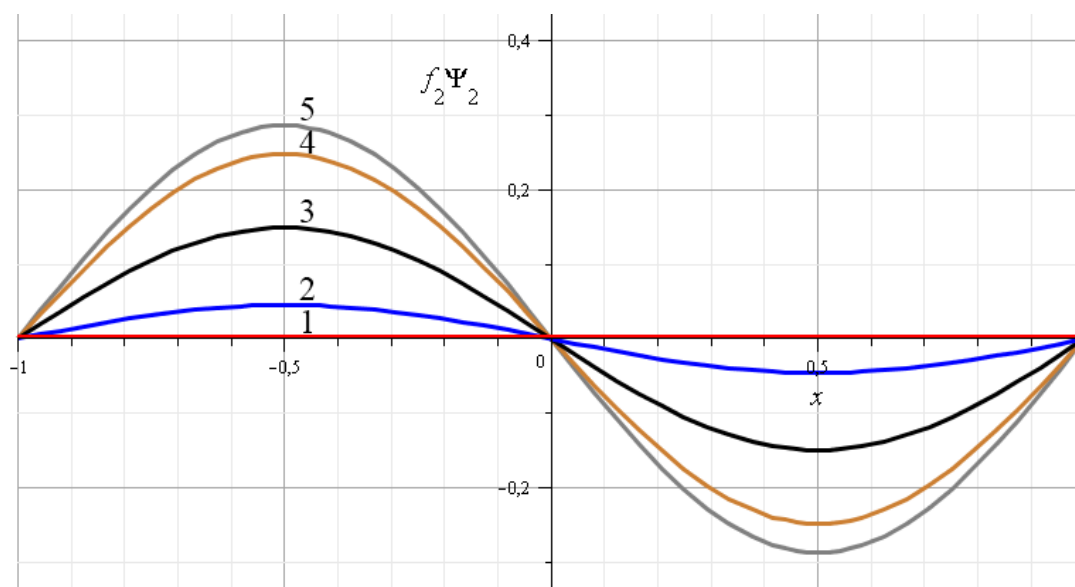


Рис. 1.4 (а). Зависимость распределения величины $f_2(t)\Psi_2(x)$ для моментов времени: $t = 0(1)$, $0.04(2)$, $0.08(3)$, $0.12(4)$, $0.16(5)$

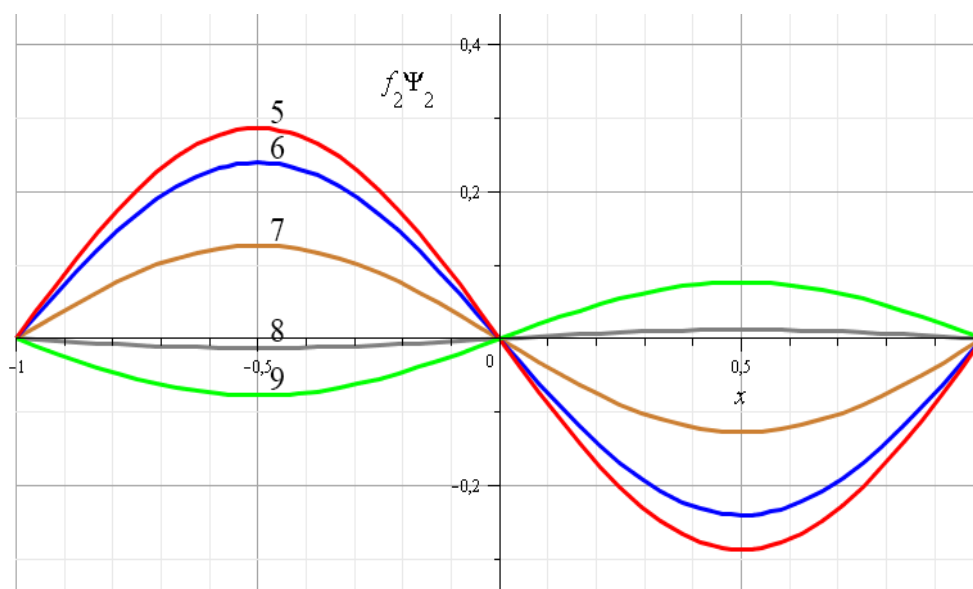


Рис. 1.4 (б). Зависимость распределения величины $f_2(t)\Psi_2(x)$ для моментов времени: $t = 0.16(1), 0.20(2), 0.24(3), 0.285(4), 0.32(5)$

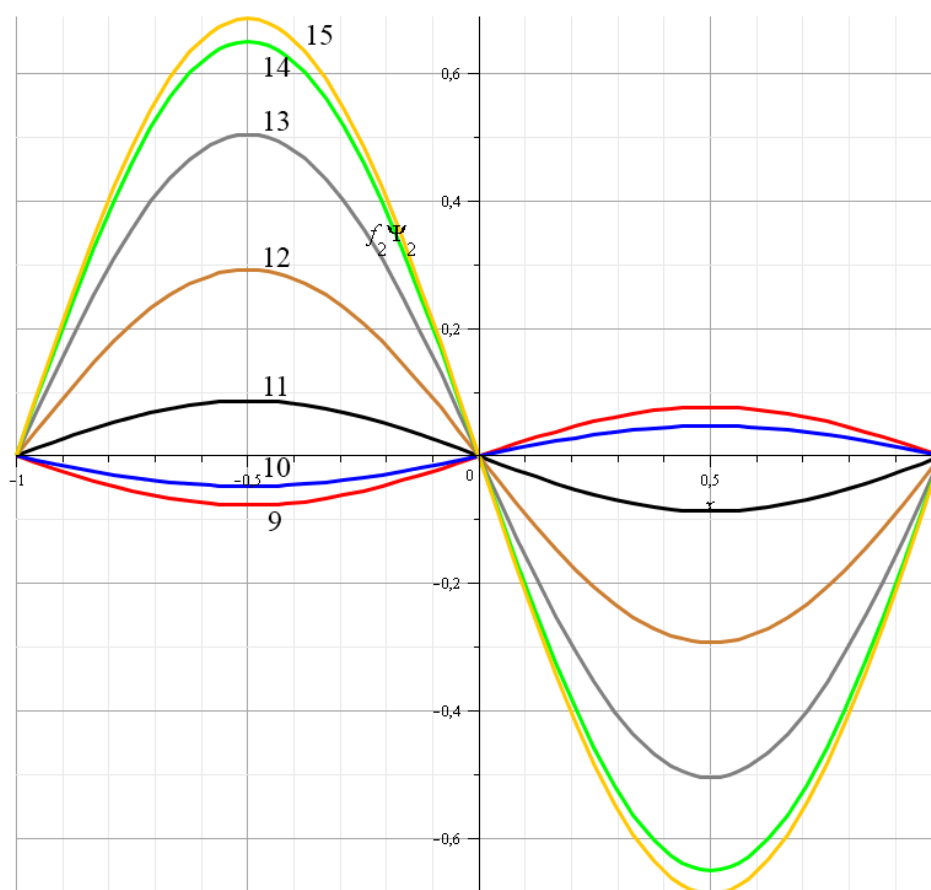


Рис. 1.4 (в). Зависимость распределения величины $f_2(t)\Psi_2(x)$ для моментов времени: $t = 0.32(1), 0.36(2), 0.40(3), 0.44(4), 0.48(5), 0.52(6), 0.56(7)$

На рис. 1.5 (а,б,в) таким же образом представлены распределения функции прогибов $w(x, t)$ (1.26).

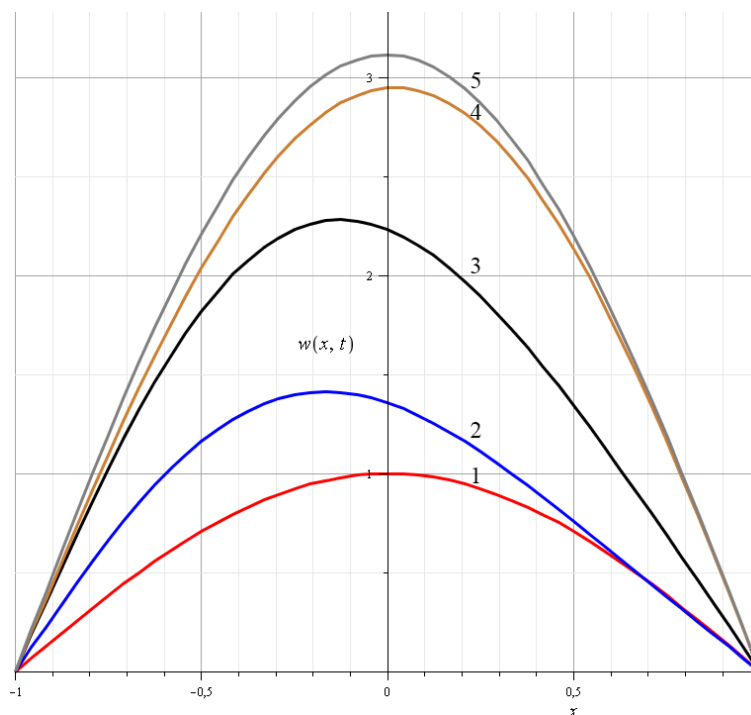


Рис. 1.5 (а). Зависимость распределения функции прогибов $w(x, t)$ для моментов времени: $t = 0(1), 0.1(2), 0.2(3), 0.3(4), 0.38(5)$

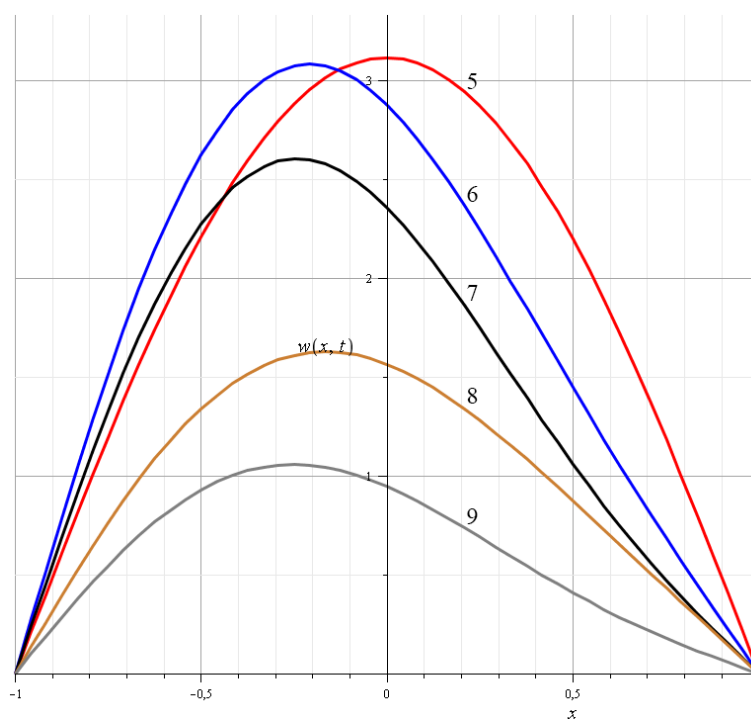


Рис. 1.5 (б). Зависимость распределения функции прогибов $w(x, t)$ для моментов времени: $t = 0.38(1), 0.5(2), 0.6(3), 0.7(4), 0.81(5)$

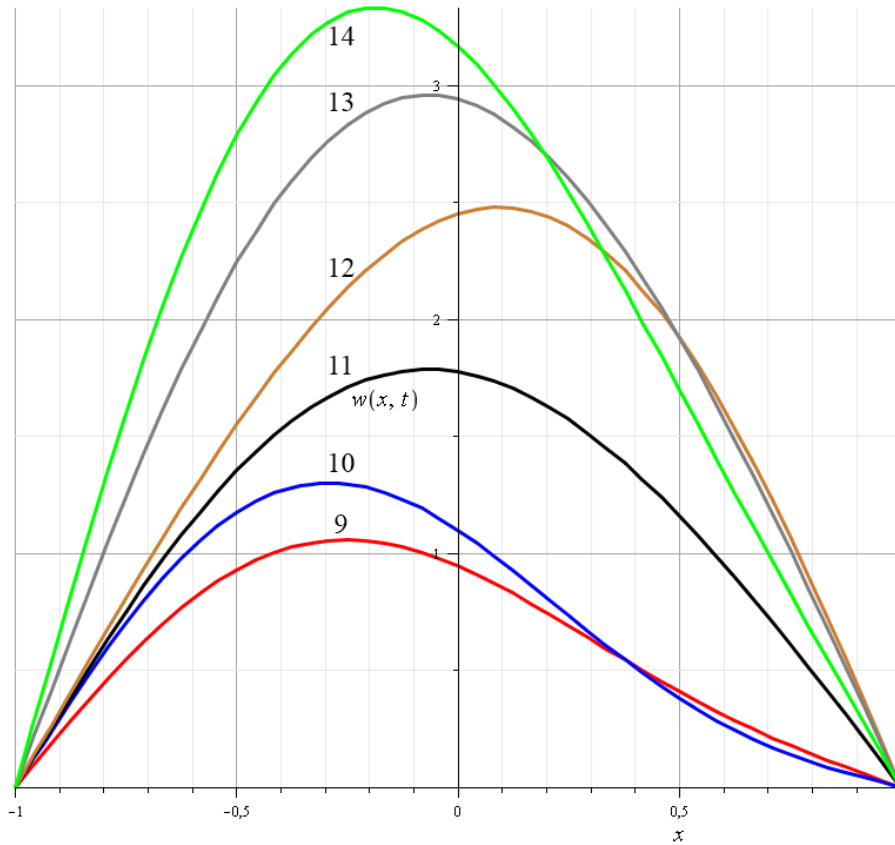


Рис. 1.5 (в). Зависимость распределения функции прогибов $w(x, t)$ для моментов времени: $t = 0.81(1), 0.9(2), 1.0(3), 1.1(4), 1.2(5), 1.3(6)$

Применение метода Галёркина с тремя функциями формы приводит к следующей системе трех дифференциальных уравнений:

$$\alpha^2 \frac{d^2 f_1}{dt^2} + \left[\beta \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 - (v_0^2 + e - 1) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right] f_1 - \frac{8}{3} \alpha v_0 \frac{df_2}{dt} - G_1 = 0, \quad (1.30)$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{8}{3} \alpha v_0 \frac{df_1}{dt} + \left[\beta \pi^4 - \pi^2 (v_0^2 + e - 1) \right] f_2 - \frac{24}{5} \alpha v_0 \frac{df_3}{dt} - G_2 = 0, \quad (1.31)$$

$$\frac{24}{5} \alpha v_0 \frac{df_2}{dt} + \alpha^2 \frac{d^2 f_3}{dt^2} + \left[\beta \left(\frac{3\pi}{2} \right)^4 - \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 (v_0^2 + e - 1) \right] f_3 - G_3 = 0. \quad (1.32)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (1.30) – (1.32) при заданных функциях $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G_3(t)$ и соответствующих начальных условиях представляет временные зависимости $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ и, тем самым, будет

с большей точностью определять процесс неустановившихся колебаний движущегося полотна.

1.2. Поперечные колебания неразрезного ортотропного материала при постоянной транспортной скорости

Во многих технологических процессах, связанных с движением материала (производство бумаги, пленок, движение транспортных лент, приводных ремней, полотна), бывает важно учитывать его ортотропные свойства. Данная проблематика обсуждалась, например, в работах [48, 97, 68] (Marynowski K. (2008), Marynowski K and Kapitaniak T. (2014), Vanichuk N. et al. (2014)). Прикладываемые к движущимся материалам температурные воздействия (например, в сушильной секции бумагоделательной машины) могут существенно усилить влияние ортотропных свойств на стабильность движения. В данном разделе рассматривается продольное движение с постоянной транспортной скоростью ортотропного термоупругого материала, моделируемого неразрезной термоупругой пластиной. Основное внимание уделено уравнению продольного движения и поперечным деформациям ортотропного термоупругого материала, случай критических скоростей продольного движения будет рассмотрен в Главе 2.

1.2.1. Основные соотношения

Рассматривается продольное движение с постоянной скоростью ортотропного материала, поддерживаемого системой роликовых опор, при этом рассмотрение ограничивается одним пролетом. Материал моделируется тонкой неразрезной пластинкой из ортотропного термоупругого материала в области $\Omega = \{-1 \leq x \leq 1, -b \leq y \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2\}$, где длина пластины (пролета) $2l$, ширина $2b$ и толщина h являются заданными параметрами (рис. 1.6).

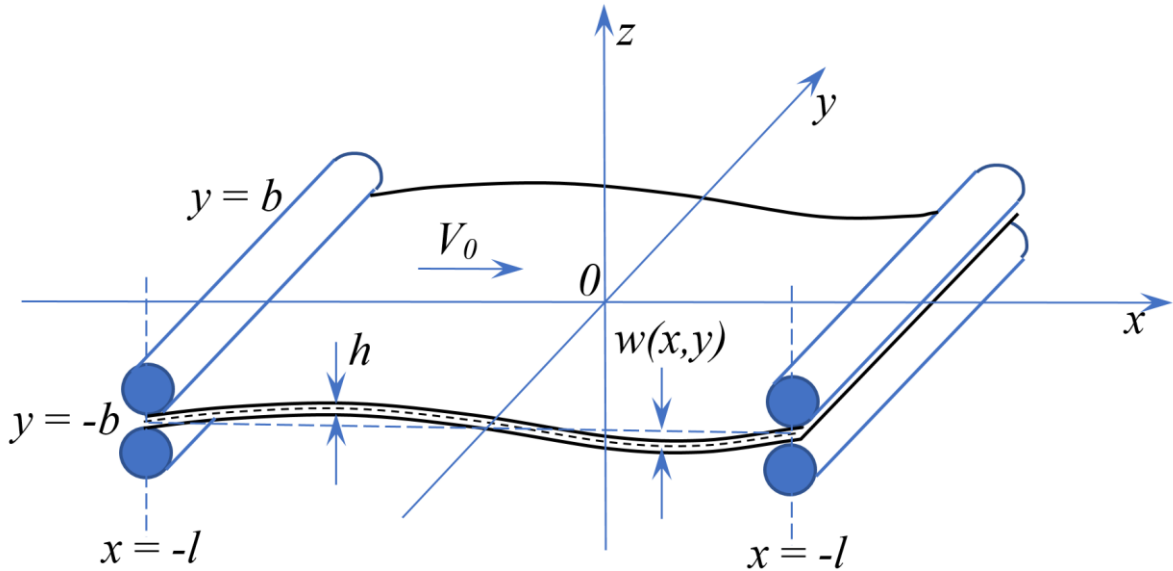


Рис. 1.6. Движущаяся неразрезная пластина

Пластина свободна на границах $y = \pm b$ и шарнирно оперта при $x = \pm l$. В принятой ортогональной системе координат $Oxyz$ предполагается движение пластинки с постоянной скоростью V_0 в направлении оси Ox . Поперечные перемещения пластинки описываются функцией $w = w(x, y, t)$.

Используя классическую теорию изгиба и растяжения тонких термоупругих ортотропных пластин [95], [96] для компонент тензоров напряжений $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})$ и деформаций $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$, а также выражения, связывающие кривизны $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$ и начальные деформации $(\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0)$ срединной плоскости с поперечными перемещениями пластинки, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_x + \nu_2 \varepsilon_y) - \beta_1 \theta, & \sigma_y &= \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x) - \beta_1 \theta, \\ \sigma_{xy} &= G \gamma_{xy}, & \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + \kappa_x z, & \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + \kappa_y z, & \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + 2z \kappa_{xy}, & (1.33) \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \kappa_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & (\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}). \end{aligned}$$

Здесь использованы общепринятые обозначения для модулей Юнга E_1, E_2 , сдвига G и коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 . Температурные коэффициенты

β_1, β_2 связаны с коэффициентами линейного теплового расширения α_{10}, α_{20} соотношениями

$$\beta_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\alpha_{10} + \nu_2 \alpha_{20}), \quad \beta_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\alpha_{20} + \nu_1 \alpha_{10}).$$

При этом выполняются условия $E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$ и $\sigma_z = 0$, а изменение температуры θ оценивается, как и в предыдущем разделе 1.1, разностью $\theta = \theta_a - \theta_0$, где действительная температура θ_a и температура θ_0 , при которой отсутствуют тепловые деформации, заданы в градусах Кельвина. Величина $\theta(z) = 0$ в случае, когда в пластине реализуется однородная температура, имеющая значение θ_0 . Уравнение малых колебаний пластины записывается в виде

$$m \frac{d^2 w}{dt^2} = L^M(w) - L^B(w), \quad (1.34)$$

где m – масса на единицу площади пластины. Мембранный и изгибный операторы имеют вид

$$\begin{aligned} L^M(w) &= T_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ L^B(w) &= - \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

и определяются при помощи соответствующих выражений для компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad T_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz, \quad T_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz. \end{aligned} \quad (1.36)$$

1.2.2. Оценка мембранного и изгибного сопротивления термоупругой ортотропной пластины

Для оценки мембранного сопротивления применим основные соотношения (1.33), первые три соотношения (1.36) и выполним необходимые операции интегрирования. Получим

$$T_{xx} = K_1(\varepsilon_x^0 + \nu_2\varepsilon_y^0 - \varepsilon_{10}), \quad T_{yy} = K_2(\varepsilon_y^0 + \nu_1\varepsilon_x^0 - \varepsilon_{20}), \quad T_{xy} = Gh\gamma_{xy}^0,$$

где ε_x^0 , ε_y^0 , γ_{xy}^0 – начальные деформации в срединной (нейтральной) плоскости пластинки, а коэффициенты K_1 , K_2 и температурные члены ε_{10} , ε_{20} даются выражениями [95, 96]

$$K_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad K_2 = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2},$$

$$\varepsilon_{10} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_{10} + \nu_2 \alpha_{20}) \theta dz, \quad \varepsilon_{20} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_{20} + \nu_1 \alpha_{10}) \theta dz.$$

В результате имеем выражение для мембранного оператора

$$L^M(w) = K_1(\varepsilon_x^0 + \nu_2\varepsilon_y^0 - \varepsilon_{10}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_2(\varepsilon_y^0 + \nu_1\varepsilon_x^0 - \varepsilon_{20}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2Gh\gamma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.37)$$

Аналогично, при помощи соотношений (1.33), (1.36) оценивается величина изгибного сопротивления. Имеем

$$M_x = D_1(\kappa_x + \nu_2\kappa_y - \kappa_{10}), \quad M_y = D_2(\kappa_y + \nu_1\kappa_x - \kappa_{20}), \quad M_{xy} = 2D_k\kappa_{xy},$$

где жесткостные коэффициенты D_1 , D_2 , D_k и величины κ_{10} , κ_{20} определяются по формулам [95, 96]

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_k = \frac{Gh^3}{12},$$

$$\kappa_{10} = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_{10} + \nu_2 \alpha_{20}) \theta z dz, \quad \kappa_{20} = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_{20} + \nu_1 \alpha_{10}) \theta z dz.$$

В результате находим выражение для линейного изгибного оператора ортотропной термоупругой пластины в виде

$$L^B(w) = D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \kappa_{10} \right) + D_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa_{20} \right) +$$

$$+ 4D_k \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

(1.38)

Отметим, что термомеханические характеристики ε_{10} , ε_{20} , κ_{10} , κ_{20} , фигурирующие в выражениях (1.37), (1.38), существенно зависят от вида распределения температуры по пластине.

С учетом полученных представлений (1.37), (1.38) для мембранного и изгибного операторов и выражения для полной второй производной по времени d^2w/dt^2 в виде

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V_0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее малые поперечные колебания движущейся с постоянной продольной скоростью V_0 ортотропной термоупругой пластины:

$$\begin{aligned}
m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= K_1 (\varepsilon_x^0 + \nu_2 \varepsilon_y^0 - \varepsilon_{10}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
+ K_2 (\varepsilon_y^0 + \nu_1 \varepsilon_x^0 - \varepsilon_{20}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2Gh\gamma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
- D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \kappa_{10} \right) - D_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa_{20} \right) - \\
- 4D_k \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

В случае изотропной пластины и однородного распределения температур, когда выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
E_1 = E_2 = E, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad \alpha_{10} = \alpha_{20} = \alpha_0, \quad \varepsilon_{10} = \varepsilon_{20} = \varepsilon_0, \\
K_1 = K_2 = K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D_1 = D_2 = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \kappa_{10} = \kappa_{20} = 0,
\end{aligned}$$

правая часть уравнения (1.39) записывается в виде (Δ^2 – бигармонический оператор)

$$\begin{aligned}
K \left[(\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_y^0 - \varepsilon_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\varepsilon_y^0 + \nu \varepsilon_x^0 - \varepsilon_0) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \\
+ 2Gh\gamma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - D\Delta^2 w.
\end{aligned}$$

Граничные условия для уравнения (1.39) записываются в различной форме в зависимости от вида закрепления краев и распределения температур в пластине. Так, условия шарнирного опирания краев пластины при $x = \pm l$ ($-b \leq y \leq b$) и условия незакрепленных (свободных) краев при $y = \pm b$ ($-l \leq x \leq l$) в случае постоянного температурного распределения имеют вид

$$\begin{aligned}
(w)_{x=\pm l} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\pm l} = 0, \\
\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=\pm b} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=\pm b} = 0.
\end{aligned}$$

При этом учитываются равенства

$$\mu_1 = \nu_1, \quad \mu_2 = \nu_1 + \frac{4G}{E_2}(1 - \nu_1\nu_2).$$

Далее в Главе 2 с применением полученного уравнения (1.39) для движущейся панели (одномерной пластины) будет исследована задача об устойчивости в форме стационарной дивергенции, когда все производные по времени обращаются в ноль.

1.3. Движение материала с непостоянной скоростью, учет вклада составляющей гравитационного воздействия в продольное натяжение движущегося полотна

В качестве модели движущегося полотна здесь выбрана мембранная неразрезная панель, которая поддерживается системой закрепленных шарнирных опор, реализующих граничные условия простого опирания в конечных точках пролётов панели. Рассмотрение ограничивается одним пролётом. Предполагается, что соседние пары валков расположены на разных уровнях по высоте относительно друг друга, что реализуется, например, в сушильной части бумагоделательной машины в соответствии с технологическими условиями производства. В процессе осевого движения мембранная панель может совершать упругие поперечные колебания, которые описываются в системе координат Эйлера. При этом возникающие малые упругие поперечные перемещения панели определяют локальные ускорения, Кориолисовы ускорения и центробежные ускорения. С учетом взаимного расположения шарнирных опор осевое движение мембранной панели является ускоренным и происходит под действием заданного продольного натяжения и аксиальной составляющей гравитационного воздействия. В данном разделе показывается, что уравнение, описывающее движение панели, с помощью ряда преобразований может быть сведено к гипергеометрическому уравнению Гаусса, решение которого можно представить в виде гипергеометрического ряда.

1.3.1. Основные соотношения

Рассматривается прямолинейное движение и поперечные колебания неразрезного полотна, моделируемого при помощи мембранной неразрезной панели (рис. 1.7). Предполагается, что движение вдоль оси x панели, опирающейся на валки на краях пролётов ($x=0, x=l, \dots$), является ускоренным и происходит под действием продольного натяжения и составляющей гравитационного воздействия.

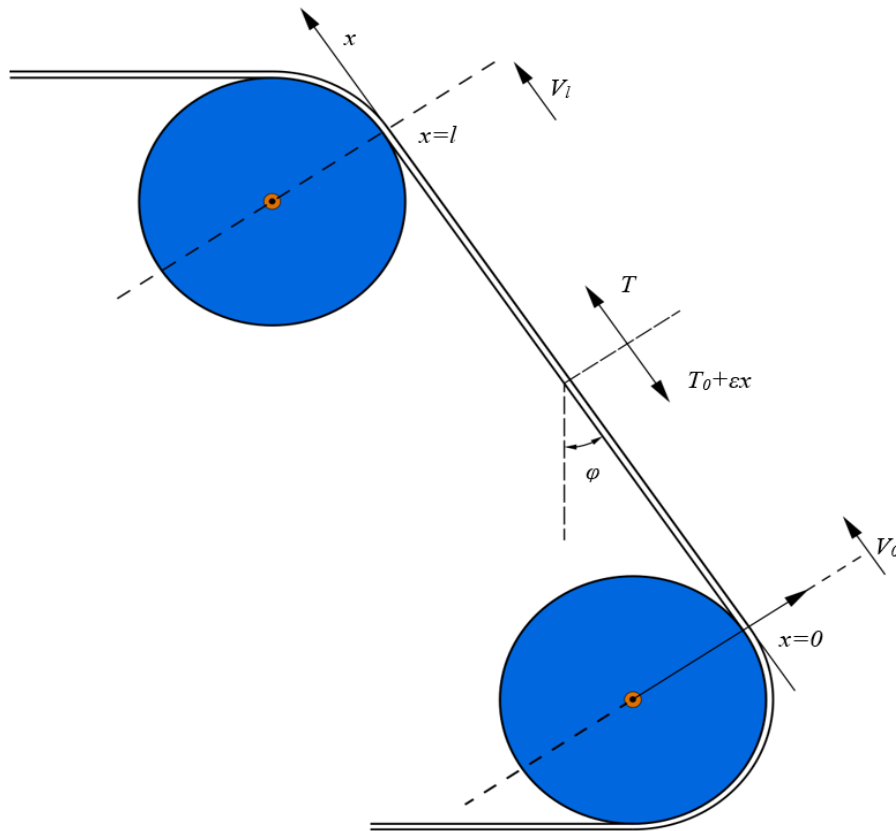


Рис. 1.7. Движение полотна под углом φ к вертикали

В рассматриваемой части $\Omega = [0, l]$ неразрезной панели выражения для распределения продольной скорости $V = V(x)$ и переменного натяжения $T = T(x)$ имеют вид

$$V = V_0 + ax, \quad V_0 = V(0), \quad V_l = V(l), \quad a = \frac{V_l - V_0}{l}, \quad (1.40)$$

$$T = T_0 + \varepsilon x = T_0 + mgx \cos \varphi, \quad T_0 = T(0), \quad \frac{T}{m} = C_0^2 + \varepsilon_0 x, \quad (1.41)$$

где g – ускорение свободного падения, $C_0^2 = T_0/m$, а $\varepsilon_0 x = (\varepsilon/m)x$ характеризует вклад аксиальной компоненты гравитационного воздействия в продольное натяжение. Здесь и далее погонная масса m , а также параметры $V_0, V_l, a, T_0, \varepsilon, \varepsilon_0, C_0, l$ – заданные константы.

Определяющее динамическое уравнение поперечных отклонений мембранной панели $w = w(x, t)$ записывается в Эйлеровой системе координат следующим образом:

$$m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (1.42)$$

Уравнение (1.42) с учётом выражений (1.40) и (1.41) принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2(V_0 + ax) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left[(V_0 + ax)^2 - C_0^2 - \varepsilon_0 x \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (1.43)$$

а решение этого уравнения разыскивается с учётом краевых условий

$$(w)_{x=0} = 0, \quad (w)_{x=l} = 0. \quad (1.44)$$

Представим решения $w(x, t)$ в форме временных гармоник

$$w = w(x, t) = u(x) e^{st}, \quad (1.45)$$

где $u(x)$ – амплитудная функция, а s – комплексная собственная частота.

Искомые величины, как следует из (1.43) – (1.45), определяются следующим однородным обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $u(x)$ с соответствующими краевыми условиями:

$$s^2 u + 2(V_0 + ax) s \frac{du}{dx} + \left[(V_0 + ax)^2 - C_0^2 - \varepsilon_0 x \right] \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad (1.46)$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0.$$

1.3.2. Приведение определяющего уравнения динамики к гипергеометрическому уравнению Гаусса

Преобразуем уравнение (1.46), вводя новую переменную

$$\xi = V = V_0 + ax, \quad (x = \frac{\xi - V_0}{a}).$$

Будем иметь

$$Au + 2B\xi \frac{du}{d\xi} + [\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma] \frac{d^2u}{d^2\xi} = 0, \quad (1.47)$$

где

$$A = s^2, \quad B = sa, \quad \alpha = a^2, \quad \beta = -a\varepsilon_0, \quad \gamma = a(V_0\varepsilon_0 - aC_0^2).$$

Для множителя перед высшей производной в (1.47) имеем

$$\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = \alpha \left(\xi + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\beta^2}{4\alpha} - \gamma \right). \quad (1.48)$$

Полагая

$$z = \xi + \frac{\beta}{2\alpha}, \quad (1.49)$$

из (1.48) получим

$$\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = \alpha z^2 - \left(\frac{\beta^2}{4\alpha} - \gamma \right). \quad (1.50)$$

Учитывая, что в силу (1.49) $d/dz = d/d\xi$, и используя равенство (1.50), преобразуем уравнение (1.47) (записанное для функции $u(\xi)$) к уравнению для функции $u = u(z)$

$$Au + 2B\left(z - \frac{\beta}{2\alpha}\right)\frac{du}{dz} - \alpha\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha} - \gamma\right) - z^2\right]\frac{d^2u}{dz^2} = 0. \quad (1.51)$$

С учётом обозначений

$$\eta = \frac{z}{\kappa}, \quad \kappa^2 = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha} - \gamma\right)$$

уравнение (1.51) имеет вид

$$(1 - \eta^2)\frac{d^2u}{d\eta^2} + (\lambda_1\eta + \lambda_2)\frac{du}{d\eta} + \lambda_3u = 0, \quad (1.52)$$

где

$$\lambda_1 = -\frac{2B}{\alpha}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta B}{\kappa\alpha^2}, \quad \lambda_3 = \frac{A}{\alpha}.$$

Дальнейшая замена переменной

$$2\zeta = 1 + \eta$$

приводит дифференциальное уравнение (1.52) к гипергеометрическому уравнению Гаусса ([98], §1.7 Трикоми Ф. (1957))

$$\zeta(1 - \zeta)\frac{d^2u}{d\zeta^2} + \frac{1}{2}\left[\lambda_1\zeta + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)\right]\frac{du}{d\zeta} + \frac{\lambda_3}{4}u = 0. \quad (1.53)$$

Сравнение уравнения (1.53) со стандартной формой записи дифференциального гипергеометрического уравнения Гаусса [98]

$$\zeta(1 - \zeta)\frac{d^2u}{d\zeta^2} + [\tilde{\gamma} - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + 1)\zeta]\frac{du}{d\zeta} - \tilde{\alpha}\tilde{\beta}u = 0$$

приводит к следующим соотношениям для коэффициентов

$$\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = -\lambda_3/4, \quad \tilde{\gamma} = (\lambda_2 - \lambda_1)/4, \quad \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + 1 = \lambda_1/2, \quad (1.54)$$

из которых $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ определяются через значения коэффициентов λ_1 , λ_2 и λ_3 уравнения (1.52) (при $\Lambda = (1 + \lambda_1/2)/2$):

$$\tilde{\alpha}_{1,2} = -\Lambda \pm \left[\Lambda^2 + \lambda_3/4 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{\beta}_{1,2} = \lambda_3/4 \left[-\Lambda \pm \left[\Lambda^2 + \lambda_3/4 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{-1}, \quad \tilde{\gamma} = (\lambda_2 - \lambda_1)/4.$$

Здесь $\tilde{\alpha}_{1,2}$ – два корня квадратного уравнения $\tilde{\alpha}^2 + 2\Lambda\tilde{\alpha} - \lambda_3/4 = 0$. Решение гипергеометрического уравнения Гаусса (1.54) записывается в виде [98]

$$u = C_1 F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}; \zeta) + C_2 \zeta^{1-\tilde{\gamma}} F(\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma} + 1, \tilde{\beta} - \tilde{\gamma} + 1, 2 - \tilde{\gamma}; \zeta), \quad |\zeta| < 1, \quad (1.55)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, а $F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}; \zeta)$ – гипергеометрический ряд Гаусса

$$F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}; \zeta) = 1 + \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}{\tilde{\gamma}}\zeta + \frac{\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}+1)\tilde{\beta}(\tilde{\beta}+1)}{\tilde{\gamma}(\tilde{\gamma}+1)2!}\zeta^2 + \dots, \quad |\zeta| < 1.$$

Справедливо преобразование $x = C\zeta + D$. Обратное преобразование $\zeta = (x - D)/C$ позволяет представить общее решение уравнения (1.52) в виде общего решения уравнения (7), где коэффициенты C и D определяются через параметры задачи:

$$C = \frac{2\kappa}{\alpha}, \quad D = -\frac{2\alpha\kappa + 2\alpha V_0 + \beta}{2\alpha a}.$$

Таким образом, в предположении, что полотно движется ускоренно под действием продольного натяжения и гравитационной составляющей, было выведено и проанализировано динамическое уравнение для возникающих поперечных колебаний мембранной панели, решения которого представляются в форме временных гармоник. Дальнейшее рассмотрение было проведено для амплитудной функции колебаний. С помощью ряда последовательных преобразований и введения новых переменных

определяющее дифференциальное динамическое уравнение для амплитудной функции (поперечных отклонений мембранной панели) было преобразовано к форме гипергеометрического уравнения Гаусса, решение которого получается аналитически в виде гипергеометрических рядов. Данный результат может быть полезным для проведения практических оценок процесса движения материалов.

В случае если транспортировочные валки расположены на одной высоте, но скорость их вращения различна, то во всех приведенных выше соотношениях следует учесть, что $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0$ и $T = T_0$.

1.4. Выводы

В первой главе представлено развитие некоторых механических моделей, которые могут использоваться для исследования процессов динамического поведения движущихся упругих материалов при термомеханических воздействиях с целью повышения стабильности движения. В одномерной постановке приведены в безразмерной форме основные соотношения для продольно движущегося с постоянной транспортной скоростью и совершающего поперечные колебания упругого полотна, моделируемого термоупругой неразрезной панелью и подверженного термомеханическим нагрузкам. Соотношения включают дополнительные члены, обусловленные учетом тепловых воздействий, приводящим к внутриплоскостным и изгибным температурным деформациям. На основе применения метода Галёркина решение задачи о неустановившихся термоупругих колебаниях записывается в виде ряда. Рассмотрены примеры применения метода Галеркина в случаях учета одной, двух и трех функций формы в разложении в ряд. В простейших случаях решение задачи построено аналитически.

В двумерной постановке продольное движение с постоянной транспортной скоростью ортотропного термоупругого материала

моделировалось неразрезной термоупругой пластиной. Основное внимание при этом было уделено учету прикладываемых к движущимся материалам тепловых воздействий (например, в сушильной секции бумагоделательной машины), которые приводят к дополнительным температурным деформациям и могут существенно усилить влияние ортотропных свойств на стабильность движения.

В одномерной постановке рассмотрен случай движения упругого полотна (неразрезной панели) с непостоянной транспортной скоростью. Учитывался вклад в осевое натяжение аксиальной составляющей силы тяжести, когда поддерживающие движение валки (шарнирные опоры) расположены на разной высоте относительно друг друга. Полученное уравнение, описывающее движение панели, с помощью последовательных преобразований было сведено к гипергеометрическому уравнению Гаусса, решение которого можно представить в виде гипергеометрического ряда.

Глава 2. Устойчивость продольного движения материалов при термомеханических воздействиях

Одним из способов повышения стабильности рассматриваемого продольного движения материалов является определение безопасных диапазонов изменения основных параметров системы, влияющих на динамический процесс. В этой связи большое значение имеет исследование устойчивости в форме стационарной дивергенции (выпучивания), когда все производные по времени и частота поперечных колебаний обращаются в ноль. В данной главе на основе применения моделей, предложенных выше в Главе 1, решены некоторые задачи об устойчивости продольного движения материалов в стационарной постановке (задачи о дивергенции), определены факторы, влияющие на критические параметры устойчивости движения материала, и даны рекомендации по повышению стабильности.

2.1. Устойчивость движущейся продольно термоупругой неразрезной панели

Исследуется устойчивость движущегося продольно термоупругого полотна, испытывающего температурное воздействие и моделируемого упругой неразрезной панелью, которая перемещается с постоянной транспортной скоростью, опираясь на систему роликов (шарнирное опирание). Рассмотрение проводится в Эйлеровой системе координат и ограничивается одним пролетом.

Уравнение поперечных колебаний движущегося с постоянной скоростью V_0 вдоль оси Ox и опертого в точках $x = -l$, $x = l$ термоупругого неразрезного полотна (неразрезной панели) толщины h ($h \ll l$) приведено в Главе 1 и записывается в виде (1.1). Воспользуемся для проведения анализа безразмерной формой (1.5) этого уравнения и граничными условиями (1.7), при выводе которых были учтены соотношения (1.2) – (1.4). Область изменения независимых безразмерных переменных имеет вид (1.6).

Будем предполагать, что при достаточно больших значениях изменения температуры $\theta = \theta^{div}$ может возникать явление статической неустойчивости (дивергенции). Исследование стационарного случая предполагает выполнение следующих соотношений:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}(x, t) = 0, \quad g(x, t) = 0.$$

Исключая в уравнении (1.5) временную зависимость и вводя новую искомую переменную $\psi = \psi(x)$ как

$$\psi(x) = \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.1)$$

приходим к краевой задаче на собственные значения для функции $\psi(x)$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \lambda \psi = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.2)$$

$$\psi(-1) = 0, \quad \psi(1) = 0. \quad (2.3)$$

Параметр

$$\lambda = \frac{1}{\beta}(v_0^2 + e - 1) \quad (2.4)$$

играет роль собственного значения в краевой задаче (2.2), (2.3). Нетривиальные решения уравнения на собственные значения (2.2) записываются в виде

$$\psi(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}(x+1)) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}(x+1))$$

с двумя произвольными коэффициентами C_1 , C_2 и неопределенной величиной λ . Учитывая граничные условия (2.3), будем иметь $C_2 = 0$ и

$$\psi(x) = C_1 \sin\left(\frac{j\pi}{2}(x+1)\right), \quad \lambda = \left(\frac{j\pi}{2}\right)^2, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Наименьшее собственное значение λ , при котором реализуется статическая форма потери устойчивости, соответствует значению $j=1$. Дважды интегрируя соотношение (2.1) с учетом полученного выражения (2.5) и краевых условий

$$w(-1)=0, \quad w(1)=0, \quad (2.6)$$

определим форму потери устойчивости (моду), реализующуюся при дивергенции панели ($j=1$). Имеем

$$w(x) = A \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.7)$$

где $A = -4C_1/\pi^2$. Учитывая соотношения (2.4), (2.5) и переходя к размерным величинам, определим наименьшее значение температуры $\theta = \theta^{div}$, вызывающее дивергенцию. Имеем

$$\theta^{div} = \frac{1-\nu}{Eh\alpha_0} \left(T_0 + \frac{\pi^2 D}{4l^2} - mV_0^2 \right). \quad (2.8)$$

Приведем некоторые примеры зависимостей критической температуры дивергенции от основных параметров задачи. Будем полагать заданными $l=1$ (м), $m=0.004$ (кг), $E=10^7$ (Па), $\nu=0.3$, $T_0=10$ (н), $h=0.001$ (м). На рис. 2.1 представлены зависимости критической температуры θ^{div} (К) от транспортной скорости движения V_0 (м/с) для различных значений параметра α_0 . Кривые с номерами 1, 2, 3 соответствуют значениям $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}$; $4 \cdot 10^{-6}$; $5 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}).

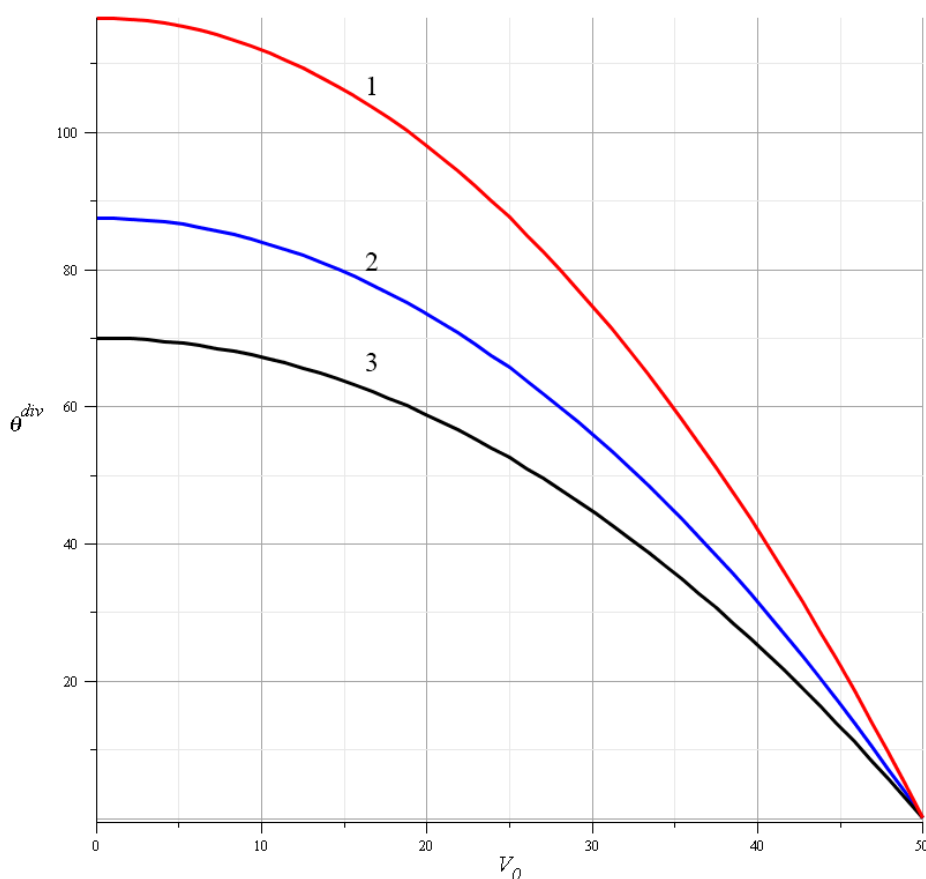


Рис. 2.1. Зависимость критической температуры θ^{div} от скорости V_0 для значений параметра $\alpha_\theta = 3 \cdot 10^{-6}$; $4 \cdot 10^{-6}$; $5 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}) (кривые 1, 2, 3)

Из формулы (2.8) вытекает выражение для критической скорости дивергенции термоупругой панели V_0^{div}

$$V_0^{div} = \left[\frac{1}{m} \left(T_0 + \frac{\pi^2 D}{4l^2} - \frac{Eh\alpha_\theta \theta}{1-\nu} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$

На рис. 2.2 кривыми с номерами 1, 2, 3 показана зависимость критической скорости дивергенции V_0^{div} от величины нагрева θ для различных значений параметра α_θ . Кривые с номерами 1, 2, 3 соответствуют значениям $\alpha_\theta = 3 \cdot 10^{-6}$; $4 \cdot 10^{-6}$; $5 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}).

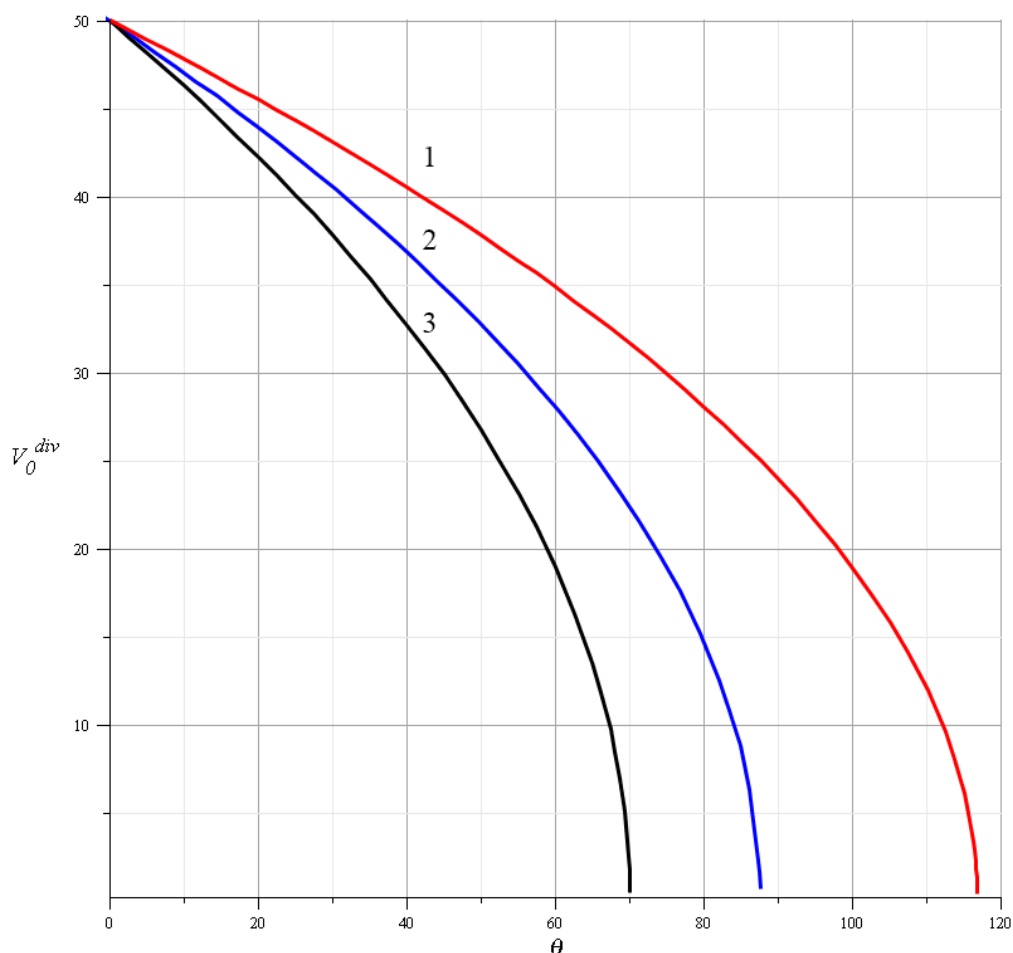


Рис. 2.2. Зависимость критической скорости V_0^{div} от температуры θ для значений параметра $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}$; $4 \cdot 10^{-6}$; $5 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}) (кривые 1, 2, 3)

Из выражений (2.8), (2.9) и приведенных рисунков 2.1 и 2.2 видно, что с ростом значения параметра α_0 критическая скорость и критическая температура, соответствующие дивергенции панели, уменьшаются.

2.2. Устойчивость продольно движущегося ортотропного термоупругого полотна

В разделе 1.2 первой главы было выведено дифференциальное уравнение в частных производных (1.39), описывающее малые поперечные колебания ортотропной термоупругой пластины, движущейся с постоянной продольной скоростью V_0 . Краевые условия соответствовали шарнирному опиранию при $x = \pm l$ и свободному краю при $y = \pm b$. В данном разделе

применим полученное уравнение (1.39) для исследования устойчивости панели (одномерной пластины) в форме стационарной дивергенции, когда все производные по времени обращаются в ноль. Будем также считать постоянным распределение температур θ , для которого выполняются соотношения [95, 96] (Тимошенко С.П. и Войновский-Кригер С. (1966), Коваленко А. Д. (1975))

$$\varepsilon_{10} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_{10} + \nu_2 \alpha_{20}) \theta dz = (\alpha_{10} + \nu_2 \alpha_{20}) \theta,$$

$$\kappa_{10} = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_{10} + \nu_2 \alpha_{20}) \theta z dz = 0.$$

Получим следующую краевую задачу:

$$\left[mV_0^2 - K_1 (\varepsilon_x^0 - \varepsilon_{10}) \right] \frac{d^2 w}{dx^2} + D_1 \frac{d^4 w}{dx^4} = 0, \quad (2.10)$$

$$(w)_{x=\pm l} = 0, \quad \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=\pm l} = 0. \quad (2.11)$$

Величины D_1 и K_1 , как указано в Главе 1, имеют вид

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad K_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}.$$

Для исследования устойчивости, введем новую переменную

$$\psi = \psi(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (-l \leq x \leq l). \quad (2.12)$$

Приходим к краевой задаче на собственные значения

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \lambda \psi = 0, \quad (2.13)$$

$$\psi(-l) = 0, \quad \psi(l) = 0, \quad (2.14)$$

где роль собственного значения играет параметр

$$\lambda = \frac{1}{D_1} \left[mV_0^2 - K_1(\varepsilon_x^0 - \varepsilon_{1\theta}) \right]. \quad (2.15)$$

Решение задачи на собственные значения (2.13) – (2.14) находится в виде

$$\psi(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}(x+l)) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}(x+l)). \quad (2.16)$$

Учет граничных условий (2.14) приводит к обращению в ноль коэффициента C_2 в (2.16) и к выражению для параметра λ

$$\lambda = \left(\frac{j\pi}{2l} \right)^2, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

Решение (2.16) записывается в виде

$$\psi(x) = C_1 \sin\left(\frac{j\pi}{2l}(x+l)\right), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.18)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Потеря стабильности происходит при $j = 1$ и определяется выражениями

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2, \\ (V_0^{div})^2 &= \frac{1}{m} \left[\left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 D_1 + K_1(\varepsilon_x^0 - \varepsilon_{1\theta}) \right] = \\ &= \frac{1}{m} \left[\left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 D_1 + K_1(\varepsilon_x^0 - (\alpha_{1\theta} + \nu_2 \alpha_{2\theta})\theta) \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

где V_0^{div} – скорость, при которой происходит явление дивергенции (выпучивания) панели. Форма потери устойчивости при дивергенции ортотропной панели может быть определена с помощью интегрирования соотношения (2.12) с учетом полученного решения (2.18) и граничных условий

$$w(-l) = 0, \quad w(l) = 0 \quad (2.20)$$

в виде

$$\omega(x) = A_1 \sin\left(\frac{\pi}{2l}(x+1)\right), \quad -l \leq x \leq l, \quad (2.21)$$

где $A_1 = -4l^2 C_1 / \pi^2$.

На рис. 2.3 представлена зависимость величины критической скорости дивергенции V_0^{div} от температуры θ для следующих значений параметров задачи: $l = 1$ (м), $m = 4 \cdot 10^{-3}$ (кг), $E = 10^7$ (Па), $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.2$, $\alpha_{1\theta} = 3 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}), $h = 10^{-3}$ (м), $\varepsilon_x^0 = 4 \cdot 10^{-4}$ (м). При этом кривая 1 построена для изотропного материала при $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.3$, $\alpha_{1\theta} = \alpha_{2\theta} = \alpha_\theta = 3 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}). Кривые с номерами 2, 3, 4 соответствуют значениям параметра $\alpha_{2\theta} = 5 \cdot 10^{-6}$; $7 \cdot 10^{-6}$; $9 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}). Видно, что увеличение значения параметра $\alpha_{2\theta}$ приводит к снижению величины критической скорости дивергенции панели, то есть к снижению стабильности движения.

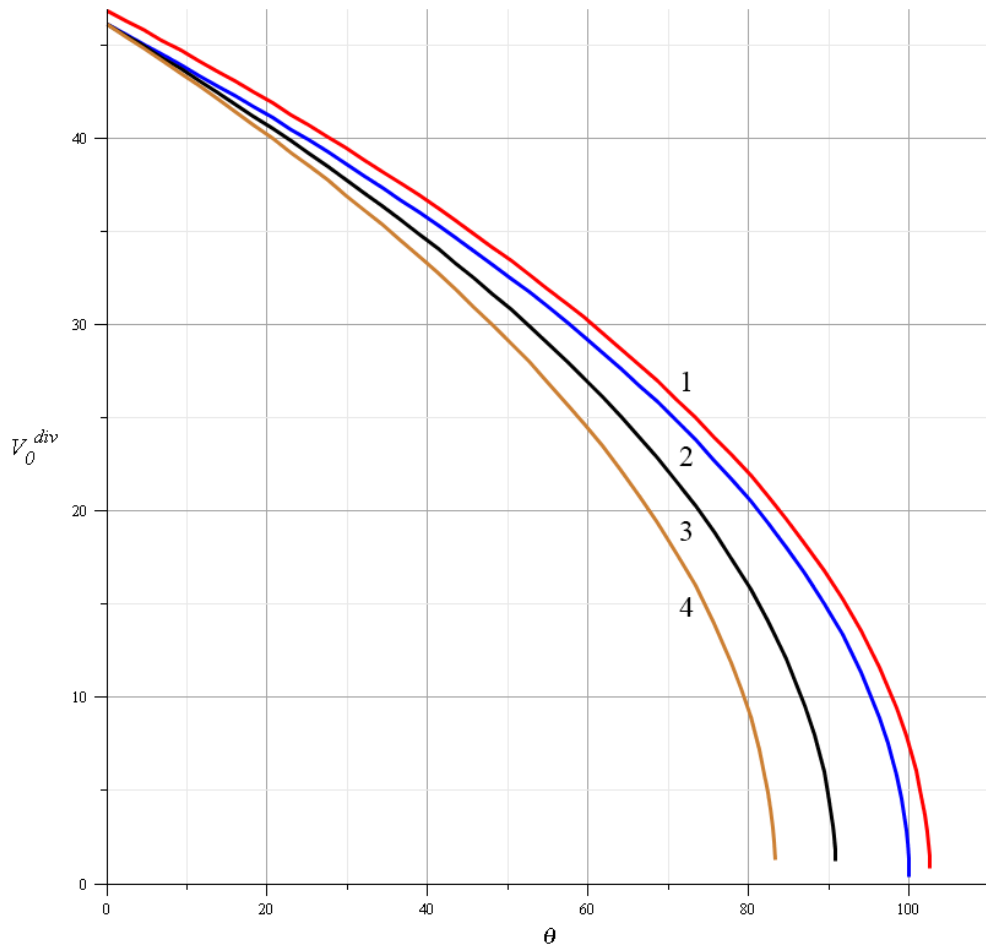


Рис. 2.3. Зависимость критической скорости дивергенции V_0^{div} от температуры θ для значений параметра $\alpha_2 = 3 \cdot 10^{-5}$; $5 \cdot 10^{-6}$; $7 \cdot 10^{-6}$; $9 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}) (кривые 1, 2, 3, 4)

Из выражения (2.19) можно определить также значение θ^{div} критической температуры дивергенция панели для некоторой заданной скорости движения V_0

$$\theta^{div} = \frac{1}{(\alpha_{1\theta} + \nu_2 \alpha_{2\theta}) K_1} \left[\left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 D_1 + K_1 \varepsilon_x^0 - m V_0^2 \right]. \quad (2.22)$$

На рис. 2.4 кривыми с номерами 1, 2, 3, 4 представлены зависимости величины критической температуры θ^{div} от скорости V_0 для значений параметра $\alpha_{2\theta} = 3 \cdot 10^{-5}$; $5 \cdot 10^{-6}$; $7 \cdot 10^{-6}$; $9 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}).

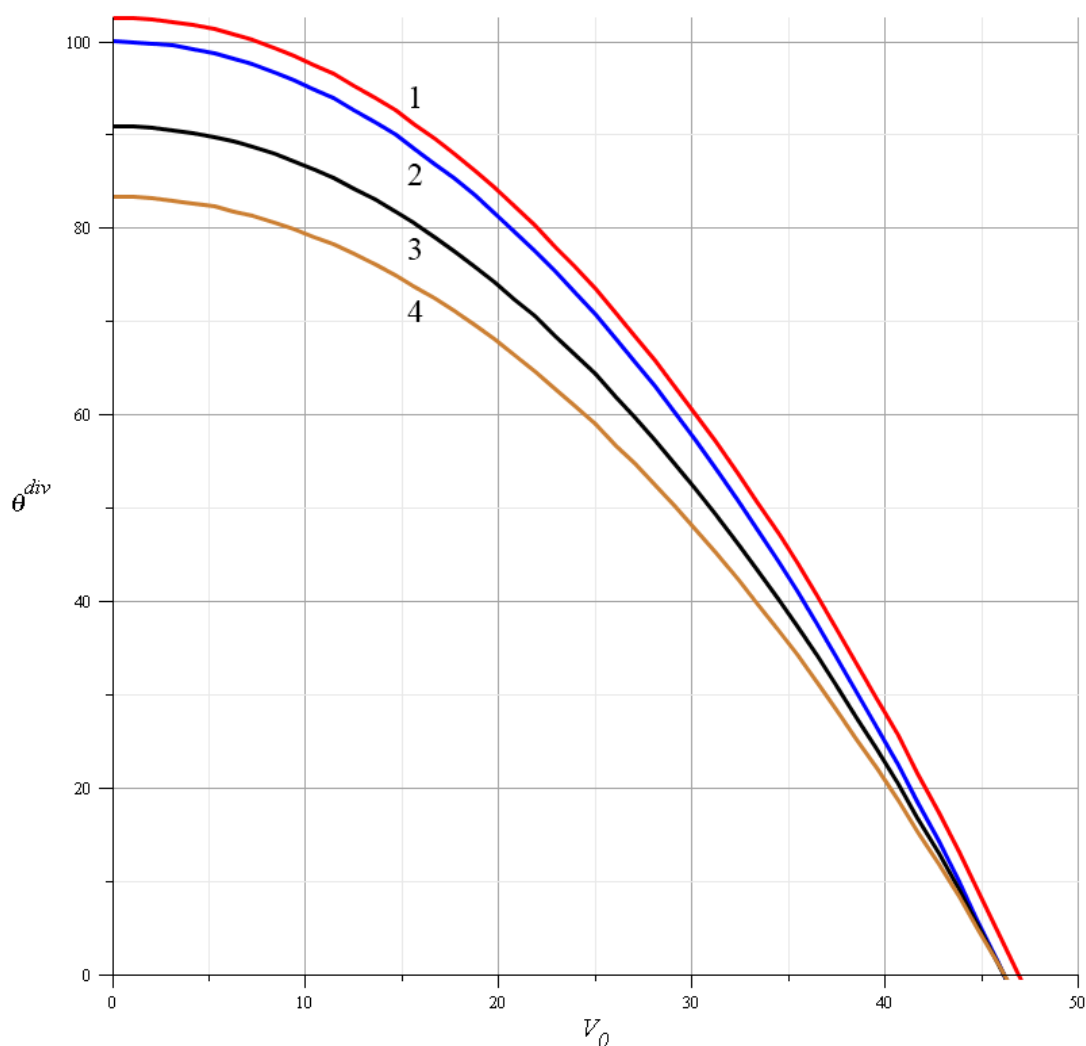


Рис. 2.4. Зависимость критической температуры дивергенции θ^{div} от скорости V_0 для значений параметра $\alpha_{20} = 3 \cdot 10^{-5}$; $5 \cdot 10^{-6}$; $7 \cdot 10^{-6}$; $9 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}) (кривые 1, 2, 3, 4)

Кривая 1 на рис. 2.4 соответствует изотропному материалу ($\alpha_{10} = \alpha_{20} = \alpha_{\theta} = 3 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}), $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.3$). Значения критической температуры уменьшаются с увеличением значений параметра α_{20} .

2.3. Об устойчивости нагретого полотна при движении по цилиндрической поверхности

В данном разделе на основе классических методов математической физики и механики исследуется проблема устойчивости термоупругого полотна, движущегося с постоянной скоростью без учета трения вдоль

цилиндрической поверхности. Полотно моделируется растягиваемой нагретой струной (одномерной мембраной). Предполагается, что цилиндрическая поверхность и струна имеют одинаковую температуру. При достаточно большой скорости и нагреве струны происходит потеря устойчивости движения и перемещение струны в направлении, нормальном к цилиндрической поверхности. Целью проводимого исследования является моделирование движения термоупругого материала вдоль цилиндрической поверхности и установление критериев устойчивости при действии центробежных сил и нагреве, приводящим к «отлипанию» и выпучиванию полотна. Для исследования неустойчивости применяется статический метод, основанный на рассмотрении стационарных нетривиальных форм потери устойчивости, т.е. на решении задачи на собственные значения для соответствующих дифференциальных уравнений. Отдельно рассматривается случай движения полотна (струны) вдоль кругового цилиндра и находится выражение для критической скорости, приводящей к потере устойчивости.

2.3.1. Основные соотношения для движущегося полотна

Рассматривается продольное движение полотна с постоянным значением скорости и натяжением вдоль абсолютно гладкой и жесткой цилиндрической поверхности (рис. 2.5).

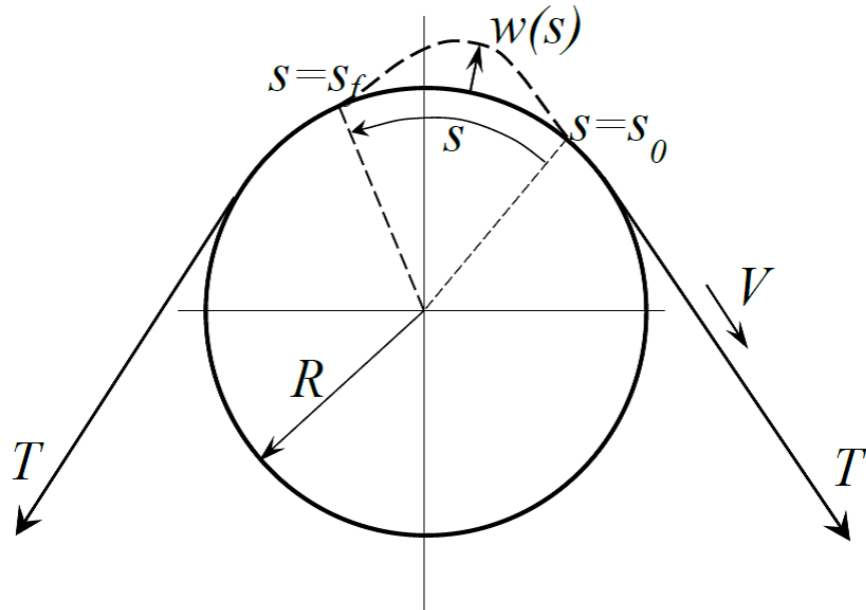


Рис. 2.5. Движение полотна по цилиндрической поверхности

Упругое полотно моделируется в виде струны (одномерной мембраны) характеризующейся нулевой изгибной жесткостью, модулем Юнга E , толщиной h и коэффициентом термоупругого удлинения α_0 . Цилиндрическая поверхность и соприкасающееся с ней полотно (струна) нагревается до температуры θ_a . Предполагается, что при температуре θ_0 термодформации отсутствуют, а при температуре θ_a термическая деформация ε_0 пропорциональна приращению температуры, т.е.

$$\varepsilon_0 = \alpha_0 \theta, \quad \theta = \theta_a - \theta_0. \quad (2.23)$$

При достаточно большой скорости V происходит «отлипание» полотна и перемещение его $w(s, t)$ в направлении, нормальном к цилиндрической поверхности (см. рис. 2.5). Используя обозначения s , t для окружной координаты и времени, приведём выражение для нормального ускорения

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial s} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}. \quad (2.24)$$

Три слагаемых в правой части выражения (2.24) представляют, соответственно, локальное, Кориолисово и центробежное ускорения.

2.3.2. Стационарный случай

В стационарном случае в выражении (2.24) нужно положить

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} = 0, \quad w = w(s). \quad (2.25)$$

В этом случае единственный ненулевой член в (2.24) соответствует центробежному ускорению в нормальном (радиальном) направлении. Ниже применяется статический метод исследования неустойчивости, основанный на рассмотрении стационарных нетривиальных форм потери устойчивости, т.е. на изучении задачи бифуркации решений (задачи на собственные значения) соответствующих дифференциальных уравнений. В рассматриваемом стационарном случае на струну в её отклоненном состоянии оказывают воздействие инерционные силы q_V , силы натяжения q_T и тепловые нагрузки q_θ . Центробежная сила инерции дается выражением

$$q_V = mV^2 \frac{d^2 w}{ds^2}, \quad (2.26)$$

где m – масса единицы длины струны. Составляющая силы натяжения T , действующая в нормальном направлении, определяется формулой

$$q_T = T \left(\frac{w}{R^2} + \frac{d^2 w}{ds^2} \right). \quad (2.27)$$

Здесь $R = R(s)$ – радиус кривизны жесткой поверхности. В случае движения струны вдоль плоской поверхности

$$R = \infty, \quad q_T = T \frac{d^2 w}{ds^2}. \quad (2.28)$$

Для воздействия на струну, обусловленного температурной деформацией ε_0 , будем иметь

$$q_0 = -Eh\varepsilon_0 \frac{d^2w}{ds^2} = -Eh\alpha_0\theta \frac{d^2w}{ds^2}. \quad (2.29)$$

2.3.3. Движение вдоль кругового цилиндра

Если жесткая поверхность, вдоль которой происходит движение струны, представляет собой цилиндрическую поверхность радиуса кривизны $R(s) = R = \text{const}$, то есть круговой цилиндр, то $ds = R d\varphi$ и выражения для сил q_V , q_T и q_0 записываются в виде

$$q_V = \frac{mV^2}{R^2} \frac{d^2w}{d\varphi^2}, \quad q_T = \frac{T}{R^2} \left(w + \frac{d^2w}{d\varphi^2} \right), \quad q_0 = -\frac{E\alpha_0 h \theta}{R^2} \frac{d^2w}{d\varphi^2}. \quad (2.30)$$

Стационарное уравнение равновесия выпученной струны имеет вид

$$q_V = q_T + q_0. \quad (2.31)$$

С использованием выражений (2.26), (2.27), (2.29) уравнение (2.31) записывается следующим образом:

$$\left(mV^2 - T + Eh\alpha_0\theta \right) \frac{d^2w}{ds^2} - T \frac{w}{R^2} = 0. \quad (2.32)$$

Вводя обозначение

$$\lambda = \frac{T}{R^2 (T - mV^2 - Eh\alpha_0\theta)}, \quad (2.33)$$

приходим к краевой задаче на собственные значения

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \lambda w = 0, \quad (2.34)$$

$$(w)_{s=s_0=0} = 0, \quad (w)_{s=s_f} = 0, \quad (2.35)$$

где s_f – заданный параметр задачи, а λ – собственное значение. Решение задачи (2.34), (2.35) разыскивается в виде выражения

$$w(s) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} s + C_2 \cos \sqrt{\lambda} s, \quad (2.36)$$

зависящего от двух неизвестных постоянных C_1 , C_2 и собственного значения λ . Условие существования нетривиального решения (2.36) и граничные условия (2.35) приводят к выражениям

$$C_2 = 0, \quad \sqrt{\lambda} s_f = j\pi, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

С учётом реализации первого собственного значения будем иметь

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{s_f} \right)^2 \quad (2.38)$$

и, следовательно, с учетом выражения (2.33)

$$(V_{cr})^2 = \frac{T}{m} (1 - k^2) - \frac{Eh\alpha_0\theta}{m}, \quad k = \frac{s_f}{\pi R}, \quad (2.39)$$

где V_{cr} – критическое значение скорости, при котором наступает потеря устойчивости.

Для оценки влияния геометрических и физических факторов на величину критической скорости в приведенных ниже примерах будем полагать $E = 10^7$ (Па), $m = 4 \cdot 10^{-3}$ (кг), $h = 10^{-3}$ (м). На рис. 2.6 представлена зависимость величины критической скорости V_{cr} от температуры θ для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ (кривые с номерами 1 – 4). При этом принималось, что $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}).

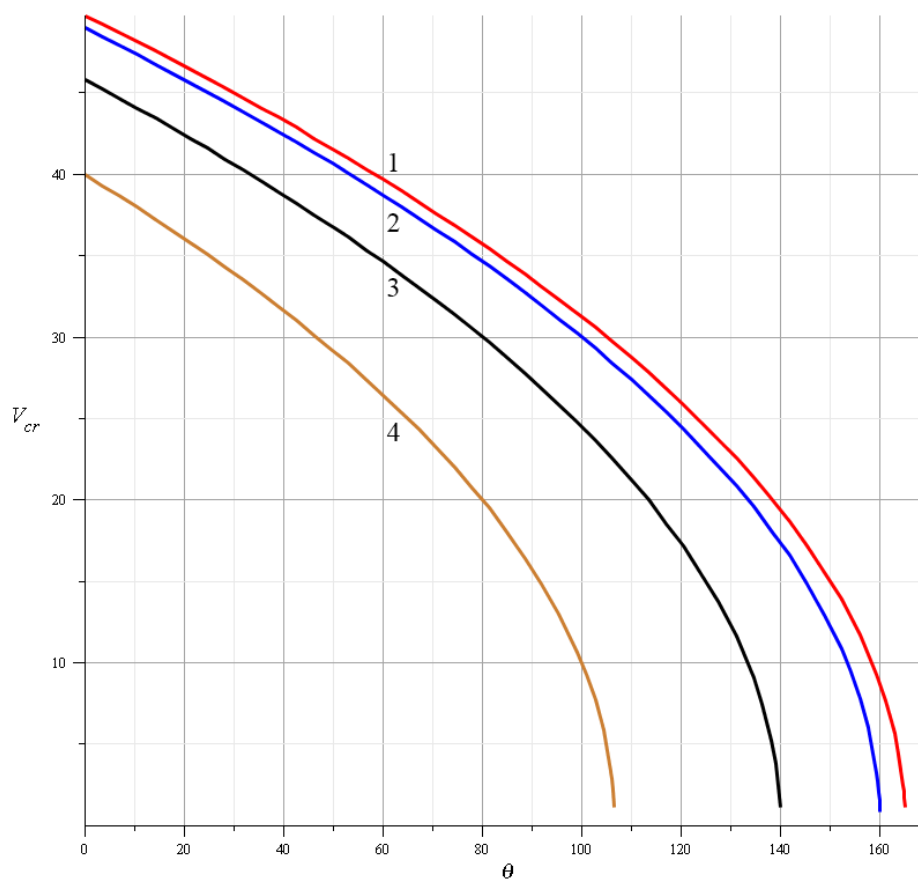


Рис. 2.6. Зависимость критической скорости V_{cr} от температуры θ для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ (кривые 1 – 4) при $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$

На рис. 2.7 зависимости величины критической скорости V_{cr} от температуры θ для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ представлены при большем значении $\alpha_0 = 4 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$.

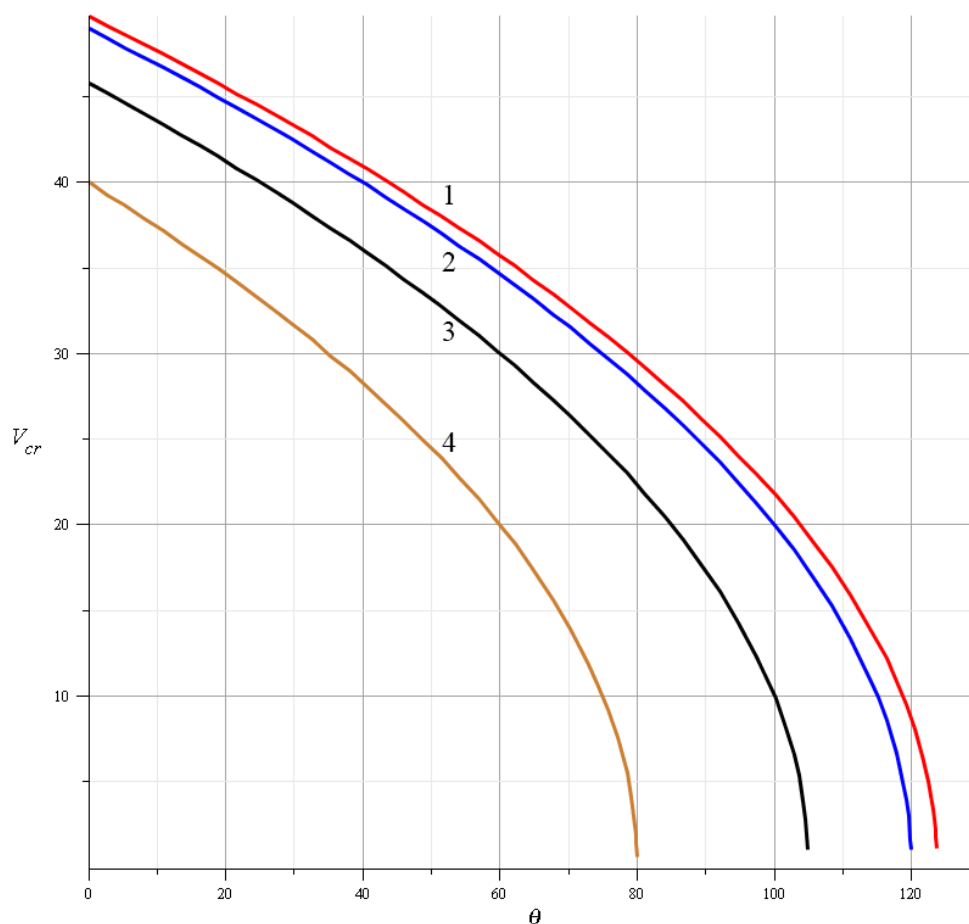


Рис. 2.7. Зависимость критической скорости V_{cr} от температуры θ для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ (кривые 1 – 4) при $\alpha_\theta = 4 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$

Зависимости критической скорости V_{cr} от температуры θ для одного значения параметра $k = 0.1$ показаны на рис. 2.8 кривыми 1 – 3 для различных значений параметра $\alpha_\theta = 3 \cdot 10^{-6}; 4 \cdot 10^{-6}; 5 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$.

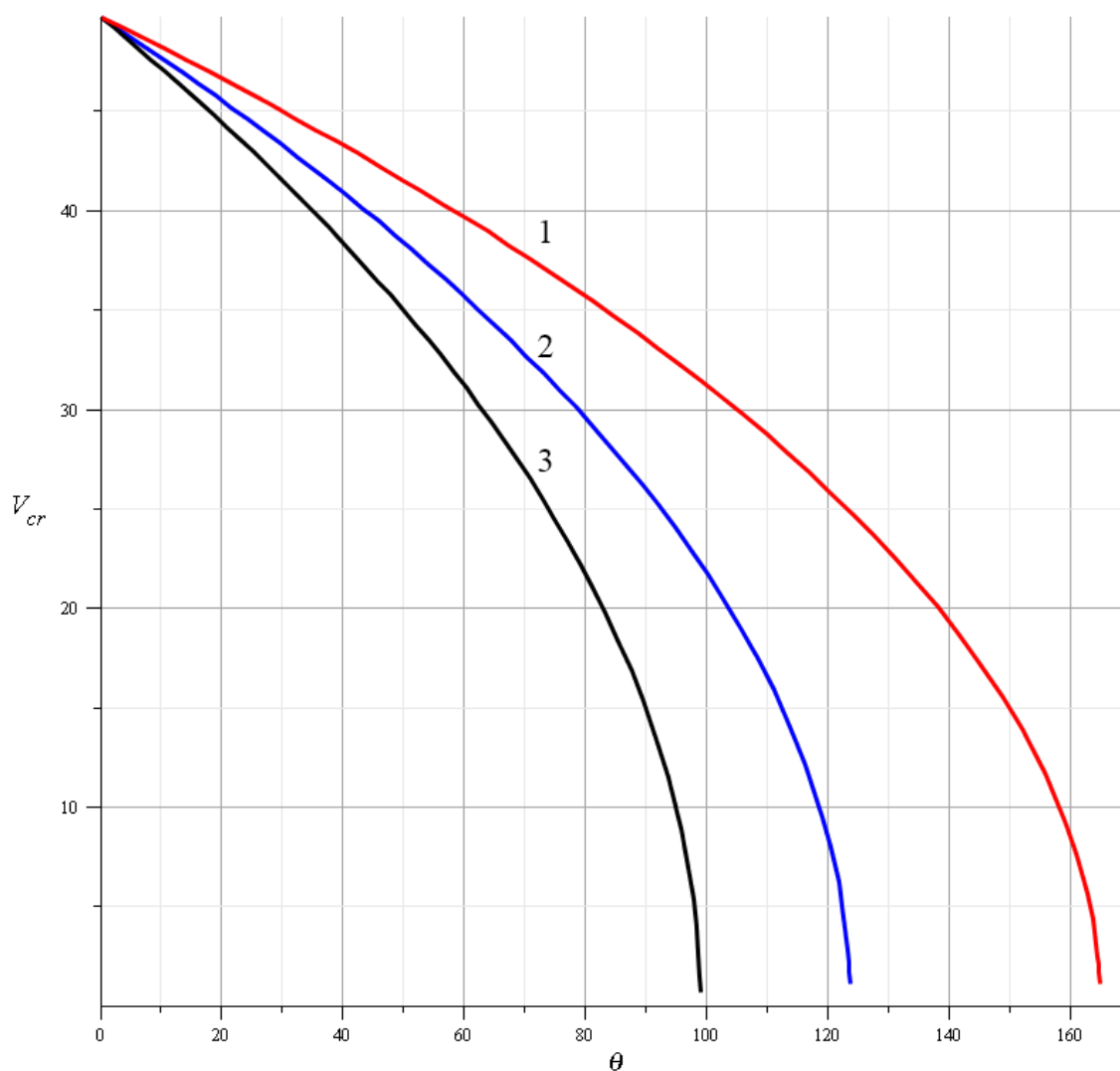


Рис. 2.8. Зависимость критической скорости V_{cr} от температуры θ для значений параметра $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}$; $4 \cdot 10^{-6}$; $5 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}) (кривые 1 – 3) при $k = 0.1$

Приведенные выше рисунки 2.6 – 2.8 демонстрируют уменьшение критической скорости при возрастании как геометрического параметра задачи k , так и при возрастании физического параметра α_0 , как это следует из формулы (2.39).

Из соотношения (2.38) с учетом выражения (2.33) следует также представление для критической температуры θ_{cr} , при которой происходит потеря устойчивости

$$\theta_{cr} = \frac{T(1-k^2) - mV^2}{Eh\alpha_0}. \quad (2.40)$$

Представленные ниже на рисунках зависимости критической температуры θ_{cr} от скорости V движения струны (полотна) иллюстрируют влияние геометрического параметра k и физического параметра α_0 на устойчивость движения. При этом полагалось $E = 10^7$ (Па), $m = 4 \cdot 10^{-3}$ (кг), $h = 10^{-3}$ (м). На рис. 2.9 представлена зависимость величины критической температуры θ_{cr} от скорости V для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ (кривые с номерами 1 – 4). Кривые построены для значения параметра $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}).

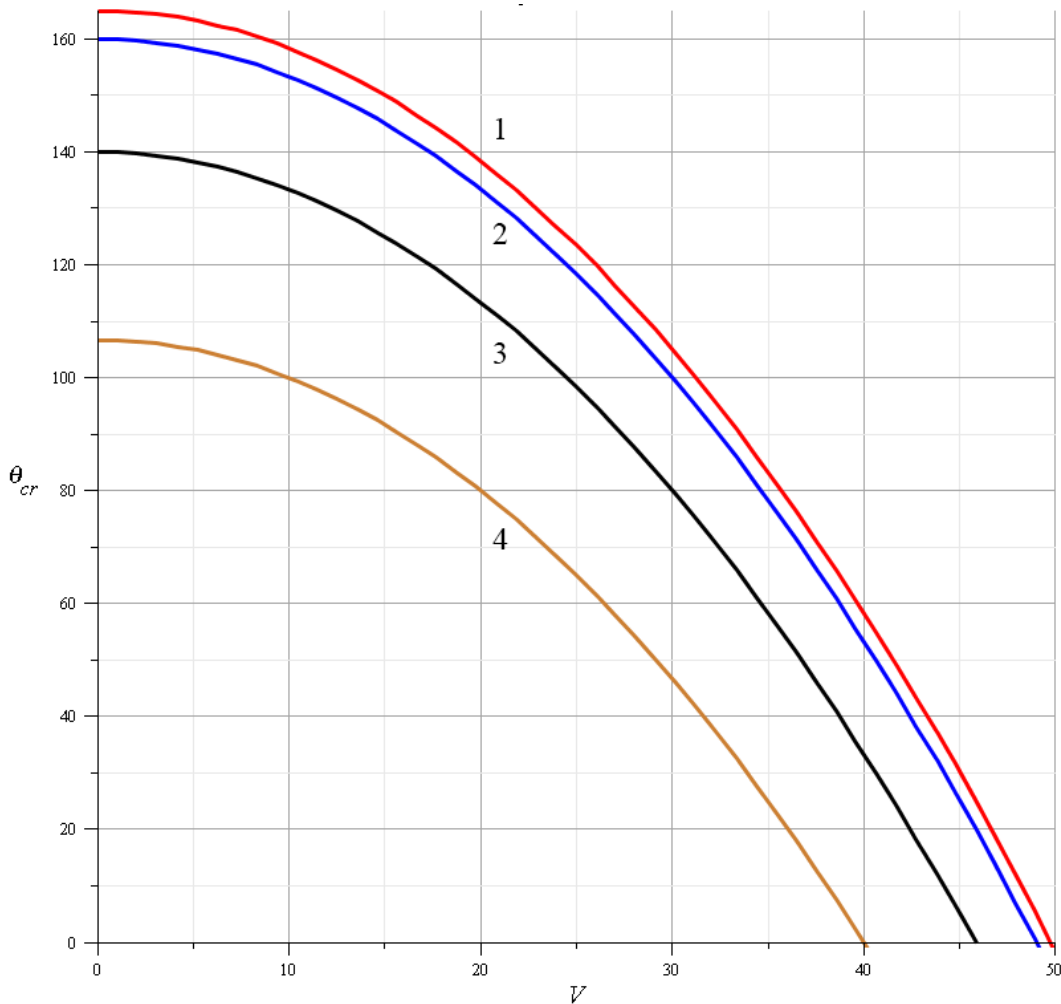


Рис. 2.9. Зависимость критической температуры θ_{cr} от скорости V для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ (кривые 1 – 4) при $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1})

На рис. 2.10 зависимости величины критической температуры θ_{cr} от скорости V для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ (кривые 1 – 4) построены для увеличенного значения параметра $\alpha_0 = 4 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$.

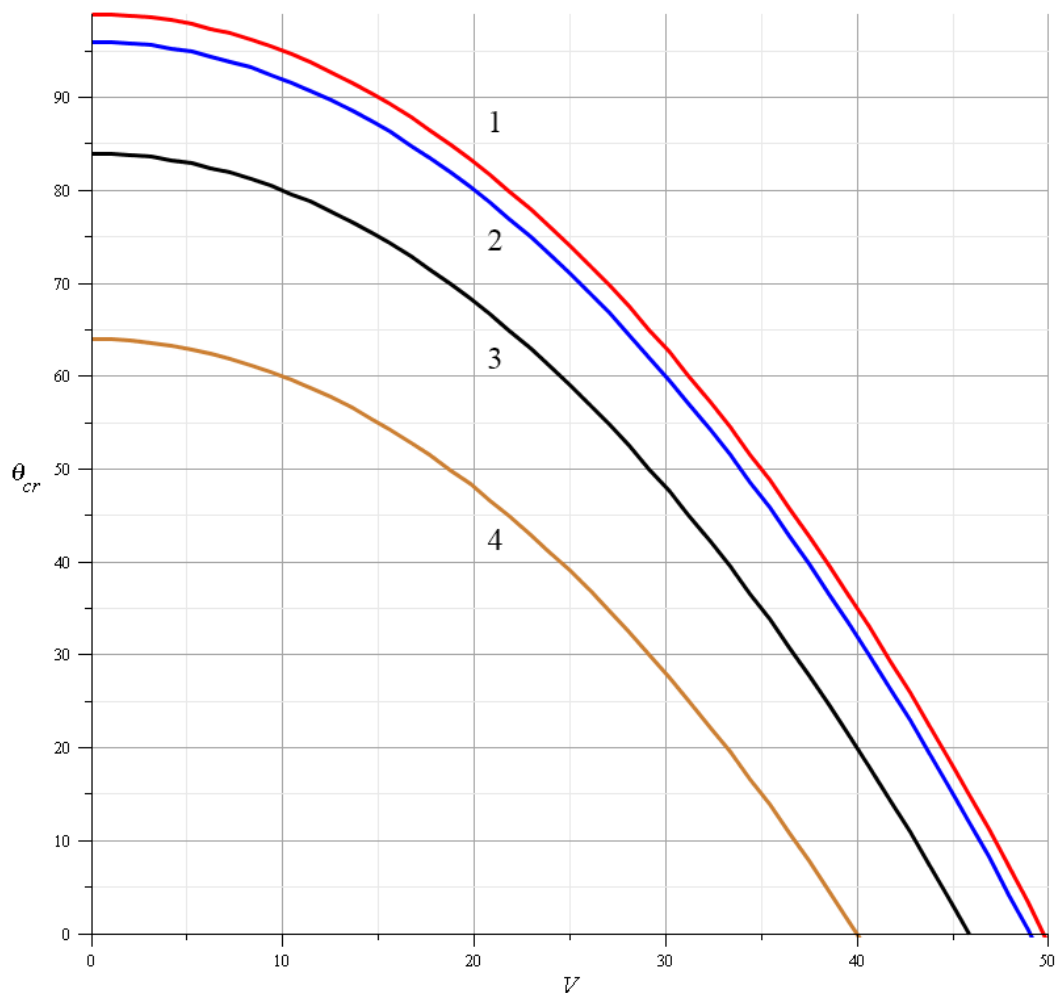


Рис. 2.10. Зависимость критической температуры θ_{cr} от скорости V для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ (кривые 1 – 4) при $\alpha_0 = 4 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$

Зависимости критической температуры θ_{cr} от скорости V для фиксированного значения параметра $k = 0.1$ показаны на рис. 2.11 кривыми 1 – 3 при различных значениях параметра $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}; 4 \cdot 10^{-6}; 5 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$.

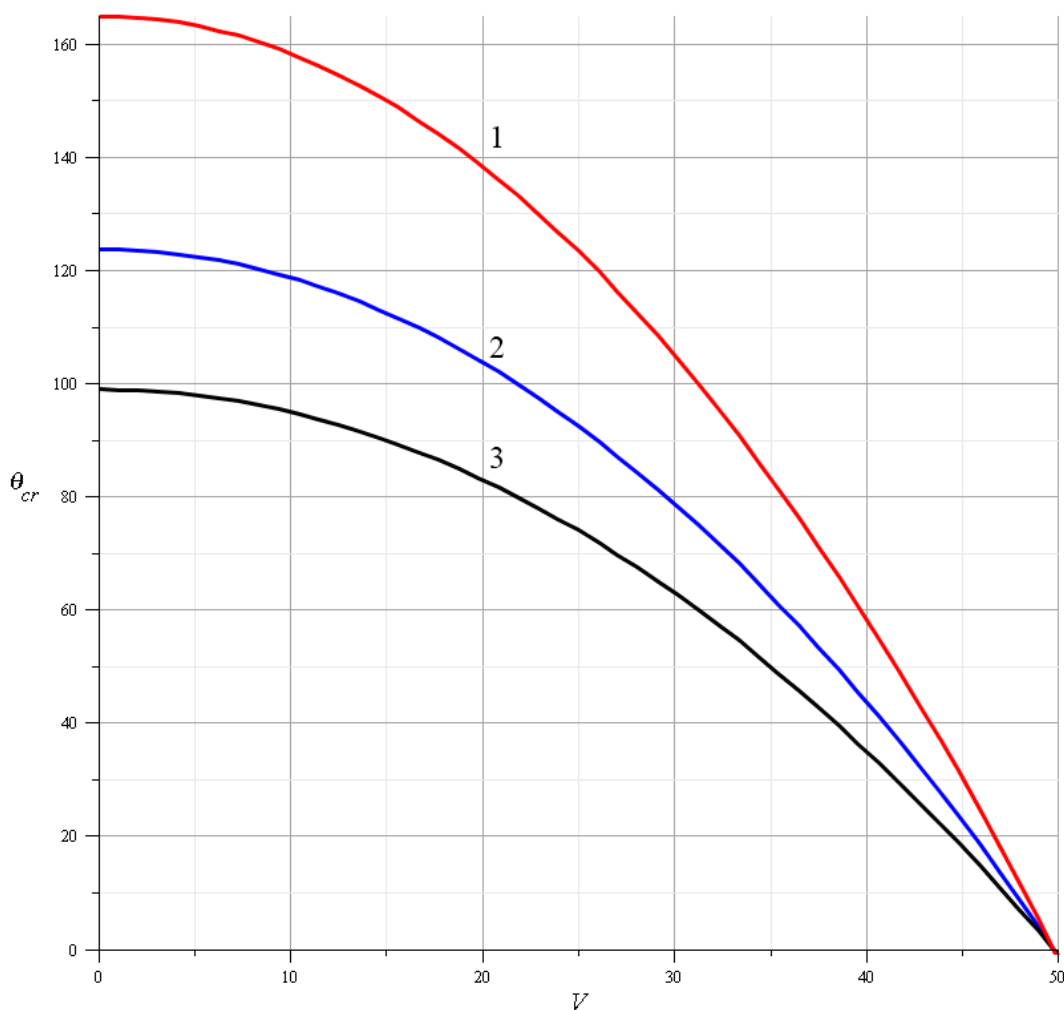


Рис. 2.11. Зависимость критической температуры θ_{cr} от скорости V для значений параметра $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}$; $4 \cdot 10^{-6}$; $5 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}) (кривые 1 – 3) при $k = 0.1$

Рисунки 2.9 – 2.11 иллюстрируют снижение критической температуры, при которой происходит потеря устойчивости, при возрастании геометрического параметра задачи k , и при возрастании физического параметра α_0 , как это следует из формулы (2.39).

2.4. Об устойчивости продольного движения вязкого материала

В предыдущих разделах рассмотрение вопросов устойчивости проводилось для движущихся термоупругих материалов. На практике, например, при производстве бумаги влияние температурных факторов оказывается существенным при сушке бумажного полотна в специальной

сушильной секции бумагоделательной машины. При моделировании движения материала в этих условиях допустимо считать материал термоупругим. На начальном этапе производства материал в значительной степени обладает вязкими свойствами, что требует отдельного рассмотрения. В этом разделе рассматривается продольно движущийся вязкий материал, моделируемый одномерной струей (волокном) переменного поперечного сечения.

2.4.1. Основные соотношения

При продольном движении вязкого материала (рис. 2.12) скорость V и площадь поперечного сечения S струи (волокна), играющие роль основных переменных состояния, описываются в пространственном (эйлеровом) описании дифференциальными уравнениями сохранения количества движения и массы

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho SV) &= \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x S), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho S) &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho SV). \end{aligned} \quad (2.41)$$

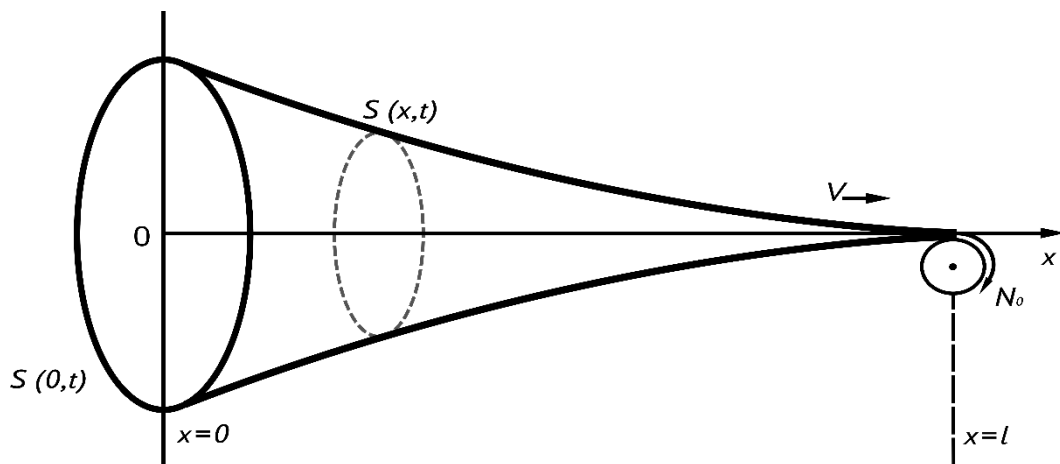


Рис. 2.12. Продольное движение вязкого материала

Краевые условия на концах рассматриваемого пролёта ($x \in [0, l]$) имеют вид

$$\begin{aligned} (S)_{x=0} &= S_0, & (V)_{x=0} &= V_0, \\ (N)_{x=l} &= (\sigma_x S)_{x=l} = N_0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Компонента растягивающего напряжения σ_x , действующая вдоль оси Ox , даётся выражением

$$\sigma_x = \mu \frac{\partial V}{\partial x},$$

где μ , ρ , S_0 , V_0 , N_0 – вязкость, плотность, начальная площадь поперечного сечения, начальная скорость, сила натяжения на конце интервала – заданные постоянные.

В безразмерных переменных

$$\tilde{x} = \frac{x}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{V_0 l}{t}, \quad \tilde{S} = \frac{S}{S_0}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{V_0}, \quad \tilde{N} = \frac{N}{N_0}$$

с учётом реологического соотношения, связывающего напряжения с градиентом скоростей, динамические уравнения (2.41) и граничные условия (2.42) записываются в виде (тильда в дальнейшем опускается)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(SV) &= \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial V}{\partial x} \right), & \gamma &= \frac{\mu}{\rho l V_0} \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x}(SV), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} (S)_{x=0} &= 1, & (V)_{x=0} &= 1, \\ \gamma \left(S \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=1} &= (N)_{x=1} = 1. \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.4.2. Стационарное решение

Стационарное, т.е. установившееся решение предполагает, что все производные по времени обращаются в ноль, и описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(S \frac{dV}{dx} \right) &= 0, \\ \frac{d}{dx} (SV) &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Отыскание решений уравнений (2.45) с условиями (2.44), как нетрудно проверить, приводит к следующим выражениям для $V = V_s(x)$ и $S = S_s(x)$

$$V_s = e^{\kappa x}, \quad S_s = e^{-\kappa x}, \quad \kappa = \frac{1}{\gamma}, \quad (2.46)$$

где κ – число Рейнольдса.

Таким образом, одномерное движение вязкого материала при растяжении характеризуются экспоненциальным возрастанием скорости и соответствующим экспоненциальным убыванием площади поперечного сечения по мере увеличения безразмерной координаты x от 0 до 1.

2.4.3. Исследование устойчивости

При исследовании устойчивости рассматриваемого движущегося материала удобно ввести новые переменные $\Phi = S$ и $\Psi = SV$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Psi}{\Phi} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

вытекающим из уравнений (2.43). Воспользуемся также следующими представлениями

$$\Phi = \Phi_s + \varepsilon \varphi, \quad \Psi = \Psi_s + \varepsilon \psi, \quad (2.48)$$

$$\Phi_s = S_s(x), \quad \Psi_s = S_s(x)V_s(x), \quad (2.49)$$

где $\varphi = \varphi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$, а ε – малый параметр. Подстановка выражений (2.48), (2.49) в систему уравнений (2.47) и последующая линеаризация по ε приводит к следующей системе уравнений относительно возмущений φ и ψ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{\Phi_s} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\Phi_s} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \left(\psi - \frac{\varphi}{\Phi_s} \right) \right]. \quad (2.51)$$

Запишем функции возмущений в виде спектральных представлений

$$\varphi(x, t) = e^{\lambda t} P(x), \quad \psi(x, t) = e^{\lambda t} Q(x). \quad (2.52)$$

Путём подстановки представлений (2.52) в систему уравнений (2.50), (2.51) получим систему уравнений для амплитудных функций $P(x)$, $Q(x)$ и спектрального параметра λ

$$\lambda P = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (2.53)$$

$$\lambda Q = \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{\Phi_s} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\Phi_s} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \left(Q - \frac{P}{\Phi_s} \right) \right]. \quad (2.54)$$

В случае, когда величины параметров μ , ρ , l , V_0 таковы, что

$$\gamma = \frac{\mu}{\rho l V_0} \ll 1, \quad (2.55)$$

приближенным упрощением системы (2.53), (2.54) является система уравнений

$$\begin{aligned} \lambda P &= -\frac{\partial Q}{\partial x}, \\ \lambda Q &= 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Единственное решение уравнений (2.56) имеет вид

$$P = 0, \quad Q = 0. \quad (2.57)$$

Таким образом, при $\gamma \ll 1$, и, в частности, при относительно малой вязкости материала и высокой скорости движения рассматриваемая упрощенная модель не допускает нетривиальных возмущений вида (2.52). Следовательно, в рассматриваемой системе отсутствуют формы потери устойчивости, характеризующиеся представлениями (8), (9). Это обстоятельство может быть учтено при более детальном исследовании уравнений (2.53), (2.54).

2.5. Выводы

В Главе 2 на основе применения моделей, предложенных в Главе 1, решены некоторые задачи об устойчивости продольного движения материалов в стационарной постановке (задачи о дивергенции), определены факторы, влияющие на критические параметры устойчивости движения материала, и даны рекомендации по повышению стабильности. Исследована устойчивость движущейся продольно термоупругой неразрезной панели, испытывающей температурное воздействие, и определена критическая температура, при которой реализуется статическая форма потери устойчивости (дивергенция) панели при заданных значениях осевого натяжения и транспортной скорости. Также приведено выражение для зависимости величины критической скорости движения панели от температуры и других параметров задачи. Рассмотрена задача о дивергенции ортотропной термоупругой панели (одномерной пластины). Получены выражения для критической скорости дивергенции и критической температуры с учетом свойств ортотропного материала. На конкретных примерах показано, как влияют свойства ортотропности на стабильность движения. Проведено сравнение с изотропным материалом. Рассмотрено движение нагретого полотна вдоль гладкой цилиндрической поверхности. Материал моделировался растягиваемой нагретой струной (одномерной мембраной). При действии центробежных сил и нагреве происходит «отлипание» материала и

выпучивание в направлении, перпендикулярном цилиндрической поверхности (статическая форма потери устойчивости). Для случая движения вокруг кругового цилиндра определены критическая скорость потери устойчивости, а также критическая температура нагрева. Проведен анализ влияния на потерю устойчивости геометрических и физических параметров задачи. Рассматривалось продольное движение вязкого материала, подверженного одномерному растяжению при отсутствии массовых сил. Частично исследовано влияние переменных скоростей и площадей поперечных сечений на динамику и устойчивость движущегося материала с учётом осевых напряжений, а также с использованием декомпозиции искомым определяющих переменных модели в виде суммы стационарных распределений и малых возмущений. Рассмотрение полученной линеаризованной модели и выведенных спектральных соотношений привело к выводу об отсутствии нетривиальных возмущений при малых значениях определяющего параметра и, тем самым, об устойчивости изучаемой системы в первом (огрубленном) приближении. Это приводит к выводу о необходимости проведения более детального исследования устойчивости рассматриваемой системы.

Глава 3. Вопросы оптимизации в задачах о повышении стабильности продольного движения материалов

В данной главе для определения наилучших значений параметров, обеспечивающих стабильность продольного движения материалов, а также для поддержания стабильности движения при нестационарном воздействии формулируются и решаются оптимизационные задачи. Важным фактором повышения стабильности является приложение к колеблющейся механической системе (движущемуся продольно материалу) «активных» управляющих воздействий для подавления возникающих нестационарных колебаний. Такие воздействия реализуются с помощью систем актюаторов различного типа. Это могут быть актюаторы точечного воздействия (игольчатые), актюаторы, действующие на некотором фиксированном участке, или более сложные, осуществляющие комплексное воздействие). На основе применения методов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами разработан и применен алгоритм последовательной оптимизации, с помощью которого определяется оптимальная программа приложения подавляющих воздействий на заданном отрезке времени.

Оптимизационный подход был применен также к решению задачи максимизации критической скорости движения слоистого материала, моделируемого слоистой упругой пластиной. С применением эволюционного численного метода поиска нелокального экстремума (генетический алгоритм) определен порядок укладки слоев, обеспечивающий максимальную скорость устойчивого движения.

3.1. Оптимальное подавление поперечных колебаний вращающихся упругих стержней

Наряду с повышением стабильности продольного движения материалов (лент, полотен, струн и т.д.) важное значение имеют исследования проблем

устойчивости и возникающих поперечных колебаний быстро вращающихся элементов конструкций: стержней, струн, гибких дисков. В данном разделе изучается процесс гашения поперечных колебаний вращающегося в горизонтальной плоскости упругого стержня, закрепленного на одном из его концов. Предполагается, что стержень вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью и совершает поперечные колебания в вертикальной плоскости, колебания предполагаются малыми по амплитуде. Поперечные колебания вращающегося стержня совершаются под внешним механическим воздействием.

3.1.1. Основные соотношения задачи оптимизации для вращающегося упругого стержня

На рис 3.1 представлен вращающийся вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω упругий стержень, закрепленный в точке $x = 0$, колебания происходят в вертикальной плоскости и описываются функцией смещений $w = w(x, t)$ во вращающейся плоскости xz .

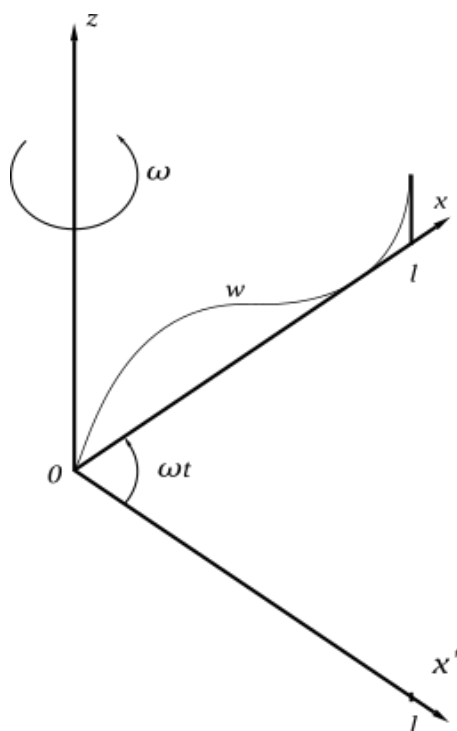


Рис. 3.1. Вращающийся упругий стержень

Считается, что колебания вращающегося стержня являются малыми и совершаются под внешним механическим воздействием $q(x, t)$. Обозначая массу единицы длины стержня через ρ , а через EI цилиндрическую (балочную) жесткость представим уравнение колебаний, происходящих во вращающейся плоскости xz , в виде

$$\rho w_{tt} - \frac{\rho \omega^2}{2} \left[(l^2 - x^2) w_x \right]_x + EI w_{xxxx} = q(x, t), \quad (3.1)$$

где l, E, I – соответственно, длина стержня, модуль Юнга, момент инерции поперечного сечения, а нижними индексами x и t обозначены частные производные по соответствующим переменным. Используя следующие обозначения для постоянных множителей и функции интенсивности нагрузки:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2}, \quad \beta = \frac{EI}{\rho}, \quad g(x, t) = \frac{q(x, t)}{\rho},$$

запишем уравнение колебаний (3.1) в удобном для проведения дальнейших операций виде

$$L(w) = w_{tt} - \alpha \left[(l^2 - x^2) w_x \right]_x + \beta w_{xxxx} = g(x, t). \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) рассматривается при следующих краевых и начальных условиях:

$$(w)_{x=0} = (w_x)_{x=0} = 0, \quad (w_{xx})_{x=l} = (w_{xxx})_{x=l} = 0, \quad (3.3)$$

$$(w)_{t=0} = g_1(x), \quad (w_t)_{t=0} = g_2(x). \quad (3.4)$$

Краевые условия (3.3) выполняются при $t \in [0, t_f]$, а начальные условия (3.4) задают распределения перемещений и скоростей при $x \in [0, l]$. Здесь $g_1(x) \in H^1(0, l)$, $g_2(x) \in L^2(0, l)$ – заданные функции, а t_f – время окончания рассматриваемого ниже процесса гашения колебаний. Заметим, что краевые условия при $x = 0$ соответствуют жесткому закреплению, а условия при $x = l$

предлагают отсутствие моментов и перерезывающих сил на свободном крае стержня.

Функция $g(x, t) \in L^2(0, l) \times (0, t_f)$ рассматривается в дальнейшем в качестве управляющего воздействия, реализующего подавление колебаний стержня. Качество процесса подавления колебаний вращающегося стержня оценивается значением функционала

$$J_g = \int_0^l \left(\alpha_1 w^2 + \alpha_2 w_t^2 \right) dx, \quad (3.5)$$

зависящего от перемещений $w(x, t_f)$ и скоростей $w_t(x, t_f)$ в конечный момент времени $t = t_f$. Параметры $\alpha_1 \geq 0$ и $\alpha_2 \geq 0$ считаются заданными.

На подавляющее воздействие $g(x, t)$ налагается энергетическое ограничение в виде неравенства

$$J_\mu = \int_0^{t_f} \int_0^l g^2(x, t) dx dt \leq M_0, \quad (3.6)$$

где $M_0 > 0$ – заданная постоянная ограничения энергии.

Подавление колебаний в оптимизационной постановке заключается в отыскании управляющего воздействия $g(x, t)$, удовлетворяющего энергетическому неравенству (3.6) и минимизирующего квадратичный функционал качества (3.5).

3.1.2. Условия оптимальности для вращающегося упругого стержня

Для минимизации рассматриваемого функционала качества (3.5) выведем условия оптимальности, варьируя с этой целью основные соотношения начально-краевой задачи

$$\delta L(w) = L(\delta w) = (\delta w)_{tt} - \alpha \left[(l^2 - x^2) (\delta w)_x \right]_x + \beta (\delta w)_{xxxx} = \delta g, \quad (3.7)$$

$$(\delta w)_{x=0} = (\delta w_x)_{x=0} = 0, \quad (\delta w_{xx})_{x=l} = (\delta w_{xxx})_{x=l} = 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (3.8)$$

$$(\delta w)_{t=0} = 0, \quad (\delta w_t)_{t=0} = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (3.9)$$

Используем также выражения для вариаций минимизируемого функционала δJ_g и ограничения (3.6), записанного предварительно в виде равенства при помощи введения вспомогательной величины θ [99-101] (Баничук Н.В. et al (1989), Баничук Н.В. (1986), Троицкий В.А. и Петухов Л.В. (1982)):

$$J_\mu - M_0 + \theta^2 = 0. \quad (3.10)$$

Будем иметь

$$\delta J_g = 2 \int_0^l (\alpha_1 w \delta w + \alpha_2 w_t \delta w_t)_{t=t_f} dx, \quad (3.11)$$

$$\delta (J_\mu - M_0 + \theta^2) = 2 \int_0^{t_f} \int_0^l g \delta g dx dt + 2\theta \delta \theta = 0. \quad (3.12)$$

Введем в рассмотрение сопряженную переменную $v(x, t)$, удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$(v)_{x=0} = (v_x)_{x=0} = 0, \quad (v_{xx})_{x=l} = (v_{xxx})_{x=l} = 0, \quad (3.13)$$

совпадающим с граничными условиями, наложенными на переменную w в (3.3). Затем умножим уравнение в вариациях (3.7) на переменную $v(x, t)$ с последующим интегрированием произведения по t и по x . Учитывая начально-краевые условия (3.8) и (3.9) и выполняя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \delta J_a &= \int_0^{t_f} \int_0^l v [L(\delta w) - \delta g] dx dt = \\ &= \int_0^{t_f} \int_0^l \{ [L(v)] \delta w - v \delta g \} dx dt + \int_0^l (v \delta w_t - v_t \delta w)_{t=t_f} dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Необходимое условие оптимальности процесса гашения колебаний вращающегося стержня сводится к равенству нулю вариации расширенного функционала Лагранжа J , то есть

$$\delta J = \delta J_g + \delta J_a + \mu \left(2 \int_0^{t_f} \int_0^l g \delta g dx dt + 2\theta \delta \theta \right) = 0, \quad (3.15)$$

где μ – множитель Лагранжа, соответствующий учету энергетического неравенства (3.6). Подстановка выражений (3.11), (3.12), (3.14) в уравнение (3.15) и учет произвольности вариаций δg , δw и вариации $\delta \theta$ приводит к необходимому условию оптимальности

$$g(x, t) = \frac{1}{2\mu} v(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, t_f], \quad (3.16)$$

если ограничение (3.6) выполняется со знаком строгого равенства и, следовательно, $\theta = 0$. В этом случае

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0} \int_0^{t_f} \int_0^l v^2(x, t) dx dt. \quad (3.17)$$

В случае строгого неравенства в (3.6) величина вспомогательной переменной θ в (3.10) отлична от нуля, а из необходимого условия экстремума ($\mu\theta = 0$), которое получается из (3.15), следует, что $\mu = 0$.

Из условия обращения в ноль полной (расширенной) вариации в (3.15) также получим однородное дифференциальное уравнение в частных производных для сопряженной переменной

$$L(v) \equiv v_{tt} - \alpha \left[(l^2 - x^2) v_x \right]_x + \beta v_{xxxx} = 0, \quad (3.18)$$

удовлетворяющей условиям в конечный момент времени $t = t_f$ рассматриваемого временного интервала $[0, t_f]$:

$$(v)_{t=t_f} = -2\alpha_2 (w_t)_{t=t_f}, \quad (v_t)_{t=t_f} = 2\alpha_1 (w)_{t=t_f}, \quad x \in [0, l]. \quad (3.19)$$

Таким образом, рассматриваемая задача оптимального гашения колебаний вращающегося стержня сводится к решению связанных начально-краевой задачи (3.2) – (3.4) для $w(x, t)$ и краевой задачи (3.18), (3.13) для $v(x, t)$ с условиями (3.19) в конечный момент времени $t = t_f$. При этом оптимальное демпфирующее воздействие $g(x, t)$ находится с применением условий экстремума.

3.1.3. Итерационный алгоритм для вращающегося упругого стержня

Развиваемый итерационный алгоритм определения управляющего воздействия основывается на применении метода Галёркина [102, 103] (Келдыш М.В. (1942), Свирский Л.В. (1968)). Представим искомые распределения поперечных перемещений стержня $w(x, t)$ и сопряженной переменной $v(x, t)$ в виде рядов

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \Psi_n(x), \quad v(x, t) = \sum_{n=1}^{n_0} s_n(t) \Psi_n(x), \quad (3.20)$$

где $q_n(t)$, $s_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, n_0$) – неизвестные функции времени, подлежащие определению с использованием уравнений, определяющих w и v , а $\Psi_n(x)$ – функции формы, удовлетворяющие граничным условиям (3.3) для w и аналогичным условиям (3.13) для v . Получим обыкновенные дифференциальные уравнения для координатных функций метода Галёркина $q_n(t)$ и $s_n(t)$, подставив выражения (3.20) в соответствующие динамические уравнения (3.2), (3.18) и умножив получающиеся соотношения на $\Psi_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$) с последующим интегрированием по x ($0 \leq x \leq l$). Выполнив стандартные операции [104] (Mikhlin S.G. (1964)), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{n_0} \{A_{jn}(q_n)_{tt} + (\beta C_{jn} - \alpha B_{jn})q_n\} - G_j(t) = 0, \quad (3.21)$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} \{A_{jn}(s_n)_{tt} + (\beta C_{jn} - \alpha B_{jn})s_n\} = 0, \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} A_{jn} &= \int_0^l \Psi_n \Psi_j dx, & B_{jn} &= \int_0^l [(l^2 - x^2)(\Psi_n)]_x \Psi_j dx, \\ C_{jn} &= \int_0^l (\Psi_n)_{xxxx} \Psi_j dx, & G_j(t) &= \int_0^l g(x, t) \Psi_j dx, \quad j=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

Начальные условия для q_j при $t=0$ и условия для s_j в конечный момент времени $t=t_f$ записываются в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{n_0} (q_n)_{t=0} A_{jn} = \int_0^l g_1 \Psi_j dx, \quad \sum_{n=1}^{n_0} ((q_n)_t)_{t=0} A_{jn} = \int_0^l g_2 \Psi_j dx, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_0} (s_n)_{t=t_f} A_{jn} &= -2\alpha_2 \sum_{n=1}^{n_0} ((q_n)_t)_{t=t_f} A_{jn}, \\ \sum_{n=1}^{n_0} ((s_n)_t)_{t=t_f} A_{jn} &= 2\alpha_1 \sum_{n=1}^{n_0} (q_n)_{t=t_f} A_{jn}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.1.4. Пример приближенного решения задачи оптимизации для вращающегося упругого стержня

Рассмотрим пример для $n_0 = 1$ функции формы

$$\Psi_1(x) = 1 - \frac{4(l-x)}{3l} + \frac{(l-x)^4}{3l^4}, \quad (3.26)$$

удовлетворяющей краевым условиям для w и v .

Как следует из (3.23), (3.26),

$$A_{11} = \lambda_1 = 0.9905l \approx l, \quad B_{11} = \lambda_2 = 0.6025l^3, \quad C_{11} = \lambda_3 = \frac{3.2}{l^3}.$$

Полагая также, что $g_1(x) = \Psi_1(x)$, $g_2(x) = 0$ и что на первой итерации $g^{(1)} = 1$, получим

$$G_1^{(1)} = \int_0^l g^{(1)} \Psi_1 dx = \lambda_0 = \frac{2}{5}l, \quad (3.27)$$

$$\left(q_1^{(1)} \right)_{t=0} = \int_0^l g_1 \Psi_1 dx = \lambda_1, \quad \left(\left(q_1^{(1)} \right) \right)_{t=0} = A_{11}^{-1} \int_0^l g_2 \Psi_1 dx = 0. \quad (3.28)$$

Учитывая выражение (3.27) и начальные условия (3.9), а также общее соотношение (3.21), приходим к дифференциальному уравнению для координатной функции $q_1^{(1)}$ (на первой итерации)

$$\left(q_1^{(1)} \right)_{tt} + \gamma_1 q_1^{(1)} + \gamma_0 = 0, \quad t \in [0, t_f],$$

в котором

$$\gamma_0 = -G_1^{(1)} = -\lambda_0, \quad \gamma_1 = \beta C_{11} - \alpha B_{11},$$

а решение дается формулой

$$q_1^{(1)} = \left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \cos(\sqrt{\gamma_1} t) + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}, \quad t \in [0, t_f].$$

При этом дифференциальное уравнение для сопряженной переменной $s_1^{(1)}$ и условия в конечный момент времени, как следует из (3.22), (3.25), имеют вид

$$\left(s_1^{(1)} \right)_{tt} + \gamma_1 s_1^{(1)} = 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (3.29)$$

$$\left(s_1^{(1)} \right)_{t=t_f} = -2\alpha_2 \left(\left(q_1^{(1)} \right) \right)_{t=t_f} = 0, \quad (3.30)$$

$$\left(\left(s_1^{(1)} \right) \right)_{t=t_f} = 2\alpha_1 \left(q_1^{(1)} \right)_{t=t_f} = 2\alpha_1 \left[\left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f) + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right] \equiv Q. \quad (3.31)$$

Далее положим $\alpha_2 = 0$. Интегрируя уравнение (3.29) в обратном направлении с условиями (3.30), (3.31) в конечный момент времени, получим

$$s_1^{(1)}(t) = Q_1 \sin(\sqrt{\gamma_1} t) + Q_2 \cos(\sqrt{\gamma_1} t), \quad t \in [0, t_f],$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\sqrt{\gamma_1}} \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f), \quad Q_2 = -\frac{Q}{\sqrt{\gamma_1}} \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f).$$

С использованием представлений (3.16), (3.17) приходим к следующим выражениям для подавляющего воздействия

$$g^{(2)} = \frac{1}{2\mu} v^{(1)}(x, t) = \frac{1}{2\mu} s_1^{(1)}(t) \Psi_1(x),$$

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0} \int_0^{t_f} \int_0^l (s_1^{(1)}(t))^2 (\Psi_1(x))^2 dx dt = \frac{1}{4M_0} \int_0^{t_f} (s_1^{(1)}(t))^2 dt.$$

Применим найденное подавляющее воздействие $g^{(2)}(x, t)$ для отыскания соответствующего второго приближения $q_1^{(2)}$ на основе интегрирования дифференциального уравнения

$$(q_1^{(2)})_{tt} + \gamma_1 q_1^{(2)} + \gamma_2 = 0,$$

$$\gamma_2(t) = -G_1^{(2)}(t) = -\int_0^l \Psi_1 g^{(2)} dx = -\frac{1}{2\mu} s_1^{(1)}(t).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q_1^{(2)}(t) = \chi_1 \sin(\sqrt{\gamma_1} t) + \chi_2 \cos(\sqrt{\gamma_1} t) -$$

$$\frac{1}{4\mu\gamma_1} \left[(Q_1 \sqrt{\gamma_1} t - Q_2) \cos(\sqrt{\gamma_1} t) - Q_2 \sqrt{\gamma_1} t \sin(\sqrt{\gamma_1} t) \right].$$

Произвольные постоянные χ_1 и χ_2 находятся при помощи условий

$$\begin{aligned} \left(q_1^{(2)} \right)_{t=0} &= \int_0^l \Psi_1(x) g_1(x) dx = \int_0^l (\Psi_1(x))^2 dx = 1, \\ \left(\left(q_1^{(2)} \right)_t \right)_{t=0} &= \int_0^l \Psi_1(x) g_2(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Получаем следующие выражения для констант интегрирования:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{Q_1}{4\mu\gamma_1} = -\frac{Q \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f)}{4\mu\gamma_1^{\frac{3}{2}}}, \\ \chi_2 &= 1 + \frac{Q_2}{4\mu\gamma_1} = 1 - \frac{Q \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f)}{4\mu\gamma_1^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

В рассмотренном случае оптимального подавления колебаний величина критерия качества будет равна

$$J_g^* = (J_g)_{g=g^*} = \alpha_1 (q_1^{(2)})_{t=t_f}^2. \quad (3.32)$$

Для сравнения, при отсутствии демпфирования в рассматриваемом случае, когда $g = G_1 = \gamma_0 = 0$ и $\alpha_2 = 0$, будем иметь

$$q_1(t) = \lambda_1 \cos(\sqrt{\gamma_1} t), \quad (J_g)_{g=0} = \alpha_1 \lambda_1^2 \cos^2(\sqrt{\gamma_1} t_f), \quad (\lambda_1 \approx l). \quad (3.33)$$

На рис. 3.2 представлена зависимость функционала J_g от параметра задачи t_f . Сплошная кривая соответствует соотношению (3.32) при оптимальном воздействии на стержень, а штриховая – соотношениям (3.33) при отсутствии подавляющего воздействия. При расчетах (опуская соответствующие размерности) полагалось $\alpha_1 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $l = 1$, $M_0 = 2$.

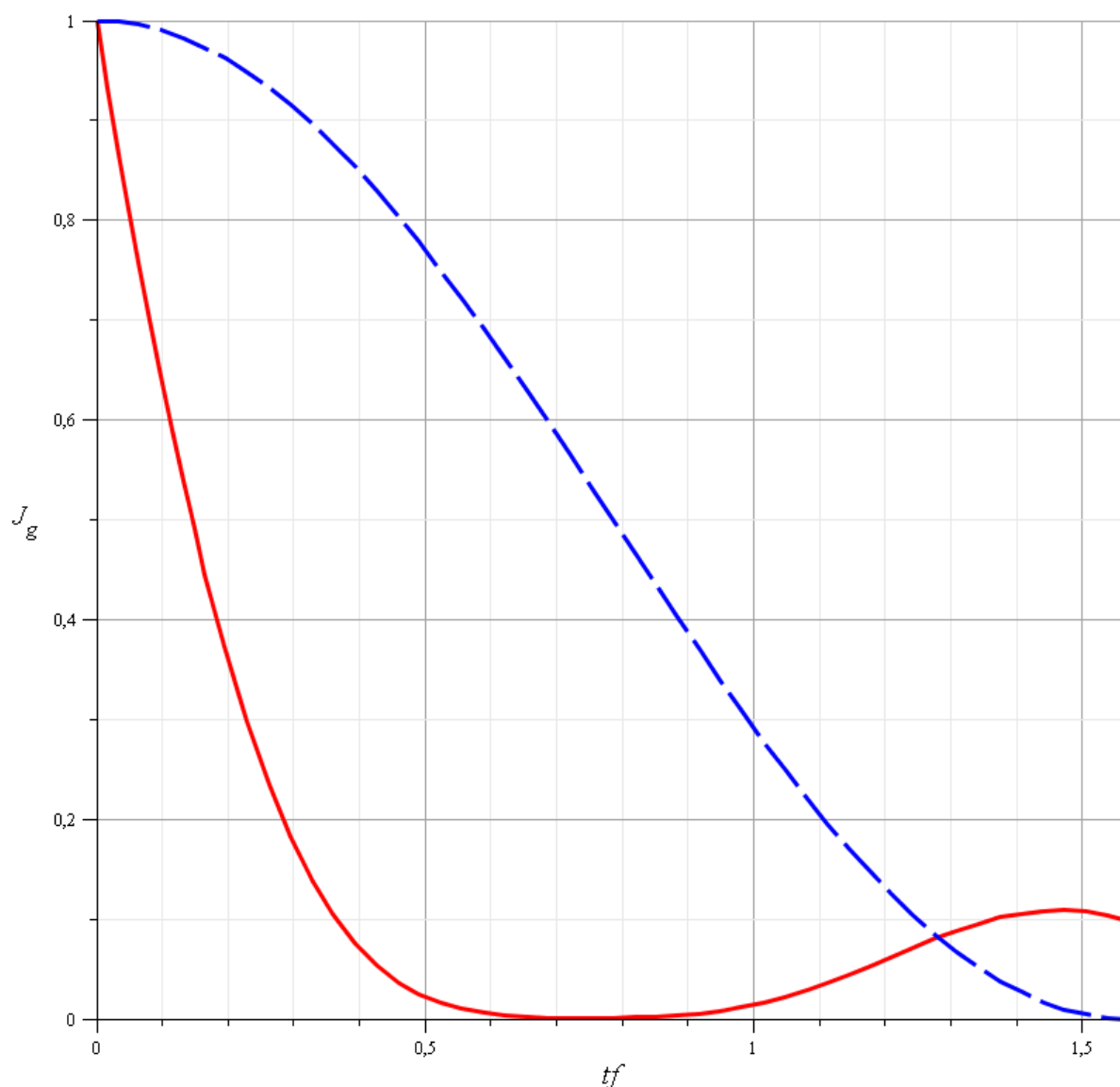


Рис. 3.2. Зависимость функционала J_g от параметра t_f

На рис. 3.3. для $t_f = \frac{\pi}{2}$ пунктирными линиями с номерами 1, 2, 3 представлены распределения прогибов стержня $w(x, t) = \Psi_1(x)\lambda_1 \cos(\sqrt{\gamma_1}t)$ в моменты времени $t = 0; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}$ при отсутствии подавляющего воздействия, когда $g = G_1 = \gamma_0 = 0$. Сплошные линии 4, 5, 6 соответствуют прогибам стержня $w(x, t) = \Psi_1(x)q_1^{(2)}(t)$ в те же моменты времени в случае найденного приближения для оптимального гасящего воздействия.

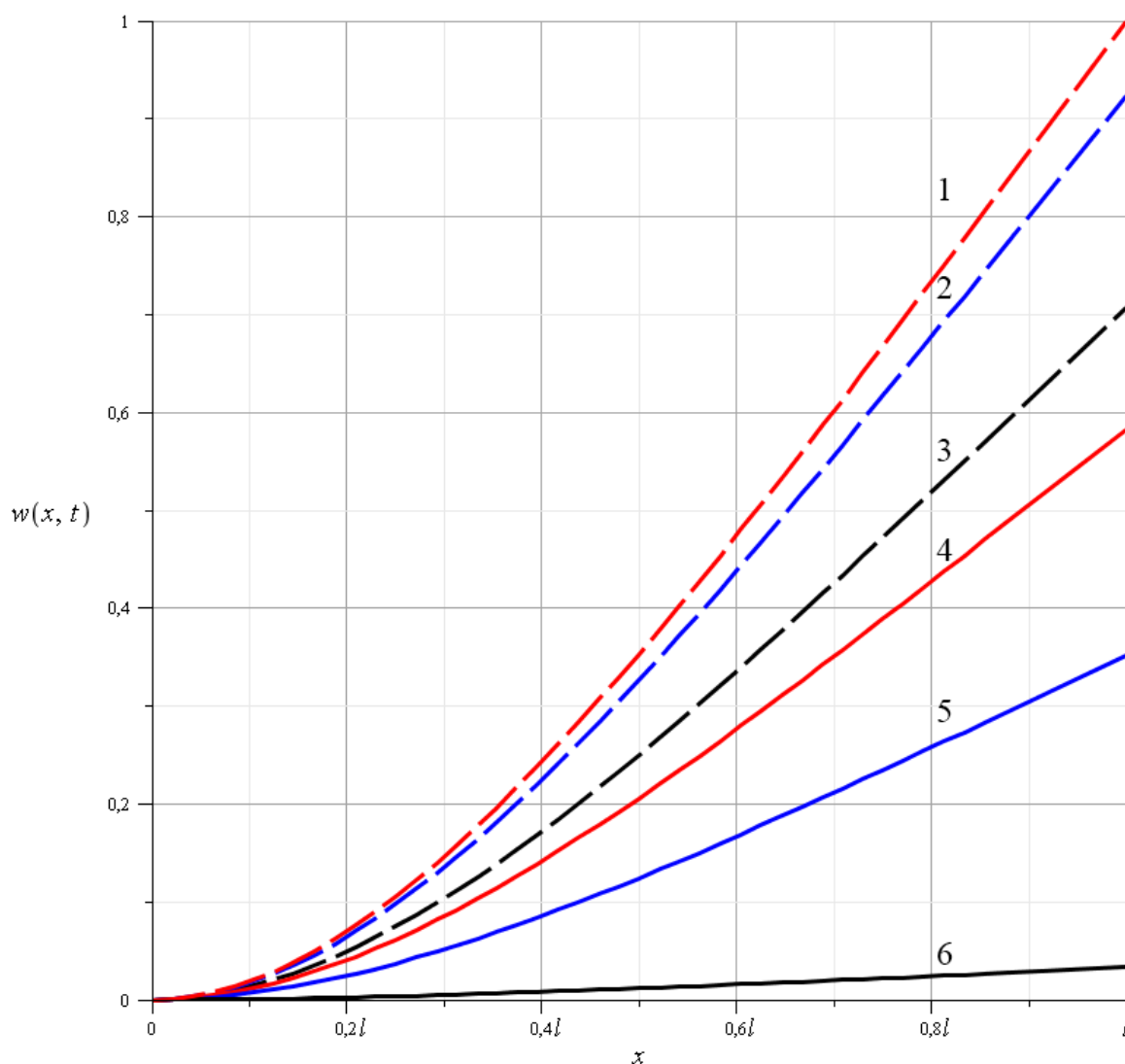


Рис. 3.3. Распределения прогибов $w(x, t)$ для $t_f = \frac{\pi}{2}$ в моменты времени

$t = 0; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}$ при отсутствии подавляющего воздействия (пунктирные линии 1,

2, 3) и при подавляющем оптимальном воздействии (сплошные линии 4, 5, 6)

3.2. О гашении колебаний быстро вращающихся дисков

Модель поперечных колебаний гибкого вращающегося диска, предложенная в [105,106] (Lamb H. and Southwell R.V. (1921), Southwell R.V. (1922)), учитывала действие натяжений в радиальном и окружном направлениях. Отмечалось, что, несмотря на отсутствие учета в модели изгибных сил, данная модель описания колебаний приводит к удовлетворительным результатам при больших скоростях вращения диска. В

работах [107 – 109] (Simmonds J.G. (1962a,b), Eversman W. (1968)) в предположении об отсутствии изгибных напряжений исследовались моды свободных поперечных колебаний вращающихся мембранных дисков. В работе [110] (Barasch S. and Chen Y. (1972)) при исследовании поперечных колебаний вращающегося диска дополнительно учитывались изгибные силы и были получены результаты, обосновывающие вычисления частот в [105–109]. Влияние приложения внешней поперечной силы на устойчивость вращающегося упругого диска исследовалось в [111] (Iwan W.D. and Moeller T.L. (1976)) в предположении, что внешнее воздействие распределено по малой области диска. Стационарные прогибы гибкого вращающегося диска, находящегося под воздействием фиксированной в пространстве поперечной нагрузки, изучались в [112] (Benson R.C. and Bogy D.V. (1978)) как в рамках мембранной модели, так и с учетом изгибной жесткости. Проблемы устойчивости и дестабилизации колебаний упругих и вязкоупругих систем в движущихся средах исследовались в [113] (Crandall S.H. (1991)), а в [114] (Paidoussis M.P. (2004)) приведено решение, полученное Хосака и Крэндэллом [29] (1992), задачи стабилизации поперечных колебаний вращающегося диска с учетом аэродинамического воздействия. Рассматривается вращение тонкого упругого диска вокруг его оси. Предполагается, что диск жестко закреплен в центре и совершает малые поперечные колебания, описываемые в рамках мембранной модели. Для подавления колебаний гибкий диск подвергается внешним механическим воздействиям. Задача состоит в определении экстремального подавляющего колебания воздействия на заданном интервале времени.

3.2.1. Основные соотношения задачи оптимизации для упругого вращающегося диска

На рис. 3.4 рассматривается вращающийся с угловой скоростью ω упругий диск, совершающий поперечные колебания малой амплитуды и

находящийся под внешним механическим воздействием для демпфирования колебаний.

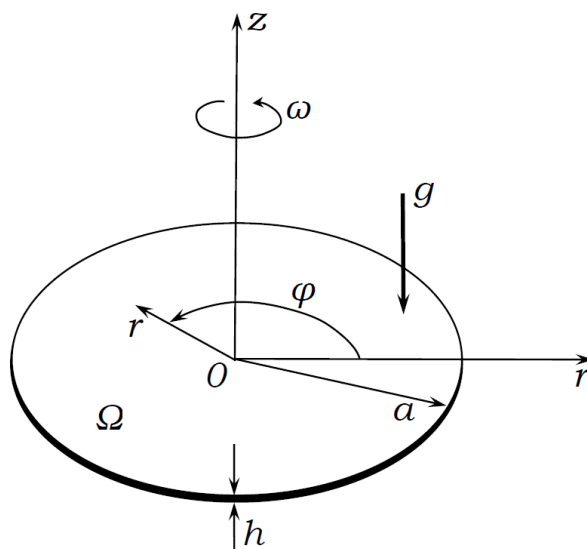


Рис. 3.4. Вращающийся диск

Используя лабораторную (Эйлерову) систему координат $rO\varphi$ и мембранную модель вращающегося диска, представим уравнение поперечных колебаний в виде [105–109]

$$\rho h (w_{tt} + 2\omega w_{t\varphi} + \omega^2 w_{\varphi\varphi}) - \frac{\rho h \omega^2}{r} (rPw_r)_r - \frac{\rho h \omega^2 Q}{r^2} w_{\varphi\varphi} = g$$

$$P = \frac{1}{8}(3 + \nu)(a^2 - r^2), \quad Q = \frac{1}{8}((3 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2)$$

где $w = w(r, \varphi, t)$ – поперечное перемещение, ρ – плотность, a – радиус диска, h – толщина мембраны, $\omega = \varphi_t$ – угловая скорость, ν – коэффициент Пуассона, $g = g(r, \varphi, t)$ – прикладываемое поперечное демпфирующее воздействие, нижние индексы t , r и φ означают дифференцирование по соответствующей переменной.

В дальнейшем используются безразмерные переменные $r' = r/a$, $g' = g/\rho h$ (штрихи далее опускаются), а также начальные и граничные условия, выражающие жесткое закрепление в центре круглого диска и

конечность перемещений свободного края. Учитывая, что все рассмотрения проводятся в области Ω :

$$(r, \varphi) \in \Omega = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

на отрезке времени $0 \leq t \leq t_f$, запишем данные условия в виде

$$(w)_{t=0} = g_1(r, \varphi), \quad (w_t)_{t=0} = g_2(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \Omega, \quad (3.34)$$

$$(w)_{r=0} = 0, \quad (w)_{r=1} < \infty, \quad t \in [0, t_f], \quad (3.35)$$

где t_f – безразмерное время окончания рассматриваемого процесса демпфирования колебаний, $g_1(r, \varphi)$ и $g_2(r, \varphi)$ – заданные начальные возмущения перемещений и их скоростей. Функция прогибов удовлетворяет также условиям $(w_r)_{r=0} = 0$ и $w(r, \varphi, t) = w(r, \varphi + 2\pi, t)$. Функция $g = g(r, \varphi, t)$ рассматривается в дальнейшем в качестве управляющего воздействия, реализующего демпфирование колебаний диска. Качество процесса подавления колебаний оценивается значением функционала

$$J_g = \int_{\Omega} (\alpha_1 w^2 + \alpha_2 w_t^2)_{t=t_f} d\Omega, \quad (3.36)$$

зависящего от перемещений $w(r, \varphi, t_f)$ и скоростей $w_t(r, \varphi, t_f)$ в конечный момент времени $t = t_f$. Параметры $\alpha_1 \geq 0$ и $\alpha_2 \geq 0$ считаются заданными.

На управляющее демпфирующее воздействие $g(r, \varphi, t)$ наложено энергетическое ограничение в виде следующего неравенства:

$$J_{\mu} = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} g^2(r, \varphi, t) d\Omega dt \leq M_0. \quad (3.37)$$

Здесь $d\Omega = r dr d\varphi$, а $M_0 > 0$ – заданная постоянная.

Процесс гашения колебаний в оптимизационной постановке [115, 116, 117, 100, 101] (Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. (1979), Моисеев Н.Н. (1971), Лионс Ж.-Л. (1972), Баничук Н.В. (1986), Троицкий В.А., Петухов Л.В. (1982)) заключается в отыскании управляющего экстремального воздействия $g(r, \varphi, t)$ ($(r, \varphi) \in \Omega$), удовлетворяющего энергетическому неравенству (3.37) и минимизирующего квадратичный функционал качества (3.36).

Для реализации процесса минимизации рассматриваемого функционала качества (3.36) выведем условия оптимальности. С этой целью воспользуемся уравнением колебаний вращающегося диска в безразмерной форме

$$L(w) \equiv w_{tt} + 2\omega w_{t\varphi} + \omega^2 \left[w_{\varphi\varphi} \left(1 - \frac{Q}{r^2} \right) - \frac{1}{r} (rPw_r)_r \right] = g \quad (3.38)$$

и приведем соответствующие соотношения в вариациях для этого уравнения и начально-краевых условий (3.34), (3.35)

$$\begin{aligned} \delta L(w) &= L(\delta w) = \\ &= (\delta w)_{tt} + 2\omega (\delta w)_{t\varphi} + \omega^2 (\delta w)_{\varphi\varphi} \left(1 - \frac{Q}{r^2} \right) - \frac{\omega^2}{r} (rP(\delta w)_r)_r = \delta g, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$(\delta w)_{t=0} = 0, \quad (\delta w_t)_{t=0} = 0, \quad (r, \varphi) \in \Omega, \quad (3.40)$$

$$(\delta w)_{r=0} = 0, \quad (\delta w)_{r=1} \leq 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (3.41)$$

причем $(\delta w_r)_{r=0} = 0$ и $\delta w(r, \varphi, t) = \delta w(r, \varphi + 2\pi, t)$.

3.2.2. Сопряженная система и необходимые условия оптимальности для упругого вращающегося диска

Используем в дальнейшем также выражения для вариаций минимизируемого функционала δJ_g и ограничения (3.37), записанного предварительно в виде равенства при помощи введения вспомогательной

величины θ [100, 101] (Баничук Н.В. (1986), Троицкий В.А., Петухов Л.В. (1982)):

$$J_\mu - M_0 + \theta^2 = 0. \quad (3.42)$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \delta J_g &= 2 \int_{\Omega} (\alpha_1 w \delta w + \alpha_2 w_t \delta w_t)_{t=t_f} d\Omega, \\ \delta(J_\mu - M_0 + \theta^2) &= 2 \int_0^{t_f} \int_{\Omega} g \delta g d\Omega dt + 2\theta \delta\theta = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Введем в рассмотрение сопряженную переменную $v(r, \varphi, t)$, удовлетворяющую по определению следующим граничным условиям:

$$(v)_{r=0} = 0, \quad (v)_{r=1} < \infty, \quad t \in [0, t_f], \quad (3.44)$$

совпадающим с граничными условиями, наложенными на переменную w при $r=0$ и $r=1$ в (3.35). Умножим затем уравнение в вариациях (3.39) на переменную v с последующим интегрированием произведения по области Ω . Используя начально-краевые условия (3.40) и (3.41) и выполняя интегрирование «по частям», представим вариацию полученного интеграла в виде

$$\begin{aligned} \delta J_a &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} v [L(\delta w) - \delta g] d\Omega dt = \\ &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \{ [L(v)] \delta w - v \delta g \} d\Omega dt + \int_{\Omega} (v \delta w_t - v_t \delta w)_{t=t_f} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Необходимое условие оптимальности процесса демпфирования колебаний вращающегося диска сводится к равенству нулю вариации расширенного функционала Лагранжа, то есть

$$\delta J = \delta J_g + \delta J_a + \mu \left(2 \int_0^{t_f} \int_{\Omega} g \delta g d\Omega dt + 2\theta \delta\theta \right) = 0, \quad (3.46)$$

где μ – множитель Лагранжа, соответствующий учету энергетического неравенства (3.37). Подстановка выражений (3.44), (3.45) в уравнение (3.46) и учет произвольности вариаций δg , δw при $(r, \varphi) \in \Omega$ и вариации $\delta \theta$ приводит к необходимому условию оптимальности

$$g(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\mu} v(r, \varphi, t), \quad (r, \varphi) \in \Omega, \quad t \in [0, t_f], \quad (3.47)$$

если ограничение (3.37) выполняется со знаком строгого равенства и, следовательно, $\theta = 0$. При этом ($d\Omega = r dr d\varphi$)

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} v^2(r, \varphi, t) d\Omega dt. \quad (3.48)$$

В случае строгого неравенства в (3.37) величина вспомогательной переменной θ в (3.42) отлична от нуля, а из необходимого условия экстремума ($\mu\theta = 0$), которое получается из (3.46), следует, что $\mu = 0$.

Из условия обращения в ноль полной (расширенной) вариации в (3.46) также получим однородное дифференциальное уравнение в частных производных для сопряженной переменной

$$L(v) \equiv v_{tt} + 2\omega v_{t\varphi} + \omega^2 \left(1 - \frac{Q}{r^2}\right) v_{\varphi\varphi} - \frac{\omega^2}{r} (rPv_r)_r = 0, \quad (3.49)$$

удовлетворяющей условиям в конечный момент времени $t = t_f$ рассматриваемого временного интервала

$$(v)_{t=t_f} = -2\alpha_2 w_t, \quad (v_t)_{t=t_f} = 2\alpha_1 w.$$

Отметим, что условие экстремума расширенного функционала

$$\mu\theta = 0 \quad (3.50)$$

означает, что для неактивного ограничения (3.37), выполняющегося со знаком строгого неравенства, из (3.37) и (3.42) следует, что $\theta \neq 0$. Соответствующий

множитель Лагранжа в этом случае должен полагаться равным нулю, как это следует из необходимого условия оптимальности (3.50). Тем самым, ограничение (3.37) в этом случае не учитывается при отыскании оптимального решения. Если же $\mu \neq 0$, то $\theta = 0$, и соответствующее ограничение является «активным».

Таким образом, рассматриваемая задача оптимального гашения колебаний сводится к решению связанных начально-краевой задачи для $w(r, \varphi, t)$ и краевой задачи для $v(r, \varphi, t)$ с условиями в конечный момент времени. При этом оптимальное демпфирующее воздействие $g(r, \varphi, t)$ находится с применением условий экстремума.

3.2.3. Алгоритм определения управляющих воздействий

Для отыскания способа оптимального гашения колебаний вращающегося упругого диска предлагается следующий алгоритм определения управляющих воздействий. Данный способ основывается на применении выведенных условий экстремума и решении связанных терминальными условиями уравнений, определяющих распределения прогибов $w(r, \varphi, t)$ и сопряженной переменной $v(r, \varphi, t)$. Итерационный алгоритм решения задачи оптимизации заключается в последовательном выполнении описанных ниже итераций и шагов.

На первом шаге первой итерации решается «прямая» задача, состоящая в интегрировании уравнений динамики для функции прогибов с граничными условиями и начальными условиями, описывающими начальные распределения перемещений w и скоростей $\partial w / \partial t$ при $t = 0$. На начальном этапе итерационного процесса при выполнении первого шага первой итерации в качестве демпфирующего воздействия задается некоторое (неоптимальное) управление $g(r, \varphi, t) = g^{(1)}(r, \varphi, t)$, удовлетворяющее неравенству (3.37). При выполнении последующих итераций алгоритма в качестве управляющего

воздействия на первом шаге принимается воздействие, получаемое из условий оптимальности.

На втором шаге итерационного алгоритма с учетом найденного на первом шаге распределения $w(r, \varphi, t_f)$ и соответствующих величин производных, входящих в терминальные условия, решается задача возвратного интегрирования сопряженного уравнения с соответствующими граничными условиями и условиями в конечный момент времени $t = t_f$, рассматриваемыми в качестве начальных условий при отыскании $v(r, \varphi, t)$.

На третьем шаге с применением найденного на втором шаге распределения сопряженной переменной $v(r, \varphi, t)$ и использованием условий экстремума (3.64), (3.65) находится текущее приближение для оптимального демпфирующего воздействия $g(r, \varphi, t)$, прикладываемого к диску при $(r, \varphi) \in \Omega, t \in [0, t_f]$. Полученное на третьем шаге итерационного процесса демпфирующее управление рассматривается далее в качестве «начального» при переходе к первому шагу следующей итерации алгоритма.

3.2.4. Реализация метода Галёркина для упругого вращающегося диска

Приведем некоторые детали нахождения оптимального управления процессом гашения колебаний, основанного на методе Галёркина. Представим искомые распределения поперечных перемещений диска $w(r, \varphi, t)$ и сопряженной переменной $v(r, \varphi, t)$ в виде рядов

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \Psi_n(r, \varphi), \quad v(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{n_0} s_n(t) \Psi_n(r, \varphi), \quad (3.51)$$

где $q_n(t), s_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, n_0$) – неизвестные функции времени, подлежащие определению с использованием уравнений, определяющих w и v , а $\Psi_n(r, \varphi)$ – функции формы, определяемые выражениями

$$\Psi_n(r, \varphi) = R_n(r) \Phi_n(\varphi), \quad (r, \varphi) \in \Omega$$

и удовлетворяющие граничным условиям (3.35), (3.44) для w и v .

Для координатных функций метода Галёркина $q_n(t)$ и $s_n(t)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения, подставив выражения (3.70) в соответствующие динамические уравнения (3.38), (3.49), определяющие переменные $w(r, \varphi, t)$ и $v(r, \varphi, t)$, и умножив получающиеся соотношения на $\Psi_j(r, \varphi)$ ($j=1, 2, \dots$) с последующим интегрированием по r и φ ($0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Выполнив стандартные операции, характерные для метода Галёркина [68, 78, 118, 104, 102, 103] (Banichuk N. et al. (2014), (2020), Баничук Н.В., Иванова С.Ю. (2020), Михлин С.Г. (1970), Келдыш М.В. (1942), Свирский И.В. (1968)), будем иметь две системы обыкновенных дифференциальных уравнений, служащих для определения величин $q_n(t)$ и $s_n(t)$

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left\{ A_{jn} \frac{d^2 q_n}{dt^2} + 2\omega B_{jn} \frac{dq_n}{dt} + \omega^2 (C_{jn} - D_{nj}) q_n \right\} - G_j(t) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left\{ A_{jn} \frac{d^2 s_n}{dt^2} + 2\omega B_{jn} \frac{ds_n}{dt} + \omega^2 (C_{jn} - D_{nj}) s_n \right\} = 0.$$

Коэффициенты A_{jn} , B_{jn} , C_{jn} , D_{jn} и функции $G_j(t)$ ($j=1, 2, \dots$) определяются выражениями

$$\begin{aligned} A_{jn} &= \int_{\Omega} \Psi_n \Psi_j d\Omega, \quad B_{jn} = \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \varphi} \Psi_j d\Omega, \\ C_{jn} &= \int_{\Omega} \left(1 - \frac{Q}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \varphi^2} \Psi_j d\Omega, \quad D_{jn} = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rP \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \right) \Psi_j d\Omega, \\ G_j(t) &= \int_{\Omega} g(r, \varphi, t) \Psi_j d\Omega, \quad j=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Начальные условия для q_j при $t=0$ и условия для s_j в конечный момент времени $t=t_f$ записываются в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{n_0} (q_n)_{t=0} A_{jn} = \int_{\Omega} \Psi_j g_1 d\Omega, \quad \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{dq_n}{dt} \right)_{t=0} A_{jn} = \int_{\Omega} \Psi_j g_2 d\Omega,$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} (s_n)_{t=t_f} A_{jn} = -2\alpha_2 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{dq_n}{dt} \right)_{t=t_f} A_{jn},$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{ds_n}{dt} \right)_{t=t_f} A_{jn} = 2\alpha_1 \sum_{n=1}^{n_0} (q_n)_{t=t_f} A_{jn}.$$

3.2.5. Пример построения решения для упругого вращающегося диска

Рассмотрим пример оптимизации процесса демпфирования колебаний.

Предположим, что

$$g_1(r, \varphi) = \Psi_1(r, \varphi) = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} r\right) \right) \sin \varphi, \quad (r, \varphi) \in \Omega,$$

$$g_2(r, \varphi) = 0, \quad n_0 = 1,$$

и ограничимся выполнением двух итераций. При этом рассмотрим вариант итерационного процесса, когда на первом шаге первой итерации принимаются следующие значения для функций g и G_1 :

$$g = g^{(1)}(r, \varphi, t) = 1, \quad (r, \varphi) \in \Omega, \quad t \in [0, t_f],$$

$$G_1 = G_1^{(1)}(t) = \int_{\Omega} \Psi_1 g^{(1)} d\Omega = \lambda_0, \quad \lambda_0 = 1 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right)$$

и осуществляется интегрирование уравнения для $q_1^{(1)}$

$$\frac{d^2 q_1^{(1)}}{dt^2} + \gamma_1 q_1^{(1)} + \gamma_0 = 0, \quad \gamma_0 = -G_1^{(1)} A_{11}^{-1}, \quad \gamma_1 = \omega^2 A_{11}^{-1} (C_{11} - D_{11})$$

с начальными условиями

$$\left(q_1^{(1)} \right)_{t=0} = \int_{\Omega} \Psi_1 g_1 d\Omega = \lambda_1, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{\pi^2} - \frac{4}{\pi} \right),$$

$$\left(\frac{dq_1^{(1)}}{dt} \right)_{t=0} = \int_{\Omega} \Psi_1 g_2 d\Omega = 0.$$

Будем иметь

$$q_1^{(1)}(t) = \left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \cos(\sqrt{\gamma_1} t) + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}, \quad t \in [0, t_f].$$

Используем далее это решение на втором шаге первой итерации алгоритма при возвратном интегрировании сопряженного уравнения

$$\frac{d^2 s_1^{(1)}}{dt^2} + \gamma_1 s_1^{(1)} = 0$$

с условиями в конечный момент времени $t = t_f$

$$\begin{aligned} (s_1^{(1)})_{t=t_f} &= -2\alpha_2 \frac{dq_1^{(1)}}{dt} = 2\alpha_2 \sqrt{\gamma_1} \left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f) = \kappa_1, \\ \left(\frac{ds_1^{(1)}}{dt} \right)_{t=t_f} &= 2\alpha_1 q_1^{(1)} = 2\alpha_1 \left[\left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f) + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right] = \kappa_2. \end{aligned}$$

В результате находим выражение для $s_1^{(1)}$

$$s_1^{(1)}(t) = v_1 \sin(\sqrt{\gamma_1} t) + v_2 \cos(\sqrt{\gamma_1} t),$$

в котором

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} \left(\kappa_1 \sqrt{\gamma_1} \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f) + \kappa_2 \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f) \right), \\ v_2 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} \left(\kappa_1 \sqrt{\gamma_1} \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f) - \kappa_2 \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f) \right). \end{aligned}$$

При этом получаемое на третьем шаге первой итерации алгоритма приближение для оптимального демпфирующего воздействия запишется в виде

$$g^{(2)} = \frac{1}{2\mu} v^{(1)}(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\mu} s_1^{(1)}(t) \Psi_1(r, \varphi).$$

Применим найденное выражение для $g^{(2)}$ на первом шаге второй итерации при интегрировании уравнения колебаний

$$\frac{d^2 q_1^{(2)}}{dt^2} + \gamma_1 q_1^{(2)} + \gamma_2 = 0, \quad t \in [0, t_f],$$

$$\gamma_2(t) = -A_{11}^{-1} G_1^{(2)} = -A_{11}^{-1} \int_{\Omega} \Psi_1 g^{(2)} d\Omega = -\frac{1}{2\mu} s_1^{(1)}(t)$$

и, опуская детали вычислений, используем решение этого уравнения для минимизации на второй итерации функционала (3.36), то есть

$$\begin{aligned} \left(J_g^{(2)} \right)_{t=t_f} &= \left[\alpha_1 \left(q_1^{(2)} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{dq_1^{(2)}}{dt} \right)^2 \right]_{t=t_f} \int_{\Omega} \Psi_1^2 d\Omega = \\ &= \lambda_1 \left[\alpha_1 \left(q_1^{(2)} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{dq_1^{(2)}}{dt} \right)^2 \right]_{t=t_f}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

3.3 Оптимизация структуры продольно движущегося слоистого полотна

Движущиеся упругие струны, балки, мембраны и пластины — это наиболее популярные модели в исследовании движущихся материалов. Предыдущие работы, связанные с этими моделями, описанные второй и четвертой степенью дифференциальных уравнений, сфокусированы на аспектах свободных колебаний, включая природу распространения волн в движущейся среде и эффекты аксиального движения спектра частот и собственных значений. Было показано, что собственная частота каждой моды уменьшается при увеличении транспортной скорости и что движущаяся струна, балка, панель и пластина будут испытывать нестабильность дивергенции при достаточно высокой скорости.

Эта часть работы посвящена анализу стабильности и оптимизации упругого полотна, движущегося между двумя роликами с постоянной скоростью. Представлена модель многослойного движущегося полотна (неразрезная композитная пластина). Полотно механически шарнирно опёрто на границах рассматриваемого участка, в то время как другие края полотна свободны и не оперты. Рассматриваемая часть полотна изотропна, однородна и имеет прямоугольную форму. Полотно составлено симметрично относительно срединной плоскости состоит из упругих слоев, охарактеризованных некоторыми важными параметрами (погонная масса, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и расстояние от срединной плоскости).

Рассматривается многослойная пластина с различными механическими свойствами слоев и выводятся аналитические выражения для эффективных характеристик. В результате рассматривается составная структура как изотропная однородная пластина и применяются полученные формулы для вычисления критической скорости. Далее формулируется и изучается проблема изопериметрической оптимизации. В качестве изопериметрического условия рассматривается общая масса слоистой пластины. Критическая скорость дивергенции взята как критерий качества.

3.3.1. Постановка задачи для слоистого полотна

Рассмотрим слоистое полотно (пластину), движущуюся с постоянной продольной скоростью, шарнирно опертую на валках в начале и конце пролета. Рассматриваемая часть слоистого полотна является эффективно изотропной и занимает область $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < l, -b < y < b, -H/2 < z < H/2\}$ в прямоугольной системе координат x, y, z . Полотно движется с постоянной скоростью V_0 в направлении оси x , шарнирно оперто при $x = 0$ и $x = l$ и имеет свободные края при $y = b$ и $y = -b$. Длина пролета l , ширина полотна $2b$, полная толщина полотна H и его скорость V_0 являются заданными постоянными величинами. Полотно симметрично составлено относительно

срединной плоскости и состоит из нечетного числа $2n + 1$ упругих слоев, которые характеризуются массой на единицу площади m_i , модулем Юнга E_i , коэффициентом Пуассона ν_i и расстоянием h_i от срединной плоскости. Внешние слои имеют номера 1 и $2n + 1$ (см. Фиг. 3.5).

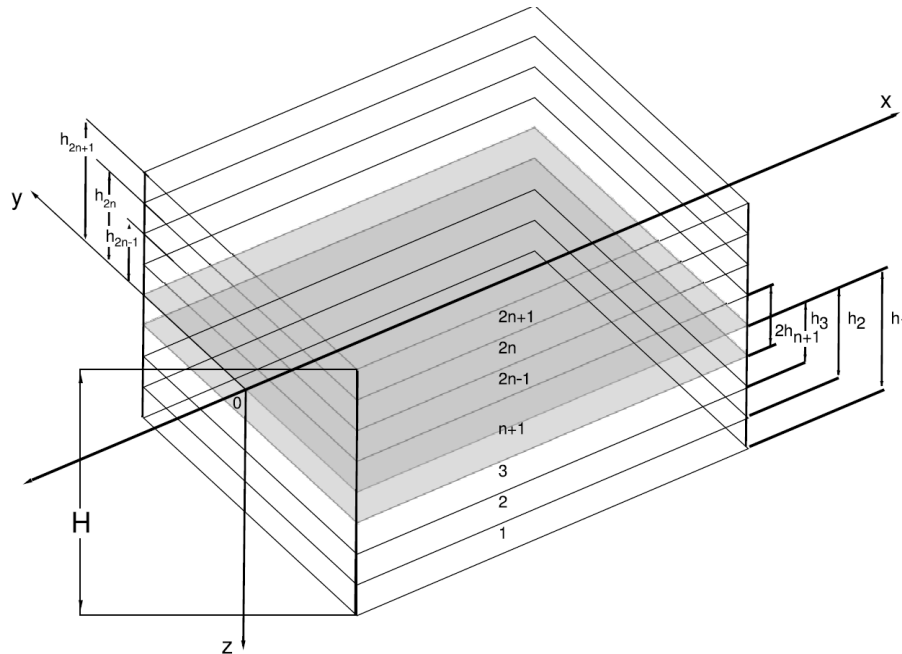


Рис. 3.5. Слоистое полотно

Учитывая симметричное расположение слоев относительно срединной плоскости ($z = 0$) и тот факт, что они плотно прилегают друг к другу, получим выражения для эффективной изгибной жесткости пластины D^{ef} , эффективного коэффициента Пуассона ν^{ef} и эффективной массы пластины m^{ef} на единицу площади. Для этого мы применим формулы для напряжений и деформаций и используем выражение для изгибающего момента

$$\int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x z dz = \left(\int_{-H/2}^{H/2} \frac{z^2 E(z) dz}{1 - (\nu(z))^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D^{ef} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

Принимая во внимание симметрию укладки слоев структуры полотна, т.е.

$$E(z) = E(-z), \quad \nu(z) = \nu(-z),$$

найдем выражение для эффективной изгибной жесткости в виде

$$D^{ef} = 2 \int_0^{H/2} \frac{z^2 E(z)}{1 - (v(z))^2} dz.$$

Используя механические и геометрические характеристики слоев полотна E_i , v_i , h_i , получим следующее выражение

$$D^{ef} = \frac{2}{3} \left[\frac{E_{n+1} h_{n+1}^3}{1 - v_{n+1}^2} + \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1 - v_i^2} (h_i^3 - h_{i+1}^3) \right].$$

Аналогично выводится формула для эффективного коэффициента Пуассона неоднородного изотропного слоистого полотна. Имеем

$$v^{ef} = \frac{2}{D^{ef}} \int_0^{H/2} \frac{z^2 v(z) E(z)}{1 - (v(z))^2} dz = \frac{2}{D^{ef}} \left[\frac{v_{n+1} E_{n+1} h_{n+1}^3}{1 - v_{n+1}^2} + \sum_{i=1}^n \frac{E_i v_i}{1 - v_i^2} (h_i^3 - h_{i+1}^3) \right].$$

Формула для эффективной массы m^{ef} на единицу площади слоистого полотна получается прямым суммированием соответствующих масс слоев ($2n + 1$ слоев). Получим

$$m^{ef} = m_{n+1} + 2 \sum_{i=1}^n m_i.$$

Динамическое поведение движущегося однородного изотропного полотна описывается следующим уравнением в частных производных и краевыми условиями (Δ^2 - бигармонический оператор):

$$m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \Delta^2 w = 0 \quad (3.53)$$

$$(w)_{x=0,l} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0,l} = 0, \quad -b \leq y \leq b \quad (3.54)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=\pm b} = \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - v) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=\pm b} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.55)$$

Здесь $w = w(x, y, t)$ - поперечные перемещения полотна, а T_0 - постоянное механическое натяжение, приложенное к концам полотна при $x = 0, l$.

В стационарном случае, когда все производные по времени обращаются в нуль, приходим к краевой задаче на собственные значения с уравнением

$$(mV_0^2 - T_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D\Delta^2 w = 0$$

и граничными условиями (3.54), (3.55). В случае однородного изотропного движущегося полотна получено в явном виде выражение для критической скорости дивергенции V_0^{div} (статическая неустойчивость) [68] (Banichuk N. et al. (2014)). Данное выражение может быть также получено и для рассматриваемого случая слоистого эффективно однородного и изотропного полотна. Полагая $m = m^{ef}$, $D = D^{ef}$, $v = v^{ef}$, получим

$$(V_0^{div})^2 = \frac{T_0}{m^{ef}} + \frac{\gamma_*^2 \pi^2 D^{ef}}{m^{ef} l^2}, \quad (3.56)$$

где γ_* является корнем следующего трансцендентного уравнения [68]:

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma, \mu) - \Psi(\gamma, v^{ef}) &= 0 \\ \Phi &\equiv \tanh\left(\frac{\sqrt{1-\gamma}}{\mu}\right) \coth\left(\frac{\sqrt{1+\gamma}}{\mu}\right) \\ \Psi &\equiv \frac{\sqrt{1+\gamma}(\gamma + v^{ef} - 1)^2}{\sqrt{1-\gamma}(\gamma - v^{ef} + 1)^2}, \quad \mu = \frac{l}{\pi b}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого слоистого полотна с симметричной внутренней структурой и заданными параметрами m_i , E_i , v_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) мы можем определить величины m^{ef} , D^{ef} , v^{ef} и, следовательно, определить значение критической скорости дивергенции V_0^{div} , используя выражение (3.56).

3.3.2. Оптимизация структуры слоистого полотна

С использованием выражения (3.56) для определения критической скорости дивергенции V_0^{div} рассмотрим следующую оптимизационную задачу, заключающуюся в максимизации стабильности движущегося полотна, т.е. в максимизации величины V_0^{div} за счет варьирования слоев полотна. Для этого удобно использовать натуральную параметризацию. Учитывая, что каждый из данных материалов (число материалов задано) может быть пронумерован с помощью одного параметра, применим натуральную параметризацию, используя скалярную переменную t , которая может принимать значения $t_1, t_2, \dots, t_s, \dots, t_r$, то есть

$$t \in \{t_1, t_2, \dots, t_s, \dots, t_r\}.$$

Если слои характеризуются модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν , массой на единицу площади m , то

$$E_s = E(t_s), \quad \nu_s = \nu(t_s), \quad m_s = m(t_s).$$

Таким образом, оптимизируемая слоистая пластина состоит из дискретного набора слоев (материалов), распределенных вдоль оси Z и характеризуется набором параметров $\{E_s, \nu_s, m_s\}$, $s = 1, 2, \dots, r$. Распределения параметров $(E(z), \nu(z), m(z))$ по толщине полотна задаются кусочно-постоянными функциями, определенными на отрезке $0 \leq z \leq H/2$. Для каждой точки $z \in [0, H/2]$ эти функции принимают значения из заданного конечного набора, т.е. $E(z) \in \{E_s\}$, $\nu(z) \in \{\nu_s\}$, $m(z) \in \{m_s\}$, $s = 1, 2, \dots, r$.

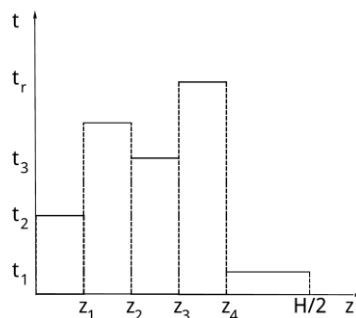


Рис. 3.6. Кусочно-постоянное распределение свойств материалов

Далее будем применять описанную выше параметризацию (Рис. 3.6), используя кусочно-постоянную функцию $t = t(z)$ ($z \in [0, H/2]$), принимающую значения $t = t_s = s$ из заданного набора, т.е. $t \in \{t_s = s\}$, и справедливы следующие соотношения:

$$E_s = E(t(z))_{t=t_s=s}, \quad v_s = v(t(z))_{t=t_s=s}, \quad m_s = m(t(z))_{t=t_s=s} \quad (3.57)$$

Используя представление (3.57), рассмотрим задачу максимизации критической скорости дивергенции V_0^{div} (или $(V_0^{div})^2$) с ограничением на массу

$$(V_0^{div})_* = \max_t V_0^{div}(t(z)) \quad (3.58)$$

$$m^{ef} = m^{ef}(t(z)) \leq M_0 \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} t(z) \in \{t_s\}: z_{i-1} < z < z_i, \\ i = 1, 2, \dots, n+1, \quad s = 1, 2, \dots, r, \quad z_1 = H/2, \quad z_{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где $M_0 > 0$ - заданная постоянная величина.

Для того, чтобы решить оптимизационную задачу (3.58), (3.60) с учетом изопериметрического неравенства (3.59), применим подход (метод штрафных функций), основанный на максимизации расширенного функционала J^α , определяемого соотношениями

$$J^\alpha = V_0^{div} - \lambda(m^{ef} - M_0) \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \lambda = 0, \quad \text{if } (m^{ef} - M_0) \leq 0 \\ \lambda = \lambda_0 > 0, \quad \text{if } (m^{ef} - M_0) > 0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

где $\lambda_0 > 0$ - положительный штрафной множитель.

3.3.3. Численное решение на основе генетического алгоритма

Решение задачи максимизации функционала J^a (3.61), (3.62) для различных значений параметров задачи M_0 , H , T_0 и характеристик материалов, представленных в Таблице 3.1, выполнялось с помощью генетического алгоритма [119, 120] (Goldberg, D.E. (1989), Periaux J. et al. (2015)).

Таблица 3.1. Характеристики материалов

Материал	E , (кг/см ²)	ν	m , (г/м ²)
1	14.0*10 ⁶	0.460	450
2	1.7*10 ⁶	0.038	400
3	9.36*10 ⁶	0.017	410

Мы применяем данный алгоритм глобальной оптимизации, чтобы избежать сложностей, обусловленных возможным появлением в рассматриваемой задаче локальных экстремумов. Предполагается, что интервал $[0, H/2]$ изменения переменной z разбит точками z_i , $i=0, 2, \dots, n+1$ на $n+1$ подынтервалов. Для каждого i -го подынтервала ($i=1, \dots, n+1$) величины E , ν , m могут принимать постоянные значения, соответствующие выбранному материалу. Индекс (номер) материала меняется от 1 до 3. Рассматриваемые популяции состоят из N «индивидуумов», представляющих допустимые кусочно-однородные полотна. Число N предполагается четным и неизменным в процессе обновления популяций. Каждый j -й «индивидуум» популяции описывается набором значений $t(j, i)$, представляющих значения переменной проектирования для всех элементов (подынтервалов или слоев). «Наилучший» индивидуум, т.е. набор $t_*(j, i)$,

максимизирующий расширенный функционал, отыскивается с помощью генетического алгоритма.

Первый шаг алгоритма состоит в инициализации популяции, то есть в присвоении чисел из набора $[1, 2, 3]$ всем элементам $t(j, i)$, $i = 1, \dots, n + 1$. Для всех сгенерированных индивидуумов ($j = 1, 2, \dots, N$) начальной популяции вычисляется расширенный функционал $J^a(j)$ и определяется индивидуум, дающий максимальное значение этому функционалу. Используя начальные данные и следующий шаг алгоритма, можно будет последовательно определять новые популяции, состоящие из N «индивидуумов», и, таким образом, последовательно улучшать критерий качества, т.е. максимизировать функционал J^a .

На втором шаге алгоритма мы выбираем $N/2$ пар индивидуумов-«родителей», чтобы получить $N/2$ пар индивидуумов-«отпрысков», которые составят новую популяцию. Выбор первого «родителя» ("a") осуществляется следующим образом. Фиксируется некоторое целое число $N^T < N$, и далее случайным образом выбираются N^T индивидуумов. Из данного набора индивидуумов мы сохраняем и используем только одного, дающего максимальное значение расширенному функционалу J^a . Аналогично мы находим второго «родителя» ("b") и составляем первую пару индивидуумов-«родителей». Всего отыскивается $N/2$ таких пар.

Третий шаг алгоритма состоит в получении двух отпрысков от каждой пары «родителей». С этой целью генерируется случайное число p_r из интервала $[0, 1]$ и случайное натуральное число n_r из $[1, 2, \dots, n + 1]$. Если $p_r \leq p_{co}$, где p_{co} - вероятность скрещивания (crossover), заданная постоянная величина, то значения переменных проектирования отпрысков для слоев с номерами $[1, 2, \dots, n_r]$ копируются у их родителей "a" и "b". Значения переменных проектирования для слоев с номерами $[n_r + 1, \dots, n + 1]$ получаются

с помощью скрещивания. Это означает, что для отпрыска "a" копируются значения переменных проектирования у соответствующих элементов (слоев) родителя "b" и наоборот. Если $p_r > p_{co}$, то отпрыски "a" и "b" являются точными копиями своих родителей. Таким образом, формируется новая популяция, состоящая из N отпрысков.

Четвертый шаг алгоритма заключается в мутации построенной новой популяции. Этот шаг необходим, чтобы не «застрять» в локальном максимуме рассматриваемого функционала. Для реализации процедуры мутации зададим достаточно малый (~ 0.005) параметр p_m (вероятность мутации). Затем для всех элементов (слоев) каждого индивидуума мы генерируем случайное число p_r из интервала $[0,1]$. Если $p_r \leq p_m$, то значение переменной проектирования для данного слоя заменяется на произвольное допустимое значение. Для индивидуумов новой популяции мы вычисляем значения функционала $J^a(j)$ и выбираем наилучший индивидуум. После этого, мы возвращаемся ко второму шагу применяемого алгоритма. Заметим, что если «лучший» отпрыск из новой популяции оказывается «хуже», чем лучший родитель из предыдущей популяции, то он заменяется этим родителем. Это делает процесс нахождения глобального максимума монотонным. Блок-схема генетического алгоритма приведена на Рис 3.7.



Рис. 3.7. Блок-схема генетического алгоритма

С помощью описанного генетического алгоритма было определено оптимальное распределение материалов $t(z)$. Вычислительный процесс выполнялся для следующих параметров $n = 10$, $N = 10$, $N^T = 4$, $p_{co} = 0.5$, $p_m = 0.05$. Вычисления проводились для 500 поколений (формируемых последовательно популяций). Характеристики материалов, рассматриваемых в качестве допустимых для оптимального проектирования неоднородного изотропного слоистого полотна, представлены в Таблице 3.1.

Результаты численного решения представлены для случая $\lambda = 0$ (когда ограничение на полную массу полотна m^{ef} не учитывалось) и для случаев, когда $M_0 = 430; 420; 410$ (г/м²) на Рис. 3.8 – 3.11, соответственно, для следующих параметров задачи: $l = 1.2$ м, $b = 0.47$ м, $T_0 = 16$ н/м, $H = 10^{-3}$ м. Материал 1 показан белым цветом, материал 2 и материал 3 показаны розовым и голубым цветами, соответственно

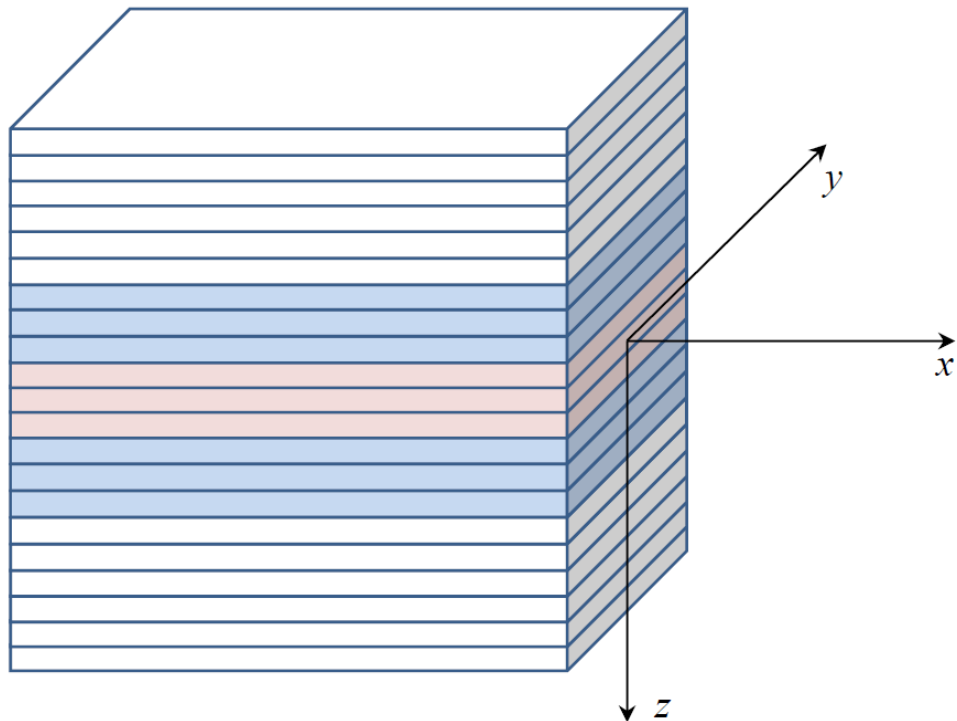


Рис. 3.8. Распределение материалов без ограничения на полную массу

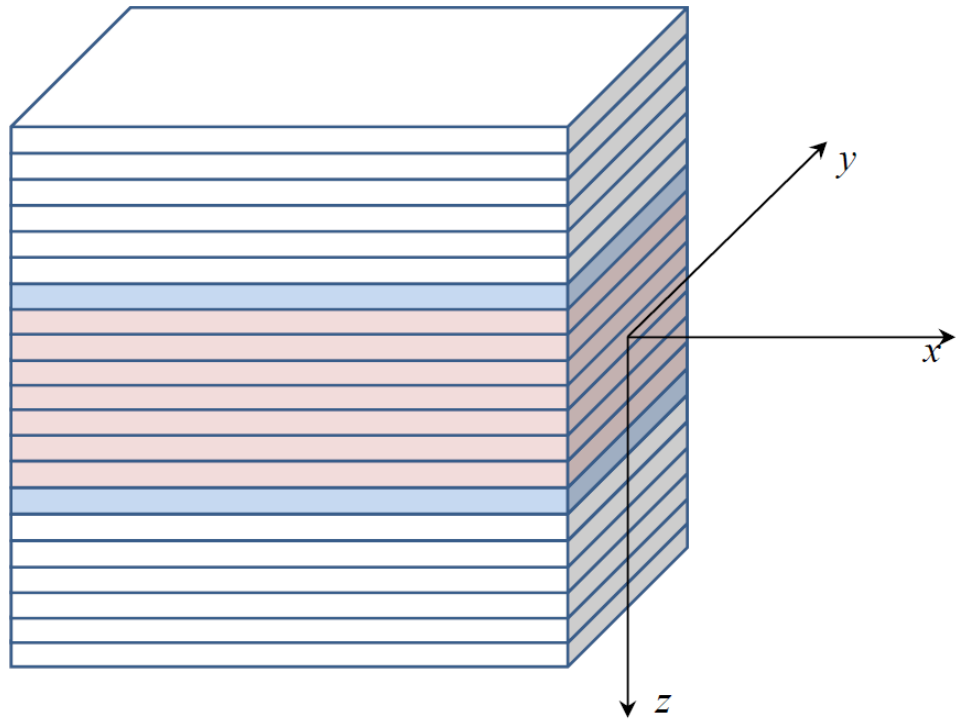


Рис. 3.9. Распределение материалов для случая $M_0 = 430 \text{ г/м}^2$

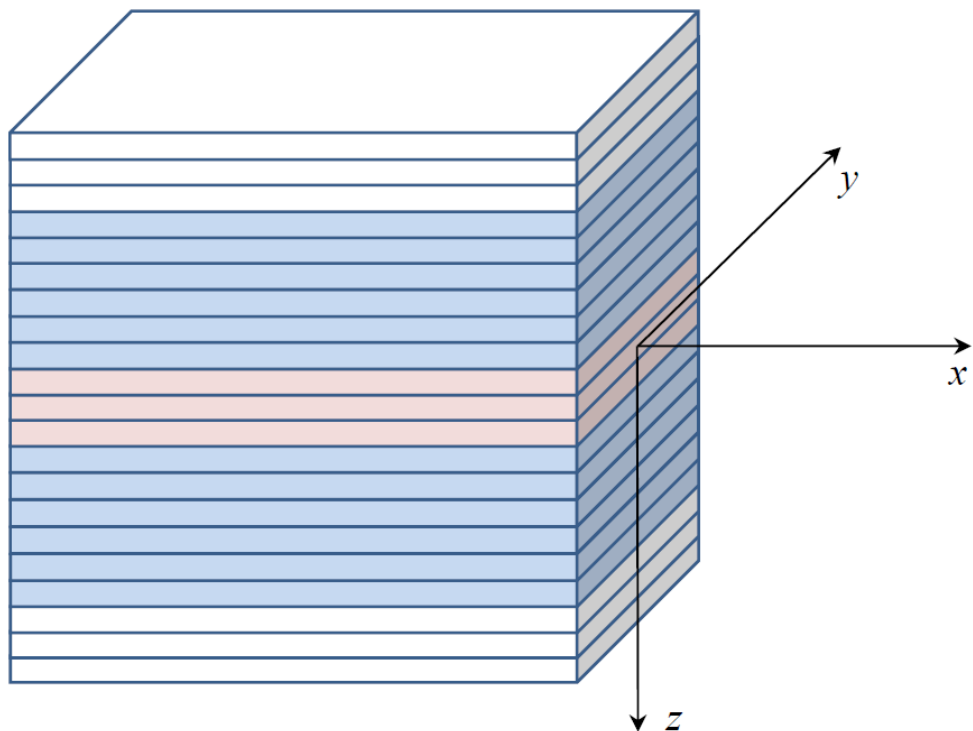


Рис. 3.10. Распределение материалов для случая $M_0 = 420 \text{ г/м}^2$

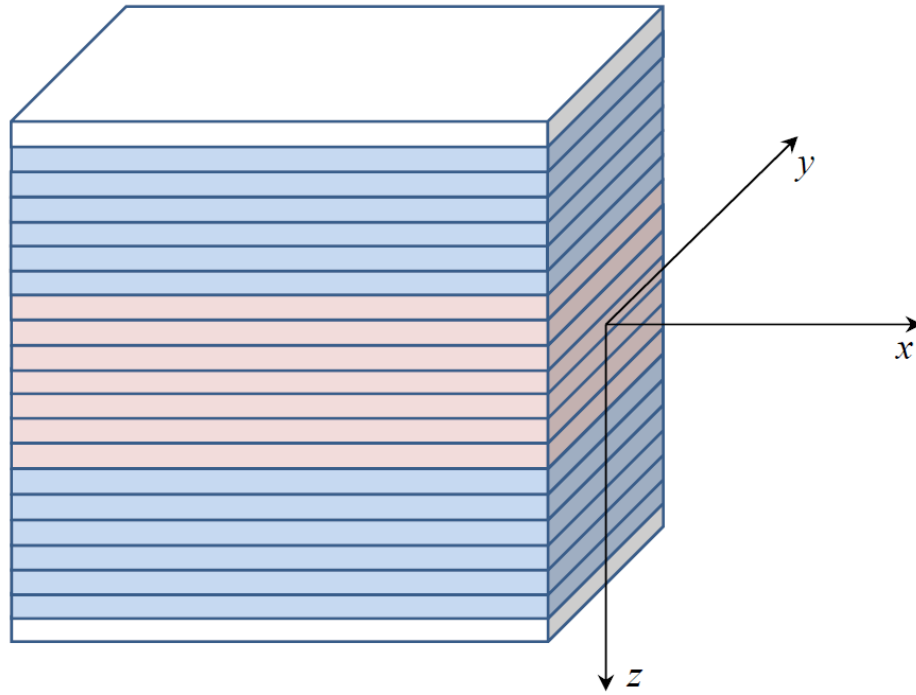


Рис. 3.11. Распределение материалов для случая $M_0 = 410 \text{ г/м}^2$

Из полученных оптимальных решений можно сделать вывод, что эффективно размещать более жесткий материал на верхнем и нижнем слоях полотна, а мягкие материалы – ближе к срединной поверхности. Зависимость величины γ_* от эффективного коэффициента Пуассона ν^{ef} для рассматриваемых параметров задачи представлена на Рис. 3.12.

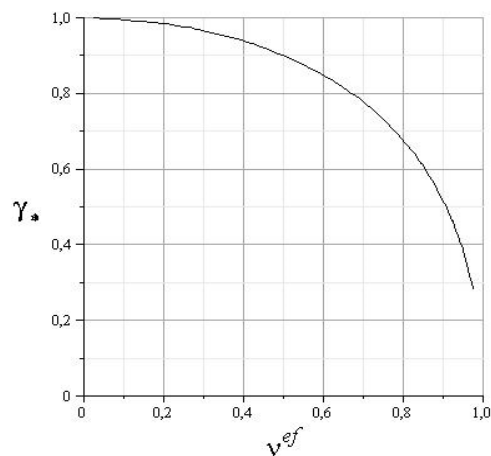


Рис. 3.12. Зависимость γ_* от эффективного коэффициента Пуассона ν^{ef}

3.4. Выводы

В данной главе рассмотрены некоторые возможности применения оптимизационных подходов к решению задач повышения стабильности движущихся упругих материалов. Для гашения на заданном временном интервале возникающих нестационарных колебаний движущихся упругих материалов предложен эффективный итерационный алгоритм построения оптимальной программы приложения активных воздействий, в основу которого положены методы оптимального управления системами с распределенными параметрами. Данный алгоритм предполагает проведение анализа чувствительности минимизируемого интегрального функционала качества (качества процесса подавления колебаний) к вариациям управляющих (активных) воздействий, вывод и использование необходимых условий оптимальности. На каждом шаге алгоритма решаются краевые задачи в частных производных для определения функций состояния (упругих прогибов) и сопряженных переменных и с использованием необходимых условий оптимальности определяется улучшающее приближение для оптимального подавляющего воздействия. Приведены примеры решения задач о подавлении колебаний быстро вращающегося упругого стержня и гибкого диска. Для решения краевых задач в частных производных был применен метод Галёркина, основанный на разложении искомых функций в ряды, что дало возможность получить приближенные решения аналитически.

Другим примером эффективного применения оптимизационных методов для повышения стабильности движущихся материалов может служить представленное в данной главе решение задачи о максимизации критической скорости дивергенции движущегося упругого полотна, моделируемого слоистой пластиной. Предполагалось, что слои укладываются симметрично относительно срединной поверхности пластины, а каждый слой заполняется определенным упругим материалом из заданного фиксированного набора. Численно был определен оптимальный порядок

укладки слоев при ограничении на суммарную погонную массу, который доставлял максимум критической скорости дивергенции (выпучивания) движущегося полотна. Решение было получено с применением эволюционного оптимизационного метода поиска нелокального экстремума на основе разработанной вычислительной программы (генетический алгоритм).

Заключение

Цель проведенного исследования заключалась в разработке методов повышения стабильности продольного движения материалов на основе определения безопасных диапазонов изменения параметров, влияющих на динамический процесс, определения оптимальной структуры материала, а также оптимальной программы приложения к системе управляющих воздействий, гасящих возникающие колебания. В работе были получены следующие основные результаты:

1. На основе применения развитых механических моделей, решены задачи об устойчивости продольного движения материалов в стационарной постановке (задачи о дивергенции) при термомеханических воздействиях:
 - об устойчивости движущейся продольно термоупругой неразрезной панели;
 - об устойчивости продольно движущегося ортотропного термоупругого полотна;
 - об устойчивости нагретого полотна при движении по цилиндрической поверхности;
 - об устойчивости продольного движения вязкого материала.
2. Определены факторы, влияющие на критические параметры устойчивости движения материала (величину критической скорости и критической температуры), и даны рекомендации по повышению стабильности. Исследовано влияние свойств ортотропии и вязкости материала на стабильность движения.
3. В случае движения упругого полотна (неразрезной панели) с непостоянной транспортной скоростью исходное динамическое уравнение, описывающее движение панели, с помощью последовательных преобразований было сведено к

гипергеометрическому уравнению Гаусса, решение которого представлено в виде гипергеометрического ряда.

4. Для гашения возникающих нестационарных колебаний движущихся упругих материалов предложен эффективный итерационный алгоритм построения оптимальной программы приложения подавляющих воздействий, основанный на методах оптимального управления системами с распределенными параметрами.
5. Представленный итерационный алгоритм применен для решения задач оптимального подавления поперечных колебаний быстро вращающихся упругих стержней и гибких дисков, для которых с помощью метода разложения в ряды по методу Галёркина было получено приближенное аналитическое решение.
6. С применением эволюционного оптимизационного метода поиска нелокального экстремума на основе разработанной вычислительной программы (генетический алгоритм) численно решена задача определения оптимальной слоистой структуры продольно движущегося полотна с целью повышения критической скорости потери устойчивости.

Список литературы

1. Russo L. The Forgotten Revolution: How Science Was Born in 300 BC and Why it Had to Be Reborn. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2004. 487 p. ISBN 978-3-540-20396-4.
2. Euler L. De motu vibratorio tympanorum // *Novi Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*. 1766. V. 10. P. 243-260.
3. Bolotin V. V. Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability. Pergamon Press, New York, Oxford. 1963. 324 p. ISBN 978-0-080-10490-4.
4. Mote C.D. Jr, Wickert J.A. Response and discretization methods for axially moving materials // *Applied Mechanics Review*. 1991. V. 44, no. 11. P. 279-284. DOI:10.1115/1.3121365
5. Skutch R. Uber die Bewegung eines gespannten Fadens, welcher gezwungen ist durch zwei feste Punkte, mit einer constanten Geschwindigkeit zu gehen, und zwischen denselben in Transversalschwingungen von gerlinger Amplitude versetzt wird // *Annalen der Physik*. 1897. V. 297, no. 5. P. 190-195. DOI:10.1002/andp.18972970510
6. Sack R.A. Transverse oscillations in traveling strings // *British J. Appl. Physics*. 1954. V. 5, no. 6. P. 224-226. DOI:10.1088/0508-3443/5/6/307
7. Archibald F.R., Emslie A.G. The vibration of a string having a uniform motion along its length // *ASME J. Appl. Mech*. 1958. V. 25, no. 3. P. 347-348. DOI:10.1115/1.4011824
8. Swope R.D, Ames W.F. Vibrations of a moving threadline // *Journal of the Franklin Institute*. 1963. V. 275, no. 1. P. 36-55. DOI:10.1016/0016-0032(63)90619-7
9. Mote C.D. Dynamic stability of axially moving materials // *Shock and Vibration Digest*. 1972. V. 4, no. 4. P. 2-11. DOI:10.1016/0016-0032(68)90482-1

10. Simpson A. Transverse modes and frequencies of beams translating between fixed end supports // *J. Mechanical Engineering Science*. 1973. V. 15, no. 3. P. 159-164. DOI:10.1243/JMES_JOUR_1973_015_031_02
11. Wang Y, Huang L, Liu X. Eigenvalue and stability analysis for transverse vibrations of axially moving strings based on Hamiltonian dynamics // *Acta Mechanica Sinica*. 2005. V. 21, no. 5. P. 485-494. DOI:10.1007/s10409-005-0066-2
12. Parker R.G. On the eigenvalues and critical speed stability of gyroscopic continua // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1998. V. 65, no. 1. P. 134-140. DOI:10.1115/1.2789016
13. Kong L, Parker R.G. Approximate eigensolutions of axially moving beams with small flexural stiffness // *Journal of Sound and Vibration*. 2004. V. 276, no. 1-2. P. 459-469. DOI:10.1016/j.jsv.2003.11.027
14. Miranker W.L. The wave equation in a medium in motion // *IBM Journal of Research and Development*. 1960. V. 4, no. 1. P. 36-42. DOI:10.1147/rd.41.0036
15. Chonan S. Steady state response of an axially moving strip subjected to a stationary lateral load // *Journal of Sound and Vibration*. 1986. V. 107, no. 1. P. 155-165. DOI:10.1016/0022-460X(86)90290-7
16. Wickert J.A, Mote C.D. Classical vibration analysis of axially moving Continua // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1990. V. 57, no. 3. P. 738-744. DOI:10.1115/1.2897085
17. Wickert J.A. Non-linear vibration of a traveling tensioned beam // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1992. V. 27, no. 3. P. 503-517. DOI:10.1016/0020-7462(92)90016-Z
18. Lin C.C., Mote C.D. Equilibrium displacement and stress distribution in a two-dimensional, axially moving web under transverse loading // *ASME J. Appl. Mech*. 1995. V. 62, no. 3. P. 772-779. DOI:10.1115/1.2897013

19. Shin C, Chung J, Kim W. Dynamic characteristics of the out-of-plane vibration for an axially moving membrane // *Journal of Sound and Vibration*. 2005. V. 286, no. 4-5. P. 1019-1031. DOI:10.1016/j.jsv.2005.01.013
20. Lin C.C, Mote C.D. Eigenvalue solutions predicting the wrinkling of rectangular webs under non-linearly distributed edge loading // *Journal of Sound and Vibration*. 1996. V. 197, no. 2. P. 179-189. DOI:10.1006/jsvi.1996.0524
21. Lin C.C. Stability and vibration characteristics of axially moving plates // *International Journal of Solids and Structures*. 1997. V. 34, no. 24. P. 3179-3190. DOI:10.1016/S0020-7683(96)00181-3
22. Mujumdar A.S., Douglas W.J.M. Analytical modelling of sheet flutter // *Svensk Papperstidning*. 1976. V. 79. P. 187-192.
23. Баничук Н. В., Миронов А. А. Оптимизация частот колебаний упругой пластинки в идеальной жидкости // *ПММ*. 1975. Т. 39. № 5. С. 889-899.
24. Баничук Н. В., Миронов А. А. Задачи оптимизации для пластин, колеблющихся в идеальной жидкости // *ПММ*. 1976. Т. 40. № 3. С. 520-527.
25. Баничук Н. В., Миронов А. А. Схема струйного обтекания для исследования равновесных форм упругих пластин в потоке жидкости и задачи оптимизации // *ПММ*. 1979. Т. 43. № 1. С. 83-90.
26. Pramila A. Sheet flutter and the interaction between sheet and air // *TAPPI Journal*. 1986. V. 69, no. 7. P. 70-74.
27. Frondelius T, Koivurova H, Pramila A. Interaction of an axially moving band and surrounding fluid by boundary layer theory // *Journal of Fluids and Structures*. 2006. V. 22. no. 8. P. 1047-1056. DOI:10.1016/j.jfluidstructs.2006.06.007
28. Kulachenko A, Gradin P, Koivurova H. Modelling the dynamical behavior of a paper web. Part II // *Computers & Structures*. 2007. V. 85, no. 3-4, P. 131-147. DOI:10.1016/j.compstruc.2006.09.007

29. Hosaka H, Crandall S.H. Self-excited vibrations of a flexible disk rotating on an air film above a flat surface // In: Beskos, D.E., Ziegler, F. (eds) *Advances in Dynamic Systems and Stability. Acta Mechanica. Supplementa V. 3.* Springer, Vienna. 1992. P. 115-127. DOI:10.1007/978-3-7091-9223-8_9 ISBN:978-3-211-82368-2
30. Niemi J, Pramila A. Vibration analysis of an axially moving membrane immersed into ideal fluid by FEM // Tech. rep., Tampereen teknillinen korkeakoulu (Tampere University of Technology), Tampere 1986.
31. Païdoussis M.P. *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, vol 2. Elsevier Academic Press. 2004. 1040 p. ISBN:0-12-544361-7
32. Shen J.Y, Sharpe L, McGinley W.M. Identification of dynamic properties of plate-like structures by using a continuum model // *Mechanics Research Communications.* 1995. V. 22, no. 1. P. 67-78. DOI:10.1016/0093-6413(94)00043-D
33. Shin C. H. and Chung J. T. Vibration Analysis of an Axially Moving Membrane with In-plane/Out-of-plane Deformations // *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering.* 2004. Vol.14, No. 9, pp. 910-918 <https://doi.org/10.5050/KSNVN.2004.14.9.910>
34. Kulachenko A, Gradin P, Koivurova H. Modelling the dynamical behaviour of a paper web. Part I // *Computers & Structures.* 2007. V. 85, no. 3-4. P. 131-147. DOI:10.1016/j.compstruc.2006.09.006
35. Chang Y.B, Moretti P.M. Interaction of fluttering webs with surrounding air // *TAPPI Journal.* 1991. V. 74, no. 3. P. 231-236.
36. Banichuk N., Jeronen J., Neitaanmäki P., Tuovinen T. Static instability analysis for travelling membranes and plates interacting with axially moving ideal fluid // *J. Fluid Struc.* 2010a. V. 26, no. 2. P. 274-291. DOI:10.1016/j.jfluidstructs.2009.09.006
37. Banichuk N., Jeronen J., Neitaanmäki P., Tuovinen T. Dynamic behaviour of an axially moving plate undergoing small cylindrical deformation submerged

- in axially flowing ideal fluid // *J. Fluid Struct.* 2011a. V. 27, no. 7, P. 986-1005.
DOI:10.1016/j.jfluidstructs.2011.07.004
38. Баничук Н. В., Ишлинский А. Ю. О некоторых особенностях задач устойчивости и колебаний прямоугольных пластин // *Прикладная математика и механика*. 1995. Т. 59, № 4. С. 620–625.
39. Banichuk N, Jeronen J, Neittaanmäki P, Tuovinen T. On the instability of an axially moving elastic plate // *International Journal of Solids and Structures*. 2010b. V. 47, no. 1. P. 91-99. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2009.09.020
40. Banichuk N, Jeronen J, Kurki M, Neittaanmäki P, Saksa T, Tuovinen T. On the limit velocity and buckling phenomena of axially moving orthotropic membranes and plates // *International Journal of Solids and Structures*. 2011b. V. 48, no. 13. P. 2015-2025. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2011.03.010
41. Banichuk N, Jeronen J, Neittaanmäki P, Saksa T, Tuovinen T. Theoretical study on travelling web dynamics and instability under non-homogeneous tension // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. V. 66, no. 1. P. 132-140. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2012.10.014
42. Tuovinen T. Analysis of stability of axially moving orthotropic membranes and plates with linear non-homogeneous tension profile. PhD thesis, Department of Mathematical Information Technology. University of Jyväskylä, Jyväskylä studies in computing V. 146. 2011. ISBN 978-951-39-4577-0.
43. Götsching L, Baumgarten H.L. Triaxial deformation of paper under tensile load. In Bolam, F., editor, *The Fundamental Properties of Paper Related to its Uses: Transactions of the Symposium held at Cambridge, September 1973*, volume 1 of Pulp and Paper Fundamental Research Society Symposium Proceedings, pages 227-249, London. Technical Division of the British Paper and Board Industry Federation. 1976. P. 227-252. ISBN:978-051-04-5750-1
44. Thorpe J.L. Paper as an orthotropic thin plate // *TAPPI Journal*. 1981. V. 64, no. 3. P. 119-121.

45. Skowronski J, Robertson A.A. A phenomenological study of the tensile deformation properties of paper // *Journal of Pulp and Paper Sciences*. 1985. V. 11, no. 1. P. 21-28.
46. Seo Y.B. Determination of in-plane shear properties by an off-axis tension method and laser speckle photography // *Journal of Pulp and Paper Sciences*. 1999. V. 25, no. 9. P. 321-325.
47. Hatami S, Azhari M, Saadatpour M.M, Memarzadeh P. Exact free vibration of webs moving axially at high speed. In: *AMATH'09: Proceedings of the 15th American Conference on Applied Mathematics, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, Houston, USA*. 2009. P. 134-139.
48. Marynowski K. Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics V. 38*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG. 2008. 154 p. ISBN:978-3-540-78988-8
49. Gorman D.J. *Free Vibration Analysis of Rectangular Plates*. Elsevier North Holland, Inc. 1982. 324 p. ISBN:978-0-444-00601-1.
50. Biancolini M.E, Brutti C, Reccia L. Approximate solution for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates // *Journal of Sound and Vibration*. 2005. V. 288, no. 1-2. P. 321-344. DOI:10.1016/j.jsv.2005.01.005
51. Xing Y, Liu B. New exact solutions for free vibrations of rectangular thin plates by symplectic dual method // *Acta Mechanica Sinica*. 2009. V. 25, no. 2. P. 265-270. DOI:10.1007/s10409-008-0208-4
52. Kshirsagar S, Bhaskar K. Accurate and elegant free vibration and buckling studies of orthotropic rectangular plates using untruncated infinite series // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. V. 314, no. 3-5. P. 837-850. DOI:10.1016/j.jsv.2008.01.013
53. Fung R.F, Huang J.S, Chen Y.C. The transient amplitude of the viscoelastic travelling string: An integral constitutive law // *Journal of Sound and Vibration*. 1997. V. 201, no. 2. P. 153-167. DOI:10.1006/jsvi.1996.0776

54. Alava M, Niskanen K. The physics of paper // *Reports on Progress in Physics*. 2006. V. 69, no. 3. P. 669-723. DOI:10.1088/0034-4885/69/3/R03
55. Erkkilä A.L, Leppänen T, Hämäläinen J. Empirical plasticity models applied for paper sheets having different anisotropy and dry solids content levels // *Int J Solids Struct* in press. 2013. V. 50, no. 14-15. P. 2151-2179. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2013.03.004
56. Fung R.F, Huang J.S, Chen Y.C, Yao C.M. Nonlinear dynamic analysis of the viscoelastic string with a harmonically varying transport speed // *Computers & Structures*. 1998. V. 66, no. 6. P. 777-784. DOI:10.1016/S0045-7949(98)00001-7
57. Chen L.Q, Zhao W.J. A numerical method for simulating transverse vibrations of an axially moving string // *Applied Mathematics and Computation*. 2005. V. 160, no. 2. P. 411-422. DOI:10.1016/j.amc.2003.11.012
58. Oh H, Cho J, Lee U. Spectral element analysis for an axially moving viscoelastic beam // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2004. V. 18, no. 7. P. 1159-1168. DOI:10.1007/BF02983290
59. Lee U, Oh H. Dynamics of an axially moving viscoelastic beam subject to axial tension // *International Journal of Solids and Structures*. 2005. V. 42, no. 8. P. 2381-2398. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2004.09.026
60. Marynowski K, Kapitaniak T. Kelvin-Voigt versus Bürgers internal damping in modeling of axially moving viscoelastic web // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002. V. 37, no. 7. P. 1147-1161. DOI:10.1016/S0020-7462(01)00142-1
61. Yang X.D, Zhang W, Chen L.Q, Yao M.H. Dynamical analysis of axially moving plate by finite difference method // *Nonlinear Dynamics*. 2012. V. 67, no. 2. P. 997-1006. DOI:10.1007/s11071-011-0042-2
62. Mockensturm E.M, Guo J. Nonlinear vibration of parametrically excited, viscoelastic, axially moving strings // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 2005. V. 72, no. 3. P. 374-380. DOI:10.1115/1.1827248

63. Chen L.Q, Chen H, Lim C. Asymptotic analysis of axially accelerating viscoelastic strings // *International Journal of Engineering Science*. 2008. V. 46, no. 10. P. 976-985. DOI:10.1016/j.ijengsci.2008.03.009
64. Chen L.Q, Ding H. Steady-state transverse response in coupled planar vibration of axially moving viscoelastic beams // *ASME Journal of Vibrations and Acoustics*. 2010. V. 132, no. 1. 011009 9 p. DOI:10.1115/1.4000468
65. Chen L.Q, Wang B. Stability of axially accelerating viscoelastic beams: asymptotic perturbation analysis and differential quadrature validation // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2009. V. 28, no. 4. P. 786-791. DOI:10.1016/j.euromechsol.2008.12.002
66. Ding H, Chen L.Q. Stability of axially accelerating viscoelastic beams: multi-scale analysis with numerical confirmations // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2008. V. 27, no. 6. P. 1108-1120. DOI:10.1016/j.euromechsol.2007.11.014
67. Kurki M, Lehtinen A. In-plane strain field theory for 2-d moving viscoelastic webs. In: *Papermaking Research Symposium 2009 (Kuopio, Finland)*, PRS.
68. Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa T., Tuovinen T. *Mechanics of Moving Materials*. Cham: Springer, 2014. 253 p. DOI:10.1007/978-3-319-01745-7 ISBN:978-3-319-01744-0
69. Kurki, M., Jeronen, J., Saksa, T., and Tuovinen, T. The origin of in-plane stresses in axially moving orthotropic continua // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. V. 81. P. 43-62. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2015.10.027
70. Jeronen, J., Saksa, T., Tuovinen, T. Stability of a Tensioned Axially Moving Plate Subjected to Cross-Direction Potential Flow. In: Neittaanmäki, P., Repin, S., Tuovinen, T. (eds) *Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures*. Computational Methods in Applied Sciences V. 40, Springer, Cham. 2016. P. 105-116. DOI:10.1007/978-3-319-23564-6_7
71. Saksa, T., Jeronen, J. Dynamic Analysis for Axially Moving Viscoelastic Poynting–Thomson Beams. In: Neittaanmäki, P., Repin, S., Tuovinen, T.

- (eds) *Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Computational Methods in Applied Sciences V. 40*, Springer, Cham. 2016. P. 131-151. DOI:10.1007/978-3-319-23564-6_9
72. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. О продольном движении панели при механических и температурных воздействиях // *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78, № 2. С. 123-130. DOI:10.32326/1814-9146-2016-78-2-123-130
73. Баничук Н. В., Афанасьев В. С., Шевченко А. В. О неустойчивости продольного движения вдоль цилиндрической поверхности термоупругого полотна, моделируемого растягиваемой нагретой струной // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2018. № 2. С. 44-47. = Banichuk N. V., Afanas'ev V. S., Shevchenko A. V. Instability of a longitudinal movement along the cylindrical surface for a thermoelastic web simulated by stretched and heated string // *Mechanics of Solids*. 2018. V. 53, no. 2. P. 156-158. DOI:10.3103/s002565441802005x
74. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Mathematical modeling of the axially moving panels subjected to thermomechanical actions // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2018. V. 46, no. 1. P. 101-109. DOI:10.1080/15397734.2017.1289472
75. Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Афанасьев В. С. Механика продольно движущегося и колеблющегося в поперечном направлении ортотропного термоупругого полотна // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2018. № 7. С.67-72. = Banichuk N. V., Ivanova S. Y., Afanas'ev V. S. Mechanics of axially moving and vibrating in transverse direction orthotropic thermoelastic web // *Russian Mathematics*. 2018. V. 62, no. 7. P. 58-62. DOI:10.3103/S1066369X1807006X
76. Chen L.Q., Tang Y.Q. Parametric stability analysis of axially accelerating moving viscoelastic beams with the recognition of longitudinally varying tensions // *J. Vib. Acoust.* 2012. V. 134, no. 1. 011008 11 p. DOI:10.1115/1.4004672

77. Tang Y.Q., Chen L.Q. Stability analysis and numeral confirmation in parametric resonance of axially moving viscoelastic plates with time-dependent speed // *Eur. J. Mech. A. Solids*. 2013. V. 37. P.106-121. DOI:10.1016/j.euromechsol.2012.05.010
78. Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Tuovinen T., Neittaanmäki P. Stability of axially moving materials. Cham, Switzerland: Springer, 2020. 642 p. DOI:10.1007/978-3-030-23803-2 ISBN:978-3-030-23802-5
79. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
80. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М., Маркеев А.П., Соколов Б.Н., Шаранюк А.В. Механика больших космических конструкций. М.: Изд-во «Факториал», 1997. 302 с. ISBN 5-88688-021-6.
81. Lagnese J. Control of wave process with distributed controls supported on a subregion // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 1983. V. 21, no. 1. P. 68-85. DOI:10.1137/0321004
82. Баничук Н.В., Братусь А.С. Об оптимальном проектировании конструкций, оснащенных актьюаторами. // *Техническая кибернетика*. 1993. № 1. С. 24-31.
83. Banichuk N.V., Bratus A.S., Posviansky V.P. Optimum Positioning of Actuator for Structural Control. In: *Fourth International Conference on Adaptive Structures* (Eds. by Breitbach E.J., Woda B.K., Natori M.C.) Lancaster, Technomic Publ. Co. 1994. P. 179-188.
84. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука. 1975. 568 с.
85. Lions J.L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // *SIAM Review*. 1988. V. 30, no. 1. P. 1-68. DOI:10.1137/1030001
86. Асланов С.Ж., Михайлов И.Е., Муравей Л.А. Аналитические и численные методы в задаче гашения колебаний струны точечным демпфером // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2006. № 7. С. 28-35.

87. Атамуратов А.Ж., Михайлов И.Е., Муравей Л.А. Проблема моментов в задачах управления упругими динамическими системами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 9. С. 587-598. DOI:10.17587/mau.17.587-59
88. Атамуратов А.Ж., Михайлов И.Е., Таран Н.А. Гашение вынужденных поперечных колебаний упругой балки с помощью нескольких стационарных актюаторов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 2. С. 5-15. DOI:10.15593/perm.mech/2018.2.01
89. Михайлов И.Е. Численное гашение вынужденных поперечных колебаний круглой упругой мембраны с помощью точечного актюатора. Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. С. 1336-1338. DOI:10.22226/2410-3535-2019-congress-v3
90. Banichuk N. V., Ivanova S. Y. Optimal damping of perturbations of moving thermoelastic panel // Doklady Physics. 2018. V. 63. P. 13-17. DOI:10.1134/S1028335818010019
91. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Makeev E.V., Sinitsyn A.V. Control of vibrations of a moving beam // J. Phys. Conf. Ser. 2018. V. 991. 012007 6 p. DOI:10.1088/1742-6596/991/1/012007
92. Mikhailov I.E., Suvorov I.A. Numerical damping of oscillations of a moving string // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1158, no. 3. 032031 7 p. DOI:1088/1742-6596/1158/3/032031
93. Михайлов И.Е., Суворов И.А. Численное решение задачи о гашении колебаний движущегося полотна // Журнал вычислительной математики и математической физики 2021. Т. 61. № 1. С. 150-161. DOI:10.31857/S004446692012011X
94. Mote C.D. Dynamic stability of an axially moving band // J. Franklin Institute. 1968. V. 285, no. 5. P. 329-346. DOI:10.1016/0016-0032(68)90482-1

95. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука. 1966. 636с.
96. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Издательское объединение «Вища Школа». 1975. 216с.
97. Marynowski K, Kapitaniak T. Dynamics of axially moving continua // Int. J. Mech. Sci. 2014. V. 81, no. 1. P. 26-47. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2014.01.017
98. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. Москва: Издательство Иностранной Литературы, 1957. 445 с.
99. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Шаранюк А.В. Динамика конструкций. Анализ и оптимизация. М.: Наука. 1989. 106 с.
100. Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука. 1986. 303 с.
101. Троицкий В.А., Петухов Л.В. Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука. 1982. 432 с.
102. Келдыш М.В. О методе Б.Г. Галёркина для решения краевых задач // Изв. АН СССР, сер. матем. 1942. Т. 6. № 6. С. 309–330.
103. Свирский И.В. Методы Бубнова-Галёркина и последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 199 с.
104. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
105. Lamb H., Southwell R.V. The vibrations of a spinning disc // Proceedings of the Royal Society of London. 1921. V. 99, no. 699. P. 272-280. DOI:10.1098/rspa.1921.0041
106. Southwell R.V. On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre: and on the effects of rotation // Proceedings of the Royal Society of London. 1922. V. 101, no. 709. P. 133-153. DOI:10.1098/rspa.1922.0032
107. Simmonds J.G. The transverse vibrations of a flat spinning membrane // Journal of the Aeronautical Sciences. 1962a. V. 29, no. 1. P. 16-18.

108. Simmonds J.G. Axisymmetric transverse vibrations of a spinning membrane clamped at its center // *AIAA Journal*. 1962b. V. 1, no. 5. P. 1224-1225.
109. Eversman W. Transverse vibrations of a clamped spinning membrane // *AIAA Journal*. 1968. V. 6, no. 7. P. 1395-1397. DOI:10.2514/3.4763
110. Barasch S. and Chen Y. On the vibration of a rotating disc // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 1972. V. 94, no. 4. P. 1143-1144. DOI:10.1115/1.3422847
111. Iwan W.D., Moeller T.L. The stability of a spinning elastic disc with a transverse load system // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 1976. V. 43, no. 3. P. 485-490. DOI:10.1115/1.3423896
112. Benson R.C., Bogy D.B. Deflection of a very flexible spinning disc due to a stationary transverse load // *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 1978. V. 45, no. 3. P. 636-641. DOI: 10.1115/1.3424374
113. Crandall S.H. Stability of vibratory modes in moving media. In: *Dynamic Problems of Rigid-Elastic Systems and Structures* (Banichuk N.V., Klimov D.M., Schiehlen W., Eds.) Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 65-72. DOI:10.1007/978-3-642-84458-4_8 ISBN: 978-3-642-84460-7
114. Paidoussis M.P. *Fluid-structure interaction: slender structures and axial flow*. V. 2. Elsevier Academic Press, 2004. 1040 p. ISBN: 978-0-125-44361-6
115. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление*. М.: Наука, 1979. 432 с.
116. Моисеев Н.Н. *Численные методы в теории оптимальных систем*. М.: Наука, 1971. 424 с.
117. Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*. М.: Мир, 1972. 415 с.
118. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. О подавлении поперечных колебаний упругой панели, продольно движущейся в потоке жидкости // *Доклады*

Российской Академии Наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. С. 81–85. DOI:10.31857/s2686740020020054

119. Goldberg D.E. Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning. Westley Publ. Comp., inc, 1989. 372 p. ISBN:978-0-201-15767-3

120. Periaux J, Gonzalez F, Lee D.S.C. Evolutionary optimization and game strategies for advanced multi-disciplinary design. Intelligent system, Control and Automation: Science and Engineering, V. 75. Springer, Dordrecht, Heidelberg. 2015. DOI:10.1007/978-94-017-9520-3 ISBN:978-94-017-9519-

7

Список рисунков

Рис. 1.1. Движущаяся неразрезная панель	32
Рис. 1.2. Зависимость формы колебаний функции $w(x, t)$ для моментов времени: $t = 0(1), 0.1(2), 0.2(3), 0.3(4), 0.4(5)$	37
Рис. 1.3 (а). Зависимость распределения величины $f_1(t)\Psi_1(x)$ для моментов времени: $t = 0(1), 0.1(2), 0.2(3), 0.3(4), 0.38(5)$	39
Рис. 1.3 (б). Зависимость распределения величины $f_1(t)\Psi_1(x)$ для моментов времени: $t = 0.38(1), 0.5(2), 0.6(3), 0.7(4), 0.83(5)$	39
Рис. 1.3 (в). Зависимость распределения величины $f_1(t)\Psi_1(x)$ для моментов времени: $t = 0.81(1), 0.9(2), 1.0(3), 1.1(4), 1.2(5), 1.3(6)$	40
Рис. 1.4 (а). Зависимость распределения величины $f_2(t)\Psi_2(x)$ для моментов времени: $t = 0(1), 0.04(2), 0.08(3), 0.12(4), 0.16(5)$	40
Рис. 1.4 (б). Зависимость распределения величины $f_2(t)\Psi_2(x)$ для моментов времени: $t = 0.16(1), 0.20(2), 0.24(3), 0.285(4), 0.32(5)$	41
Рис. 1.4 (в). Зависимость распределения величины $f_2(t)\Psi_2(x)$ для моментов времени: $t = 0.32(1), 0.36(2), 0.40(3), 0.44(4), 0.48(5), 0.52(6), 0.56(7)$	41
Рис. 1.5 (а). Зависимость распределения функции прогибов $w(x, t)$ для моментов времени: $t = 0(1), 0.1(2), 0.2(3), 0.3(4), 0.38(5)$	42
Рис. 1.5 (б). Зависимость распределения функции прогибов $w(x, t)$ для моментов времени: $t = 0.38(1), 0.5(2), 0.6(3), 0.7(4), 0.81(5)$	42
Рис. 1.5 (в). Зависимость распределения функции прогибов $w(x, t)$ для моментов времени: $t = 0.81(1), 0.9(2), 1.0(3), 1.1(4), 1.2(5), 1.3(6)$	43
Рис. 1.6. Движущаяся неразрезная пластина	45
Рис. 1.7. Движение полотна под углом φ к вертикали.....	51

- Рис. 2.1.** Зависимость критической температуры θ^{div} от скорости V_0 для значений параметра $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}; 4 \cdot 10^{-6}; 5 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$ (кривые 1, 2, 3)..... 61
- Рис. 2.2.** Зависимость критической скорости V_0^{div} от температуры θ для значений параметра $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}; 4 \cdot 10^{-6}; 5 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$ (кривые 1, 2, 3)..... 62
- Рис. 2.3.** Зависимость критической скорости дивергенции V_0^{div} от температуры θ для значений параметра $\alpha_2 = 3 \cdot 10^{-5}; 5 \cdot 10^{-6}; 7 \cdot 10^{-6}; 9 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$ (кривые 1, 2, 3, 4)..... 66
- Рис. 2.4.** Зависимость критической температуры дивергенции θ^{div} от скорости V_0 для значений параметра $\alpha_2 = 3 \cdot 10^{-5}; 5 \cdot 10^{-6}; 7 \cdot 10^{-6}; 9 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$ (кривые 1, 2, 3, 4)..... 67
- Рис. 2.5.** Движение полотна по цилиндрической поверхности..... 69
- Рис. 2.6.** Зависимость критической скорости V_{cr} от температуры θ для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ (кривые 1 – 4) при $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$ 73
- Рис. 2.7.** Зависимость критической скорости V_{cr} от температуры θ для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ (кривые 1 – 4) при $\alpha_0 = 4 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$ 74
- Рис. 2.8.** Зависимость критической скорости V_{cr} от температуры θ для значений параметра $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}; 4 \cdot 10^{-6}; 5 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$ (кривые 1 – 3) при $k = 0.1$ 75
- Рис. 2.9.** Зависимость критической температуры θ_{cr} от скорости V для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ (кривые 1 – 4) при $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$ 76
- Рис. 2.10.** Зависимость критической температуры θ_{cr} от скорости V для значений параметра $k = 0.1; 0.2; 0.4; 0.6$ (кривые 1 – 4) при $\alpha_0 = 4 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$ 77

Рис. 2.11. Зависимость критической температуры θ_{cr} от скорости V для значений параметра $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}; 4 \cdot 10^{-6}; 5 \cdot 10^{-6} (K^{-1})$ (кривые 1 – 3) при $k = 0.1$	78
Рис. 2.12. Продольное движение вязкого материала	79
Рис. 3.1. Вращающийся упругий стержень	86
Рис. 3.2. Зависимость функционала J_g от параметра t_f	96
Рис. 3.3. Распределения прогибов $w(x, t)$ для $t_f = \frac{\pi}{2}$ в моменты времени $t = 0; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}$ при отсутствии подавляющего воздействия (пунктирные линии 1, 2, 3) и при подавляющем оптимальном воздействии (сплошные линии 4, 5, 6).....	97
Рис. 3.4. Вращающийся диск	99
Рис. 3.5. Слоистое полотно	111
Рис. 3.6. Кусочно-постоянное распределение свойств материалов	114
Рис. 3.7. Блок-схема генетического алгоритма.....	119
Рис. 3.8. Распределение материалов без ограничения на полную массу	120
Рис. 3.9. Распределение материалов для случая $M_0 = 430 \text{ г/м}^2$	121
Рис. 3.10. Распределение материалов для случая $M_0 = 420 \text{ г/м}^2$	121
Рис. 3.11. Распределение материалов для случая $M_0 = 410 \text{ г/м}^2$	122
Рис. 3.12. Зависимость γ_* от эффективного коэффициента Пуассона ν^{ef} ...	122