

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А. Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

на правах рукописи

Цуканов Иван Юрьевич

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ С РЕГУЛЯРНЫМ
РЕЛЬЕФОМ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
д.ф-м.н., академик РАН
Горячева Ирина Георгиевна

Москва - 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С РЕГУЛЯРНЫМ РЕЛЬЕФОМ	15
1.1 Общая постановка задачи дискретного контакта упругих тел при действии нормальных сил.....	15
1.2 Задачи дискретного контакта с ограниченной номинальной областью контакта.	16
1.3 Периодические контактные задачи.....	22
1.4 Контактные задачи с учетом взаимодействия поверхностей в межконтактном зазоре.....	38
1.5 Моделирование влияния параметров рельефа характеристики контактного взаимодействия на макроуровне.....	43
ГЛАВА 2. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С РЕГУЛЯРНЫМ РЕЛЬЕФОМ	46
2.1 Общая постановка задачи и решение для формы рельефа, описываемой четной функцией координаты	46
2.1.1 Постановка задачи.....	46
2.1.2 Общее решение для контактного давления в квадратурах.....	48
2.1.3 Решение задачи для рельефа поверхности, форма которого описывается четным тригонометрическим многочленом	51
2.1.4 Определение дополнительного смещения поверхностей для рельефа с формой выступов, описываемой четной функцией.....	53
2.1.5 Определение дополнительного смещения поверхностей для рельефа, форма которого описывается четным тригонометрическим многочленом	56
2.2 Построение асимптотических решений для рельефа с симметричной формой выступов и впадин.....	58
2.2.1 Построение асимптотического решения для случая малых и умеренных нагрузок.....	58
2.2.2 Анализ и сравнение точных и асимптотических результатов для некоторых типичных форм поверхностного рельефа	61
2.2.3 Построение асимптотического решения для случая больших нагрузок	71
2.3 Выводы по главе 2	77

ГЛАВА 3. КОНТАКТ ПОВЕРХНОСТИ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ВОЛНИСТЫМ РЕЛЬЕФОМ И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА. 80

3.1	Описание геометрии рельефа, постановка и асимптотические решения задачи для различных диапазонов нагрузок	80
3.1.1	Описание геометрии поверхности с пространственным волнистым рельефом.....	80
3.1.2	Постановка и асимптотическое решение задачи для определения интегральных контактных характеристик при малых нагрузках.....	81
3.1.3	Определение формы области контакта при малых нагрузках.....	86
3.1.4	Учет взаимного влияния выступов при определении контактных характеристик для умеренных нагрузок.	88
3.1.5	Постановка и асимптотическое решение задачи для определения интегральных контактных характеристик при больших нагрузках.....	90
3.2	Результаты асимптотических решений задачи и сравнение с известными численными решениями	94
3.2.1	Зависимости интегральных контактных характеристик – площади фактического контакта и дополнительного смещения от номинального давления	94
3.2.2	Анализ изменения формы области контакта.....	96
3.2.3	Анализ распределения контактных давлений.....	99
3.2.4	Алгоритм анализа контактных характеристик для рельефа несинусоидальной формы	102
3.3	Выводы по главе 3	103

ГЛАВА 4. ЭФФЕКТ НЕРАВНОСТЕЙ ВТОРОГО МАСШТАБНОГО УРОВНЯ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОВЕРХНОСТИ С РЕГУЛЯРНЫМ РЕЛЬЕФОМ И ПОЛУПЛОСКОСТИ

4.1	Постановка и решение контактной задачи для двухуровневой волнистой поверхности и упругой полуплоскости в условиях односвязной области контакта.....	106
4.1.1	Постановка, точное и асимптотическое решение задачи.....	106
4.1.2	Результаты расчета контактных характеристик.....	109
4.2	Контакт волнистого цилиндра и упругой полуплоскости	118
4.2.1	Постановка и решение задачи о контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости при различных схемах начального касания.....	118
4.2.2	Анализ контактных характеристик при внедрении волнистого цилиндра в упругую полуплоскость в зависимости от вида начального касания.....	122

4.2.3 Анализ взаимовлияния геометрических параметров на двух масштабных уровнях при переходе от односвязной области контакта к многосвязной при $\psi = 0$ и $\psi = \pi$	130
4.2.4 Экспериментальные исследования смещений поверхности упругого цилиндра при взаимодействии с волнистой поверхностью малой амплитуды	142
4.3 Выводы по главе 4	145
ГЛАВА 5. ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ РЕЛЬЕФА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНТАКТА С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ ПРИ НОРМАЛЬНОМ И ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ.....	149
5.1 Постановка и решение периодической контактной задачи для рельефа с параметрически заданной формой с одинаковыми выступами и впадинами и упругой полуплоскости	149
5.1.1 Постановка и решение задачи при приложении нормальной нагрузки	149
5.1.2 Анализ контактных характеристик	152
5.2 Постановка и решение периодической контактной задачи для рельефа с параметрически заданной формой с различными выступами и впадинами и упругой полуплоскости.....	160
5.2.1 Постановка и решение задачи при приложении нормальной нагрузки	160
5.2.2. Анализ контактных характеристик	163
5.3 Постановка и решение периодической контактной задачи для рельефа с параметрически заданной формой и упругой полуплоскости при приложении нормальной и касательной силы.....	166
5.3.1 Общие положения теории Каттанео-Миндлина в периодическом случае.....	166
5.3.2 Решение задач и определение контактных характеристик для рельефов с одинаковой и различной формой выступов и впадин	169
5.3.3 Анализ контактных характеристик для различной формы рельефа при последовательном нормальном и касательном нагружении	172
5.4 Выводы по главе 5	174
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	177
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	179

ВВЕДЕНИЕ

Контактные задачи для упругих тел с регулярным рельефом поверхностей относятся к классу задач дискретного контакта, который является частью общей теории контактных задач со смешанными граничными условиями в механике деформируемого твердого тела. Особенностью задач дискретного контакта является локализация фактической области контакта на отдельных влияющих друг на друга дискретно расположенных пятнах, размеры, форма и количество которых в общем случае не известно заранее.

Первые исследования в данном направлении, посвященные плоским периодическим контактными задачам при приложении нормальных сил, были отражены в работах Н.И. Мухелишвили, И.Я. Штаермана, Н.М. Westergaard. Существенный вклад в развитие задач дискретного контакта в плоской постановке при приложении нормальных сил внесли Л.А. Галин, Е.А. Кузнецов, С.М. Мхитарян, И.А. Солдатенков, G.M.L. Gladwell, R. Jackson и др. Первые и основополагающие результаты по пространственной задаче дискретного контакта были получены в работах А.Е. Андрейкива, Л.А. Галина, И.Г. Горячевой, В.В. Панасюка. Существенный вклад в развитие этого класса задач внесли В.М. Александров, И.И. Аргатов, А.Н. Галыбин, И.Г. Горячева, Д.А. Пожарский, О.Г. Чекина, J. Greenwood, K.L. Johnson, V.A. Yastrebov и др. Задачи дискретного контакта при приложении нормальных и касательных сил в плоской постановке рассматривались в работах Ю.А. Антипова, И.Г. Горячевой, Е.А. Кузнецова, Р.М. Мартыняка, И.А. Солдатенкова, M. Ciavarella, L.M. Keer и др. Контактные задачи с учетом адгезионного взаимодействия рассматривались И.Г. Горячевой, Ю.Ю. Маховской, И.А. Солдатенковым, Ю.О. Соляевым, Г.В. Федотенковым, K.L. Johnson и др. Применение задач дискретного контакта к теории взаимодействия технических поверхностей исследовали А.Ю. Албагачиев, Н.Б. Демкин, В.В.

Измайлов, И.В. Крагельский, Н.К. Мышкин, П.М. Огар, М.И. Петроковец, Э.В. Рыжов, А.Г. Суслов, F.M. Borodich, J. Greenwood и др.

Большинство технических и натуральных поверхностей не являются идеально гладкими и имеют отклонения от правильной формы на различных масштабных уровнях, которые формируют их рельеф. Рельеф поверхностей весьма различен как по способу возникновения, так и по масштабу (волнистость, шероховатость) и может наноситься искусственно или получаться в результате различных видов поверхностной обработки. Современные методы исследования поверхностей позволяют дать количественную оценку параметров микрогеометрии поверхности на разных масштабных уровнях [1, 2].

Поскольку область фактического контакта может составлять десятые или сотые доли номинальной области контакта (односвязной области, включающей в себя все пятна фактического контакта), то максимальные фактические давления на пятнах контакта превосходят номинальные (осредненные по номинальной области контакта) в сотни раз.

Дискретность контакта играет важную роль в протекании физических процессов, происходящих при контактном и фрикционном взаимодействии (упругих и пластических деформаций, адгезии и когезии, фрикционного разогрева, фазовых переходов), а также оказывает влияние на электросопротивление, массоперенос, изнашивание и усталостное разрушение поверхностных слоев материалов, на поверхностное натяжение и смачивание поверхностей, на протекающие в зоне смазанного контакта гидродинамические явления и т.д.

Первые постановки задач механики дискретного контакта относятся к началу 20 в. и неразрывно связаны с развитием теории трения и изнашивания деформируемых тел [3-5]. Ввиду сложности анализа контактных задач с неодносвязной областью контакта лишь некоторые из них могут быть решены точно. Упрощения, которые обычно делаются при решении задач о контактном взаимодействии деформируемых тел заданной макроформы с

учетом их поверхностного рельефа, сводятся, как правило, к упрощенному описанию микрогеометрии поверхности (периодический рельеф, выступы заданной формы и т.д.) и к построению приближенных аналитических и асимптотических методов решения поставленных задач.

В связи с развитием вычислительной техники наблюдается тенденция к проведению расчетов контактных характеристик тел с шероховатыми поверхностями на основе прямого численного моделирования [6-8]. При этом отпадает необходимость модельного описания макро- и микрогеометрии поверхностей. Все данные о геометрии сопрягаемых поверхностей берутся на основе их профилометрирования. Однако несмотря на кажущуюся простоту и доступность компьютерного моделирования взаимодействия шероховатых поверхностей, актуальность и востребованность развития аналитических методов решения задач дискретного контакта, и в частности задач для поверхностей с регулярным рельефом не вызывает сомнений. Применение аналитических методов исследования дает возможность не только оценить влияние микрогеометрии на характеристики контактного взаимодействия, силу трения и т.д., но и управлять этими процессами за счет выбора оптимальных параметров поверхностного рельефа.

Актуальность работы. В связи с возрастающим применением материалов с низким значением модуля упругости (полимеров и эластомеров) в различных технических, медицинских и электронных устройствах, в которых эти материалы используются в контакте с более жестким телом или телом из того же материала, имеющим поверхностный рельеф (текстуру) актуальной проблемой является развитие теории контактных задач для упругих тел с регулярным рельефом поверхностей, позволяющих оценить влияние микрогеометрии взаимодействующих поверхностей на характеристики контактного взаимодействия, силу трения и распределение подповерхностных напряжений, и управлять процессами трения и изнашивания за счет выбора оптимальных параметров поверхностного рельефа в широком диапазоне параметров нагружения.

Целью диссертационной работы является развитие аналитических методов решения контактных задач теории упругости для исследования взаимодействия упругих тел с поверхностным рельефом в широком диапазоне нагрузок и геометрии рельефа, что включает в себя следующие **задачи**:

- развитие точных и асимптотических методов решения плоских периодических контактных задач при неизвестной области контакта и симметричной форме выступов (впадин) рельефа поверхностей в широком диапазоне нагрузок;

- развитие асимптотических методов решения периодических контактных задач для двумерной волнистой поверхности и упругого полупространства;

- установление связи между геометрией поверхностного рельефа и контактными характеристиками взаимодействующих упругих тел (распределением контактных давлений, площадью фактического контакта, относительным смещением поверхностей) в широком диапазоне приложенных нагрузок;

- оценка влияния неровностей поверхности различных масштабных уровней микрорельефа на контактные характеристики взаимодействующих упругих тел;

- оценка влияния формы и размеров выступов и впадин поверхностного рельефа на контактные характеристики, а также на размер зон сцепления и проскальзывания при приложении нормальных и касательных нагрузок.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Получены точные и асимптотические решения не рассмотренных ранее контактных задач теории упругости в плоской постановке с неизвестными границами зон контакта, позволяющие рассчитать контактные характеристики поверхностей, в том числе с двухуровневой периодической системой неровностей, имеющих форму, описываемую четной функцией координаты.

2. Получены асимптотические решения пространственной периодической задачи о контактном взаимодействии поверхности с волнистым микрорельефом, нанесенным в двух взаимно перпендикулярных направлениях (с одинаковым периодом) и упругого полупространства. Построенные решения позволяют изучить влияние неосесимметричной формы выступов/впадин микрорельефа на изменение контактных характеристик при малых, умеренных и больших нагрузках.
3. Получено аналитическое решение периодической контактной задачи в плоской постановке для поверхности с двухуровневой волнистостью и упругой полуплоскости при малой высоте неровностей второго уровня. Проанализировано влияние параметров неровностей второго уровня на контактные характеристики взаимодействующих тел.
4. Получено решение контактной задачи для волнистого цилиндра и упругой полуплоскости при наличии одной и двух зон начального контакта тел. Проанализировано влияние геометрических параметров цилиндра и его волнистости на переход от односвязной области фактического контакта к многосвязной.
5. Даны решения плоских контактных задач для упругой полуплоскости и упругого тела с рельефом, форма которого описывается заданными параметрически периодическими функциями, в условиях частичного проскальзывания при приложении нормальной и касательной сил (в предположении близости упругих постоянных взаимодействующих тел). Исследованы зависимости контактных давлений и касательных усилий, размеров областей контакта и зон сцепления (проскальзывания) от изменения соотношения касательной и нормальной силы и геометрических параметров рельефа.

Достоверность результатов обусловлена использованием известных методов механики деформируемого твердого тела и математического анализа. Большинство решений получены аналитически в замкнутом виде,

их достоверность обеспечивается корректной постановкой задач и использованием соответствующего математического аппарата. Достоверность результатов расчетов подтверждается сравнением полученных решений с известными решениями в предельных случаях и с результатами численного моделирования, доступными из публикаций.

Практическая значимость работы заключается в том, что результаты диссертации могут быть использованы для моделирования влияния геометрических характеристик – формы и размеров выступов и впадин поверхностного рельефа на контактные и фрикционные свойства взаимодействующих упруго деформируемых тел, в которых одно или оба тела выполнены из материалов с низким значением модуля Юнга (например, полимерных материалов). Полученные результаты также позволяют решать задачу научно обоснованного выбора рациональных геометрических параметров рельефа контактирующих поверхностей для обеспечения требуемых контактных и фрикционных свойств сопряжений при заданных нагрузках и упругих свойствах материалов контактирующих тел в условиях нормального и тангенциального нагружения.

Объектами исследования являлись контактирующие под воздействием нормальных и касательных нагрузок упругие тела, имеющие рельеф на их поверхностях, представляющий собой систему выступов и впадин

Методы исследования. В работе использовались методы механики контактного взаимодействия и математического анализа. Для решения плоских и пространственных периодических контактных задач использовался также метод локализации, предложенный И.Г. Горячевой, методы механики разрушения, использование которых в механике контактного взаимодействия предложено К. Джонсоном. Для контактных задач с частичным проскальзыванием использованы положения теории Каттанео и Миндлина. Для построения решений контактных задач и их анализа также использовались методы интегральных преобразований и теория ортогональных многочленов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Аналитические решения плоской контактной задачи для деформируемых и жестких тел с регулярным рельефом их поверхностей и упругой полуплоскости, позволяющие определить контактное давление, размер фактической области контакта и функцию дополнительного смещения в квадратурах и рядах по ортогональным многочленам во всем диапазоне нагрузок и при форме выступов/впадин, описываемой четной функцией координаты, а также их асимптотики в области малых, умеренных и больших нагрузок.

2. Асимптотические выражения для определения контактных характеристик (площадь фактической области контакта, дополнительное смещение за счет неровностей поверхности) при малых, умеренных и больших нагрузках для пространственного волнистого микрорельефа (с волнистостью в двух взаимно перпендикулярных направлениях) и методика приближенного определения формы области контакта и распределения контактных давлений при умеренных нагрузках для данного типа рельефа.

3. Аналитическое решение периодической задачи для жесткого тела с волнистым рельефом, имеющим два масштабных уровня неровностей, при внедрении ее в упругую полуплоскость и анализ влияния геометрических характеристик неровностей второго масштабного уровня на контактные характеристики – распределение контактного давления, размер области фактического контакта и дополнительное смещение за счет неровностей волнистости.

4. Решение задачи о волнистом цилиндре, внедряющемся в упругую полуплоскость при одной и двух зонах контакта, возникающих вследствие различного типа начального касания.

5. Критерии перехода к многосвязной области при одной зоне начального контакта и различном сочетании геометрических параметров цилиндра и волнистости.

6. Аналитическое решение контактной задачи для периодического рельефа с параметрически заданной формой выступов и впадин и упругой полуплоскости при приложении нормальных и касательных сил в условиях частичного проскальзывания (при одинаковых упругих постоянных взаимодействующих тел). Анализ влияния геометрии микрорельефа на контактные характеристики - распределение нормальных и касательных усилий, размеры области контакта, а также подобластей сцепления и проскальзывания на ней от соотношения нормальных и касательных сил.

Апробация работы. Результаты работы были предметом более чем 20 докладов на российских и международных научных конференциях, таких как:

1. Contact Mechanics International Symposium (CMIS-2018), Biella, Italy, May 16-18, 2018.
2. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева, 17 - 19 мая 2016, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
3. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, Россия, 19-24 августа 2019
4. XLIX International Summer School – Conference Advanced Problems in Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Россия, 21-25 июня 2021
5. VII Международная научная конференция «Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении», Москва, Россия, 14-16 декабря 2021.
6. XIV Международная научно-техническая конференция Трибология - машиностроению 2022, посвященная 100-летию со дня рождения А.П. Семёнова, Москва, Россия, 12-20 октября 2022.

7. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. г. Санкт-Петербург. 21-25 августа 2023 г.

Результаты диссертационной работы также докладывались и обсуждались на семинаре по механике фрикционного взаимодействия им. И.В. Крагельского ИПМех РАН и семинаре по механике деформируемого твердого тела НИИ Механики МГУ.

Научные исследования, проведенные в диссертационной работе, осуществлялись в том числе в рамках грантов Российского научного фонда (проект 14-29-00198) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-01-00352_a; 18-58-00014_Бел_a; 19-08-00615_a; 20-01-00400_a).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в работах [1-28], изданных в периодических научных изданиях, сборниках материалов и тезисов конференций. Список публикаций приведен в конце автореферата, среди публикаций 14 статей [1-14] напечатаны в периодических журналах, рекомендованных ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus, в том числе 11 публикаций входят в категорию K1.

Личный вклад автора. Работы [1-5,10,11,14] выполнены автором диссертации самостоятельно. В работе [6] постановка задачи, ее решение и анализ результатов для случая упругой полуплоскости выполнены автором диссертации самостоятельно. Разработка модели для упругого основания, анализ и сравнение результатов выполнены совместно с А.Н. Любичевой. В работах [7-9, 12] автору частично принадлежат постановки контактных задач и методы их решения, анализ результатов проводился совместно с И.Г. Горячевой. В работе [13] автором проведены постановки задач и расчеты; формулировки идей и полученные результаты обсуждались с А.Ю. Албагачиевым и В.Д. Даниловым.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 190 страниц, включая 67 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 139 наименований.

Соответствие паспорту научной специальности. По теме и содержанию материалов исследования диссертационная работа соответствует актуальному паспорту специальности 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела, в части п. 3. Задачи теории упругости, теории пластичности, теории вязкоупругости.

Количество страниц в диссертации – 191, в том числе иллюстраций – 67, таблиц – 1.

ГЛАВА 1. ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С РЕГУЛЯРНЫМ РЕЛЬЕФОМ

1.1 Общая постановка задачи дискретного контакта упругих тел при действии нормальных сил

В качестве примера постановки задачи дискретного контакта рассмотрим контакт упругого полупространства с жестким контртелом, контактирующая поверхность которого описывается функцией $z = -F(x, y)$ в системе координат, связанной с полупространством [9]

Функция $F(x, y)$ такова, что при сближении тел на некоторую величину D под действием нормальной силы P область фактического контакта представляет собой конечное N или бесконечное число пятен контакта ω_i . Будем считать, что касательные напряжения в областях фактического контакта отсутствуют, а контактные давления $p_i(x, y)$ приводят к упругим перемещениям $u_z(x, y)$ в направлении оси Oz первоначально плоской границы упругого полупространства, определяемым соотношением [9]

$$u_z(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \sum_{i=1}^N \iint_{\omega_i} \frac{p_i(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} \quad (1.1)$$

В каждой подобласти ω_i должно выполняться условие контакта

$$u_z(x, y) = D - F(x, y) \quad (1.2)$$

Если величина сближения D неизвестна, а задана суммарная нагрузка, действующая на систему выступов, то к уравнениям (1.1) и (1.2) следует добавить уравнение равновесия

$$\sum_{i=1}^N \iint_{\omega_i} p_i(x, y) dx dy = P. \quad (1.3)$$

Аналогичным образом задача дискретного контакта формулируется для неоднородных тел, в том числе для тел с покрытиями [10]. При этом интегральный оператор в (1.1) заменяется на соответствующий оператор для двухслойного упругого полупространства.

1.2 Задачи дискретного контакта с ограниченной номинальной областью контакта.

Задачи с ограниченной номинальной областью контакта встречаются при взаимодействии текстурированных поверхностей, например медицинских инструментов, рабочих органов роботов, манипуляторов и др.

При внедрении системы N жестких связанных между собой штампов в упругое основание область контакта состоит из N подобластей. Размеры областей контакта необходимо определять в соответствии с условием контакта, граничными условиями и условиями совместности. Имеющееся при этом неравномерное распределение нагрузок между отдельными пятнами контакта определяется высотными характеристиками контактирующих штампов, расстоянием между ними, а также местом расположения отдельного пятна контакта в пределах номинальной области взаимодействия.

Общее решение плоской задачи для множественного контакта без учета сил трения дано впервые в работе Мусхелишвили [11] с использованием методов ТФКП и затем Штаерманом [12] с использованием функций действительного переменного.

Контактное давление в случае внедрения системы штампов в упругую полуплоскость дается выражением [11]:

$$p(x) = \frac{E}{2\pi(1-\nu^2)X(x)} \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \frac{g'(\xi)X(\xi)d\xi}{\xi - x} + \frac{2jU_{N-1}(x)}{X(x)}, \quad (1.4)$$

где $g(x)$ функция начального зазора; N количество участков контакта, $i = 1 \dots N$; a_i, b_i – координаты i -го участка контакта;

$$X(x) = \sqrt{(x - a_1)(x - b_1) \dots (x - a_N)(x - b_N)};$$

$$U_{N-1}(x) = G_0 x^{N-1} + G_1 x^{N-2} + \dots + G_{N-1}; \quad \text{коэффициенты } G_0 \dots G_{N-1}$$

определяются из системы уравнений, записанной на основании учета граничных условий на концах контактного сегмента; j – мнимая единица; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала полуплоскости соответственно.

Функция начального зазора определяется условием контакта:

$$g(x) = D - F(x), \quad (1.5)$$

где $F(x)$ – форма внедряемого тела.

Следует отметить, что возможны два типа задач. В задачах первого типа задана общая нагрузка, приложенная ко всем штампам. Как правило, функция $F(x)$ в этих задачах непрерывна и задана во всех интервалах $a_i \leq x \leq b_i$. Во втором типе задач заданы величины сил P_i или внедрений D_i для каждого штампа. В этом случае задана функция формы отдельного штампа $f_i(x)$ в каждом из интервалов $a_i \leq x \leq b_i$ с точностью до постоянных C_i , которые, вообще говоря, различны для рассматриваемых интервалов.

Решение плоской задачи дискретного контакта в замкнутой форме возможно только для простейших случаев. Для двух штампов с плоским основанием, расположенных на разных высотах, точное решение получено Штаерманом [12]. При условии, что штампы жёстко соединены, задана общая нагрузка P и $F(x) = C + \eta$ при $b < x < a$; $F(x) = C$ при $-b < x < -a$, выражение для определения контактного давления имеет вид:

$$p(x) = \frac{\pm \left(-\frac{Eb\eta}{4(1-\nu^2)K(a/b)} - Px \right)}{\pi \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}, \quad a < |x| < b, \quad (1.6)$$

где η – разность высот штампов; $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода аргумента k .

При условии, что штампы не связаны между собой, расположены на одной высоте, и заданы различные нагрузки, действующие на каждый штамп P_1 и P_2 ; $f(x) = C_1$ при $-b < x < -a$; $f(x) = C_2$ при $b < x < a$, распределение контактных давлений имеет следующий вид:

$$p(x) = \frac{\pm \frac{\pi b}{2K\left(\sqrt{1 - a^2/b^2}\right)}(P_1 - P_2) - (P_1 + P_2)x}{\pi\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}, \quad a < |x| < b \quad (1.7)$$

В формулах (1.6) и (1.7) знак плюс берется при $x < 0$, знак минус – при $x > 0$.

Задача для двух параболических штампов ($N = 2$) радиуса R , расположенных на одной высоте и связанных между собой, рассмотрена Гладвеллом [13]. Для формы штампов, заданной непрерывной функцией

$$F(x) = \frac{x^4}{8Rl^2} - \frac{x^2}{4R} \quad (1.8)$$

с помощью методов ТФКП и многочленов Чебышева получено следующее выражение для определения контактного давления:

$$p(x) = \frac{E\sqrt{x^2(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}}{4(1 - \nu^2)Rl^2}, \quad a \leq |x| \leq b, \quad (1.9)$$

где $2l$ – расстояние между центрами штампов, причем должно выполняться соотношение $2l = \sqrt{2(b^2 + a^2)}$. Нагрузка на один штамп определяется формулой [13]

$$P = \frac{\pi E(b^2 - a^2)^2}{64(1 - \nu^2)Rl^2}. \quad (1.10)$$

Так же, как и в задаче для двух плоских штампов, распределение давления под штампом имеет асимметричный вид с максимумом, смещенным к внутренней стороне штампа. Асимметрия давлений усиливается с ростом нагрузки. Распределения внутренних напряжений для

данной задачи были получены на основе потенциала Мусхелишвили в работе [14], в которой также выполнено сравнение с результатами, полученными методом конечных элементов.

Задача о внедрении двух клиновидных штампов в упругую полуплоскость в условиях нормального контакта и частичного проскальзывания рассмотрена в работе [15]. Решение задачи базируется на численном интегрировании уравнений Мусхелишвили [11]. Показано, что в отличие от задачи Гладвелла для двух параболических штампов [13], в случае клиновидных штампов решение в замкнутой форме получить не удастся.

Контакт двух и трех одинаковых штампов, вершины которых описываются функцией $\cos x$ и упругой полуплоскости рассматривался в работах [16, 17] на основе численного решения уравнения (1.4). Исследован эффект взаимного влияния штампов, оказываемый на распределение контактных давлений и фактическую площадь контакта при различном количестве и расположении штампов.

Контакт цилиндрического штампа, имеющего синусоидальную волнистость, с упругой полуплоскостью рассмотрен в работе Новелла и Хиллса [18]. Задача решена итерационным методом в предположении, что распределения давления под выступами определяются теорией Герца, т.е. эффект взаимного влияния проявляется только в увеличении максимального давления и уменьшении фактической площади контакта. Показано, что сделанное допущение оправдано при низких плотностях контакта.

В работе [19] рассмотрены задачи о внедрении в упругую полуплоскость без трения и в условиях частичного проскальзывания: гладкого штампа, описываемого многочленом восьмой степени; цилиндра и плоского штампа со скругленными углами, имеющих синусоидальную волнистость. Предложен численный метод для решения поставленных задач на основе сведения интегрального уравнения к бесконечной системе алгебраических уравнений, и использования итерационной схемы Ньютона-

Рафсона. Показано усиление взаимного влияния пятен контакта с ростом амплитуды волнистости.

Постановка и метод решения пространственной контактной задачи о внедрении при отсутствии сил трения N штампов заданной формы $f_i(r)$ (предполагается, что каждый штамп есть тело вращения, ось которого перпендикулярна недеформированной поверхности полупространства, r - расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки на границе полупространства) в упругое полупространство при заданных расстояниях l_{ij} между осями симметрии i -го и j -го штампов и их высотным распределением h_i даны в [20, 21]. В частности, для распределения нагрузок P_i ($i=1,2,\dots,N$), действующих на штампы в зависимости от их пространственного расположения, получена следующая система уравнений:

$$P_i = \frac{2E}{1-\nu^2} \int_0^{a_i} (D_i - f(r)) \frac{rdr}{\sqrt{a_i^2 - r^2}} - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N P_j \arcsin \frac{a_i}{l_{ij}}; \quad (1.11)$$

$$D_i = h_i - D_0 \quad (1.12)$$

где D_0 - внедрение системы штампов в полупространство под действием

$$\text{заданной нагрузки } P = \sum_{i=1}^N P_i.$$

В случае контактного взаимодействия с упругим полупространством системы гладких осесимметричных штампов для определения радиуса a_i отдельного пятна контакта получено дополнительное соотношение [22]:

$$D_i = -a_i \int_0^{a_i} \frac{f'(r)dr}{\sqrt{a_i^2 - r^2}} + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{P_j}{\sqrt{l_{ij}^2 - a_i^2}} \quad (1.13)$$

Полученные уравнения были использованы в [20] для расчета распределения нагрузок между штампами и анализа зависимости нагрузки от внедрения для системы N цилиндрических штампов с плоским

основанием радиуса a при разном характере их пространственного расположения в системе. Численное исследование решения задачи показало существенное влияние параметра плотности контактов на распределение сил P_i между штампами и значение жесткости контакта P/D системы штампов. При этом жесткость контакта оставалась примерно одинаковой для моделей, отличающихся только формой областей, занимаемых штампами. Этот вывод аналогичен результату, полученному Галиным [23] при исследовании влияния формы штампа с плоским основанием на его внедрение в упругое полупространство при заданной нагрузке.

В [20, 22] выведена система уравнений для определения распределения усилий между N связанными между собой сферическими штампами при заданном их пространственном расположении в условиях внедрения такой системы в упругое полупространство под действием заданной суммарной силы P . На основании проведенного анализа решения задачи сделан вывод, что приближенные методы расчета [4, 24], не учитывающие взаимного влияния пятен контакта, дают завышенные значения контактной жесткости

dP/dD и фактической площади контакта $A_r = \pi \sum_{i=1}^N a_i^2$; ошибка возрастает с

увеличением числа пятен контакта и их плотности.

В работе Андрейкива и Панасюка [25] решение задачи о внедрении системы цилиндрических штампов с плоскими основаниями сведена к системе N двумерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для решения системы в случае удаленных штампов применен метод последовательных приближений.

Аргатовым и Назаровым [26] для исследования задачи о внедрении системы штампов с произвольной формой подошвы в упругое полупространство использован асимптотический метод сращиваемых разложений. С целью повышения точности расчета контактных характеристик метод был улучшен в работе [27]; при этом задача построения

асимптотики контактного давления сведена к одному (вместо нескольких последовательно решаемых) связанному интегральному уравнению.

В работе Аргатова, Ли и Попова [28] рассмотрены задачи о внедрении системы жестких и упругих цилиндрических штампов с плоским основанием в упругое полупространство с учетом адгезионных сил и при их отсутствии. Получены асимптотические решения поставленных задач. Точность разработанного метода оценена сравнением с решением Коллинса [29] для внедрения двух цилиндрических штампов.

Контактная жесткость при внедрении системы N равновысоких и разновысоких цилиндрических штампов, расположенных в узлах гексагональной решетки, исследовалась теоретически и экспериментально в работе [30]. Задача дискретного контакта сведена к системе нелинейных уравнений и решена численно. Получены инженерные асимптотические выражения для оценки контактной жесткости системы, которые были сопоставлены с экспериментальными данными.

Контакт системы узких прямоугольных в плане штампов с упругим полупространством применительно к моделированию взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью рассмотрен в работе Яковенко [31]. Получены аналитические выражения для определения внедрения системы выступов и распределения нагрузок на них. Предложен алгоритм расчета высотного распределения выступов, обеспечивающего их равномерную нагруженность.

1.3 Периодические контактные задачи.

В механике контактных взаимодействий периодические контактные задачи играют важную роль при изучении эффекта взаимного влияния пятен контакта на характеристики контактного взаимодействия (распределение контактных давлений, размер области контакта, зависимость сближения тел от действующих номинальных давлений). Анализ решения периодических

контактных задач позволяет исследовать влияние параметров микрогеометрии поверхности (форма выступов, плотность их расположения и распределение по высоте) на податливость шероховатого слоя, электросопротивление и т.д.

Для системы жестких штампов с плоским основанием, внедряющихся в упругую полуплоскость, решение периодической контактной задачи было впервые получено Садовским [32] с применением комплексной функции напряжений. Им было получено следующее выражение для определения контактного давления:

$$p(x) = \frac{P \left| \cos \frac{\pi x}{L} \right|}{L \sqrt{\sin^2 \frac{\pi a}{L} - \sin^2 \frac{\pi x}{L}}}, \quad (1.14)$$

где P – приложенная нормальная нагрузка; L – расстояние между штампами; a – полуширина штампа.

В случае, когда поверхности штампов наклонены на угол ε относительно границы упругой полуплоскости, и область контакта задана (полный контакт), решение было получено в работе [33] в виде:

$$p(x) = \frac{\pi E \varepsilon \sqrt{2} \sin \frac{\pi x}{L}}{L(1-\nu^2) \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{L} - \cos \frac{2\pi a}{L}}} + \frac{P \sqrt{2} \cos \frac{\pi x}{L}}{L \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{L} - \cos \frac{2\pi a}{L}}}. \quad (1.15)$$

При этом значение нормальной нагрузки, обеспечивающее полный контакт штампов и полуплоскости, удовлетворяет неравенству:

$$P \geq \frac{L \varepsilon E}{2(1-\nu^2)} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{L}. \quad (1.16)$$

С использованием комплексной функции напряжений задача о вдавлении синусоидального волнистого штампа в упругую полуплоскость впервые решена Вестергаардом [34]. Выражение для определения контактного давления в данной задаче имеет вид:

$$p(x) = \frac{\sqrt{2}\pi E^* \Delta}{\lambda} \cos \frac{\pi x}{\lambda} \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{\lambda} - \cos \frac{2\pi a}{\lambda}}, \quad (1.17)$$

где Δ , λ – амплитуда и период волнистой поверхности; E^* – приведенный модуль упругости материалов полуплоскости и волнистой поверхности, определяемый как

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}. \quad (1.18)$$

Также им впервые получено выражение, связывающее номинальное давление и полуширину участка контакта:

$$\bar{p} = \frac{\pi E^* \Delta}{\lambda} \sin^2 \frac{\pi a}{\lambda}. \quad (1.19)$$

Схожее по своей структуре решение для определения контактного давления при внедрении волнистой поверхности, описываемой функцией

$$f(x) = \Delta \left(1 - \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} \right), \text{ получено Штаерманом [12].}$$

Позднее, с использованием метода парных сумматорных уравнений, задача о внедрении синусоидальной волнистой поверхности в упругую полуплоскость была решена в работе [35], где впервые выведено соотношение между максимальным значением давления и приложенным номинальным давлением:

$$p_{\max} = 2\sqrt{p^* \bar{p}}, \quad (1.20)$$

где $p^* = \frac{\pi E^* \Delta}{\lambda}$ – номинальное давление, необходимое для полного контакта взаимодействующих тел.

Определение дополнительных смещений $\bar{\delta}$, т.е. усредненных смещений границы полуплоскости от фактического распределения давлений за вычетом смещения от номинального давления, в задаче о внедрении синусоидальной волнистой поверхности было впервые выполнено Кузнецовым [36]. Им было получено следующее соотношение:

$$\bar{\delta} = \frac{\Delta \bar{p}}{p^*} \left(1 - \ln \frac{\bar{p}}{p^*} \right), \quad (1.21)$$

С использованием теории Герца [37] и решения задачи о нагружении плоской трещины нормальным давлением [38] Джонсоном [39] были получены асимптотические выражения для описания зависимости между средним давлением и полушириной участка контакта для случаев существенно низких и высоких нагрузок. Дальнейшее развитие подхода, основанного на механике разрушения, позволило авторам [40] получить точное решение задач о контакте синусоидального штампа и полуплоскости в условиях отсутствия трения и частичного проскальзывания при одинаковых упругих постоянных материалов контактирующих тел.

В работе [33] предложен общий метод решения плоских периодических задач теории упругости, использующий аппарат функций действительного переменного, путем сведения интегрального уравнения периодической контактной задачи [12]

$$\frac{E^*}{2} g'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a p(\xi) \operatorname{ctg} \frac{x-\xi}{2} d\xi, \quad (1.22)$$

где $g'(x)$ - производная функции начального зазора, к уравнению, соответствующему задаче с единичной областью контакта:

$$E^* g'(v) = \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{p(u)}{v-u} du, \quad (1.23)$$

где $u = \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}$; $v = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; $\alpha = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$. На основе указанного метода в [41] была решена задача о внедрении в упругую полуплоскость волнистой поверхности с параметрически изменяемой формой выступов и впадин.

С использованием разложения функции начального зазора по многочленам Чебышева и приведения периодической контактной задачи к задаче с единичной областью контакта были получены точное [42] и

асимптотические [43] решения для двухуровневой волнистой поверхности, внедряющейся в упругое полупространство. В этих работах, в частности, показано, что наличие дополнительной к основной гармонике синусоидальной волнистости малой амплитуды и высокой частоты приводит к осциллирующему характеру не только контактного давления, но и интегральных контактных характеристик (в частности, зависимости размера области фактического контакта от номинального давления).

В более общем случае, когда производная функции зазора между контактирующими поверхностями описывается рядом Фурье:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \sin \frac{2\pi n x}{\lambda} + B_n \cos \frac{2\pi n x}{\lambda} \right), \quad (1.24)$$

контактные давления будут определяться суммой номинального давления \bar{p} и выражения, являющегося обратным преобразованием Гильберта функции (1.24):

$$p(x) = \bar{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n x}{\lambda} + B_n \sin \frac{2\pi n x}{\lambda} \right). \quad (1.25)$$

При полном контакте между поверхностями контактные давления непосредственно определяются формой зазора между ними. Процедуру их нахождения удобно выполнить с использованием быстрого преобразования Фурье [44]:

$$p(x) = \pi E^* F^{-1} [nF[h](n)]. \quad (1.26)$$

В случае неполного контакта коэффициенты ряда Фурье A_n и B_n в формуле (1.25) должны определяться исходя из граничных условий и условия неотрицательности давления внутри областей контакта. В работе [45] вместо наложения дополнительных граничных условий использован вариационный принцип [46], основанный на минимизации полной дополнительной энергии. Проведенные в работе [45] вычисления для синусоидальной волнистости показали, что в сравнении с точным решением

наилучшая сходимость метода достигается при высоких нагрузках; при малых нагрузках наблюдалось значительное расхождение результатов.

В работах Мэннерса [47, 48] развит другой подход, основанный на использовании комплексных потенциалов для определения сингулярной части решения и поиске коэффициентов ряда Фурье для определения границ областей контакта. При определении границ областей контакта использовалось условие, что в зонах отсутствия контакта есть хотя бы одна точка, в которой производная функции начального зазора равна нулю. Данный метод показал высокую точность для всего диапазона приложенных нагрузок при численном определении коэффициентов A_n и B_n на основе решения системы алгебраических уравнений.

В условиях частичного проскальзывания к периодическому штампу (совокупности штампов) приложены нормальная и касательная нагрузки, при этом программа нагружения существенно влияет на поведение контактных характеристик. Как и в задачах с единичной областью контакта [23, 49], в периодических задачах с частичным проскальзыванием область контакта разделяется на подобласти сцепления и проскальзывания. В подобласти сцепления выполняется условие равенства тангенциальных перемещения точек взаимодействующих поверхностей, а в подобласти проскальзывания выполняется закон трения Кулона-Амонтона:

$$q(x) = -\mu p(x) \quad (1.27)$$

Здесь μ - коэффициент трения.

Общая постановка и метод решения различных контактных задач, в том числе периодических, с учетом сцепления и проскальзывания путем сведения к векторной задаче Римана предложены в работе Антипова и Арутюняна [50]. В этой и в других более ранних исследованиях показано, что математическая постановка задач с учетом сил трения в области контактного взаимодействия сводится к исследованию связанной системы интегральных уравнений для определения нормальных и касательных

контактных напряжений, при этом в частном случае одинаковых упругих постоянных контактирующих материалов система становится несвязанной.

В [51, 52], применив теорию Каттанео и Миндлина [53, 54] и аналогию с задачей для единичной области контакта, получил зависимости касательных напряжений и длины области проскальзывания от приложенных нормальных и касательных усилий для синусоидальной волнистости и поверхности, описываемой функцией квадрата косинуса, в случае взаимодействия материалов, имеющих одинаковые упругие постоянные.

Позднее в работе [33] развит общий подход к решению задачи о частичном проскальзывании тел из одинаковых материалов, форма поверхности которых описывается периодическими функциями, и получено выражение для определения размеров областей сцепления и проскальзывания для периодической системы штампов, форма контактирующей поверхности которых описывается степенной функцией.

Распределение внутренних напряжений с учетом зон сцепления и проскальзывания при внедрении синусоидального штампа определено в работе [55] с применением потенциала Колосова–Мусхелишвили.

В [56] получено аналитическое решение задачи о контакте с упругой полуплоскостью упругого тела с заданной периодической системой канавок при одинаковых упругих постоянных взаимодействующих тел. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению с ядром Гильберта. Получены выражения для определения распределения нормальных и касательных усилий в зонах сцепления и проскальзывания. Установлено, что частичное проскальзывание может происходить только внутри канавок, где с ростом приложенного давления происходит увеличение зоны контакта. Если зона сцепления достигает границы канавки, контактирующие тела переходят к скольжению.

Для материалов, имеющих различные упругие постоянные, система уравнений для определения контактных напряжений является связанной. Антиповым [57] при помощи метода Винера-Хопфа была решена задача о

взаимодействии с упругой полуплоскостью периодической системы жестких штампов с плоским основанием при наличии зон сцепления и проскальзывания.

В работе [33] с целью получения аналитического решения задачи о частичном проскальзывании контактирующих тел с различными упругими постоянными применена аппроксимация, предложенная в [58], предполагающая, что влияние касательных усилий на нормальные давления пренебрежимо мало. На основе этого предположения были рассмотрены задачи как с полным сцеплением по всей площадке контакта, так и с частичным проскальзыванием для периодической системы штампов с плоским основанием и с синусоидальной волнистой поверхностью.

Периодическая задача при полном скольжении поверхностей предполагает учет при определении распределения контактных давлений, действующих в области контактного взаимодействия касательных напряжений, удовлетворяющих соотношению (3.17).

Кузнецов [59] впервые получил точное решение плоской периодической задачи фрикционного скользящего контакта жесткого волнистого индентора и упругой полуплоскости, используя формулы Колосова – Мусхелишвили и теорию автоморфных функций. Для синусоидального индентора с поверхностным профилем:

$$f(x) = \frac{\lambda^2}{2R\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(x - \gamma)\right), \quad (1.28)$$

где R – радиус кривизны вершины профиля; γ – расстояние между центром площадки контакта и осью симметрии выступа, выражение для определения контактного давления имеет вид:

$$p(x) = \frac{4G\lambda \cos \pi\alpha}{\pi R(\chi + 1)} \cos\left(\pi(x + 2\alpha a - 2\gamma)/\lambda\right) \times \\ \times \sin^{\frac{1}{2}-\alpha}\left(\pi(a+x)/\lambda\right) \sin^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(\pi(a-x)/\lambda\right), \quad (1.29)$$

где G – модуль сдвига; α – параметр, который зависит от упругих свойств материала полуплоскости и коэффициента трения: $\operatorname{tg}\pi\alpha = \mu \frac{\chi - 1}{\chi + 1}$; $0 \leq \alpha < 0.5$;

$$\chi = 3 - 4\nu.$$

Полуширина области контакта и ее смещение определяются из системы трансцендентных уравнений, которая получается из условия, что контактное давление падает до нуля на границах участков контакта. Совокупное влияние коэффициента трения μ и плотности контакта α/λ на распределение контактного давления, а также на размер и положение контактных областей было проанализировано Кузнецовым и Гороховским [60]. На основе приближенного решения этой задачи [61] и в предположении, что $\gamma = \alpha = 0$, напряженно-деформированное состояние поверхностных слоев контактирующих тел исследовалось при различных значениях коэффициента трения и ширины области контакта [62].

Аналогичные задачи о скольжении по упругой полуплоскости синусоидального штампа и периодической системы штампов с плоским основанием рассмотрены в работе [33]. Задачи были решены сведением основного уравнения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с ядром Коши. Для синусоидального штампа было получено следующее выражение для определения контактного давления при периоде волнистости $\lambda = 2\pi$:

$$p(x) = \frac{\Delta E^* \cos(a/2) \cos(x/2)}{\sin \pi m} \sin\left(l + \gamma - \frac{x}{2}\right) \left(\operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^m \left(\operatorname{tg} \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{1-m}, \quad (1.30)$$

где эксцентриситет зоны контакта γ определяется выражением:

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos l}{\sin l - \psi^2 \sqrt{1 + \psi^2 m(1-m)}} \right). \quad (1.31)$$

В формулах (1.30) и (1.31) $\operatorname{tg} \pi m = 1/\beta\mu$; $l = (\pi m - \phi(2m - 1))$; $\operatorname{tg} \phi = 1/\psi$.

Для периодической системы штампов с плоским основанием (a - полуширина подошвы штампа) зависимость для определения распределения контактного давления получена в виде [33]:

$$p(x) = \frac{P \sin \pi m \left(\operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{m-1} \left(\operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{-m}}{2\pi \cos \frac{a}{2} \sin(\pi m - \varphi(2m - 1))}. \quad (1.32)$$

Скольжение волнистого штампа по упругой полуплоскости, при наличии анизотропии материалов контактирующих тел исследовано в работе [63]. Задача была сведена к интегральному уравнению с ядром Гильберта, а решение получено в виде рядов многочленов Якоби. Полученные результаты показали, что для ортотропных материалов размер зазора зависит от ориентации оси ортотропии. Для некоторых ориентаций этой оси зазоры увеличиваются с увеличением коэффициента трения μ . Данный результат отличается от поведения изотропных материалов, для которых увеличение коэффициента трения всегда приводит к уменьшению зазоров.

В [64] исследовано установившееся скольжение упругих тел, ограниченных волнистыми поверхностями, в рамках динамической контактной задачи. Решение основано на выводе интегрального уравнения с ядром Коши второго рода с помощью интегральных преобразований и рядов Фурье. Полученное уравнение решено численно с использованием многочленов Якоби. Для установившегося режима скольжения при заданных значениях коэффициента трения, свойств материалов контактирующих тел и скорости скольжения определена зависимость ширины области контакта от приложенных номинальных давлений и касательных усилий. Результаты указывают на уменьшение минимального усилия, необходимого для устранения зазора между контактирующими телами, с увеличением коэффициента трения и/или скорости скольжения. Резонанс возникает, когда скорость скольжения приближается к скорости распространения волны Рэлея в полуплоскости.

Скольжение системы параболических штампов с учетом трения и износа рассмотрено в работе Солдатенкова [65]. Задача сведена к каноническому сингулярному интегральному уравнению на дуге окружности в комплексной плоскости. Получены асимптотические выражения для определения полуширины участка контакта и смещения ее центра в случае, когда размер области контакта мал по сравнению с расстоянием между штампами.

Пространственные периодические контактные задачи представляют значительный интерес вследствие того, что большинство шероховатых поверхностей, встречающихся в природе и технических приложениях, являются изотропными, т.е. высотные и шаговые параметры профилей шероховатости в продольном и поперечном направлениях сравнимы по величине. Кроме того, пространственные периодические контактные задачи возникают при наличии на контактирующих поверхностях особой текстуры, как правило, образованной физическими и химическими методами обработки, например лазером или обработкой давлением.

С точки зрения теории упругости пространственная периодическая контактная задача значительно сложнее плоской в силу отсутствия прямой резольвенты основного интегрального уравнения, в котором левая часть выражается бесконечным рядом, не суммируемым в замкнутой форме. На практике условие $N \rightarrow \infty$ в (1.1) заменяют конечной суммой и решение уравнений (1.1-1.3) для произвольной области контакта выполняют с помощью итерационных процедур или метода граничных элементов.

При полном контакте между телами задача становится линейной и значительно упрощается. Пространственный аналог указанной ранее плоской задачи для поверхности, имеющей синусоидальную волнистость в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, рассматривался Джонсоном и др. [45]. На основе принципа суперпозиции в работе показано, что для регулярного рельефа, описываемого функцией:

$$f(x, y) = \Delta(1 - \cos(2\pi x / \lambda)\cos(2\pi y / \lambda)), \quad (1.33)$$

контактное давление при полном контакте определяется выражением:

$$p(x, y) = \bar{p} + \frac{\sqrt{2\pi}E^*\Delta}{\lambda}\cos(2\pi x / \lambda)\cos(2\pi y / \lambda), \quad (1.34)$$

Для случая неполного контакта в данной работе получены два асимптотических решения, которые устанавливают соотношения для основных интегральных характеристик контакта – приложенного номинального давления, площади фактического контакта и среднего зазора между поверхностями, для случаев очень низких и очень высоких номинальных давлений. В первом случае асимптотическое решение получено на основе применения теории Герца и аппроксимации функции (1.33) параболой у вершины. Во втором случае малый зазор между поверхностями моделировался круговой трещиной, что позволило определить интегральные характеристики при почти полном контакте. В промежутке между указанными асимптотическими результатами решение строилось численно на основе поиска коэффициентов рядов Фурье при минимизации полной дополнительной энергии (аналогично случаю плоской задачи для синусоидальной волнистости).

Случай полного контакта волнистой поверхности и полупространства при условии их сцепления рассмотрен в работе [66]. Из полученного решения следует, что с увеличением коэффициента Пуассона величина номинального давления, необходимого для достижения полного контакта, возрастает.

С использованием метода конечных элементов в работе [67] получены соотношения для интегральных контактных характеристик, близкие к результатам Джонсона и др. [45]; кроме того, были предложены выражения, аппроксимирующие зависимости площади фактического контакта и среднего зазора между волнистой поверхностью и полупространством для всего диапазона приложенных номинальных давлений.

Результаты исследований [45], посвященных контактной задаче для волнистой поверхности (1.33), были уточнены в [68] с использованием метода граничных элементов и быстрого преобразования Фурье. В частности, установлено наличие точек перегиба зависимости фактической площади контакта от номинального давления. Первая точка соответствует преобразованию формы области контакта от круга к фигуре, близкой к квадрату со скругленными углами. Вторая – слиянию соседних областей контакта.

В работе [69] на основе разложения функции (1.33) в двойной ряд Фурье в полярных координатах уточнены асимптотические зависимости, полученные в [45]. Для случая низких значений нагрузок решена задача о внедрении единичного штампа, вершина которого описывается функцией (1.33), а для случая высоких значений – задача о круговой трещине под действием неосисимметричного давления. Полученные зависимости фактической площади контакта и среднего зазора от номинального давления хорошо соотносятся с результатами численного моделирования [67, 68].

Периодическая контактная задача для системы осесимметричных гладких инденторов, форма контактирующей поверхности которых описывается функцией $f(r)$, взаимодействующей без сил трения с упругим полупространством, рассмотрена в [70].

Ее решение построено с использованием соотношений, полученных Галиным [23] для распределения давления под штампом при действии на границе полупространства вне штампа заданной распределенной пригрузки. В результате для определения контактного давления $p(r, \theta)$ под каждым штампом получено интегральное уравнение Фредгольма, ядро $K(r, \theta, r', \theta')$ которого представлено бесконечным сходящимся рядом:

$$p(r, \theta) - \iint K(r, \theta, r', \theta') p(r', \theta') r' dr' d\theta' = G(r), \quad (1.35)$$

а функция $G(r)$ зависит от формы $f(r)$ контактирующей поверхности отдельного индентора и определяется соотношением:

$$G(r) = \frac{E^*}{4\pi^2} \int_0^a \Delta f(r') H_1(r, r') dr' , \quad (1.36)$$

где

$$H_1(r, r') = \int_0^{2\pi} \frac{2r'}{R(r, r', \theta')} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - r^2} \sqrt{a^2 - r'^2}}{aR(r, r', \theta')} d\theta' , \quad (1.37)$$

$$R(r, r', \theta') = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta' + r'^2}$$

a – радиус единичного пятна контакта.

В [21] показано, что решение интегрального уравнения (1.35) может быть с высокой степенью точности приближено решением следующего уравнения:

$$p(r, \theta) - \iint \sum_{i=1}^n K_i(r, \theta, r', \theta') p(r', \theta') r' dr' d\theta' = G(r) + \bar{N} P Q(r, A_n) \quad (1.38)$$

где ядро есть конечная сумма первых членов ряда, которым представляется функция $K(r, \theta, r', \theta')$ в (1.35), а дополнительная функция, входящая в правую часть уравнения, получена путем интегрирования остаточного члена этого ряда. Эта функция представляет собой произведение следующих сомножителей: \bar{N} - среднее количество пятен контакта на единице площади, P - нагрузка, действующая на каждое пятно контакта и функции $Q(r, A_n)$, определяемой соотношением:

$$Q(r, A_n) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{A_n^2 - a^2}} . \quad (1.39)$$

В соотношении (1.39): A_n - радиус круга, в котором расположены все инденторы, влияние которых учтено ядром интегрального оператора в уравнении (1.38). В [21, 70] показано, что за счет выбора этого радиуса решение уравнения (1.38) можно с любой степенью точности приблизить к

решению исходного уравнения (1.35). Доказанное утверждение позволило предложить приближенный подход к решению периодических контактных задач с дискретной областью взаимодействия – метод локализации. Суть его состоит в том, что в контактных задачах с дискретной областью взаимодействия с определенной степенью точности влияние фактических давлений на удаленных от рассматриваемого пятна контакта может быть учтено путем рассмотрения в этой области номинального давления $\bar{p} = P\bar{N}$.

Результаты расчетов, представленные в [21], показывают, что даже при предельно плотном расположении сферических инденторов радиуса R ($a/l = 0.5$, где l – расстояние между вершинами инденторов, расположенных в узлах гексагональной решетки), погрешность в определении давления из уравнения (1.38) при $n = 0$ не превышает 20 %, а распределения давления, рассчитанные при $n = 1$ и $n = 2$, различаются менее чем на 0,1 %. При уменьшении параметра a/l эта оценка улучшается. Следует отметить, что при $n = 0$ для определения давления под каждым штампом, контактирующая поверхность которого описывается функцией $f(r)$, имеем более простую формулу:

$$p(r) = \frac{E^*}{4\pi^2} \int_0^a \Delta f(r') H_1(r, r') dr' + \frac{2}{\pi} \bar{N} P \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{A_n^2 - a^2}} \right), \quad (1.40)$$

в которой ядро интегрального оператора определено выражением (1.37).

Подход, основанный на методе локализации, был использован в [10] и [70] для расчета контактных давлений и внутренних напряжений при внедрении периодической системы равновысоких инденторов сферической формы в упругое однородное и двухслойное упругое полупространство, а также в [70] и [71] для расчета внедрения в упругое (однородное и двухслойное) полупространство периодической системы разноуровневых инденторов (расположенных на двух и трех различных высотных уровнях). Расчеты показали существенное влияние высотного распределения

инденторов и их плотности на контактные характеристики и величину номинального давления, необходимого для вступления в контакт инденторов следующего высотного уровня.

Исследование напряженного состояния внутри упругого полупространства при его взаимодействии с периодической системой одноуровневых сферических инденторов [21, 70] показало, что увеличение напряжений имеет место в приповерхностном слое на глубине, соизмеримой с половиной периода, причем характер этого распределения существенно зависит от параметра a/l , характеризующего плотность контакта. Возрастание плотности контакта приводит к возникновению на некоторой глубине под поверхностью полупространства концентрации напряжений, которая может привести к развитию пластических деформаций и зарождению микротрещин. Полученные результаты качественно совпадают с исследованием контактного взаимодействия синусоидального штампа с упругой полуплоскостью.

В работе [72] рассмотрена модель, в которой действие остальных неровностей кроме рассматриваемой (центральной) заменяется равномерной нагрузкой для упругопластического полупространства.

В работе [73] показано, что метод локализации применим также для решения плоской периодической контактной задачи. Сравнение расчетов контактного давления по приближенной формуле, полученной на основе метода локализации, с известными точными решениями периодических задач для синусоидального [34] и пилообразного [33] штампов, а также для периодической системы параболических штампов, проведенное в [73] показало, что контактные характеристики определяются с применением метода локализации с высокой степенью точности даже при достаточно высокой плотности контакта ($2a/l \approx 0.7$). Установлено, что увеличение плотности контакта приводит к росту максимальных контактных давлений и уменьшению размера единичного пятна контакта.

Преимущество применения метода локализации при решении задач дискретного контакта связано с его относительной простотой и возможностью провести расчетные оценки влияния плотности контакта и формы штампа (отдельной неровности) на характеристики контактного взаимодействия (размер области контакта, распределение контактных давлений и т.д.) при разных параметрах микрогеометрии контактирующих поверхностей.

В работе Золотова и Пожарского [74] рассмотрен метод решения пространственных периодических контактных задач для упругого слоя с неизвестной областью контакта, основанный на сведении к интегральным уравнениям, ядра которых не содержат квадратур и численного метода нелинейных интегральных уравнений Галанова, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления.

1.4 Контактные задачи с учетом взаимодействия поверхностей в межконтактном зазоре.

Наличие среды в зазоре между контактирующими поверхностями (жидкость, газ) существенно изменяет поведение контактных характеристик с ростом приложенного номинального давления. Исследование влияния сжимаемой жидкости, заполняющей объем между синусоидальной волнистой поверхностью и упругой полуплоскостью, на контактные характеристики проведено Кузнецовым с помощью комплексных потенциалов и аппарата автоморфных функций [75]. Было показано, что наличие жидкой среды в зазоре между волнистой поверхностью и полуплоскостью резко уменьшает размер области контакта, при этом чем ниже сжимаемость жидкости, тем меньше ширина участка контакта.

В дальнейшем направление, связанное с решением плоских периодических контактных задач при наличии в зазоре промежуточной среды (жидкости и/или газа), было развито в работах Мартыняка с

соавторами. Для решения задач данного типа был развит метод межконтактных зазоров [76].

В работе [77] исследована задача контакта двух упругих изотропных полуплоскостей из различных материалов, граница одной из которых имеет периодическую систему канавок. Межконтактные зазоры заполнены газом, состояние которого описывается уравнением Ван-дер-Ваальса. Поставленная задача сведена к системе трех уравнений: сингулярного интегрального уравнения для высоты зазора и двух трансцендентных уравнений для ширины зазора и давления газа. Выявлены резкие изменения зависимостей ширины и объема зазоров, сближения и податливости контакта от внешней нагрузки в начале и в конце фазового перехода газ - жидкость.

Рассмотрена [78] задача контакта жесткого тела с волнистой поверхностью и упругой полуплоскости при наличии в зазоре между контактирующими телами газа и несжимаемой жидкости, не смачивающей поверхности тел. Падение давления в жидкости и в газе описывается уравнением Лапласа. С использованием метода комплексных потенциалов [11] контактная задача сведена к интегральному уравнению с ядром Гильберта для высоты зазоров и системе двух трансцендентных уравнений для расчета ширины зазоров и областей, заполненных жидкостью. Установлено, что сближение поверхностей уменьшается с увеличением поверхностного натяжения жидкости. Уменьшение объема жидкости приводит к уменьшению ширины области, заполненной жидкостью.

В работе Шварца и Ястребова [79] рассмотрена связанная задача течения жидкости в зазоре между упругими телами с волнистыми поверхностями под давлением. Давление жидкости принималось сопоставимым с контактным давлением. Получено приближенное аналитическое и численное (методом конечных элементов) решение задачи. Показано, что внешнее давление, необходимое для герметизации стыка, не зависит от давления на выходе.

Наличие межмолекулярного (адгезионного) взаимодействия поверхностей изменяет характер напряженно-деформированного состояния контактирующих тел и влияет на их контактные характеристики – площадь фактического контакта, сближение поверхностей под нагрузкой и т.д. При дискретном характере взаимодействия поверхностей области действия межмолекулярных сил тоже дискретны. Наибольшее количество работ в данной области посвящены плоской периодической контактной задаче, при этом рассматривается адгезионное взаимодействие сухих поверхностей, описываемое упрощенными моделями: ДКР (Джонсон–Кендалл–Робертс) [80] или Можи–Дагдейла (МД) [81]. В модели ДКР предполагается, что межмолекулярные силы действуют внутри области контакта, вызывая постоянное отрицательное перемещение, а распределение давлений складывается из решения задачи для ограниченной области контакта (положительное давление, вызываемое сжатием) и сингулярного решения, обеспечивающего равномерное смещение по области контакта (отрицательное давление, вызванное растяжением).

В модели МД предполагается, что вне области контакта (в зазоре) действует постоянное отрицательное давление, являющееся аппроксимацией потенциала Леннарда-Джонса, описывающего действие межмолекулярных сил. Как правило, модель ДКР используют для материалов с малым модулем упругости, а модель МД подходит как для мягких материалов, так и для более жестких. Применимость модели оценивают с помощью параметра Тэйбора [82]:

$$\mu_T = \left(\frac{Rw^2}{E^{*2} z_0^3} \right)^{1/3}, \quad (1.41)$$

где R – приведенный радиус кривизн контактирующих тел в точке их первоначального контакта, w – работа межмолекулярных сил; z_0 – равновесное расстояние между поверхностями, при котором сила адгезии равна нулю, E^* – приведенный модуль упругости контактирующих

материалов. При $\mu_T \ll 1$ модель МД переходит в модель ДМТ (Дерягин-Муллер-Топоров) [83], в которой учитываются растягивающие напряжения, вызванные адгезионными силами, вне области контакта, в предположении, что они не влияют на распределение напряжений внутри области контакта. При $\mu_T \gg 1$ модель МД переходит в модель ДКР.

Джонсоном [84] рассмотрена плоская периодическая контактная задача с учетом адгезионных сил, рассматриваемых в рамках модели ДКР. В соответствии с моделью ДКР, контактное давление складывалось из положительного сжимаемого $p_1(x)$, определяемого решением Вестергаарда (3.4), и отрицательного $p_2(x)$, вычисляемого согласно решению Койтера [85] для периодической системы трещин:

$$p_2(x) = -\bar{p}_2 \left(1 - \left(\frac{\cos \pi a / \lambda}{\cos \pi x / \lambda} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (1.42)$$

где \bar{p}_2 - среднее значение отрицательной компоненты давления; λ – период. С использованием коэффициента интенсивности напряжений на границе области контакта была определена скорость высвобождения энергии упругой деформации и получено следующее соотношение между номинальным давлением \bar{p} и полушириной области контакта a :

$$\bar{p} = \frac{\pi E^* \Delta}{\lambda} \sin^2 \frac{\pi a}{\lambda} - \sqrt{\frac{2E^* w}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{\lambda}}, \quad (1.43)$$

Также в работе Джонсона [84] получено асимптотическое решение пространственной задачи при наличии адгезии и условия почти полного контакта для волнистой поверхности (1.44). Для случаев плоской и пространственной задачи рассмотрены условия отрыва поверхностей.

Зильберманом и Перссоном [86] получено уточненное решение задачи контакта синусоидальной волнистой поверхности и упругой полуплоскости с учетом адгезии в рамках ДКР модели, в котором учитывались зависимости упругой энергии и энергии адгезии от формы

деформированной поверхности полуплоскости. Показано хорошее совпадение аналитических и численных результатов, полученных методом молекулярной динамики.

В работе [87] исследован упругий контакт волнистой поверхности и полуплоскости с учетом адгезии, описываемой МД моделью. Задача решена численно-аналитическим способом с применением квадратур для вычисления сингулярных интегралов с ядром Коши. Показано, что зависимость размера области контакта от номинального давления характеризуется разрывами и гистерезисом. Установлено, что при нулевой нагрузке существует такая область контакта заданного размера, при которой с повышением номинального давления может происходить скачок в режим полного контакта.

Сравнение результатов, полученных для плоской задачи об адгезионном контакте жесткого тела с синусоидальной волнистой поверхностью и упругой полуплоскости, полученных с использованием ДКР и МД моделей адгезии, приведены в работе [88]. В отличие от [87] в работе [88] при построении решения по МД модели применялось условие равенства коэффициентов интенсивности сжимающих и растягивающих напряжений на границе области контакта. Показано, что когда размер области контакта приближается к периоду волнистой поверхности, модель ДКР неприменима, и для количественной оценки поверхностных сил, действующих вне зоны контакта, следует использовать МД модель.

В работе [89] предложена асимптотическая модель адгезионного контакта волнистой поверхности и полуплоскости, предполагающая, что растягивающие усилия в зоне адгезии можно представить в виде разности решений Вестергаарда (3.1.4) для зоны адгезии и зоны контакта. Получены аналитические выражения для определения контактных характеристик, которые показали хорошее соответствие с расчётами по МД модели адгезионного контакта [88].

Проанализировано [90] адгезионное взаимодействие периодической системы сферических штампов с упругим полупространством. Рассмотрены случаи как молекулярной, так и капиллярной адгезии. Задача решена с помощью метода локализации (см. п. 3.5). Проанализированы распределение контактного давления, деформированная форма упругого полупространства, размер областей контакта и другие характеристики в зависимости от формы штампов, расстояния между ними, величины поверхностной энергии (случай молекулярной адгезии) или толщины пленки жидкости, покрывающей полупространство (случай капиллярной адгезии). Показано, что форма штампов оказывает существенное влияние только на распределение контактных давлений; поведение других контактных характеристик существенно зависит от плотности пятен фактического контакта и свойств поверхности или покрывающих ее тонких пленок.

1.5 Моделирование влияния параметров рельефа характеристики контактного взаимодействия на макроуровне

При контактном взаимодействии деформируемых тел, обладающих поверхностным рельефом, существует два масштаба длины, один из которых связан с характерным размером L номинальной области контакта Ω , а второй – с характерным размером неровности и расстояния между ними l . Соотношение между этими характеристиками может меняться в процессе контактного взаимодействия. Так, при незначительных нагрузках возможна ситуация, когда величины L и l соизмеримы и в контакте находится конечное число выступов. Тогда для определения контактных характеристик может быть применен метод, изложенный в п. 1.2.

В том случае, когда радиус номинальной области контакта значительно превосходит характерный размер единичного пятна контакта, расчет контактных характеристик производится на двух масштабных уровнях. С этой целью вводится понятие податливости шероховатого слоя [12] или функции $C[p(x, y)]$ дополнительного смещения [21], которая зависит от

параметров микрогеометрии поверхности. Эта функция входит в интегральное уравнение для определения номинальных (осредненных) контактных давлений $p(x, y)$ и номинальной области контакта Ω на макроуровне, которое при заданной макроформе $F(x, y)$ штампа, внедряемого в упругое полупространство на величину δ , имеет вид:

$$C[p(x, y)] + \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p(x, y) dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} = \delta - F(x, y). \quad (1.44)$$

Штаерман [12] предложил определять функцию $C[p(x, y)]$ экспериментально, а для решения контактной задачи в плоской постановке использовал ее линейную аппроксимацию.

Для некоторых типов поверхностей с регулярным рельефом функция дополнительного смещения может быть определена аналитически или в виде аппроксимации численных результатов решения соответствующих контактных задач на микроуровне.

Подход к определению функции дополнительного смещения $C[p(x, y)]$, разработанный в [21, 91, 92], основан на моделировании контактного взаимодействия с упругим полупространством шероховатого номинально плоского тела с заданным регулярным периодическим рельефом поверхности, при этом рассчитываемая функция дополнительного смещения зависит от формы и пространственного расположения неровностей и учитывает взаимное влияние пятен контакта. Для ее определения используются решения периодических контактных задач в плоской и пространственной постановках [93]. На основе анализа решений периодических контактных задач в плоской и пространственной постановках показано [93], что функция дополнительной податливости может быть приближена степенной функцией с достаточной степенью точности только при малых номинальных давлениях и не пригодна для описания перехода от дискретного к полному контакту на микроуровне.

После определения функции $C[p(x, y)]$ номинальные характеристики контактного взаимодействия на макроуровне определяются на основании решения интегрального уравнения (5.1). Методы его решения при различных видах функции $C[p(x, y)]$ и для наиболее часто встречающихся в контактных задачах ядер $K(x, y, x', y')$ интегральных операторов разработаны в [12, 94, 95].

В [21, 92, 96] на основании решения контактной задачи для цилиндрического и сферического штампов на макроуровне с учетом функции дополнительного смещения, рассчитанной из решения контактной задачи на микроуровне для системы штампов, моделирующей микрогеометрию поверхности, проведен анализ влияния микрогеометрии как на номинальные (осредненные) характеристики взаимодействия тел (номинальную область контакта, внедрение при заданной величине нагрузки), так и на фактическую область контактного взаимодействия, значения максимальных фактических давлений, зазор между поверхностями и т.д. В работах [97, 98] на основе решения задачи о взаимодействии с учетом сил молекулярного притяжения двух номинально плоских полупространств, одно из которых является упругим, а поверхность другого обладает регулярным рельефом, проведен анализ функции дополнительного смещения от приложенного номинального давления и эффективной удельной работы адгезии при различных параметрах адгезионного взаимодействия и микрогеометрии поверхности.

ГЛАВА 2. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С РЕГУЛЯРНЫМ РЕЛЬЕФОМ

2.1 Общая постановка задачи и решение для формы рельефа, описываемой четной функцией координаты

2.1.1 Постановка задачи

Рассматривается внедрение в упругую полуплоскость жесткого тела, имеющего периодический регулярный рельеф (рис. 2.1), профиль которого описывается четной функцией $f(x)$, для которой справедливо разложение в ряд Фурье вида:

$$f(x) = \Delta \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cos(2\pi n_i x / L) \quad (2.1)$$

где Δ и L – амплитуда и период гармоники с наименьшей угловой частотой, n_i и k_i частотный и амплитудный коэффициенты для i -ой гармоники. Следует отметить, что величины Δ , L и k_i имеют размерность длины (м - в системе СИ), а величина n_i - характеризует угловую частоту и имеет размерность обратно пропорциональную длине (рад·м⁻¹ – в системе СИ). Так как рассматриваемые задачи инвариантны к масштабу длины, то в качестве периода гармоники с наименьшей угловой частотой используется для простоты $L = 2\pi$.

Функция $f(x)$ должна быть непрерывной и обладать абсолютно интегрируемой производной, что является условием равномерной сходимости ряда (2.1) [99].

К жесткому телу приложено номинальное давление, $\bar{p} = P/L$, где P – значение нормальной погонной нагрузки на одном периоде L . Задача рассматривается в рамках линейной теории упругости для полубесконечных тел в плоской постановке. При этом считается, что в поперечном

направлении контактирующие тела имеют неограниченную длину (плоское деформированное состояние). Кроме того, принято, что для определения упругих перемещений полуплоскости от единичной сосредоточенной силы справедливо решение Фламана [39]. Для выполнения допущений о применимости линейной теории упругости и об односвязности области контакта внутри одного периода ($x \in [-a, a]$; $2a < L$) необходимо выполнение следующих условий: $\Delta \ll L$; $k_i \ll 2\pi/n_i$.

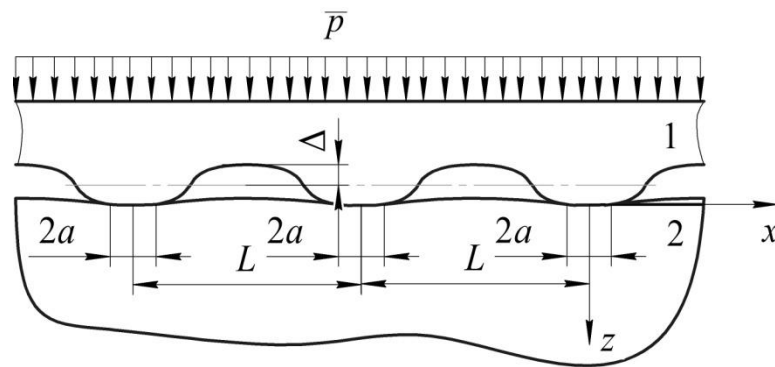


Рис. 2.1 – Схема взаимодействия тела с поверхностным регулярным рельефом и упругой полуплоскости: 1 – жесткое тело, ограниченное поверхностью с регулярным рельефом; 2 – упругая полуплоскость

Упругие перемещения полуплоскости вдоль оси z при действии распределенной нормальной нагрузки находятся согласно зависимости [12]:

$$u_z(x) = \frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^a p(\xi) \ln \left(2 \left| \sin \frac{\pi(x-\xi)}{L} \right| \right) d\xi + C. \quad (2.2)$$

где $p(x)$ – распределенная нормальная нагрузка (контактное давление); C – постоянная, зависящая от выбора точки начала отсчета смещений. Параметр E^* является приведенным модулем упругости (Па) полуплоскости и позволяет учесть упругость тела с регулярным рельефом [39]:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}. \quad (2.3)$$

где E и ν модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала соответственно; индексы «1» и «2» обозначают соответственно материалы тел 1 и 2 (см. рис. 2.1).

Интегральное уравнение периодической контактной задачи для одной зоны контакта на одном периоде имеет вид

$$\frac{E^*}{2} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{L} \int_{-a}^a p(\xi) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(x-\xi)}{L} \right) d\xi, \quad x \in [-a, a], \quad (2.4)$$

где $h(x) = \delta - f(x)$ - функция начального зазора между поверхностями, δ - величина сближения тел 1 и 2.

Выполняется условие контакта между телами:

$$h(x) = u_{z1}(x) - u_{z2}(x), \quad x \in [-a, a] \quad (2.5)$$

К выражениям (2.4) и (2.5) следует добавить уравнение равновесия:

$$\bar{p} = \frac{1}{L} \int_{-a}^a p(x) dx. \quad (2.6)$$

Решение уравнений (2.4) и (2.6) вместе с условием контакта (2.5) определяют основные искомые параметры - распределение контактных давлений $p(x)$ и зависимость длины зоны контакта $2a$ от номинального давления \bar{p} .

2.1.2 Общее решение для контактного давления в квадратурах

Для простоты примем, что период $L = 2\pi$.

Резольвента уравнения (2.4) для условия равенства нулю контактного давления на границах области контакта [100] имеет следующий вид

$$p(x) = \frac{E^*}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{\partial h}{\partial x} \sqrt{\frac{\cos a - \cos x}{\cos a - \cos \xi}} \operatorname{cosec} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) d\xi. \quad (2.7)$$

Интеграл в (2.7) является сингулярным и требует специальных методов интегрирования [101]. В условиях наличия быстро осциллирующих функций $f(x)$, которыми являются высокочастотные гармоники в выражении (2.1),

прямое вычисление интеграла в (2.7) может вызывать затруднение. В связи с этим воспользуемся подходом, позволяющим для симметричной функции зазора $h(x)$ представить выражение (2.7) в форме, не содержащей сингулярного интеграла [102, 103].

Для использования упомянутого подхода, воспользуемся следующей заменой переменных для преобразования интегрального уравнения (2.4) [104]:

$$u = \operatorname{tg}(\xi/2); \quad v = \operatorname{tg}(x/2); \quad \alpha = \operatorname{tg}(a/2). \quad (2.8)$$

$$\text{Тогда} \quad dv = \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)' dx = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) dx; \quad dx = \frac{2dv}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2}}; \quad d\xi = \frac{2du}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2}}, \quad \text{а}$$

уравнение (2.4) запишется в следующем виде:

$$E^* \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{tg}(a/2)}^{\operatorname{tg}(a/2)} p \left(\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}} \times 2 \frac{1}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2} \right)} du. \quad (2.9)$$

Таким образом, в преобразованных переменных получим

$$E^* h'_x(v) = \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(u) \frac{1 + vu}{(v - u)(1 + u^2)} du, \quad (2.10)$$

где $h(v)$ и $h'_x(v)$ – функция зазора, и ее производная по x в преобразованных переменных.

Добавим и отнимем u^2 в числителе правой части уравнения (2.10). Выполняя преобразования, получим:

$$E^* h'_x(v) = \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{p(u)}{(v - u)} du + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{up(u)}{1 + u^2} du. \quad (2.11)$$

Если функция зазора $h(x)$ четная, то функция контактного давления $p(u)$ тоже будет четной. При этом значение последнего интеграла в выражении (2.11) равно нулю. Следовательно, мы получаем в преобразованных переменных (2.8) интегральное уравнение с ядром Коши.

Резольвента этого уравнения для давления, обращаящегося в нуль на границах зоны контакта, имеет вид

$$p(v) = -\frac{E^*}{2\pi} \sqrt{\alpha^2 - v^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} h'_x(u) \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \frac{1}{u - v} du. \quad (2.12)$$

Далее, чтобы получить связь между полной нормальной нагрузкой P на одном периоде и полудлиной контактной зоны a используем уравнение равновесия в преобразованных переменных

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2p(v)}{1 + v^2} dv. \quad (2.13)$$

Используя изменение порядка интегрирования в уравнении (2.12), имеем

$$\begin{aligned} P &= \frac{E^*}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - v^2}}{1 + v^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'_x(u)}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \frac{1}{u - v} dudv = \\ &= \frac{E^*}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'_x(u)}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - v^2}}{1 + v^2} \frac{1}{v - u} dv du \end{aligned} \quad (2.14)$$

После вычисления второго интеграла в уравнении (2.14) получается следующее выражение для определения полной нагрузки на один период:

$$P = \frac{E^*}{2} \sqrt{1 + \alpha^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{uh'_x(u)}{\sqrt{\alpha^2 - u^2} (1 + u^2)} du. \quad (2.15)$$

Возвращаясь к исходным переменным и используя (2.6), имеем

$$\bar{p} = \frac{E^*}{4\pi} \frac{1}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)^{-a}} \int_{-a}^a \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2}\right)^2}} d\xi. \quad (2.16)$$

Пользуясь симметрией задачи, и зная выражение для определения полной нагрузки можно применить следующий метод для определения контактного давления.

Распределение контактных давлений в преобразованных переменных $p(v)$ можно определить, не вычисляя сингулярный интеграл в (2.12), с помощью интегрального преобразования Абеля функции $\partial P / \partial \alpha$ [103]:

$$p(v) = \frac{1}{\pi} \int_v^\alpha \frac{P'_s(\eta) d\eta}{\sqrt{1+\eta^2} \sqrt{\eta^2 - v^2}}, \quad (2.17)$$

где $\eta = \operatorname{tg}(s/2)$.

Возвращаясь к исходным переменным можно записать

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^a \frac{P'(s) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}} ds}{2 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{s}{2}\right) - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2}\right)}}, \quad x \in [0, a]. \quad (2.18)$$

Выполняя тригонометрические преобразования, окончательно получим

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \int_x^a \frac{P'(s) ds}{\sqrt{\cos x - \cos s}}, \quad x \in [0, a]. \quad (2.19)$$

Следует также отметить, что выражение (2.19) позволяет решать и обратную задачу нахождения требуемой формы рельефа по заданному контактному давлению, при этом получающееся интегральное уравнение относительно $P'(s)$ имеет простую резольвенту, не содержащую интеграла типа Коши [105]. Оценка точности при вычислении интеграла (2.19) может быть выполнена на основе соотношения [102]:

$$\int_{-a}^a \omega(x) |p(x)|^2 dx - \int_{-a}^a \omega(x) |h'(x)|^2 dx < \varepsilon, \quad \text{где } \omega(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{2\pi \sqrt{\cos x - \cos a}}, \quad \varepsilon - \text{ заданное}$$

положительное число.

2.1.3 Решение задачи для рельефа поверхности, форма которого описывается четным тригонометрическим многочленом

Рассмотрим следующую функцию формы рельефа, предполагая период $L = 2\pi$:

$$f(x) = \Delta \left(\sum_{i=1}^N k_i - \sum_{i=1}^N k_i \cos(n_i x) \right). \quad (2.20)$$

где Δ – амплитуда гармоники с наименьшей частотой, n_i и k_i частотный и амплитудный коэффициенты для i -ой гармоники ($n_i \in \mathbb{N}^*$); N – число гармоник.

Применяя допущение об односвязности области контакта на одном периоде, которое выполняется при $k_i \ll 2\pi/n_i$, вычисление контактного давления и полной нормальной нагрузки допускает принцип суперпозиции. Следовательно, допустимо определять данные характеристики для каждой гармоники по отдельности в виде:

$$p(x) = E^* \Delta \sum_{i=1}^N k_i p_i(x); \quad \bar{p} = E^* \Delta \sum_{i=1}^N k_i \bar{p}_i. \quad (2.21)$$

Вычисляя производную функции (2.20) и используя условие контакта (2.5), запишем выражение (2.16) для определения номинального давления в зависимости от полудлины области контакта для i -й гармоники в квадратурах:

$$\bar{p}_i = \frac{1}{2\pi} \frac{k_i n_i}{2 \cos\left(\frac{a}{2}\right)^{-a}} \int_{-a}^a \frac{\sin(n_i \xi) \operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2}\right)^2}} d\xi. \quad (2.22)$$

Преобразуем выражение (2.22) следующим образом

$$\bar{p}_i = \frac{1}{2\pi} \frac{k_i n_i}{\sqrt{2}} \int_0^a \frac{\cos\left(\left(n_i - \frac{1}{2}\right)\xi\right) - \cos\left(\left(n_i + \frac{1}{2}\right)\xi\right)}{\sqrt{\cos \xi - \cos a}} d\xi. \quad (2.23)$$

Интеграл в (2.23) является интегралом Мелера-Дирихле [106] и вычисляется с использованием многочленов Лежандра $P_n(x)$:

$$\bar{p}_i = \frac{k_i n_i}{4} \left(P_{n_i-1}(\cos a) - P_{n_i}(\cos a) \right). \quad (2.24)$$

Используя соотношение между многочленами Лежандра и Якоби [107] выражение (2.24) можно упростить:

$$\bar{p}_i = -\frac{k_i n_i}{2} P_{n_i}^{(-1,0)}(\cos a), \quad (2.25)$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ – многочлен Якоби.

Составляющая (i -я) полной нормальной нагрузки на один штамп равна $P_i = 2\pi \bar{p}_i$. Вычисляя производную многочленов Якоби и применяя выражение (2.19), получим интеграл для определения контактного давления для i -й составляющей тригонометрического многочлена (2.20):

$$p_i(x) = \frac{k_i n_i^2}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \int_x^a \frac{\sin s P_{n_i-1}^{(0,1)}(\cos s) ds}{\sqrt{\cos x - \cos s}}. \quad (2.26)$$

Для $N = 1$ и $n_1 = 1$; $k_1 = 1$, соответствующая функция формы профиля (см. (2.20)) является $f(x) = \Delta \cos(x)$. В таком случае принимая во внимание (2.21) выражение (2.26) примет вид

$$p(x) = \frac{E^* \Delta}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \int_x^a \frac{\sin s ds}{\sqrt{\cos x - \cos s}} = \frac{E^* \Delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{\cos x - \cos a}. \quad (2.27)$$

Формула (2.27) в точности совпадает с известным решением Вестергаарда, полученным с применением комплексной функции напряжений [34]. Интегральное выражение (2.26) обобщает данное решение на случай гармоник с произвольным n_i ($n_i \in \mathbb{N}^*$).

2.1.4 Определение дополнительного смещения поверхностей для рельефа с формой выступов, описываемой четной функцией

Интегрирование интегрального уравнения (2.4) дает

$$\frac{E^*}{2}(C - f(x)) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a p(\xi) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{x - \xi}{2} \right|} d\xi, \quad -a < x < a \quad (2.28)$$

где C – некоторая постоянная.

Воспользуемся следующими известными спектральными соотношениями для многочленов Чебышева [108, 109]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{x-\xi}{2} \right|} \frac{T_{2j} \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\sin(a/2)} \right) \cos \frac{\xi}{2}}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos a)}} d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2j} T_{2j} \left(\frac{\sin(x/2)}{\sin(a/2)} \right) & (j=1,2,\dots) \\ \ln \left(\frac{1}{\sin(a/2)} \right) & (j=0) \quad (-a < x < a) \end{cases}; \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-a}^a \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x-\xi}{4} \right| \frac{T_{2j+1} \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\sin(a/2)} \right) \cos \frac{\xi}{2}}{\sqrt{(\cos \xi - \cos a)}} d\xi = \frac{1}{2j+1} T_{2j+1} \left(\frac{\sin(x/2)}{\sin(a/2)} \right), \quad (2.30)$$

где $T_j(x)$ – многочлен Чебышева 1-го рода.

Продифференцировав обе части равенства (2.29), имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{T_{2j+1} \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\sin(a/2)} \right) \cos \frac{\xi}{2}}{\sqrt{\cos \xi - \cos a}} \operatorname{cosec} \frac{\xi-x}{2} d\xi = \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \operatorname{cosec} \frac{a}{2} U_{2j} \left(\frac{\sin(x/2)}{\sin(a/2)} \right), \quad (2.31)$$

где $U_j(x)$ – многочлен Чебышева 2-го рода.

Таким образом, представив производную функции начального зазора в виде ряда:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cos \frac{x}{2} T_{2j+1} \left(\frac{\sin(x/2)}{\sin(a/2)} \right), \quad (2.32)$$

где коэффициенты ряда определяются выражением

$$c_j = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{T_{2j+1} \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\sin(a/2)} \right) \frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi}}{\sqrt{\cos \xi - \cos a}} d\xi, \quad (2.33)$$

используя выражения (2.7) и (2.31) можно получить контактное давление в виде ряда по многочленам Чебышева второго рода:

$$p(x) = \frac{\sqrt{2}E^*}{4} \sqrt{\cos x - \cos a} \cos \frac{x}{2} \operatorname{cosec} \frac{a}{2} \sum_{i=0}^{\infty} c_i U_{2i} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right). \quad (2.34)$$

В практических расчетах необходимо взять конечное число ряда M в (2.34). Для этого можно оценить сходимость частичной суммы ряда, который является рядом Фурье по ортонормированной системе многочленов, с использованием неравенства Бесселя [99]:

$$\sum_{j=0}^{M-1} c_j^2 \leq \int_{-a}^a (p(x))^2 dx, \quad (2.35)$$

где $p(x)$ определяется вычислением интеграла по квадратурным формулам.

Абсолютная и равномерная сходимость ряда по многочленам Чебышева второго рода может быть оценена по критерию [99]: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|c_j|^2}{j+1} < \infty$.

Используя рекуррентные соотношения для многочленов Чебышева решение (2.34) можно записать в виде

$$p(x) = \frac{E^*}{2} \sin \frac{a}{2} \frac{\cos \frac{x}{2} \sum_{i=0}^{\infty} c_j \left(T_{2j} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right) - T_{2j+2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right) \right)}{\sqrt{2(\cos x - \cos a)}}. \quad (2.37)$$

Поставив выражение (2.37) в уравнение (2.28), и с использованием спектрального соотношения (2.29) получим при $-a < x < a$:

$$E^*(C - f(x)) = c_0 \sin \frac{a}{2} \ln \left(\frac{1}{\sin(a/2)} \right) - \sin \frac{a}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_j}{2j} T_{2j} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right) + \sin \frac{a}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_j}{2j+2} T_{2j+2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right). \quad (2.38)$$

С использованием выражений (2.16) и (2.33) можно заметить, что имеет место следующее соотношение

$$c_0 = \frac{4\bar{p}}{\sin(a/2)}. \quad (2.39)$$

Используя условие контакта (2.5) и следующее соотношение [45]

$$\bar{\delta} = \bar{u}_z - u_z(0), \quad (2.40)$$

где $\bar{\delta}$ - дополнительное смещение поверхностей за счет наличия неровностей рельефа, которое, в общем случае, определяется согласно [21]; \bar{u}_z - средние смещения контактирующих тел; т.е. смещения от номинального (среднего) давления на периоде; $u_z(0)$ – смещения контактирующих тел в начале координат, можно отметить, что

$$\bar{u}_z = \frac{4\bar{p}}{E^*} \ln \left(\frac{1}{\sin(a/2)} \right), \quad (2.41)$$

$$u_z(0) = -\frac{1}{E^*} \sin \frac{a}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j c_j}{2j} + \frac{1}{E^*} \sin \frac{a}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} c_j}{2j+2}. \quad (2.42)$$

С использованием (2.33) можно записать

$$u_z(0) = \frac{1}{E^*} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{a}{2} \int_{-a}^a \frac{\frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi}}{\sqrt{\cos \xi - \cos a}} \left(-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j} T_{2j+1} \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\sin(a/2)} \right) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2j+2} T_{2j+1} \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\sin(a/2)} \right) \right) d\xi. \quad (2.43)$$

Ряды в (2.43) суммируются аналитически и, выполнив алгебраические преобразования, можно значительно упростить (2.43):

$$u_z(0) = -\frac{2}{\pi E^*} \int_0^a \frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi} \arccos \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\sin(a/2)} \right) d\xi. \quad (2.44)$$

Таким образом, получим следующую общую формулу для определения дополнительного смещения $\bar{\delta}$

$$\bar{\delta} = \frac{2}{\pi E^*} \int_0^a \frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi} \arccos \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\sin(a/2)} \right) d\xi - \frac{4\bar{p}}{E^*} \ln \left(\sin \frac{a}{2} \right), \quad (2.45)$$

Средний зазор между поверхностями определяется следующим образом [45]:

$$\bar{h} = h_{0\max} - \bar{\delta}, \quad (2.46)$$

где $h_{0\max}$ – максимальный начальный зазор между поверхностями.

2.1.5 Определение дополнительного смещения поверхностей для рельефа, форма которого описывается четным тригонометрическим многочленом

Для формы поверхности, описываемой выражением (2.20), формулу (2.44) для i -й составляющей (гармоники) профиля рельефа можно записать как

$$u_{zi}(0) = -\frac{2}{\pi E^*} \int_0^a k_i n_i \sin n_i \xi \arccos \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\sin(a/2)} \right) d\xi. \quad (2.47)$$

Интегрируя по частям можно записать

$$u_{zi}(0) = -\frac{k_i}{E^*} + \frac{2}{\pi E^*} k_i \int_0^a \frac{\cos n_i \xi \cos(\xi/2)}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos a)}} d\xi. \quad (2.48)$$

С использованием тригонометрических тождеств выражение (2.48) представляется интегралом Мелера-Дирихле по аналогии с (2.23) и выражается через многочлены Лежандра:

$$u_{zi}(0) = -\frac{k_i}{E^*} + \frac{k_i}{2E^*} \left(P_{n_i-1}(\cos a) + P_{n_i}(\cos a) \right). \quad (2.49)$$

Используя соотношение между многочленами Лежандра и Якоби [107] выражение (2.49) можно упростить:

$$u_{zi}(0) = \frac{k_i}{E^*} \left(P_{n_i}^{(0,-1)}(\cos a) - 1 \right), \quad (2.50)$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ – многочлен Якоби.

Таким образом, с использованием (2.45), i -ю составляющую дополнительного смещения можно выразить как

$$\bar{\delta}_i = 2n_i P_{n_i}^{(-1,0)}(\cos a) \ln \left(\sin \frac{a}{2} \right) - P_{n_i}^{(0,-1)}(\cos a) - 1; \quad \bar{\delta} = \frac{\Delta}{E^*} \sum_{i=1}^N k_i \bar{\delta}_i. \quad (2.51)$$

При $N = 1$, $k_i = 1$, $n_i = 1$ в формуле (2.20) профиль рельефа представляет собой синусоиду. При данных параметрах, с использованием (2.20) и (2.25) выражение (2.51) становится равным

$$\bar{\delta} = \frac{\Delta}{E^*} \sin^2 \frac{a}{2} \left(1 - 2 \ln \left(\sin \frac{a}{2} \right) \right), \quad (2.52)$$

что в точности совпадает с выражением, найденным Е.А. Кузнецовым [59].

Таким образом, предложенные аналитические зависимости обобщают известные решения для рельефа в виде синусоидальной волнистости на случай профиля рельефа, описываемого произвольной четной гладкой функцией.

2.2 Построение асимптотических решений для рельефа с симметричной формой выступов и впадин

2.2.1 Построение асимптотического решения для случая малых и умеренных нагрузок

Если области контакта в периодической задаче расположены на некотором удалении друг от друга, что имеет место при небольших и умеренных нагрузках, то построение асимптотического решения возможно с применением метода локализации, разработанным И.Г. Горячевой для пространственных периодических контактных задач с круговой областью контакта [21].

Суть метода локализации состоит в том, что фактические давления на отдельно взятом пятне контакта с достаточной степенью точности определяются путем задания реальных условий контакта на рассматриваемом фиксированном пятне и близлежащих к нему, а влияние остальных пятен заменяется действием номинального (осредненного) по оставшейся части поверхности давления. При таком подходе учитывается искривление поверхности полупространства под произвольным фиксированным выступом от действия других выступов рельефа, которое приближенно заменяется распределенным номинальным давлением, действующим вне некоторой заданной области.

Решение задач, основанное на методе локализации, в наиболее простой постановке предполагает последовательное решение контактной задачи для единичного выступа (нахождение распределения контактных давлений) и

определение искривления полуплоскости внутри области контакта, образованной этим выступом, от действия, усредненного по оставшейся части поверхности распределения давлений.

Контактная задача для единичного выступа в плоском случае описывается интегральным уравнением с ядром Коши:

$$\frac{E^*}{2} h'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{p(\xi)}{x-\xi} d\xi, \quad (2.53)$$

имеющему в случае четной функции формы выступа и ограниченного на обеих границах области контакта давления следующую резольвенту [102]:

$$p(x) = \frac{E^*}{2\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a h'(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \frac{1}{\xi - x} d\xi. \quad (2.54)$$

Функция формы зазора внутри области контакта определяется следующим условием:

$$h(x) = \delta - (f(x) + f_2(x)), \quad (2.55)$$

где $f(x)$ – функция формы выступа, δ – величина сближения тел, $f_2(x)$ – искривление полуплоскости от действия остальных выступов за исключением рассматриваемого.

Согласно методу локализации действие остальных выступов заменим равномерной нагрузкой, действующей вне полосы длиной $2b$, которая определяется из условий равенства среднего давления внутри области и вне нее. Среднее давление в плоской периодической задаче определяется формулой $\bar{p} = P_s/L$, где P_s – величина полной нагрузки на единичный выступ, L – расстояние между вершинами выступов (период); следовательно, $2b = L$. Для определения полной нагрузки на единичный выступ P_s используется уравнение равновесия:

$$P_s = \int_{-a}^a p(x) dx. \quad (2.56)$$

Дополнительное искривление полуплоскости $f_2(x)$ можно представить как разность перемещений от равномерной нагрузки, распределенной по всей полуплоскости и перемещений от той же нагрузки внутри полосы длиной L :

$$f_2(x) = -\frac{2}{\pi E^*} \frac{P_s}{L} \left(C - \int \ln \left[\frac{L/2+x}{L/2-x} \right] dx \right). \quad (2.57)$$

Перемещения от равномерной нагрузки, распределенной по всей полуплоскости, постоянны. Данное утверждение можно обосновать следующим образом. Представим равномерное давление, распределенное по полосе произвольной длины $2b$, в виде ряда Фурье с периодом L , соответствующим периоду задачи:

$$p(x) = \bar{p} \frac{2b}{L} + \frac{2}{\pi} \bar{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(\frac{2\pi nb}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right). \quad (2.58)$$

Производная вертикальных перемещений границы полуплоскости от распределения давлений (2.58) определяется преобразованием Гильберта:

$$\bar{u}_z'(x) = \mathbf{H}\{p(x)\} = \frac{4}{\pi} \bar{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(\frac{2\pi nb}{L} \right) \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right). \quad (2.59)$$

С учетом того, что в рассматриваемом случае $2b = L$, выражение (2.59) обращается в нуль, а перемещения полуплоскости постоянны.

С учетом изложенного, дифференцируя (2.57), получим выражение для производной функции формы зазора внутри единичного пятна контакта:

$$h'(x) = f'(x) + \frac{2}{\pi E^*} \frac{P_s}{L} \left(\ln \left[\frac{L/2+x}{L/2-x} \right] \right) = f'(x) + \frac{4}{\pi E^*} \frac{P_s}{L} \operatorname{arth} \left(\frac{2x}{L} \right), \quad (2.60)$$

Используя выражение (2.54), определим контактное давление с учетом взаимного влияния выступов:

$$p(x) = \frac{E^*}{2\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \left[f'(\xi) + \frac{4}{\pi E^*} \frac{P_s}{L} \operatorname{arth} \left(\frac{2\xi}{L} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \frac{1}{\xi - x} d\xi, \quad -a < x < a. \quad (2.61)$$

Полная нагрузка на выступ с учетом симметрии определяется непосредственно с использованием функции (2.60):

$$P = \frac{E^*}{2} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi)\xi d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} + \frac{2P_s}{\pi L} \int_{-a}^a \frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \operatorname{artanh}\left(\frac{2\xi}{L}\right) d\xi. \quad (2.62)$$

Вычисляя интеграл во втором слагаемом выражения (2.62) при $2a < L$, получим:

$$P = \frac{E^*}{2} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi)\xi d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} + \frac{P_s}{L} \left(L - \sqrt{L^2 - 4a^2} \right). \quad (2.63)$$

С использованием выражения (2.63) можно упростить вычисление интеграла от второго слагаемого в квадратных скобках в формуле (2.61). Для этого воспользуемся методом, основанным на преобразовании Абеля функции $\partial P / \partial a$ [103]. Тогда выражение (2.61) преобразуется к виду:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^a \frac{P'_a(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} = \frac{E^*}{2\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (\xi - x)} + \frac{2P_s}{\pi L} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{L^2 - 4a^2}} \right), \quad (2.64)$$

где $P'_a = \partial P / \partial a$.

Величину дополнительного смещения за счет выступов рельефа можно определить по формуле (2.45) с учетом того, что $\bar{p} = \frac{P}{L}$.

2.2.2 Анализ и сравнение точных и асимптотических результатов для некоторых типичных форм поверхностного рельефа

Рассмотрим наиболее типичный синусоидальный рельеф, описываемый функцией $f(x) = \Delta(1 - \cos(2\pi x/L))$, где Δ , L – амплитуда и период соответственно. Точное решение для распределения контактных давлений определяется формулой (2.27), а зависимость номинального давления \bar{p} от полуширины зоны контакта имеет вид [34]:

$$\bar{p} = p^* \sin^2(\pi a / L), \quad (2.65)$$

где $p^* = \pi E^* \Delta / L$ – давление, необходимое для создания непрерывного (полного) контакта между поверхностями.

Рассмотрим решение данной задачи с помощью метода локализации. Исходная и эквивалентная схемы задачи приведены на рис.2.2.

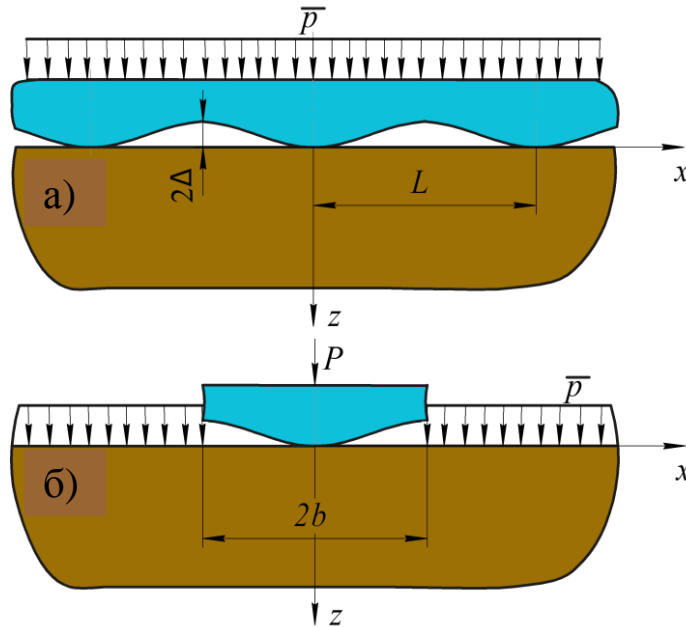


Рис. 2.2 – Контакт волнистой поверхности и упругой полуплоскости:
а – схема задачи; б – эквивалентная схема в соответствии с методом локализации

Производную функции начального зазора $\frac{\partial h(x)}{\partial x} = -\frac{2\pi\Delta}{L} \sin \frac{2\pi x}{L}$ можно представить на отрезке $[-a, a]$ в виде бесконечного ряда по многочленам Чебышёва, коэффициенты которого вычисляются аналитически [107]. Тогда функцию $\frac{\partial h(x)}{\partial x}$ можно представить в виде:

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = -\frac{4\pi\Delta}{L} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{-j} J_{2j+1} \left(\frac{2\pi a}{L} \right) T_{2j+1}(x), \quad -a < x < a. \quad (2.66)$$

где $J_j(x)$ – функция Бесселя первого рода целого порядка j .

Многочлены Чебышёва, удовлетворяют следующему известному спектральному соотношению [107].

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_j(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{1}{\eta-\psi} d\eta = U_{j-1}(\psi), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.67)$$

где T_j и U_j – многочлены Чебышёва первого и второго рода соответственно.

С учетом (2.66) и (2.67) получим выражение для распределения контактных давлений под единичным синусоидальным выступом в виде бесконечного ряда по многочленам Чебышева:

$$p_s(x) = \frac{2\pi\Delta E^*}{L} \sqrt{1 - (x/a)^2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^k J_{2j+1}(2\pi a/L) U_{2j}(x/a), \quad 2a < L/2 \quad (2.68)$$

где $U_j(x)$ – многочлен Чебышева второго рода степени j ; $J_j(x)$ – функция Бесселя первого рода целого порядка j .

Абсолютная и равномерная сходимость ряда по многочленам Чебышева второго рода может быть оценена по критерию [99]: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|c_j|^2}{j+1} < \infty$.

Конечное число членов ряда M (2.68), используемое для числовых расчетов, может быть выбрано исходя из (2.35) а также следующего неравенства, позволяющего оценить точность квадратуры для определения $p_s(x)$ [110]:

$$\int_{-a}^a \frac{p_s(x)^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int_{-a}^a \frac{\left(\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right)^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx < \varepsilon; \quad 2a < L, \quad (2.69)$$

где ε – заданное положительное число.

Зависимость для определения полной силы на единичный выступ может быть получена с использованием уравнения равновесия (2.56) в замкнутой форме:

$$P_s = \frac{\pi^2 \Delta E^*}{L} a J_1(2\pi a/L); \quad (2.70)$$

Используя зависимости (2.63), (2.64) и (2.68), (2.70), можно получить приближенные выражения для определения контактных характеристик синусоидальной волнистой поверхности при внедрении ее в упругую полуплоскость.

На рис. 2.3 показаны безразмерные распределения давлений для контакта волнистой поверхности и упругой полуплоскости при различных значениях длины размера области контакта $2a$.

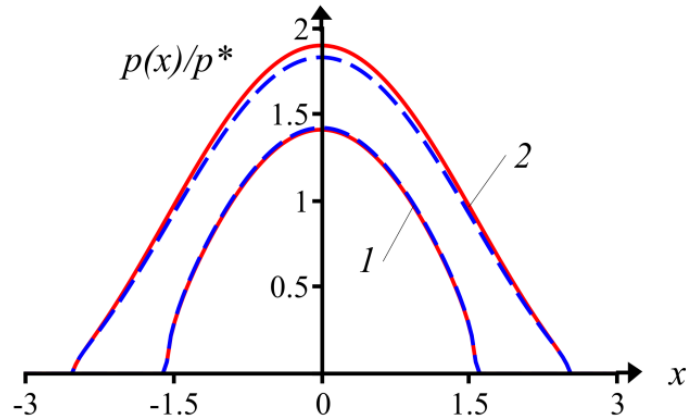


Рис. 2.3 – Распределение контактных давлений для синусоидальной волнистости: сплошная линия - точное решение; штриховая линия – решение, полученное методом локализации; 1 - $2a / L = 0.5$; 2 - $2a / L = 0.8$

Из рис. 2.3 видно, что решение, основанное на методе локализации, позволяет прогнозировать распределение контактных давлений для волнистой поверхности с высокой точностью вплоть до высоких значений номинальных давлений.

На рис. 2.4 показано сравнение кривых безразмерного номинального давления в зависимости от длины области контакта $2a$ для точного решения и решения по методу локализации.

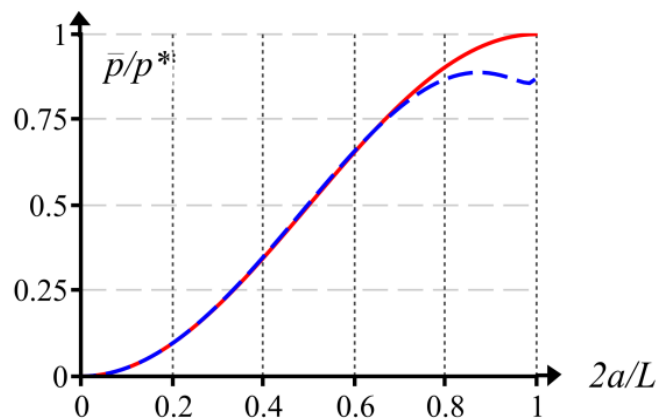


Рис. 2.4 – Зависимость безразмерного номинального давления от длины области контакта упругой полуплоскости и синусоидальной волнистой поверхности: сплошная линия – точное решение; штриховая линия – решение по методу локализации

Графики показывают, что применение метода локализации позволяет прогнозировать основные характеристики контакта волнистого рельефа и упругой полуплоскости с высокой степенью точности. Существенное расхождение кривых начинается при $2a / L \approx 0.7$.

Далее рассмотрим контакт пилообразного рельефа с полуплоскостью. Данный вид рельефа встречается на поверхностях после грубой механической обработки, после которой радиус кривизны неровностей значительно меньше их высоты. Схема задачи приведена на рис. 2.5. Эквивалентная схема аналогична рис. 2.2.

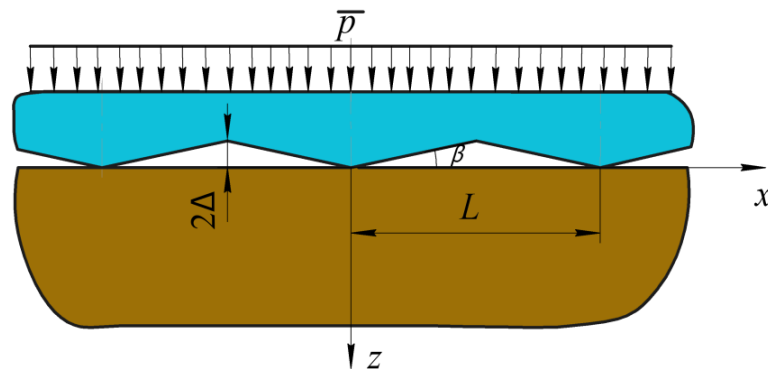


Рис. 2.5 – Контакт пилообразного рельефа с упругой полуплоскостью

Для возможности применения методов линейной теории упругости угол $\beta = \arctg(4\Delta / L)$ должен быть малым.

Точное решение для определения контактного давления получено в работе [33]:

$$p(x) = \frac{E^* \tan \beta}{\pi} \operatorname{arcosh} \left(\frac{\tan(\pi a / L)}{\tan(\pi |x| / L)} \right). \quad (2.71)$$

В соответствии с методом локализации и с использованием известных зависимостей для определения контактного давления и полной нагрузки на единственный клиновидный выступ [39] получим приближенные выражения для определения контактных характеристик.

$$p(x) = \frac{E^* \tan \beta}{\pi} \operatorname{arcosh} \left(\frac{a}{x} \right) + \frac{2E^* a \tan \beta}{\pi L} \arctan \left(\frac{2\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{L^2 - 4a^2}} \right); \quad (2.72)$$

$$\bar{p} = \frac{E^* a \tan \beta}{L} \left(2 - \frac{\sqrt{L^2 - 4a^2}}{L} \right). \quad (2.73)$$

На рис. 2.6 приведены распределения контактных давлений для пилообразного рельефа при двух значениях размера области контакта.

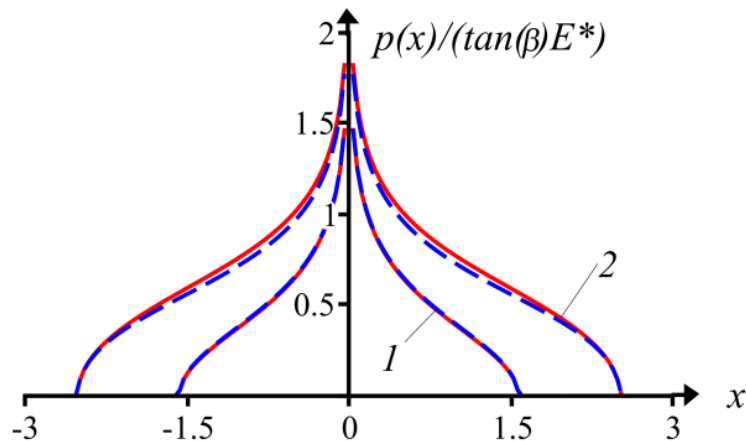


Рис. 2.6 – Распределение контактных давлений для пилообразного рельефа: сплошная линия - точное решение; штриховая линия – решение, полученное методом локализации; 1 - $2a / L = 0.5$; 2 - $2a / L = 0.8$

Из рис. 2.6 видно, что выражения, найденные с помощью метода локализации, позволяет получать близкие к точному решению значения контактного давления и в случае пилообразного рельефа, создающего при внедрении в полуплоскость бесконечные давления у вершин выступов.

На рис. 2.7 показаны зависимости размера области контакта от безразмерного номинального давления для пилообразного рельефа.

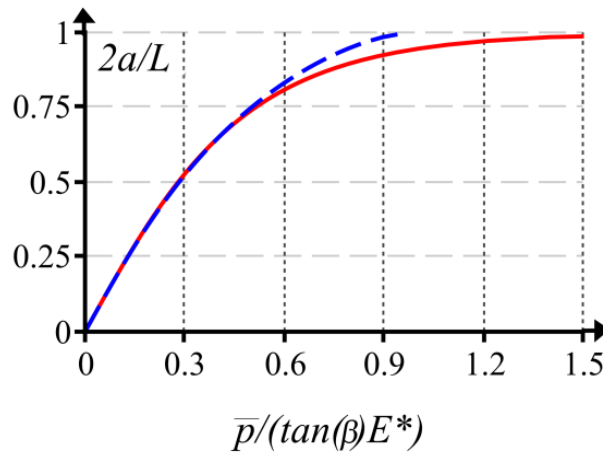


Рис. 2.7 – Зависимость размера области контакта упругой полуплоскости и пилообразного рельефа от номинального давления: сплошная линия – зависимость, полученная численным интегрированием выражения (2.71); штриховая линия – решение по методу локализации

Рис. 2.7 показывает, что для пилообразного рельефа, также как и для волнистого, расхождение кривых начинается при $2a / L \approx 0.7$. Влияние соседних выступов приводит к отклонению значений от прямой линии, наблюдаемой в случае контакта единичного выступа.

Важным с практической точки зрения случаем является периодическая система цилиндрических (параболических) выступов, моделирующих регулярный рельеф, в котором радиус кривизны выступов значительно превышает их высоту. Такой вид рельефа характерен для наплавленных поверхностей, например с помощью лазера. Схема задачи изображена на рис. 2.8.

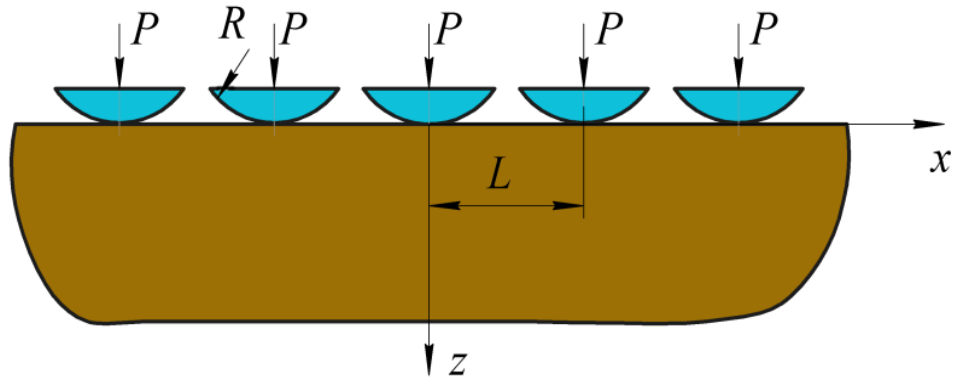


Рис. 2.8 – Контакт системы цилиндрических выступов с упругой полуплоскостью

Точное выражение для определения контактных давлений в замкнутом виде получено не было; вместе с тем найдено выражение, связывающее полудлину области контакта и полную нагрузку на выступ [111]:

$$a = \frac{L}{\pi} \arccos \left(\exp \left(-\frac{2\pi PR}{L^2 E^*} \right) \right). \quad (2.74)$$

С использованием известных формул для определения контактных характеристик единичного гладкого выступа, форма контактирующей поверхности которого описывается степенной функцией второго порядка [39], и выражений (2.63, 2.64) для определения контактных давлений и полной нагрузки получим зависимости для расчета контактных характеристик периодической системы выступов:

$$p(x) = \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{E^* a^2}{2RL} \arctan \left(\frac{2\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{L^2 - 4a^2}} \right); \quad (2.75)$$

$$P = \frac{\pi E^* a^2}{4R} \left(2 - \frac{\sqrt{L^2 - 4a^2}}{L} \right). \quad (2.76)$$

На рис. 2.9 приведены распределения давлений, построенные по зависимости (2.75) в сравнении с теорией Герца (в двумерной постановке) при различных значениях полной нагрузки на выступ.

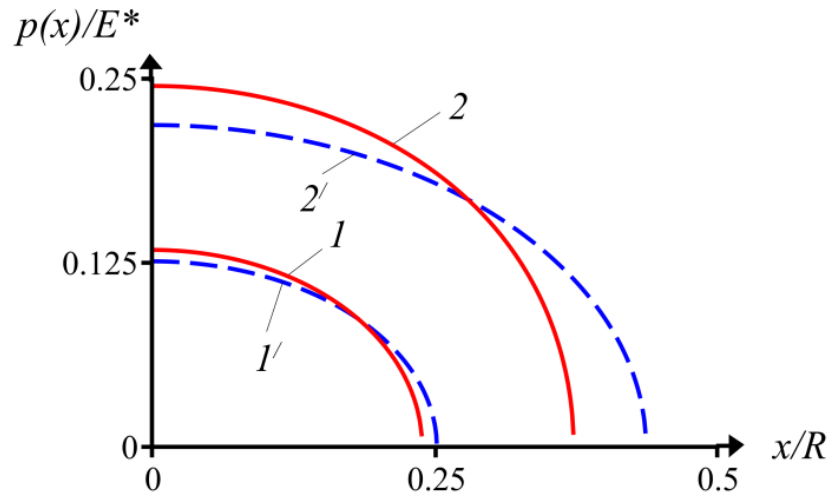


Рис. 2.9 – Распределения контактных давлений под цилиндрическим выступом для периодической системы (1, 2) и единичного выступа (1', 2') при $\bar{p}/E^* = 0.05$ (1, 1') и $\bar{p}/E^* = 0.15$ (2, 2')

Рис. 2.9 показывает, что взаимное влияние выступов проявляется в уменьшении размера области контакта и увеличении максимального давления в центре выступа. С дальнейшим ростом нагрузки и плотности контакта эпюра давлений существенно отличается от предсказанной по теории Герца. Данный результат хорошо соотносится с результатами расчета внедрения пространственной периодической системы сферических (параболических) выступов в упругое полупространство, представленными на рис. 2.

На рис. 2.10 приведены зависимости отношения полуширины области контакта к расстоянию между выступами (периоду) от безразмерной нагрузки для единичного выступа и периодической системы выступов.

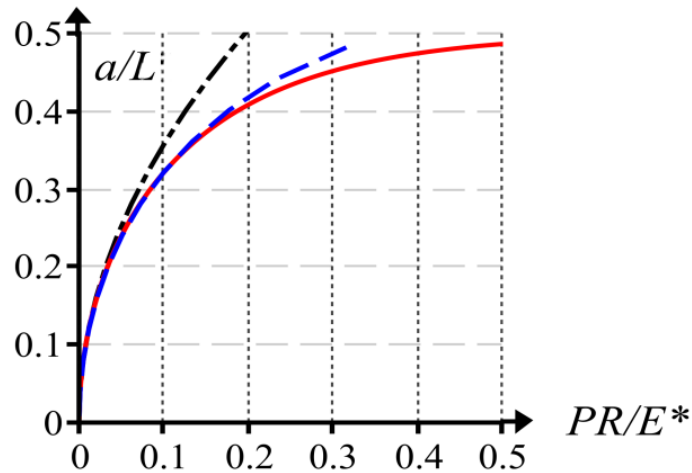


Рис. 2.10 – Зависимость отношения a / L от безразмерной нагрузки при внедрении системы цилиндрических выступов в упругую полуплоскость: сплошная линия точное решение; штриховая линия – решение по методу локализации; штрихпунктирная линия - решение Герца для единичного выступа

Из рис. 2.10 видно, что кривая, соответствующая решению по методу локализации, так же как и для других типов рельефа, близка к точной зависимости до значения $a / L \approx 0.35$ ($2a / L \approx 0.7$). Расхождение с кривой, рассчитанной по формуле Герца, соответствующей невзаимодействующим выступам, начинается с $a / L \approx 0.125$. При $a / L < 0.125$ ($2a / L < 0.25$) погрешность в расчетах размера области контакта по теории Герца составляет менее 3%. Последний результат аналогичен результатам, полученным для пространственной системы сферических выступов [21].

Из результатов анализа следует, что использование метода локализации позволяет достоверно рассчитывать характеристики контакта в зависимости от приложенного номинального давления до значения $2a / L \approx 0.7$.

Для определения функции дополнительного смещения с использованием метода локализации воспользуемся формулами (2.45), (2.60) и (2.63):

$$\bar{\delta} = \frac{2}{\pi E^*} \int_0^a \left(f'(\xi) + \frac{4}{\pi E^*} \frac{P_s}{L} \operatorname{artanh}\left(\frac{2\xi}{L}\right) \right) \arccos\left(\frac{\sin(\pi\xi/L)}{\sin(\pi a/L)}\right) d\xi +$$

$$-\frac{4}{LE^*} \left(P_s + \frac{P_s}{L} (L - \sqrt{L^2 - 4a^2}) \right) \ln\left(\sin\frac{\pi a}{L}\right) \quad (2.77)$$

На рис. 2.11 приведены графики дополнительного смещения полуплоскости $\bar{\delta}$ за счет неровностей от номинального давления для пилообразного рельефа, рассчитанного по выражению (2.77) в сравнении кривой для синусоидального рельефа, определяемой известным выражением Е.А. Кузнецова (2.52) [59].

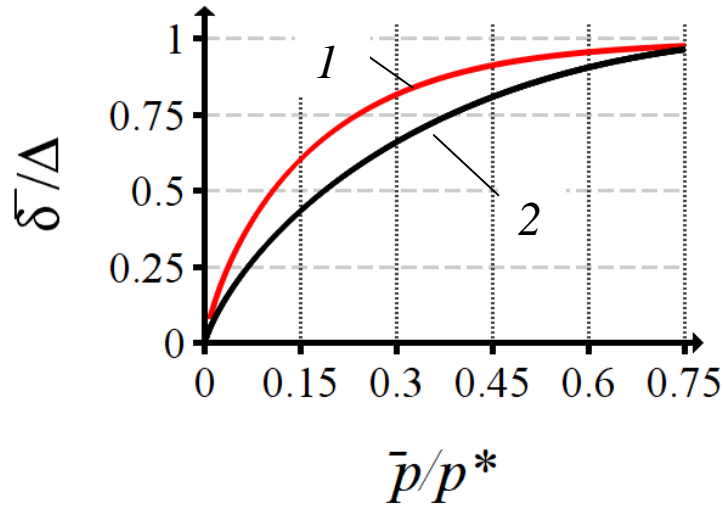


Рис. 2.11 – Зависимости дополнительного смещения полуплоскости от номинального давления для пилообразного 1 ($\tan \beta = 2\Delta/L$) и синусоидального рельефа 2

Рис. 2.11 показывает, что при одинаковых размерах выступов и впадин рельефа пилообразный тип обеспечивает большее дополнительное смещение, т.е. меньшую контактную жесткость, за исключением случая почти полного контакта, который для пилообразного рельефа достигим только при очень больших нагрузках, а полный контакт при этом – невозможен [112].

2.2.3 Построение асимптотического решения для случая больших

нагрузок

При значительных нагрузках зазор между контактирующими поверхностями становится малым и остается небольшая область внутри одного периода $x \in [-l, l]$, в которой контакт отсутствует (случай почти полного контакта). Эту область, где $l = L/2 - a$ можно рассматривать как фиктивную сжимаемую трещину длиной $2l$, нагруженную некоторым давлением $p_c(x)$ [39] (рис. 2.12).

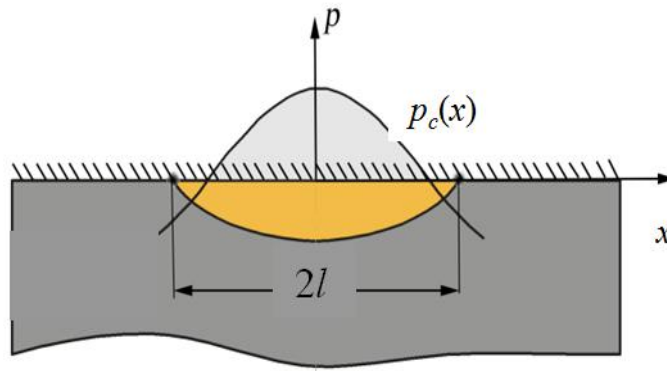


Рис. 2.12 – Модель фиктивной трещины для случая почти полного контакта

Давление $p_c(x)$ определяется следующей формулой:

$$p_c(x) = -2\bar{p} + p_f(x), \quad (2.78)$$

где $p_f(x)$ – распределение давлений при полном внедрении (смятии) неровностей рельефа. Распределение давлений при полном контакте поверхностей определяется обратным преобразованием Гильберта производной функции зазора между поверхностями [113]:

$$p_f(x) = \bar{p} + E^* \mathbf{H}^{-1} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]. \quad (2.79)$$

Так как контактное давление ограничено на концах отрезках зоны контакта, а перемещения внутри и вне зоны контакта непрерывны коэффициент интенсивности напряжений K_I фиктивной трещины при ее сжатии давлением $p_c(x)$ должен равняться нулю [114]:

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \frac{p_c(s) ds}{\sqrt{l^2 - x^2}} = 0. \quad (2.80)$$

Для функции профиля рельефа в виде (2.20) распределение давлений при полном контакте в соответствии с выражением (2.79) имеет вид

$$p_f(x) = \bar{p} + \frac{E^* \Delta}{2} \sum_{i=1}^N k_i n_i \cos(n_i x). \quad (2.81)$$

Тогда в соответствии с (2.78) имеем

$$p_c(x) = -\bar{p} + \frac{E^* \Delta}{2} \sum_{i=1}^N k_i n_i \cos(n_i x) = -\sum_{i=1}^N \bar{p}_i + \frac{E^* \Delta}{2} \sum_{i=1}^N p_{ci}(x), \quad (2.82)$$

где $p_{ci}(x) = k_i n_i \cos(n_i x)$.

Вычисляя интеграл (2.80) и приравнявая получившееся выражение к нулю, получим формулу для определения зависимости i -й составляющей номинального давления от полудлины области контакта.

$$\bar{p}_i = \frac{\Delta E^* k_i n_i}{2} J_0(n_i l); \quad l = \pi - a, \quad (2.83)$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Распределение контактных давлений при почти полном контакте будет являться распределением давлений вне фиктивной трещины, которое определяется следующим выражением [115]:

$$p(x) = -p_c(x - L/2) - \frac{2(x - L/2)}{\pi \sqrt{(x - L/2)^2 - l^2}} \int_0^l \frac{p_c(s) \sqrt{l^2 - s^2}}{(x - L/2)^2 - s^2} ds. \quad (2.84)$$

Дополнительное смещение за счет неровностей рельефа будет определяться как

$$\bar{\delta} = \Delta - \bar{u}_c, \quad (2.85)$$

где \bar{u}_c – средние перемещения поверхности фиктивной трещины.

Здесь следует пояснить, что величина Δ является средним значением номинального зазора между поверхностями, т.е. среднее значение периодической функции формы профиля должно быть равно нулю [48].

Перемещения поверхности фиктивной трещины при нагружении давлением $p_c(x)$ можно определить как [115]:

$$u_c(x) = \frac{4}{\pi E^*} \int_x^l \frac{tg(t)dt}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \quad x < l, \quad (2.86)$$

где функция $g(t)$ определяется интегралом

$$g(t) = \int_0^t \frac{p_c(s)ds}{\sqrt{t^2 - s^2}}. \quad (2.87)$$

Средние перемещения поверхности фиктивной трещины будут равны:

$$\bar{u}_c = \frac{2}{L} \int_0^l u_c(x)dx. \quad (2.88)$$

С использованием (2.88) и (2.86) запишем

$$\bar{u}_c = \frac{8}{\pi E^* L} \int_0^l \int_0^l \frac{tg(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt dx. \quad (2.89)$$

Изменением порядка интегрирования с учетом области интегрирования, изображенной на рис. 2.13, двойной интеграл в (2.89) преобразуется к виду

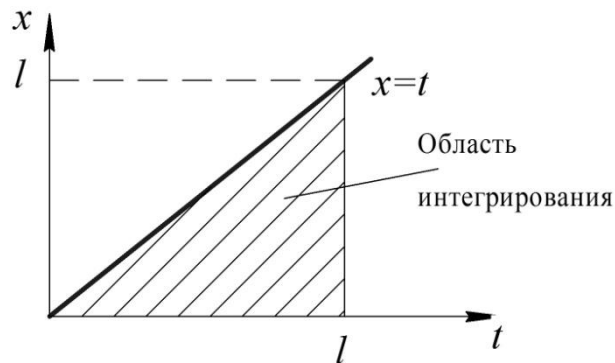


Рис. 2.13 – Область интегрирования в формуле (2.89)

$$\bar{u}_c = \frac{8}{\pi E^* L} \int_0^l \int_0^t \frac{tg(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx dt = \frac{4}{E^* L} \int_0^l tg(t)dt \quad (2.90)$$

С использованием (2.82), (2.83) и (2.87) получим формулу для i -й составляющей функции $g(t)$ ($L = 2\pi$):

$$g_i(t) = \int_0^t \frac{(-k_i n_i J_0(n_i l) + k_i n_i \cos(n_i s)) ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} = \frac{\pi}{2} k_i n_i (J_0(n_i t) - J_0(n_i l)). \quad (2.91)$$

Применяя выражения (2.85) и (2.90) окончательно получим формулу для определения i -й составляющей дополнительного смещения для случая почти полного контакта ($L = 2\pi$):

$$\bar{\delta}_i = \Delta - \frac{k_i n_i}{2E^*} \int_0^l t (J_0(n_i t) - J_0(n_i l)) dt = \Delta - \frac{k_i n_i}{4E^*} l^2 J_2(n_i l), \quad (2.92)$$

где $J_2(x)$ – функция Бесселя первого рода второго порядка.

Для синусоидального рельефа имеем $N = 1$, $k_i = 1$, $n_i = 1$. При данных параметрах, с использованием (2.81) и (2.82) выражение (2.92) становится равным

$$\bar{\delta} = \Delta - \frac{\Delta}{4E^*} l^2 J_2(l), \quad (2.93)$$

где $L = 2\pi$ и $l = L/2 - a$.

На рис. 2.14 показаны графики длины фактической области контакта в зависимости от номинального давления для синусоидального рельефа, рассчитанные согласно точному (2.27) и асимптотическому (2.83) решениям.

На рис. 2.15 показаны графики дополнительного смещения в зависимости от номинального давления для синусоидального рельефа, рассчитанные согласно точным формулам (2.27) и (2.52) и асимптотическим (2.83) и (2.93).

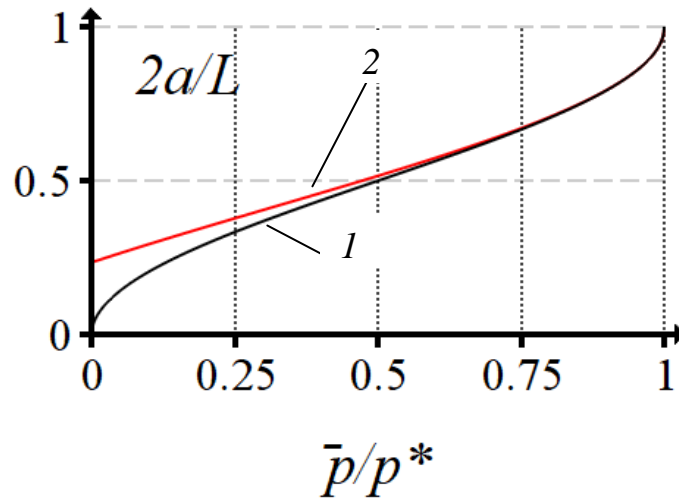


Рис. 2.14 – Зависимости длины фактической области контакта от номинального давления для синусоидального рельефа при $L = 2\pi$: 1 – точное решение; 2 – асимптотика при почти полном контакте

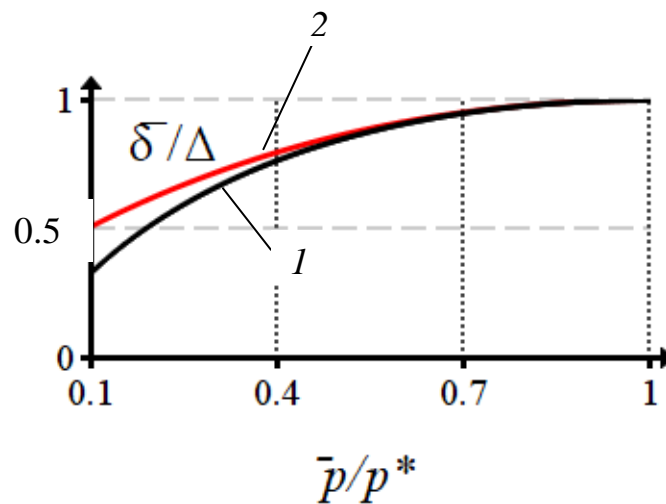


Рис. 2.15 – Зависимости дополнительного смещения полуплоскости за счет неровностей от номинального давления для синусоидального рельефа при $L = 2\pi$: 1 – точное решение; 2 – асимптотика при почти полном контакте

Рис. 2.14 и 2.15 показывают, что для диапазона значений нагрузок, который не позволяет охватить асимптотическое решение с использованием метода локализации (см. п. 2.2.1 и 2.2.2), а именно при $2a/L > 0.7$ интегральные контактные характеристики (размер области фактического контакта, дополнительное смещение) позволяет рассчитать модель почти

полного контакта, основанная на представлении области, в которой контакт отсутствует, в виде сжимаемой фиктивной трещины.

Следует также отметить, что по сравнению с известными асимптотическими решениями [45], в которых форма синусоидального выступа заменялась параболой, полученные асимптотические результаты охватывают существенно больший диапазон нагрузок.

2.3 Выводы по главе 2

Получено аналитическое решение контактной задачи при взаимодействии поверхности жесткого тела с регулярным рельефом и упругой полуплоскости при произвольной симметричной форме выступов рельефа в квадратурах.

Получено аналитическое выражение в квадратурах для определения дополнительного смещения полуплоскости за счет неровностей рельефа при произвольной симметричной форме выступов рельефа.

Получены аналитические выражения в замкнутой форме для расчета интегральных контактных характеристик – зависимости длины фактической области контакта от номинального давления и зависимости дополнительного смещения от длины фактической области контакта для рельефа, форма которого описывается четным тригонометрическим многочленом.

Получены асимптотические выражения для расчета контактного давления и длины фактической области контакта в зависимости от номинального давления при малых и умеренных нагрузках с применением метода локализации, позволяющего заменить действие остальных выступов рельефа за исключением рассматриваемого номинальным давлением.

Получены асимптотические выражения для расчета контактного давления, длины фактической области контакта от номинального давления и дополнительного смещения от длины фактической области контакта в

случае больших нагрузок на основе модели сжимаемой фиктивной трещины для области, в которой контакт отсутствует.

Приведены примеры расчета контактных характеристик на основе полученных решений для некоторых типичных форм профиля рельефа – синусоидального, пилообразного и периодической системы параболических штампов.

Анализ полученных результатов дает возможность сделать следующие выводы:

- Основным фактором, оказывающим влияние на характеристики контактного взаимодействия поверхности с регулярным рельефом и упругой полуплоскости при односвязной области контакта на периоде, является производная функции формы профиля.
- Степень влияния производной функции профиля рельефа зависит от приложенных номинальных давлений. Для малых нагрузок производная функции формы профиля оказывает значительно меньшее влияние, чем для умеренных и высоких значений приложенных номинальных давлений.
- Взаимным влиянием выступов (впадин) рельефа можно пренебречь при малых и больших нагрузках, но нельзя – при умеренных, что подтверждается сравнением полученного точного и асимптотического решения.
- Эффекты формы выступов (впадин) рельефа и их взаимного влияния с достаточной степенью точности можно рассматривать изолированно.
- Изменение размера фактической области контакта с ростом нагрузки более чувствительно к форме рельефа, чем изменение величины дополнительного смещения, особенно при высоких нагрузках.

ГЛАВА 3. КОНТАКТ ПОВЕРХНОСТИ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ВОЛНИСТЫМ РЕЛЬЕФОМ И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

3.1 Описание геометрии рельефа, постановка и асимптотические решения задачи для различных диапазонов нагрузок

3.1.1 Описание геометрии поверхности с пространственным волнистым рельефом

Будем рассматривать случай геометрически изотропного рельефа, предполагающего равенство периодов (частот гармоник) в направлениях координат x и y . Пространственным волнистым рельефом будем называть такой рельеф, у которого волнистость образована вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений (двумерная волнистость), в отличие от плоского случая одномерной волнистости, рассмотренного в главе 2. Геометрия волнистой поверхности при этом описывается следующей функцией

$$f(x, y) = \Delta \left(\sum_{i=1}^N k_i - \sum_{i=1}^N k_i \cos(2\pi n_i x / L) \cos(2\pi m_i y / L) \right), \quad (3.1)$$

где Δ – амплитуда гармоники с наименьшей угловой частотой; n_i , m_i и k_i частотные (в направлении координат x и y соответственно) и амплитудный коэффициенты для i -ой гармоники ($n_i \in \mathbb{N}^*$); N – число компонент (гармоник).

Следует отметить, что величины Δ , L и k_i имеют размерность длины (м - в системе СИ), а величины n_i, m_i - характеризуют угловую частоту и имеют размерность обратную длине ($\text{рад} \cdot \text{м}^{-1}$ – в системе СИ). Так как рассматриваемая задача инвариантна к масштабу длины, то в качестве

периода гармоники с наименьшей угловой частотой используется для простоты $L = 2\pi$.

Рассмотрим случай геометрически изотропного рельефа с одной гармоникой при $N = 1$, $k_1 = 1$, $n_1 = m_1 = 1$, $L = 2\pi$ (рис. 3.1).

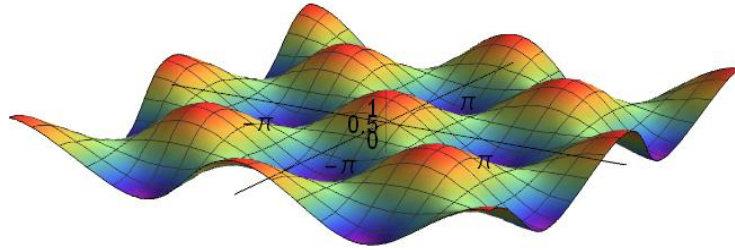


Рис. 3.1 – Геометрия пространственного волнистого рельефа

Представим функцию формы рельефа при $N = 1$, $k_1 = 1$, $n_1 = m_1 = 1$, $L = 2\pi$ в цилиндрических координатах (r, θ) (рис. 3.2):

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2} \Delta \left[\cos \left(\sqrt{2}r \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right) + \cos \left(\sqrt{2}r \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]. \quad (3.2)$$

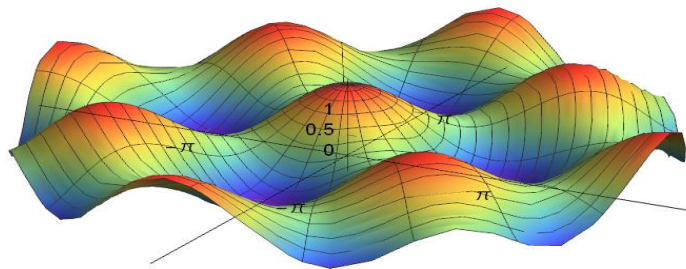


Рис. 3.2 – Геометрия пространственного волнистого рельефа в цилиндрической системе координат

3.1.2 Постановка и асимптотическое решение задачи для определения интегральных контактных характеристик при малых нагрузках

В соответствии с результатами главы 2, примем, что для малых нагрузок влиянием соседних неровностей можно пренебречь и рассматривать

только одну неровность с геометрией, описываемой функцией (3.2) в интервале радиальной координаты $r = [-L/2, L/2]$. Схема контакта такой неровности и упругого полупространства показана на рис. 3.3.

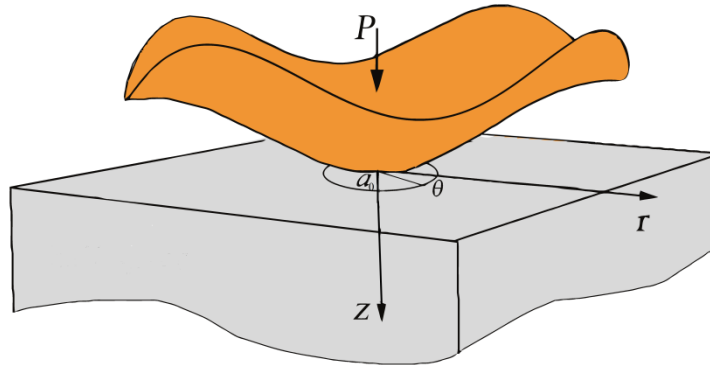


Рис. 3.3 – Контактное взаимодействие единичного выступа двумерной синусоидальной волнистости и упругого полупространства

Допущения в рассматриваемой постановке такие же, как в задачах, исследованных в главе 2, только упругая полуплоскость заменена упругим полупространством.

Область контакта неровности, изображенной на рис. 3.3. и упругого полупространства не всегда является круговой, вследствие отсутствия осевой симметрии у штампа (неровности). Однако для определения интегральных контактных характеристик примем, что можно аппроксимировать область фактического контакта некоторой эффективной круговой областью радиуса a_0 [116].

Упругие перемещения полупространства внутри «эффективной» круговой области контакта можно представить в виде:

$$u_z(r, \theta) = \sum u_{zj}(r) \cos(j\theta) - \delta_0, \quad (3.3)$$

где δ_0 – величина внедрения штампа в полупространство.

С использованием известных формул Якоби-Ангера [117]:

$$\begin{aligned}\cos(x \cos \phi) &= J_0(x) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i J_{2i}(x) \cos(2i\phi); \\ \cos(x \sin \phi) &= J_0(x) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} J_{2i}(x) \cos(2i\phi),\end{aligned}\quad (3.4)$$

где $J_i(x)$ — функция Бесселя первого рода и целого порядка i , получим разложение функции (3.2) в двойной ряд Фурье по угловой координате θ :

$$f(r, \theta) = \Delta J_0(\sqrt{2}r) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi j}{2}\right) \Delta J_{2j}(\sqrt{2}r) \cos(2j\theta). \quad (3.5)$$

Для определения интегральных контактных характеристик – площади фактического контакта и дополнительного смещения будем использовать метод решения задач о штампе неосесимметричной формы для круговой области контакта, впервые предложенный Копсоном для задач электростатики [118]. В механике контактного взаимодействия этот метод успешно применялся для штампов с известной круговой областью контакта [118, 119].

Если представить j -ю радиальную компоненту перемещений в виде

$$u_{zj}(r) = g_{0j}(r), \quad (3.6)$$

где $g_{0j}(r)$ - j -я радиальная составляющая функции начального зазора, определяемая следующим образом:

$$g_{0j}(r) = \Delta - \Delta J_0(\sqrt{2}r) - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi j}{2}\right) \Delta J_{2j}(\sqrt{2}r). \quad (3.7)$$

Неизвестная j -я составляющая контактного давления, представленного в виде ряда Фурье на интервале $[0, a_0]$, где a_0 – радиус эффективной круговой области может быть записана как [119]:

$$p_j(r) = r^{j-1} \frac{d}{dr} \int_r^{a_0} \frac{th_j(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad (3.8)$$

где

$$h_j(t) = -\frac{E^*}{\pi t^{2j}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^{j+1} g_{0j}(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad (3.9)$$

где E^* - приведенный модуль упругости, определяемый выражением (2.3).

С применением интегрирования по частям выражение для контактного давления для j -й составляющей ряда можно записать следующим образом:

$$p_j(r) = r^j \left[\int_r^{a_0} \frac{h'_j(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} - \frac{h_j(a_0)}{\sqrt{a_0^2 - r^2}} \right], \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

где $h'_j(t)$ - производная функции $h_j(t)$ по t .

Используя условие равновесия, полная нагрузка на штамп может быть выражена как:

$$P = 2\pi \int_0^{a_0} p_0(r) r dr + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_0} \cos\left(\frac{\pi j}{2}\right) p_{2j}(r) \cos(2j\theta) r dr d\theta. \quad (3.11)$$

С использованием выражений (3.8 – 3.11) можно заметить, что полная нагрузка на штамп зависит только от первого члена разложения функции $g_{0j}(r)$, не зависящего от θ . Для $j = 0$ выражение (3.10) соответствует осесимметричному случаю. Используя условие $p(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow a_0$ [103], полную нагрузку можно выразить как:

$$P = 2\pi \int_0^{a_0} p_0(r) r dr = 2E^* \int_0^{a_0} \frac{r^2 g'_{00}(r) dr}{\sqrt{a_0^2 - r^2}}, \quad (3.12)$$

где $g_{00}(r) = g_{0j}(r)|_{j=0}$.

Используя функцию (3.7), и вычисляя интеграл в уравнении (3.12), общая нагрузка на штамп равна

$$P = E^* \Delta \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}a_0) - 2a_0 \cos(\sqrt{2}a_0) \right). \quad (3.13)$$

Величина среднего давления соответствует полной нормальной нагрузке, равномерно распределенной по номинальной площади контакта A_n , которая представляет собой квадрат со стороной $L/\sqrt{2}$ [45] (рис. 3.4):

$$\bar{p} = 2P / L^2. \quad (3.14)$$

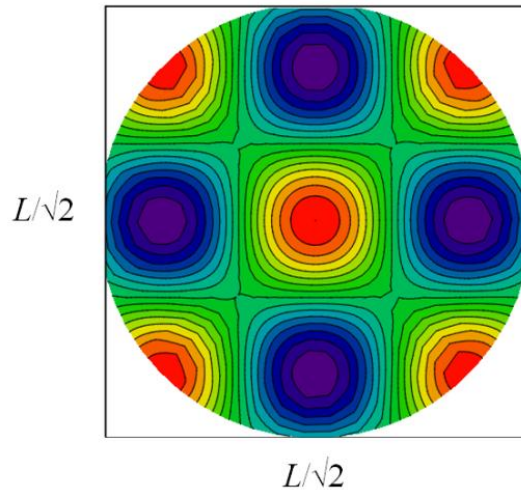


Рис. 3.4 – Номинальная область контакта двумерной волнистой поверхности и упругого полупространства

Функция дополнительного смещения может быть определена как разность между значением смещения рассматриваемого выступа и смещения от номинального давления, распределенного по номинальной (квадратной) области контакта в некоторой точке области контакта, например, при $r = 0$, $\theta = 0$ ([45, 21]:

$$\bar{\delta} = \delta_0 - \Delta \left(\bar{p} / p^* \right) \left(4 \ln(\sqrt{2} + 1) \right), \quad (3.15)$$

где номинальное давление, необходимое для обеспечения полного контакта между поверхностями p^* определяется выражением [45]

$$p^* = \frac{\sqrt{2} E^* \Delta}{2}. \quad (3.16)$$

Поскольку ненулевые члены ряда (3.7) не дают вклада в функцию $h_j(t)$ при $r = 0$ ($f_j(0, \theta) = 0$ при $j = 1, 2, \dots$), значение δ_0 определяется только нулевым членом ряда. Используя известное соотношение между внедрением штампа и радиусом круговой области контакта a_0 [103], получим:

$$\delta_0 = a_0 \int_0^{a_0} \frac{g'_{00}(r) dr}{\sqrt{a_0^2 - r^2}} = 2\Delta \sin^2 \left(\frac{\sqrt{2} a_0}{2} \right). \quad (3.17)$$

3.1.3 Определение формы области контакта при малых нагрузках

Для определения формы фактической области контакта будем использовать способ [120], основанный на приближенном решении В.И. Фабриканта для неосисимметричного плоского штампа [121] и максимизации приложенной внешней нагрузки к единичной неровности, как функции площади фактической области контакта A_r , предложенный в работе [116]. Таким образом, рассматривая область контакта в виде функции в полярных координатах $a(\theta)$, где начало координат совпадает с началом координат эффективной круговой области контакта, функция $a(\theta)$ должна быть такой, что функция $P(A_r)$ принимает максимальное значение, т.е

$$a(\theta) = \arg \max_{a(\theta)} P(A_r), \quad \text{где } A_r = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a(\theta)^2 d\theta, \quad (3.18)$$

Представив функцию $a(\theta)$ в виде

$$a(\theta) = a_c + \delta a(\theta), \quad (3.19)$$

где a_c – радиус круговой области контакта; δa – малое отклонение от круговой области контакта, и с использованием приближенного выражения для контактного давления при вдавливании плоского неосесимметричного штампа [121]:

$$p(r, \theta) \approx \frac{2E^* \delta}{L_0} \frac{a(\theta)}{\sqrt{a(\theta)^2 - r^2}}, \quad (3.20)$$

где δ – внедрение штампа; $L_0 = \int_0^{2\pi} a(\theta) d\theta$, в работе [120] получено

следующее выражение для определения $\delta a(\theta)$:

$$\delta a(\theta) = -\frac{\delta G_\theta(a_c) + a_c \delta g_\theta(a_c, \theta)}{a_c g'_a(a_c)}, \quad (3.21)$$

$$g_a(a_c) = a_c \int_0^{a_c} \frac{f'_0(r) dr}{\sqrt{a_c^2 - r^2}} = \delta_0(a_c);$$

$$\delta g_\theta(a_c, \theta) = a_c \int_0^{a_c} \frac{\delta f'(r, \theta) dr}{\sqrt{a_c^2 - r^2}}; \quad (3.22)$$

$$G'_a(a_c) = g_a(a_c);$$

$$\delta G'_\theta(a_c, \theta) = \delta g_\theta(a_c, \theta).$$

Приближенное решение (3.20) является точным для эллиптических штампов с произвольным эксцентриситетом и обеспечивает правильный вид асимптотики вблизи границы области контакта, которая должна выполняться для плоского штампа произвольной формы.

Оставляя только два члена ряда в выражении (3.5), получим функцию формы штампа в виде комбинации осесимметричной составляющей и малого отклонения ($L = 2\pi$) от нее в виде

$$f(r, \theta) = f_0(r) + \delta f(r, \theta) \approx J_0(\sqrt{2}r) - 2J_4(\sqrt{2}r) \cos(4\theta), \quad r < \pi/2 \quad (3.23)$$

Подставляя компоненты функции формы штампа (3.23) в формулы (3.22) и затем вычисленные функции в (3.21), после преобразований и с учетом (3.19) получим формулу для определения функции формы области контакта:

$$a(\theta) \approx a_c - \frac{\cos 4\theta}{a_c^4} \left(7a_c^3 - 24a_c - \sqrt{2}a_c^2 (a_c^2 - 12) \operatorname{ctg}(\sqrt{2}a_c) + 12\sqrt{2} \operatorname{tg}\left(\frac{a_c}{\sqrt{2}}\right) \right). \quad (3.24)$$

Экстремальные значения функции $a(\theta)$ a_{ext} на интервале $\theta = [0, \pi]$ определены при $\theta = 0$ (max) и $\theta = \pi/4$ (min) как:

$$a_{ext} \approx a_c \pm \frac{1}{a_c^4} \left(7a_c^3 - 24a_c - \sqrt{2}a_c^2 (a_c^2 - 12) \operatorname{ctg}(\sqrt{2}a_c) + 12\sqrt{2} \operatorname{tg}\left(\frac{a_c}{\sqrt{2}}\right) \right). \quad (3.25)$$

Среднее значение функции формы области контакта равно

$$\bar{a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta) d\theta = a_c. \quad (3.26)$$

Таким образом, можно заключить, что радиус круговой области контакта, определенный, рассматривая только осесимметричную компоненту функции формы штампа (выражение (3.23)) является радиусом «эффективной» круговой области контакта, рассмотренной в разделе 3.1.2, т.е. $a_0 = a_c$. Таким образом, на интегральные контактные характеристики будет в основном влиять осесимметричная составляющая разложения в ряд Фурье по угловой координате функции формы выступа.

3.1.4 Учет взаимного влияния выступов при определении контактных характеристик для умеренных нагрузок.

Рассматривая только осесимметричную составляющую формы выступов рельефа, влияние соседних выступов можно учесть с помощью метода локализации.

Используя метод локализации (см. раздел 2.2.1), действие остальных неровностей за исключением центральной (см. рис. 3.4), заменим на действие номинального (осредненного) по оставшейся части поверхности давления (вне круга заданного радиуса A_0). Для равновысокой системы периодически расположенных осесимметричных выступов распределение давления $p(r)$ на фактическом пятне контакта с достаточной степенью точности определяется выражением [21]:

$$p(r) = p_s(r) + \frac{2}{\pi} \bar{p} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{a_0^2 - r^2}}{\sqrt{A_0^2 - a_0^2}} \right), \quad (3.27)$$

где $p_s(r)$, P_s – контактное давление и нагрузка, действующие на единичном круговом пятне контакта соответственно, a_0 – эффективный радиус пятна контакта, A_0 – радиус круга, вне которого принимается во внимание величина номинального давления, действующего на упругое полупространство при внедрении периодической системы выступов (рис. 3.5).

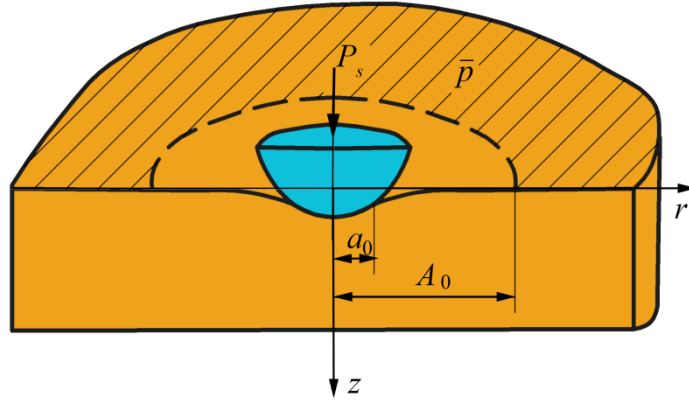


Рис. 3.5 – Представление контактного взаимодействия системы осесимметричных выступов с упругим полупространством согласно методу локализации

Рассматривая номинальную «эффективную» круговую область контакта (рис. 3.4), номинальная площадь контакта равна $A_n = \pi L^2/2$, а номинальное давление $\bar{p} = 2P_s / \pi L^2$. Радиус A_0 определяется исходя из равенства номинальных давлений, действующих внутри номинальной «эффективной» области контакта и круговой области радиуса A_0 , т.е.

$$\frac{P_s}{\pi A_0^2} = \frac{2P_s}{\pi L^2} \rightarrow A_0 = \frac{L}{\sqrt{2}}. \text{ При } L = 2\pi \text{ получим } A_0 = \sqrt{2}\pi.$$

Величины $p_s(r)$ и P_s определяются формулами (3.10) при $j = 0$ и (3.13).

С использованием выражений (3.5) и (3.9) для $j = 0$ получим

$$h'_0(t) = \frac{\sqrt{2}E^* \Delta}{\pi} \sin(\sqrt{2}t). \quad (3.28)$$

Для $j = 0$ и $p(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow a_0$ выражение (3.10) имеет вид

$$p_s(r) = p_0(r) = \int_r^{a_0} \frac{h'_0(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{\sqrt{2}E^* \Delta}{\pi} \int_r^{a_0} \frac{\sin(\sqrt{2}t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \quad (3.29)$$

Осесимметричная составляющая контактного давления с учетом взаимного влияния неровностей будет определяться для $L = 2\pi$ как:

$$p(r) = \frac{\sqrt{2}E^*\Delta}{\pi} \int_r^{a_0} \frac{\sin(\sqrt{2}t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} + \frac{E^*\Delta}{\pi^3} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}a_0) - 2a_0 \cos(\sqrt{2}a_0) \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{a_0^2 - r^2}}{\sqrt{2\pi^2 - a_0^2}} \right). \quad (3.30)$$

Зависимость полной нагрузки от радиуса «эффективной» круговой области контакта определяется уравнением равновесия (3.12), а функция дополнительного смещения определяется с использованием выражения (3.15). Следует отметить, что учет большего числа близлежащих к центральной круговых областей контакта позволяет повысить точность метода локализации для расчета интегральных контактных характеристик [21], однако при нагрузках близких к значению, при котором наблюдается слияние областей контакта, форма этих областей становится вытянутой (не удается вписать в окружность) и дальнейшие вычисления согласно рассмотренной методике будут неверны.

3.1.5 Постановка и асимптотическое решение задачи для определения интегральных контактных характеристик при больших нагрузках

При больших значениях нагрузки зазор между контактирующими поверхностями мал и определяется небольшими областями, в которых контакт отсутствует (случай почти полного контакта). С учетом того, что расстояние между этими областями значительно превышает их размер, будем рассматривать единственную область отсутствия контакта внутри номинальной области контакта и, следуя описанной ранее методике (глава 2, раздел 2.2.3), основанной на применении методов механики разрушения к случаю почти полного контакта [45], рассмотрим область отсутствия контакта как сжимаемую круговую фиктивную трещину с эффективным радиусом b_0 , при действии на нее неосесимметричной нагрузки (рис. 3.6).

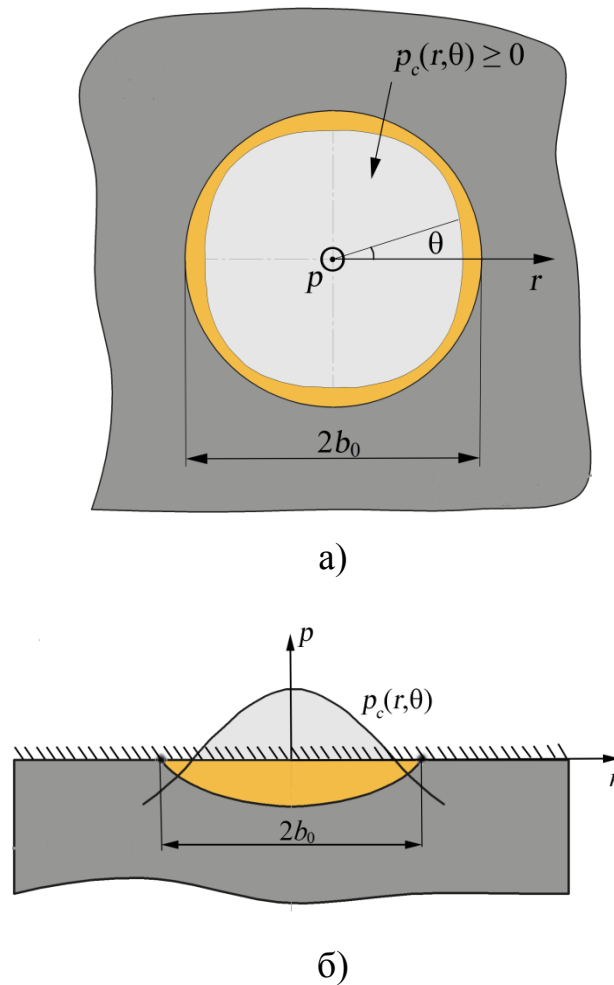


Рис. 3.6 – Круговая трещина, моделирующая зону отсутствия контакта, при нагружении неосесимметричным давлением $p_c(r, \theta)$: а — вид сверху; б – сечение при $\theta = 0$

Следуя результатам [45], распределение давления, действующего на поверхность трещины, имеет вид

$$p_c(x, y) = -\bar{p} + p^* \cos(x) \cos(y). \quad (3.31)$$

Используя выражения (3.2) и (3.5), уравнение (3.31) можно представить в виде

$$p_c(r, \theta) = -\bar{p} + p^* J_0(\sqrt{2}r) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi j}{2}\right) p^* J_{2j}(\sqrt{2}r) \cos(2j\theta). \quad (3.32)$$

При отсутствии сингулярности давлений на границе области контакта, коэффициент интенсивности напряжений (КИН) K_I должен быть равен нулю

[45]. Следуя работе [122], КИН для неосесимметричного нагружения круговой трещины определяется как

$$K_I(\theta) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{b_0}} \int_0^{b_0} \int_0^{2\pi} \frac{r \sqrt{b_0^2 - r^2} p_c(r, \varphi) d\varphi dr}{b_0^2 + r^2 - 2b_0 r \cos(\varphi - \theta)}, \quad (3.33)$$

Интегрирование на интервале $[0, 2\pi]$ для $p_c(r, \theta)$, которое дается выражением (3.32) показывает независимость величины K_I от неосесимметричных составляющих ряда (3.32). Тогда (3.33) можно упростить следующим образом:

$$K_I = \frac{2}{\pi \sqrt{b_0}} \int_0^{b_0} \frac{r \left(-\bar{p} + p^* J_0(\sqrt{2}r) \right) dr}{\sqrt{b_0^2 - r^2}} = \frac{2}{\pi \sqrt{b_0}} \left(-b_0 \bar{p} + \frac{p^*}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}b_0) \right). \quad (3.34)$$

Используя условие $K_I = 0$, легко получить зависимость между эффективным радиусом области отсутствия контакта и приложенным номинальным давлением.

$$\bar{p} = \begin{cases} \frac{p^* \sin(\sqrt{2}b_0)}{\sqrt{2}b_0} & \text{при } b_0 \neq 0 \\ 1 & \text{при } b_0 = 0 \end{cases}. \quad (3.35)$$

Дополнительное смещение для почти полного контакта будет определяться аналогично плоской задаче, рассмотренной в главе 2 (раздел 2.2.3):

$$\bar{\delta} = \Delta - \frac{2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{b_0} u_z(r, \theta) r dr d\theta. \quad (3.36)$$

где $u_z(r, \theta)$ — смещения поверхности фиктивной трещины. Следуя работе [123], если распределение давления, действующего на поверхность трещины, можно представить в виде (3.23), тогда $u_z(r, \theta)$ можно записать в следующем виде:

$$u_z(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{zj}(r) \cos(j\theta). \quad (3.37)$$

Интеграл в выражении (3.36) аналогичен формуле (3.11), и только нулевой член ряда (3.32) дает вклад в функцию дополнительного смещения. Для осесимметричного случая имеем [38]:

$$u_{z0}(r) = \frac{4}{\pi E^*} \int_r^{b_0} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^t \frac{\rho \left(-\bar{p} + p^* J_0(\sqrt{2}\rho) \right) d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} =$$

$$= \frac{4}{\pi E^*} \int_r^{b_0} \left(-\bar{p}t + \frac{p^* \sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} \right) \frac{dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \quad (3.38)$$

Подставляя выражение (3.38) в формулу (3.36), и учитывая независимость от θ , получим формулу для определения функции дополнительного смещения при больших значениях нагрузок

$$\bar{\delta} = \Delta - \frac{4}{\pi^2 E^*} \int_0^{b_0} \int_r^{b_0} \left(-\bar{p}t + \frac{p^* \sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} \right) \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt dr. \quad (3.39)$$

Двойной интеграл в (3.39) аналогичен интегралу в выражении (2.89) (см. глава 2, раздел 2.2.3) и формула (3.39) приводится к виду

$$\bar{\delta} = \Delta - \frac{4}{\pi^2 E^*} \int_0^{b_0} \left(-\bar{p}t + \frac{p^* \sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} \right) \int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr dt. \quad (3.40)$$

Вычисляя интегралы в (3.40), можно получить асимптотическую формулу для определения функции дополнительного смещения при больших значениях нагрузок

$$\bar{\delta} = \Delta - \frac{P^*}{2\pi^3 E^*} \left(2\sqrt{2}\pi \sin(\sqrt{2}b_0) - 4b_0\pi \cos(\sqrt{2}b_0) \right) - \frac{4b_0^2 p^*}{3\sqrt{2}\pi^2 E^*} \sin(\sqrt{2}b_0). \quad (3.41)$$

3.2 Результаты асимптотических решений задачи и сравнение с известными численными решениями

3.2.1 Зависимости интегральных контактных характеристик – площади фактического контакта и дополнительного смещения от номинального давления

Для сравнения и верификации полученных асимптотических решений было использовано численное решение задачи о внедрении двумерной синусоидальной волнистой поверхности в упругое полупространство [68], полученное методом граничных элементов.

На рис. 3.7 показаны графики безразмерной фактической площади контакта от безразмерного номинального давления. Для расчета безразмерных площадей областей контакта и областей отсутствия контакта в асимптотических решениях использовалось отношение эффективной площади (круговой области) A_r к номинальной площади (квадратной области) A_n [45]: $A_r/A_n = 2\pi a_0^2/L^2$ – для задачи о штампе (малые и умеренные нагрузки) и $A_r/A_n = 1 - (2\pi b_0^2/L^2)$ – для задачи о фиктивной трещине.

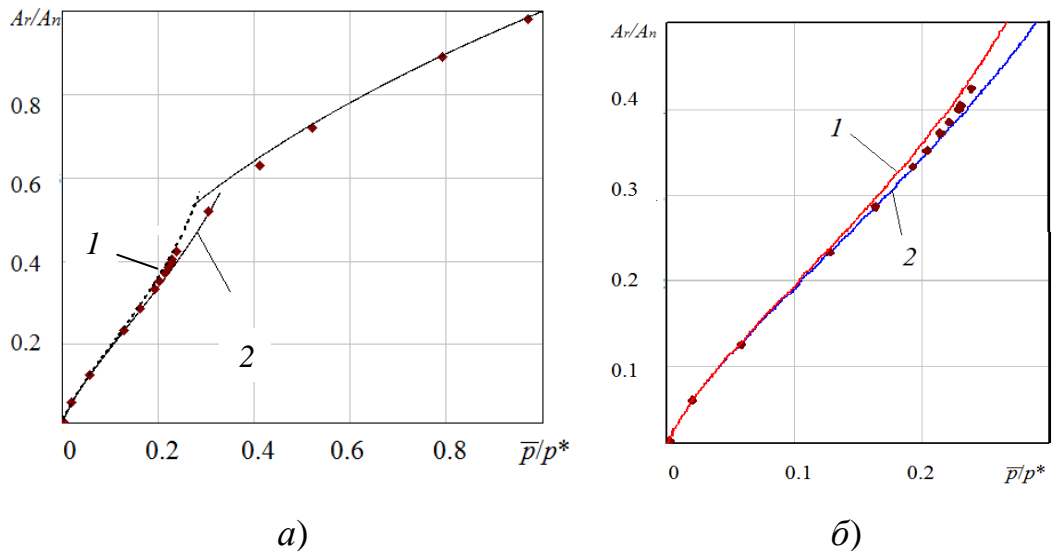


Рис. 3.7 – Зависимость фактической площади контакта от номинального давления: *a* – весь диапазон нагрузок; *б* – малые и умеренные нагрузки; сплошные линии – асимптотические решения (3.30, кривая 2) и (3.35), точки – численное моделирование [68], кривая *1* – решение без учета взаимного влияния неровностей (3.13)

На рис. 3.8 показаны графики функции среднего зазора $G = 1 - \bar{\delta}/\Delta$, где $\bar{\delta}$ – дополнительное смещение от номинального давления в сравнении с данными численного модулирования и решением Е. А Кузнецова для случая одномерной синусоидальной волнистости и упругой полуплоскости.

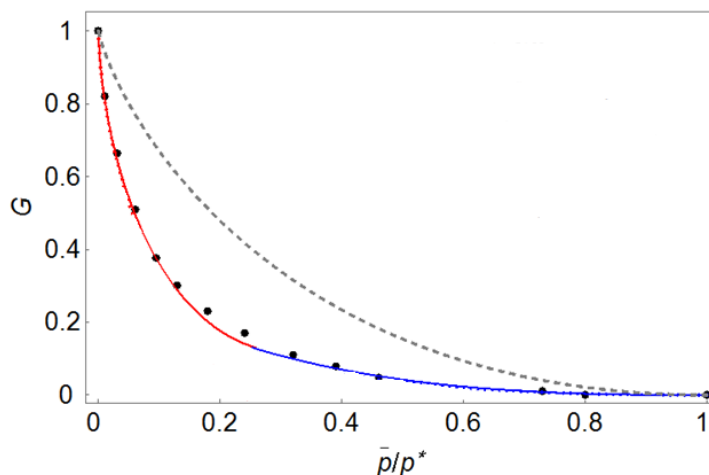


Рис. 3.8 – Графики зависимости среднего зазора от номинального давления: сплошные линии – асимптотические решения (3.15) и (3.41), точки - численное моделирование [68], штриховая линия – решение для одномерной волнистости

Из рис. 3.7 и 3.8 видно, что предложенные асимптотические решения для фактической области контакта и функции дополнительного смещения хорошо согласуются с численными результатами для малых и больших приложенных номинальных давлений, за исключением промежуточных значений, характеризующих переходный режим, когда пятна контакта сливаются [68]. Средний зазор (дополнительное смещение) поверхностей в меньшей степени зависят от взаимного влияния неровностей, что подтверждается данными рис. 3.8, где были использованы решения для единичного штампа/трещины.

Учет взаимного влияния неровностей позволяет уточнить значения фактической площади контакта для малых значений нагрузок, при этом в области умеренных нагрузок, когда происходит сначала изменение формы области контакта и потеря ее «выпуклости», а затем слияние областей

контакта численные результаты лежат между кривыми, соответствующими учету взаимного влияния и его отсутствием. При этом решения, основанные на аппроксимации реальной формы неровности параболой у вершины (впадины) [45] дают менее точные оценки, что позволяет сделать вывод о том, что для двумерной регулярной волнистой поверхности интегральные контактные характеристики в основном определяются геометрическими параметрами осесимметричной составляющей разложения функции волнистости в ряд Фурье по угловой координате.

Следует также отметить, что использование аппроксимаций уравнений (3.13) и (3.35) многочленами третьей и второй степени соответственно приводит к известным решениям [45], основанным на аппроксимации реальной формы неровности параболой у вершины (впадины).

По сравнению со случаем одномерной синусоидальной волнистости величина дополнительного смещения для двумерной синусоидальной волнистости растет более резко с увеличением приложенного давления. Контактная жесткость одномерной волнистой поверхности, при этом, значительно выше, чем двумерной для всех значений номинального давления.

3.2.2 Анализ изменения формы области контакта

На рис. 3.9 показаны области контакта при различных значениях площади фактического контакта A_r , определяемой формулой (3.18) ($L = 2\pi$).

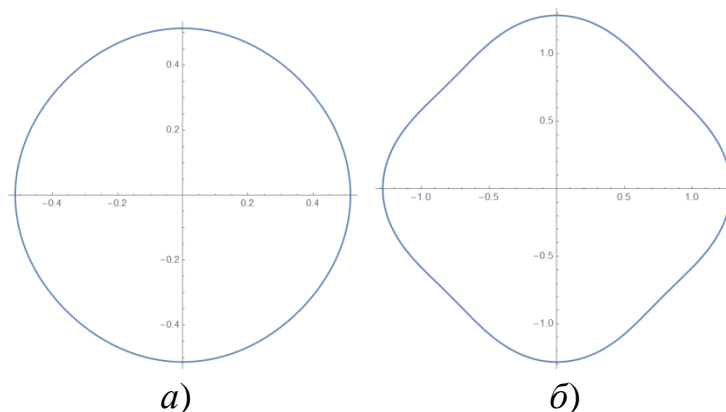


Рис. 3.9 – Области контакта $a(\theta)$, построенные по формуле (3.24) при $A_r/A_n = 0.1$ (а) и $A_r/A_n = 0.26$ (б)

Рис. 3.9 показывает, что с ростом эффективного радиуса a_0 (фактической площади контакта) область контакта меняет форму с круговой на форму, напоминающую квадрат со скругленными углами, что соответствует численным результатам [68], полученным для периодической контактной задачи. Показанная на рис. 3.9, б область контакта соответствует значению $A_r/A_n = 0.26$, в то время как данные численного моделирования показывают $A_r/A_n = 0.35$. Расхождение объяснимо влиянием соседних неровностей на изменение формы области контакта.

Интегральной характеристикой, характеризующей изменение формы области контакта, является ее длина (периметр), который для области, форма которой задана функцией в полярных координатах будет определяться известной формулой:

$$S_r = \int_0^{2\pi} \sqrt{a(\theta)^2 + \left(\frac{\partial a(\theta)}{\partial \theta}\right)^2} d\theta. \quad (3.42)$$

Для количественного сравнения результатов с данными численного моделирования [68] был построен график длины области контакта (периметра области контакта) S_r в зависимости от ее фактической площади A_r (рис. 3.10). Данные на рис. 3.10 отнесены к величинам номинальной площади

контакта A_n и $S_n = \frac{4L}{\pi\sqrt{2}}$ в целях одинакового обезразмеривания величины периметра в полярных и декартовых координатах (для сравнения с численным решением, полученным в [68]).

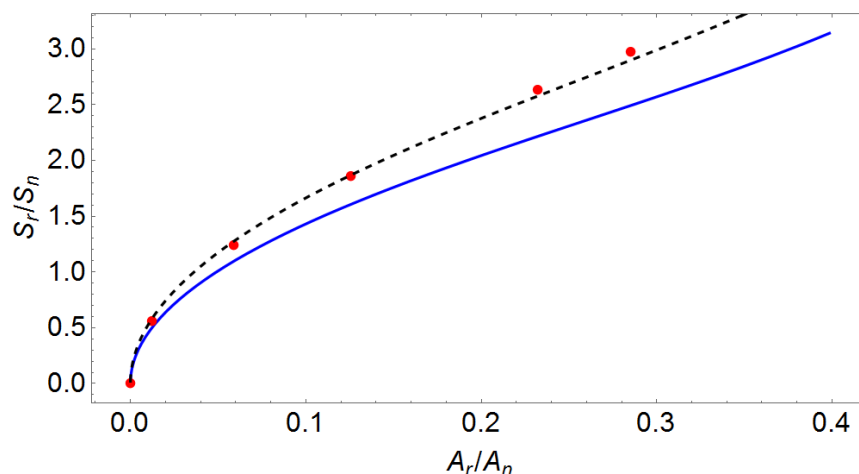


Рис. 3.10 – Зависимость длины области контакта S_r от фактической площади контакта A_r : сплошная линия – асимптотическое решение для изолированного штампа; точки – численное решение периодической задачи; штриховая линия – скорректированное асимптотическое решение с множителем 1.16

Рис 3.10 показывает, что при малых и умеренных нагрузках ($A_r/A_n < 0.3$) полученное асимптотическое решение для изолированной неровности качественно описывает изменение длины области контакта, что позволяет сделать вывод о превалирующем влиянии формы неровности на данное изменение. С применением корректирующего коэффициента удается получить и количественное совпадение результатов.

3.2.3 Анализ распределения контактных давлений

С использованием приближенного способа определения функции формы области контакта (3.19) контактное давление можно представить в виде суммы осесимметричной составляющей, определяемой выражением (3.29), и малого отклонения от нее:

$$p(r, \theta) \approx p_0(r_0, a_0) + \delta p(r_0, a_0, \theta). \quad (3.43)$$

Для определения второго слагаемого в формуле (3.43) будем использовать метод наложений [124, 125], суть которого состоит в нахождении вспомогательного плоского напряженного/деформированного состояния, соответствующего искомому пространственному состоянию. Вспомогательные перемещения внутри области контакта будут определяться формулой [124] с учетом представления функции формы неровности в виде (3.23):

$$\left. \frac{du_{\tilde{y}}(\tilde{x})}{d\tilde{x}} \right|_{j=2} = -2\Delta \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} \int_0^{\tilde{x}} T_4 \left(\frac{\tilde{x}}{r} \right) \frac{J_4(\sqrt{2}r) r dr}{\sqrt{\tilde{x}^2 - r^2}} = -\Delta \left(2\tilde{x} - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\tilde{x}) \right), \quad (3.44)$$

где \tilde{x}, \tilde{y} - вспомогательные координаты двумерного деформированного состояния.

Контактные давления для вспомогательного плоского деформированного состояния определяются согласно формуле (2.54), см. глава 2:

$$\tilde{p}_4(\tilde{x}) = -\frac{E^* \Delta}{2\pi} \sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{x}^2} \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} \left(2\tilde{x} - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\tilde{x}) \right) \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{\xi}^2}} \frac{1}{\tilde{\xi} - \tilde{x}} d\tilde{\xi}, \quad (3.45)$$

Значения интеграла в (3.45) вычисляются аналитически при разложении первого множителя в подынтегральном выражении в ряд Тейлора. Оставляя только два члена разложения, получим:

$$\tilde{p}_4(\tilde{x}) \approx -\frac{E^* \Delta}{240} \sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{x}^2} \left(3\tilde{a}^4 + 4\tilde{a}^2(\tilde{x}^2 - 10) + 8\tilde{x}^2(\tilde{x}^2 - 10) \right). \quad (3.46)$$

Для нахождения пространственного распределения давления используется обратное преобразование между вспомогательным (плоским) и действительным (пространственным) контактным давлением, математически представляющее собой обратное преобразование Радона [124, 126].

$$\delta p(r_0, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-r(\theta)}^{r(\theta)} \tilde{p}_4(\tilde{x}) T_4 \left(\frac{\tilde{x}}{r(\theta)} \right) \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{r(\theta)^2 - \tilde{x}^2}} \cos(4\theta) + C, \quad (3.47)$$

где $p(r_0, \theta) \rightarrow 0$ при $r(\theta) \rightarrow a(\theta)$,

$$r(\theta) = r_0 - \frac{\cos 4\theta}{r_0^4} \left(7r_0^3 - 24r_0 - \sqrt{2}r_0^2 (r_0^2 - 12) \operatorname{ctg}(\sqrt{2}r_0) + 12\sqrt{2} \operatorname{tg} \left(\frac{r_0}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

На рис. 3.11 показаны пространственные распределения давлений при различном значении фактической площади контакта.

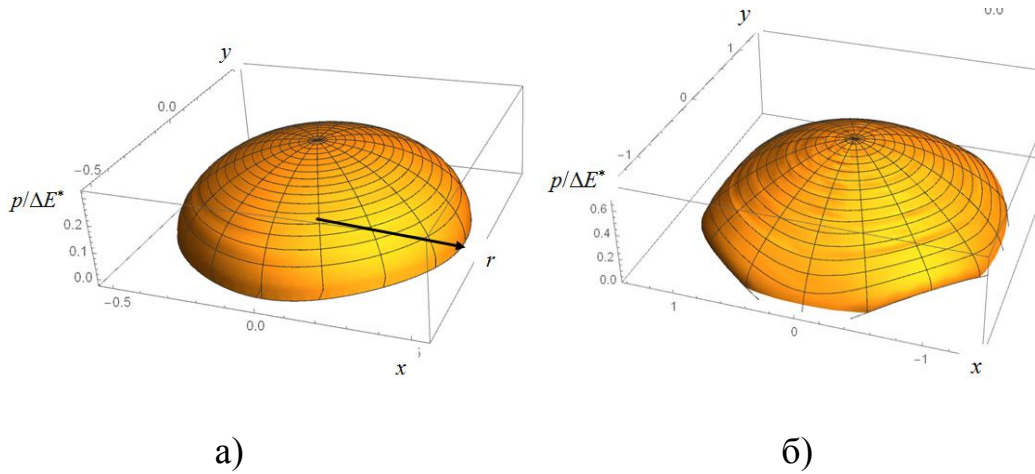


Рис. 3.11 – Распределения контактного давления при контакте двумерной волнистой поверхности и упругого полупространства:

$$a - A_r/A_n = 0.04; \quad б - A_r/A_n = 0.26;$$

Распределение давления преобразуется вместе с формой области контакта, так как форма неровности с увеличением глубины внедрения уже не может считаться осесимметричной. Представляет интерес сравнения распределения давлений в различных сечениях с распределением Вестергаарда, характерного для одномерной волнистой поверхности. На рис. 3.12 показано

сравнение распределений давлений при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/8$ с распределением Вестергаарда, с учетом поправочного коэффициента при максимальном давлении в начале координат и совпадении границы области контакта.

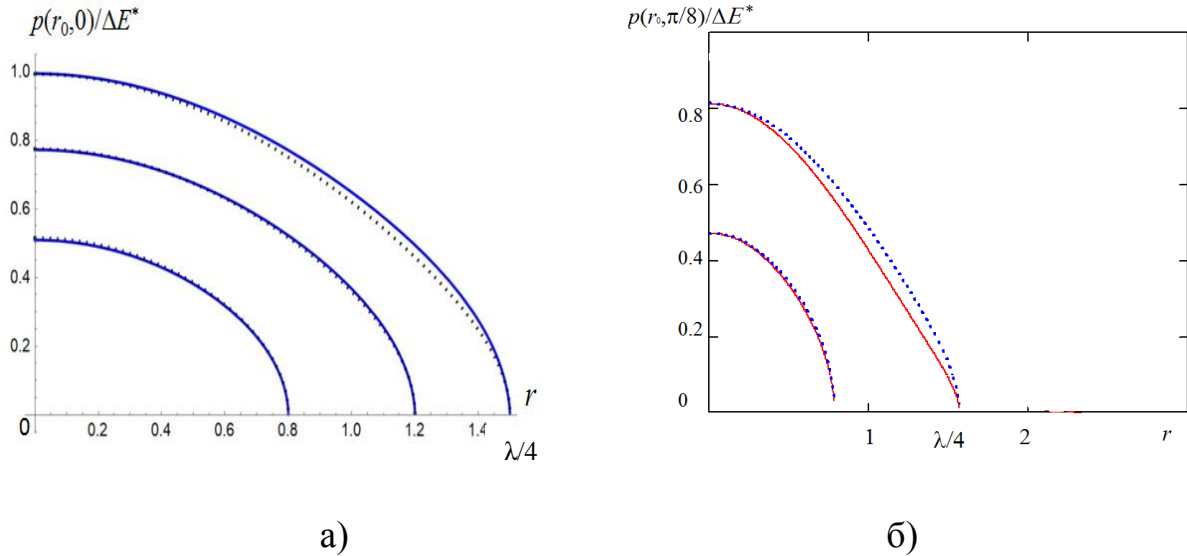


Рис. 3.12 – Распределения контактных давлений в сравнении с распределением Вестергаарда при $\theta = 0$ (а) и $\theta = \pi/8$ (б)

Рис. 3.12. показывает, что при $\theta = 0$ распределение давлений в пространственном (сплошные линии) и плоском (точки) случаях практически совпадают по форме во всем диапазоне рассмотренных нагрузок (значений ФПК). Для $\theta = \pi/8$ давление в пространственном случае (точки) начинает существенно превышать давление Вестергаарда (сплошные линии), когда форма области контакта становится некруговой. Это хорошо согласуется с результатами численного анализа, проведенного в работе [68].

На рис. 3.13 показаны графики максимального контактного давления (с учетом взаимного влияния по методу локализации), соответствующие двумерной и одномерной волнистости.

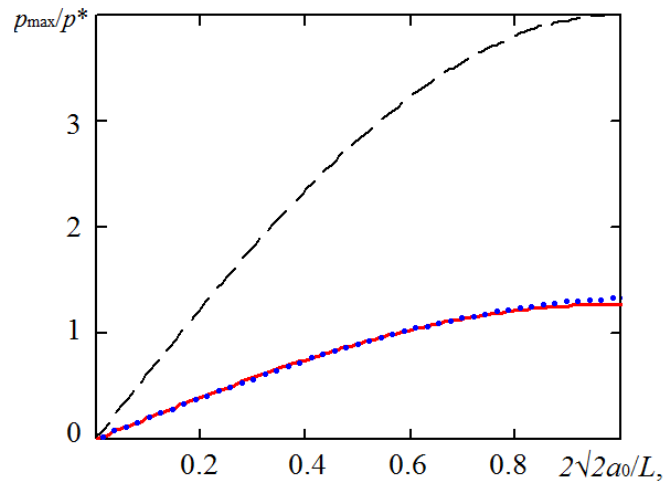


Рис. 3.11 – Зависимости максимального контактного давления p_{\max} от радиуса эффективной круговой области контакта a_0 (точки) в сравнении с решением для одномерной волнистости (штриховая линия) и с решением Вестергаарда с учетом поправочного коэффициента (сплошная линия)

Рис. 3.11 показывает, что характер кривых для максимального контактного давления в зависимости от радиуса/полудлины области контакта в двумерном и одномерном случаях одинаков практически во всем диапазоне приложенных нагрузок. Умножение на поправочный коэффициент $2/\pi$ позволяет получить совпадение числовых результатов.

3.2.4 Алгоритм анализа контактных характеристик для рельефа несинусоидальной формы

Для приближенного расчета контактных характеристик при внедрении пространственного волнистого несинусоидального рельефа в упругое полупространство при равенстве периодов в продольном и поперечном направлениях необходимо осуществить следующие операции:

1. Выполнить переход от декартовых к цилиндрическим координатам в выражении для функции формы рельефа.

2. Представить функцию формы рельефа в виде ряда по угловой координате:

$$f(r, \theta) = \sum_{j=-N}^N f_j(r) e^{ij\theta}, \quad (3.48)$$

где N – число удержанных членов ряда.

3. Определить осесимметричную составляющую рельефа (при $j = 0$) и малое отклонение от нее с использованием соотношения

$$f_j(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) e^{-ij\theta} d\theta. \quad (3.49)$$

4. Рассчитать контактные характеристики с использованием методики, описанной в разделах 3.1.1 – 3.1.5.

Следует, однако, отметить, что решение задачи для пространственного рельефа (непрерывная функция контактного давления) возможно при выполнении условия разрешимости [23]:

$$|\Delta f(x, y)| < A \left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right)^\alpha; \quad 0 < \alpha < 1., \quad (3.50)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, A – постоянная величина.

3.3 Выводы по главе 3

Разработан метод, позволяющий получить асимптотические решения задачи о внедрении пространственного волнистого синусоидального рельефа в упругое полупространство для определения интегральных контактных характеристик – площади фактического контакта и функции дополнительного смещения от номинального давления на основе разложения функции формы поверхности в ряд Фурье в цилиндрических координатах.

Для определения интегральных характеристик в случае малых и умеренных нагрузок рассматривается задача о вдавливании синусоидального штампа, имеющего форму двумерной волнистости в упругое полупространство в допущении эффективной «фиктивной» круговой области контакта. Взаимное влияние выступов учитывается с применением метода локализации.

В случае больших нагрузок получено решение задачи методами механики разрушения, рассматривая область отсутствия контакта как круговую фиктивную трещину с эффективным радиусом под действием неосесимметричного давления.

Получена аналитическая зависимость для изменения формы фактической области контакта в области умеренных нагрузок, рассматривая малое отклонение формы синусоидального штампа от осесимметричной и применяя условие максимума приложенной внешней нагрузки как функции фактической площади области контакта.

На основе метода наложений и функции формы области контакта определено малое отклонение распределения контактного давления от осесимметричного при изменении формы области контакта. Проведено сравнение распределения контактных давлений, соответствующих двумерному и одномерному случаям. Анализ полученных результатов дает возможность сделать следующие выводы:

- Интегральные контактные характеристики в основном зависят от геометрии осесимметричной составляющей функции формы двумерной волнистой поверхности, причем форма рельефа оказывает существенное влияние на контактные характеристики, что ограничивает использование квадратичной аппроксимации формы неровности случаями очень малых и очень больших нагрузок.

- Средний зазор (дополнительное смещение) поверхностей в меньшей степени зависит от взаимного влияния неровностей, чем фактическая площадь контакта.
- Учет взаимного влияния с использованием метода локализации позволяет уточнить значения фактической площади контакта для умеренных значений нагрузок.
- При малых и умеренных нагрузках полученное асимптотическое решение качественно описывает изменение длины области контакта, что позволяет сделать вывод о превалирующем влиянии формы неровности на изменение формы области контакта.
- При малых значениях нагрузок вид распределения контактного давления для плоского и пространственного случая совпадают при любом значении угловой координаты θ , пока форма области контакта остается круговой. С ростом нагрузки и соответственно площади фактического контакта распределение давлений в пространственном случае при $\theta = 0$ совпадает с плоским по форме, а при $\theta = \pi/8$ превышает его при всех значениях радиальной координаты.
- вид зависимости максимального контактного давления от радиуса «эффективной» области контакта в пространственном случае совпадает практически во всем диапазоне приложенных нагрузок (значений ФПК) с зависимостью максимального контактного давления от полудлины области контакта в плоском случае.

Следует также отметить, что указанные в данной главе результаты могут быть использованы для уточнения моделей контакта шероховатых тел [127].

ГЛАВА 4. ЭФФЕКТ НЕРОВНОСТЕЙ ВТОРОГО МАСШТАБНОГО УРОВНЯ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОВЕРХНОСТИ С РЕГУЛЯРНЫМ РЕЛЬЕФОМ И ПОЛУПЛОСКОСТИ

4.1 Постановка и решение контактной задачи для двухуровневой волнистой поверхности и упругой полуплоскости в условиях односвязной области контакта

4.1.1 Постановка, точное и асимптотическое решение задачи

Схема контакта для двухуровневой волнистой поверхности и упругой полуплоскости на одном периоде изображена на рис. 4.1.

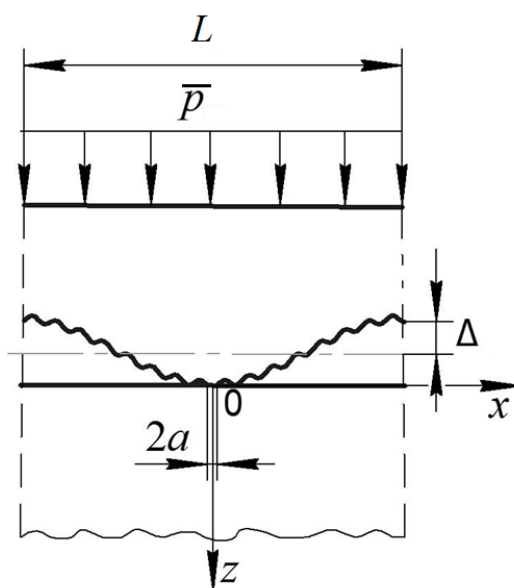


Рис. 4.1 – Схема контакта двухуровневой волнистой поверхности и упругой полуплоскости

Рассматриваемая задача является периодической; предполагается бесконечное число зон контакта. К контактирующим поверхностям приложено номинальное давление \bar{p} . В качестве допущения примем, что

контакт реализуется на одном отрезке $x \in [-a, a]$; $2a \leq L$ (односвязная область контакта). Начальный контакт волнистой поверхности и полуплоскости происходит в одной зоне контакта.

Примем, что $L = 2\pi$, а функция формы волнистой поверхности состоит из двух членов тригонометрического ряда:

$$f(x) = \Delta(k_1 \cos(n_1 x) + k_2 \cos(n_2 x)), \quad (4.1)$$

где Δ и L – амплитуда и период гармоники с наименьшей угловой частотой, $n_{1,2}$ и $k_{1,2}$ – частотные и амплитудные коэффициенты для 1-ой и 2-й гармоники соответственно ($n_{1,2} \in \mathbb{N}$, $k_{1,2} \in \mathbb{Q}$).

Задача рассматривается в рамках гипотезы плоского деформированного состояния и малых деформаций. Влиянием сил трения на распределение нормальных давлений пренебрегается. Далее для простоты примем $k_1 = 1$ и $n_1 = 1$, $k_2 = k$ и $n_2 = n$. Для удовлетворения допущений о малости деформаций и односвязности зоны контакта на одном периоде необходимо выполнение следующих условий: $\Delta \ll L$; $k_2 \ll 2\pi/n_2$. Принимая во внимание сделанные допущения, выражение (4.1) можно записать в следующем виде

$$f(x) = \Delta(\cos(x) + k \cos(nx)). \quad (4.2)$$

Основное уравнение периодической контактной задачи имеет вид (см. глава 2, раздел 2.1.1):

$$\frac{E^*}{2} \frac{\partial h(x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a p(\xi) \operatorname{ctg} \frac{x-\xi}{2} d\xi. \quad (4.3)$$

В интегральном уравнении (4.3) функция зазора внутри отрезка контакта $x \in [-a, a]$ определяется условием контакта:

$$h(x) = \delta - \Delta(1 - \cos x + k(1 - \cos nx)), \quad (4.4)$$

Так как область контакта не известна заранее, замыкает систему уравнений (4.3) и (4.4) уравнение равновесия

$$\bar{p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a p(x) dx. \quad (4.5)$$

Воспользовавшись результатами общего решения периодической контактной задачи с неизвестными границами зоны контакта (формулы (2.25) и (2.26), см. глава 2) допуская суперпозицию решений для отдельных гармоник, что обусловлено допущением односвязности области контакта получим выражения для контактного давления и связи номинального давления и размера области контакта.

$$p(x) = \frac{\Delta E^*}{2\sqrt{2}} \left| \cos \frac{x}{2} \left(\int_x^a \frac{\sin \xi d\xi}{\sqrt{\cos x - \cos \xi}} + kn^2 \int_x^a \frac{\sin \xi P_{n-1}^{0,1}(\cos \xi) d\xi}{\sqrt{\cos x - \cos \xi}} \right) \right|. \quad (4.6)$$

$$\bar{p} = -\frac{\Delta E^*}{2} \left(P_1^{-1,0}(\cos a) + knP_n^{-1,0}(\cos a) \right), \quad (4.7)$$

где E^* - приведенный модуль упругости контактирующих тел.

При $n = 1$ первое слагаемое в (4.6) и (4.7) представляют собой решение Вестергаарда [34] и с использованием свойств многочленов Якоби упрощаются следующим образом:

$$p(x) = \frac{\Delta E^*}{2\sqrt{2}} \left| \cos \frac{x}{2} \left(2\sqrt{\cos x - \cos a} + kn^2 \int_x^a \frac{\sin \xi P_{n-1}^{0,1}(\cos \xi) d\xi}{\sqrt{\cos x - \cos \xi}} \right) \right|. \quad (4.8)$$

$$\bar{p} = \frac{\Delta E^*}{2} \left(\sin^2 \frac{a}{2} - knP_n^{-1,0}(\cos a) \right), \quad (4.9)$$

Функция дополнительного смещения определяется в соответствии с общей формулой (2.51) и (2.52) (см. глава 2).

$$\bar{\delta} = \frac{\Delta}{E^*} \left(\sin^2 \frac{a}{2} \left(1 - 2 \ln \left(\sin \frac{a}{2} \right) \right) + 2knP_n^{(-1,0)}(\cos a) \ln \left(\sin \frac{a}{2} \right) - k \left(P_n^{(0,-1)}(\cos a) - 1 \right) \right). \quad (4.10)$$

Асимптотическое решение задачи при малых нагрузках можно получить, рассматривая форму изолированного выступа рельефа в рамках непериодической контактной задачи. Задаче для единичного выступа соответствует интегральное уравнение с ядром Коши (см. глава 2, п. 2.2.1):

$$\frac{E^*}{2}(\Delta(\sin x + kn \sin nx)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{p(\xi)}{x - \xi} d\xi. \quad (4.11)$$

Представив функцию $\sin(nx)$ в виде разложения по многочленам Чебышева (см. глава 2, п. 2.2.2), и с использованием принципа суперпозиции можно получить решение для двухуровневого синусоидального штампа.

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x); \quad \bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2. \quad (4.12)$$

$$p_{1,2}(x) = \Delta n_{1,2} k_{1,2} \sqrt{1 - (x/a)^2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{-j} J_{2j+1}(an_{1,2}) U_{2j}(x/a), \quad (4.13)$$

где $n_1 = 1$ и $k_1 = 1$, $U_i(x)$ – многочлен Чебышева второго рода степени i ; $J_k(x)$ – функция Бесселя первого рода целого порядка k .

Использование уравнения равновесия (4.5) для асимптотического решения (4.12) и (4.13) позволяет определить связь между номинальным давлением и длиной области контакта

$$\bar{p} = \frac{\Delta E^* a}{4} (J_1(a) + kn J_1(an)). \quad (4.14)$$

4.1.2 Результаты расчета контактных характеристик

На рис. 4.2. показана эволюция безразмерного распределения контактного давления $\tilde{p} = p(x)/p^*$, где ($p^* = \pi E^* \Delta/L$, $L = 2\pi$) для двухуровневой волнистой поверхности, при внедрении в полуплоскость при разных значениях параметров n и k и номинальных давлениях \bar{p}/p^* (в связи с симметрией относительно оси $x = 0$ показана лишь область $x \geq 0$).

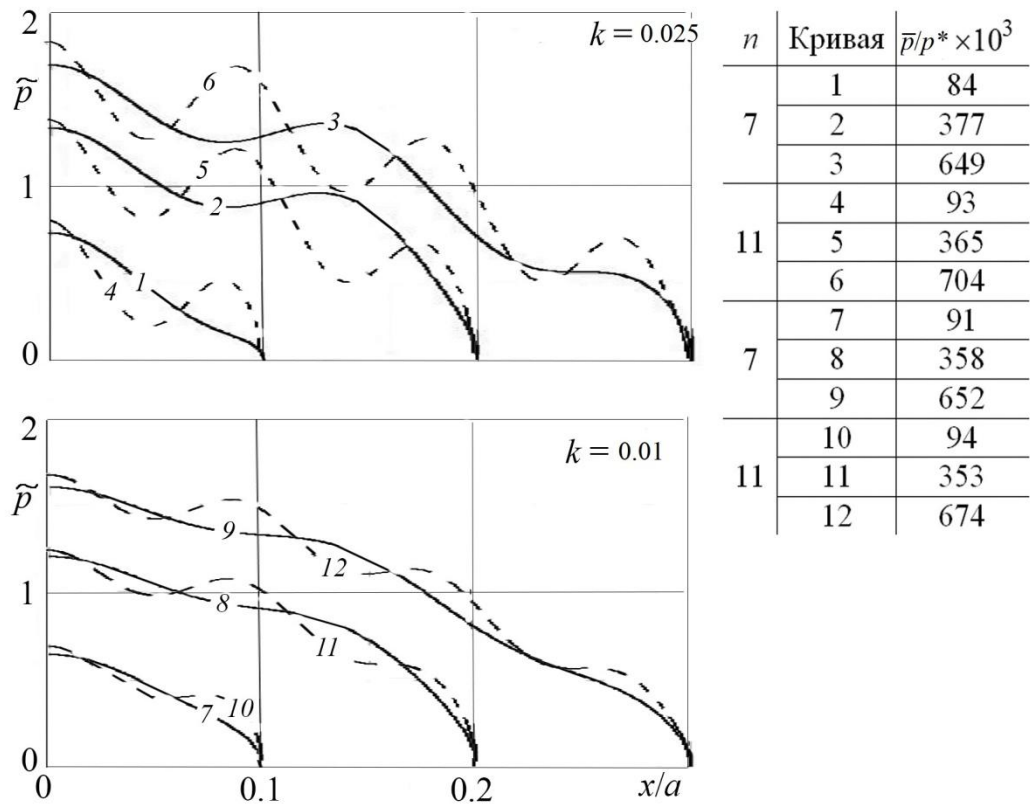


Рис. 4.2 – Графики распределения давления при контакте двухуровневой волнистой поверхности и полуплоскости в условиях односвязной области контакта

Графики, представленные на рис. 4.2, показывают, что осцилляция давлений, связанная с наличием неровностей второго уровня, неравномерна в пределах зоны контакта и наиболее выражена в центре зоны, что связано с наиболее плотным расположением неровностей вблизи начала координат. При этом вид эпюры и число ее пиков в значительной степени зависят от плотности контакта, определяемой величиной n . С ростом длины области контакта $2a$ возрастает число максимумов распределения давления, так как большее число неровностей второго уровня входит в контакт. Уменьшение параметра k , соответствующее уменьшению амплитуды неровностей второго

уровня, линейно снижает составляющую контактного давления, связанную с неровностями второго уровня.

Кривые «номинальное давление – длина зоны контакта» для двух профилей, рассчитанные из точной (4.9) и асимптотической (4.14) формул, представлены на рис. 4.3.

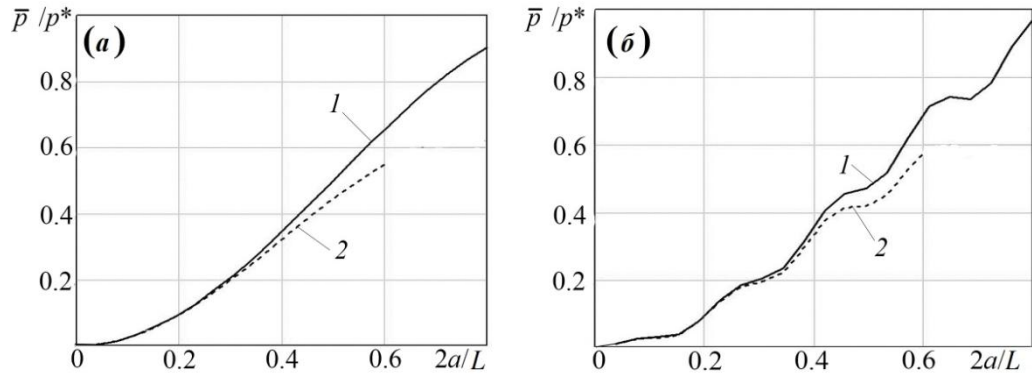


Рис. 4.3 – Графики зависимостей безразмерного номинального давления от безразмерной длины области контакта ($L = 2\pi$, $\Delta = 0,5$): $f(x) = \Delta \cos(x)$ (а); $f(x) = \Delta \cos(x) + 0,02\Delta \cos(11x)$ (б); 1 – точное решение, 2 – асимптотическое решение

Из рис. 4.3 видно, что при малых нагрузках ($2a < 0,25L$) точное и асимптотическое (без учета взаимного влияния) решения совпадают. Совпадение участков графиков при этом не зависит от геометрии профиля. С увеличением нагрузки взаимное влияние выступов первого масштабного уровня приводит к меньшей длине области контакта. Для профиля с двумя гармониками в рамках односвязной области контакта, наблюдаются осцилляции кривых «длина области контакта – номинальное давление» (см. рис. 4.3, б).

На рис. 4.4 показаны зависимости максимального контактного давления (при $x = 0$) от номинального давления для одноуровневой и двухуровневой волнистой поверхностей.

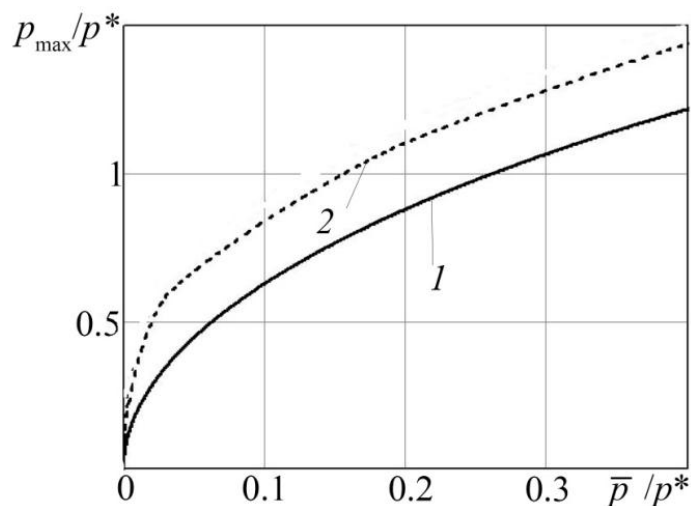


Рис. 4.4 – Зависимость максимального давления от номинального давления при различных профилях волнистости ($L = 2\pi$, $\Delta = 0,5$):

$$f(x) = \Delta \cos(x) \quad (1); \quad f(x) = \Delta \cos(x) + 0,02\Delta \cos(11x) \quad (2)$$

Из рис. 4.4 видно, что зависимости максимального давления от номинального давления не имеют осциллирующего характера для профиля с двумя уровнями неровностей. При этом перегиб на графике, соответствующему двухуровневому профилю (кривая 2) возникает вследствие перехода от контакта одной неровности к контакту нескольких неровностей при условии односвязной области контакта.

На рис. 4.5. показаны графики функции фактической длины области контакта и дополнительного смещения от номинального давления для одноуровневого и двухуровневого профилей волнистости.

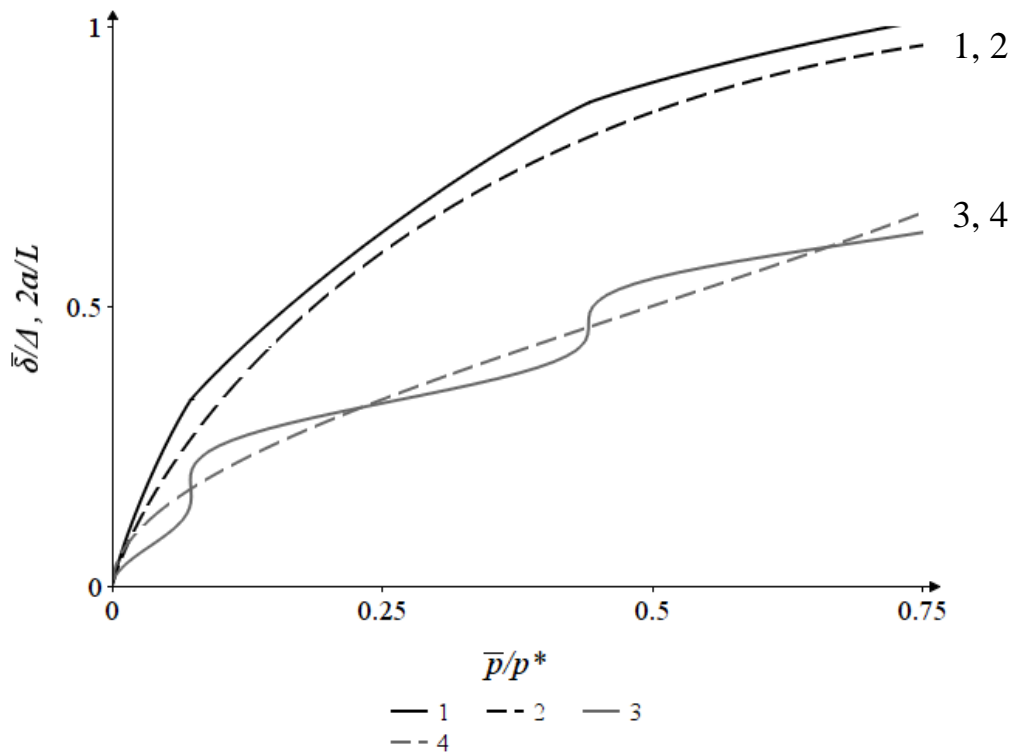


Рис. 4.5 – Дополнительное смещение полуплоскости (1, 2) и длина области контакта (3, 4) в зависимости от номинального давления при

различных профилях волнистости ($L = 2\pi$, $\Delta = 1$):

$$f(x) = \Delta \cos(x) + 0,05\Delta \cos(7x) \quad (1, 3); \quad f(x) = \Delta \cos(x) \quad (2, 4)$$

Из рис. 4.5. следует, что функция дополнительного смещения для двухуровневой волнистой поверхности имеет осциллирующий характер с ростом номинального давления, однако амплитуда этих осцилляций меньше, чем для кривой фактической области контакта. При этом осцилляция функции дополнительного смещения происходит не относительно кривой, соответствующей одноуровневому профилю, а около некоторой средней кривой, т.е. общая податливость многоуровневого профиля при односвязной области контакта растет, а площадь фактического контакта, формируемая неровностями второго уровня, при этом в среднем не меняется. Этот результат также можно трактовать следующим образом – при наличии неровностей второго уровня малой амплитуды, средний зазор между поверхностями будет меньше приблизительно при той же (в среднем)

внешней нагрузке. Также наличие неровностей второго уровня приводит к увеличению энергии упругой деформации.

На рис. 4.6. показана относительная разность дополнительных смещений $\varepsilon\bar{\delta} = \frac{\bar{\delta} - \bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_1}$ для двухуровневого и одноуровневого профиля волнистости с ростом номинального давления.

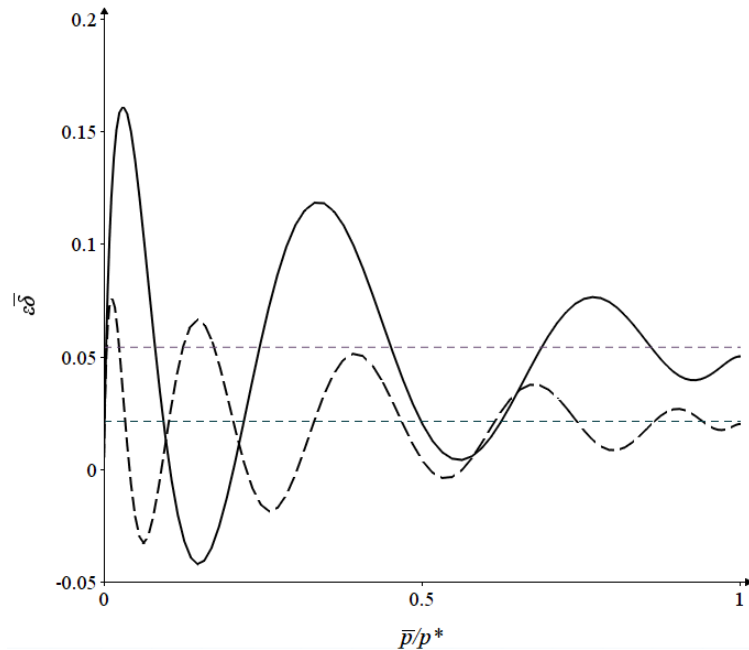


Рис. 4.6 – Относительная разность дополнительных смещений для двухуровневого и одноуровневого профиля с ростом номинального давления ($L = 2\pi$, $\Delta = 1$): $k = 0.05$, $n = 7$ (сплошная линия); $k = 0.02$, $n = 11$ (штриховая линия)

Как видно из рис. 4.6., наибольшее влияние на разность дополнительных смещений вносит амплитуда гармоники неровностей второго уровня. Амплитуда колебаний разности дополнительных смещений, о.е. вклад второй гармоники неровностей падает с ростом номинального давления. Прямые, параллельные оси абсцисс обозначают средние значения $\varepsilon\bar{\delta}$ за весь период нагружения. Эти значения, как следует из рис. 4.6., близки к значению $\varepsilon\bar{\delta}_c$, возникающему при полном контакте ($2a = L$). Рассматривая выражение (4.10) при $a = \pi$ получим:

$$\bar{\delta}_c = \frac{\Delta}{E^*} (1+k). \quad (4.15)$$

Таким образом, наибольшее влияние на дополнительное смещение полуплоскости с ростом приложенного номинального давления в рамках односвязной области контакта оказывает амплитуда гармоник неровностей.

Представляет также интерес разница между вкладом неровностей второго уровня в зависимость длины фактической области контакта от номинального давления при четном и нечетном n . На рис. 4.7 показаны графики влияния гармоник неровностей с различным n и $k = 1$ на связь полудлины области контакта a с составляющей номинального давления \bar{p}_2 .

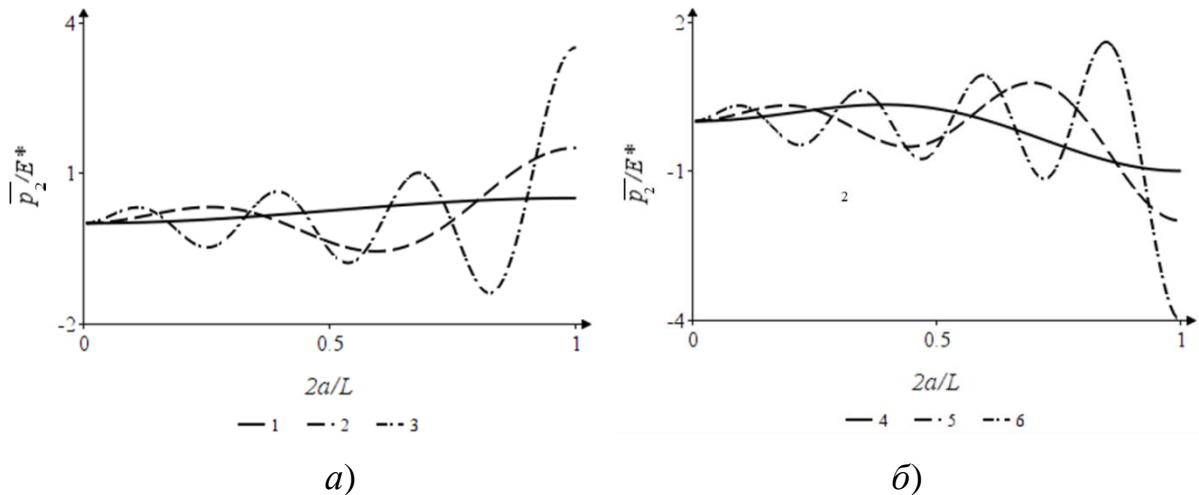


Рис. 4.7 – Влияние гармоник неровностей с различным частотным коэффициентом n на связь полудлины области контакта с составляющей номинального давления \bar{p}_2 : a – нечетные значения; b – четные значения; 1 – $n = 1$; 2 – $n = 3$; 3 – $n = 7$; 4 – $n = 2$; 5 – $n = 4$; 6 – $n = 8$

Рис. 4.7 показывает, что при наличии в Фурье-спектре рельефа поверхностей низких частот длина фактической области контакта будет непрерывно меняться с ростом номинального давления, так как амплитуда колебаний величины \bar{p}_2 при фиксированном a мала. При приближении к полному контакту влияние высокочастотных (мелкомасштабных)

составляющих неровностей резко возрастает. Причем для нечетных гармоник номинальное давление, необходимое для дальнейшего сжатия тел резко возрастает, а для четных, наоборот, снижается.

В качестве примера влияния четного и нечетного n фактическую длину области контакта рассмотрим две двухуровневые волнистые поверхности, показанные на рис. 4.8. Профили отличаются частотным коэффициентом второй гармоники.

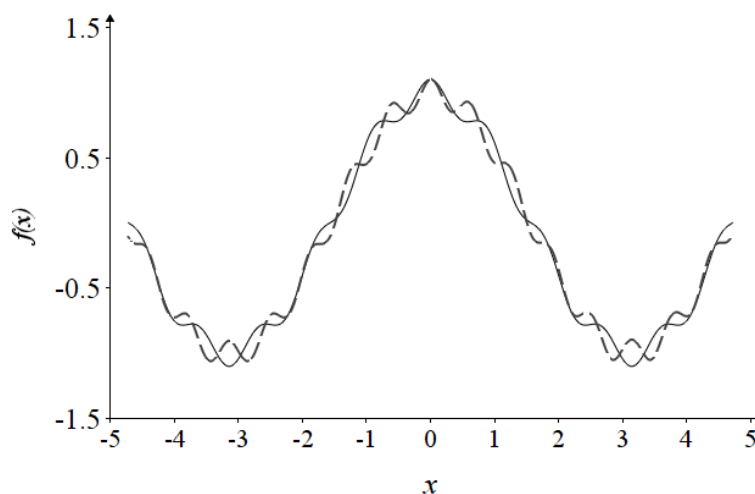


Рис. 4.8 – Двухуровневые волнистые поверхности при $\Delta = 1$; $L = 2\pi$; $k = 0.1$;
 $n = 7$ (сплошная линия) и $n = 10$ (штриховая линия)

Для поверхностей, изображенных на рис. 4.8, были построены графики зависимости длины фактической области контакта от номинального давления (рис. 4.9).

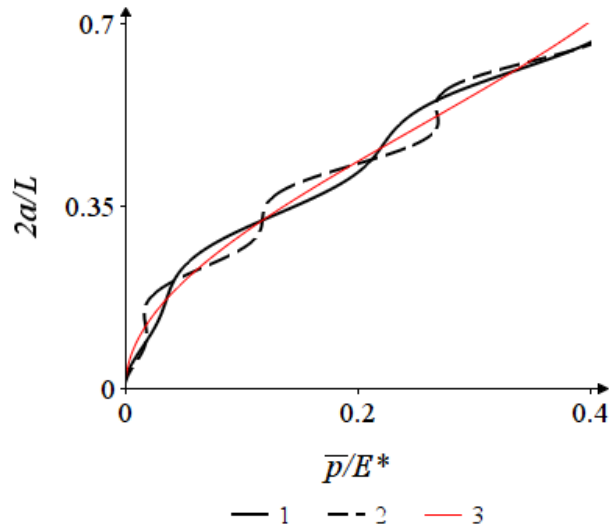


Рис. 4.9 – Зависимость длины области фактического контакта для двухуровневых волнистых поверхностей от номинального давления при $k = 0.03$; $n = 7$ (1) и $n = 10$ (2) в сравнении с одноуровневой волнистостью (3)

Из рис. 4.9. видно, что с ростом частотного коэффициента гармоники неровностей второго уровня поведение кривой длины фактической области контакта от номинального давления становится более немонотонным и стремится к скачкообразному, что характерно для перехода от одной области контакта к дискретным пятнам. Для четного и нечетного n точки перегиба кривой отличаются, при этом амплитуда осцилляций величины $2a$ растет с ростом номинального давления. Однако, следует отметить, что при четном n рассматриваемая модель не позволяет рассчитать длину фактической области контакта при приближении к полному контакту, так как область контакта у впадины профиля не является односвязной (см. рис. 4.8).

4.2 Контакт волнистого цилиндра и упругой полуплоскости

4.2.1 Постановка и решение задачи о контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости при различных схемах начального касания

При увеличении амплитуды и/или угловой частоты волнистости второго уровня ровно, как и при изменении ее фазы, область контакта перестает быть односвязной и «распадается» на дискретные отрезки (рис. 4.10). Таким образом возникает локальная связность областей контакта внутри одного периода.

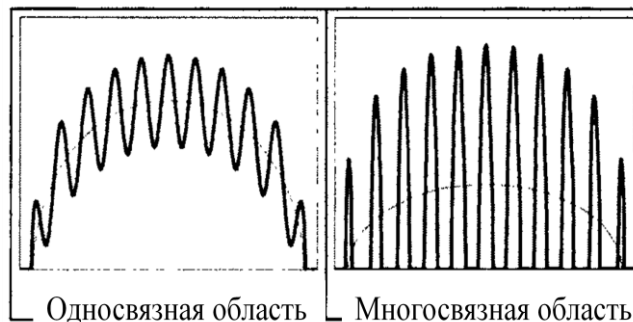


Рис. 4.10 – Виды конфигураций области контакта на одном периоде

Данную задачу удобно анализировать в неперiodической постановке, рассматривая параболическую (цилиндрическую) форму неровностей первого уровня. Рассмотрим контакт волнистого цилиндра и упругой полуплоскости (рис. 4.11) при различной фазе неровностей волнистости.

Функция профиля поверхности волнистого цилиндра определяется следующим выражением:

$$f(x) = \frac{x^2}{2R} + \Delta \cos(nx + \psi) + C_0, \quad (4.16)$$

где R – радиус цилиндра; Δ , n – амплитуда и угловая частота волнистости; ψ – фаза, рассмотрены случаи $\psi = 0$ (рис. 4.11, а) и $\psi = \pi$ (рис. 4.11, б); C_0 – константа, определяющая отсутствие зазора в зоне касания.

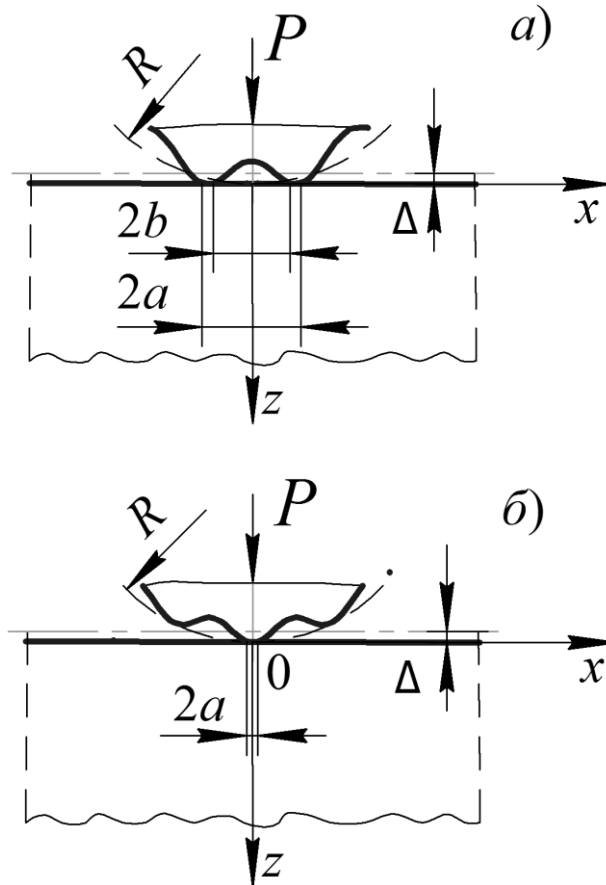


Рис.4.11 – Схема контакта волнистого цилиндра и упругой полуплоскости при $\psi = 0$ (а) и $\psi = \pi$ (б)

В качестве допущений примем, что амплитуда Δ существенно меньше периода волнистости $2\pi/n$, который, в свою очередь, значительно меньше радиуса цилиндра R . Влиянием сил трения и межмолекулярных сил на распределение контактных напряжений в задаче пренебрегается.

Рассмотрим сначала случай $\psi = 0$ (см. рис. 4.11, а). Изначально в контакт вступают две неровности, положение которых зависит от геометрических параметров цилиндра и волнистости. Начало координат расположим в центре впадины между неровностями.

Запишем интегральное уравнение контактной задачи для двухсвязной области [11]:

$$h'(x) = \frac{2}{\pi E^*} \int_L \frac{p(\xi) d\xi}{x - \xi}, \quad (4.17)$$

где функция зазора $h(x) = \delta - f(x)$, δ – величина сближения двух тел; L – множество зон контакта, в данном случае $L = L_1 \cup L_2$; $L_1 = [-a, -b]$, $L_2 = [b, a]$; E^* – приведенный модуль упругости материалов контактирующих тел.

Решение уравнения (4.17) для двух зон контакта с неизвестными границами имеет следующий вид [128]:

$$p(x) = \frac{E^* \sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}}{2\pi} \int_L \frac{h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}(\xi - x)}, \quad \forall x \in L \quad (4.18)$$

Так как функция формы профиля $f(x)$ при $\psi = 0$ четная, то уравнение (4.17) можно переписать в виде [129]:

$$\frac{2}{\pi E^*} \int_b^a \ln \frac{1}{|x^2 - \xi^2|} p(\xi) d\xi = \delta - f(x), \quad b < x < a, \quad (4.19)$$

а решение (4.18) как [128]:

$$p(x) = \frac{E^* x \sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}}{\pi} \int_b^a \frac{h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}(\xi^2 - x^2)}, \quad b < x < a. \quad (4.20)$$

Граничные точки (a и b), в которых контактное давление $p(x)$ обращается в нуль, связаны выражением, которое получается из общих условий, рассмотренных в [130] для существования ограниченного решения на всех концах линии интегрирования L :

$$\int_b^a \frac{h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} = 0, \quad (4.21)$$

Суммарная нагрузка P для двух зон контакта находится из уравнения равновесия

$$P = \int_L p(x) dx. \quad (4.22)$$

С использованием (4.18), (4.22) и равенства М. Рисса для повторных интегралов с одним сингулярным интегралом [131] при удовлетворении функцией $h'(x)$ условия Гёльдера имеем

$$P = \frac{E^*}{2\pi} \int_L \frac{h'(\xi)}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} \int_L \frac{\sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}}{\xi - x} dx d\xi, \quad \forall x \in L \quad (4.23)$$

Вычисление внутреннего интеграла в (4.23) дает выражение для полной нагрузки.

$$P = E^* \int_b^a \frac{\xi^2 h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}}. \quad (4.24)$$

Таким образом, выражения (4.21) и (4.24) необходимы для определения граничных точек (концов) областей контакта.

При выполнении условия $\Delta \ll 2\pi/n$ функция (4.16), описывающая форму волнистого цилиндра, может быть с достаточной точностью представлена рядом Тейлора 6-й степени. Тогда производная функции зазора $h'(x)$ будет иметь вид:

$$h'(x) = -A_1 x^5 + A_2 x^3 + A_3 x, \quad (4.25)$$

$$\text{где } A_1 = \frac{\Delta n^6}{120}; \quad A_2 = \frac{\Delta n^4}{6}; \quad A_3 = \frac{1}{R} - \Delta n^2.$$

Вычисляя интеграл в (4.21) при $a > b$ получим следующее уравнение:

$$\int_b^a \frac{(-A_1 x^5 + A_2 x^3 + A_3 x) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} = \frac{-\pi A_1}{16} (4a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4) + \frac{\pi A_2}{4} (a^2 + b^2) + \frac{\pi A_3}{2}. \quad (4.26)$$

Приравнявая выражение (4.26) к нулю для выполнения условия согласованности, получим уравнение связи концов области контакта a и b .

$$-A_1 \left(\frac{3}{16} a^4 + \frac{1}{8} a^2 b^2 + \frac{3}{16} b^4 \right) + A_2 \frac{1}{4} (a^2 + b^2) + A_3 \frac{1}{2} = 0. \quad (4.27)$$

При $a > b > 0$ решение уравнения (4.27) относительно b имеет вид:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{2A_2}{A_1} - \frac{2}{A_1} \sqrt{2A_1A_2a^2 - 2A_1^2a^4 + 6A_3A_1 + A_2^2} - a^2}. \quad (4.28)$$

4.2.2 Анализ контактных характеристик при внедрении волнистого цилиндра в упругую полуплоскость в зависимости от вида начального касания

Анализируя уравнение (4.27) видно, что «закрытие» зазора между зонами контакта достижимо при $b = 0$. В таком случае (4.27) принимает вид

$$-A_1 \frac{3}{16} a^4 + A_2 \frac{1}{4} a^2 + A_3 \frac{1}{2} = 0. \quad (4.29)$$

Решая уравнение (4.29) относительно a получим величину полудлины контакта при которой происходит закрытие зазора между зонами контакта.

$$a_f = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{\frac{2A_2}{A_1} - \frac{2\sqrt{6A_1A_3 + A_2^2}}{A_1}}. \quad (4.30)$$

Для принятых допущений коэффициент A_3 , как правило, отрицателен. В таком случае, из (4.30) следует, что закрытие зазора достижимо, если $A_1 \leq \frac{A_2^2}{6A_3}$. С использованием данных для коэффициентов A_1, A_2, A_3 получим, что критическая амплитуда волнистости Δ_c , при которой возможно закрытие зазора равна

$$\Delta_c \approx \frac{0.64}{n^2 R}. \quad (4.31)$$

Если $\Delta = \Delta_c$, то выражение (4.30) примет вид

$$a_c \approx \frac{1.83}{n}. \quad (4.32)$$

При $\Delta < \Delta_c$ закрытие зазора между выступами невозможно и происходит образование «кластера» из двух зон контакта с фиксированной величиной длины области контакта, которая в дальнейшем будет меняться за счет вступления в контакт новых неровностей.

В условиях полного контакта на отрезке $x \in [-a, a]$ выражение для полной нагрузки, обеспечивающей «закрытие» зазора между неровностями определяется как [12]

$$P_f = E^* \int_0^a \frac{\xi h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(a^2 - \xi^2)}}. \quad (4.33)$$

Подставляя выражение (4.25) в (4.33) и вычисляя интегралы, получим:

$$P_f(a) = \frac{\pi E^*}{4} \left(-A_1 \frac{5a^6}{8} + A_2 \frac{3a^4}{4} + A_3 a^2 \right). \quad (4.34)$$

Так как задача симметрична относительно начала координат, то для определения контактного давления применим метод, описанный в [102] и определим производную нормальной силы P_f :

$$P_f'(a) = \frac{\pi E^*}{16} (-15A_1 a^5 + 12A_2 a^3 + 8A_3 a), \quad (4.35)$$

Тогда распределение контактного давления определяется как [102]:

$$p_f(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^a \frac{P_f'(s) ds}{\sqrt{s^2 - x^2}} = \frac{E^*}{16} \int_x^a \frac{(-15A_1 s^5 + 12A_2 s^3 + 8A_3 s) ds}{\sqrt{s^2 - x^2}}. \quad (4.36)$$

Вычисляя интеграл в (4.36), получим:

$$p_f(x) = E^* \sqrt{a^2 - x^2} \left(-A_1 \left(\frac{3}{16} a^4 + \frac{1}{4} a^2 x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) + \frac{1}{4} A_2 (a^2 + 2x^2) + \frac{1}{2} A_3 \right) \quad (4.37)$$

С уменьшением внешней нагрузки контакт становится неполным, и при использовании формулы (4.37) появляются зоны с отрицательным давлением.

Представляет интерес взаимосвязь фактических границ зоны контакта и фиктивной зоны отрицательных (растягивающих) контактных напряжений, появляющихся при использовании формулы (4.37) для полного контакта на отрезке $x \in [-a, a]$. Граница этой фиктивной зоны определяется из условия $p_f(x_0) = 0$. Сомножитель, содержащий радикал, в зависимости (4.37) не равен нулю при $x < a$, следовательно

$$-A_1 \left(\frac{3}{16} a^4 + \frac{1}{4} a^2 x_0^2 + \frac{1}{2} x_0^4 \right) + \frac{1}{4} A_2 (a^2 + 2x_0^2) + \frac{1}{2} A_3 = 0 \quad (4.38)$$

Уравнение для определения величины x_0 (4.38) и границы зоны контакта b имеет одинаковую степень и количество членов. При малых значениях x_0 можно пренебречь компонентом при x_0 в 4-й степени. Тогда уравнение (4.38) приводится к виду

$$\left(-A_1 \frac{1}{2} a^2 + A_2 \right) x_0^2 = A_1 \frac{3}{8} a^4 - \frac{1}{2} A_2 a^2 - A_3. \quad (4.39)$$

Аналогично, при отбрасывании компонента при b в четвертой степени для (4.27) имеем

$$\left(-A_1 \frac{1}{2} a^2 + A_2 \right) \frac{b^2}{2} = A_1 \frac{3}{8} a^4 - A_2 \frac{1}{2} a^2 - A_3. \quad (4.40)$$

Из уравнений (4.39) и (4.40) напрямую следует, что при малых размерах области, в которой контакт отсутствует ($x \in [-b, b]$), соотношение между фактической b и фиктивной x_0 границами зоны контакта равно

$$b / x_0 = \sqrt{2}. \quad (4.41)$$

Выражение (21) в точности совпадает с соотношением, полученным в работе [132], при рассмотрении случая почти полного контакта как сжимаемой трещины под воздействием некоторого параболического давления, которым аппроксимируется распределение давления вблизи центра зоны, в которой контакт отсутствует.

В работе [133] выдвинуто предположение и показано на конкретных примерах, что исключение небольшой области с фиктивными растягивающими контактными напряжениями (в которой контакт отсутствует) путем представления ее сжимаемой трещиной, не приводит к изменению полной нагрузки на контактирующие тела. Этот вывод справедлив для распределения фиктивных контактных напряжений, представимых степенным рядом [133].

Доказательство этой гипотезы в плоском случае возможно на основании того, что если область с фиктивными растягивающими

контактными напряжениями мала и представима параболой вида $B_1+B_2x^2$. Представляя область с фиктивными растягивающими контактными напряжениями в виде сжимаемой трещины, нагруженной параболическими напряжениями и вычисляя контактное давление по формуле (2.84) (см. глава 2, раздел 2.2.3) можно заметить, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} \int_{-a}^{-b} \frac{2x}{\pi\sqrt{x^2 - b^2}} \int_0^b \frac{(B_1 + B_2x^2)\sqrt{b^2 - s^2}}{x^2 - s^2} ds dx = 0, \quad (4.42)$$

т.е. при учете наличия бесконечно малой зоны, где контакт отсутствует, полная нагрузка на контактирующие тела не меняется. Так же принимая во внимание, что

$$\int_{-a}^{-b} \frac{2x}{\pi\sqrt{x^2 - b^2}} \int_0^b \frac{(B_1 + B_2x^2)\sqrt{b^2 - s^2}}{x^2 - s^2} ds dx \approx -\frac{\pi}{2} B_1 b + \frac{\pi B_1 b^2}{4a} + O(b^3) \text{ при } b \rightarrow 0, \quad (4.43)$$

можно заключить, что при малом значении границы области отсутствия контакта b и при малом значении параметра B_1 , определяющего максимальное значение фиктивных растягивающих контактных напряжений полная нагрузка в области контакта слабо зависит от b . Кроме того, анализируя выражения (4.39) и (4.40) при $b = x_0 = 0$, становится ясно, что граница области контакта a , при которой реализуется односвязная область контакта, одинакова для указанных выражений.

В другом предельном случае, когда области контакта двух выступов малы, как показано в работе [15], соотношение между границами областей контакта a и b для двух симметричных областей контакта может быть непосредственно определено из соотношения между корнями уравнения $f(x) - \delta = 0$, т.е. точками пересечения функции профиля с прямой, параллельной оси абсцисс, что в свою очередь, соответствует модели основания Винклера о независимости перемещений точек поверхности [39]. При значительном расстоянии между соседними областями контакта, перемещения от распределения нагрузок внутри одной области практически не влияют на давления внутри соседней области.

Интересным также является вопрос о применимости такого упрощенного подхода к определению границ областей контакта при больших нагрузках. Гладвеллом рассмотрен случай штампа с профилем $(x^2 - c^2)^2 / 8Rc^2$, где c – расстояние между центрами зон контакта, R – радиус кривизны при $|x| = c$ [13]. Для такого профиля выражение для связи границ зон контакта и корней уравнения $f(x) - \delta = 0$ совпадает для всего диапазона нагрузок. Для других форм профиля данная гипотеза о связи границ двух зон контакта не очевидна.

Длина фактической области контакта будет определяться следующим выражением

$$L_r = 2(a - b) \approx 2\left(a - \sqrt{2}x_0\right)\Big|_{b \rightarrow 0}. \quad (4.44)$$

Исходя из изложенного ранее, размер области фактического контакта в условиях почти полного контакта на отрезке $x \in [-a, a]$ можно определить приближенной формулой:

$$L_r \approx 2a - 2\sqrt{2} \int_0^a \Theta[-p_f(x)] dx, \quad (4.45)$$

где $p_f(x)$ – распределение контактных давлений при полном контакте на отрезке $x \in [-a, a]$ (формула 4.37); $\Theta(x)$ – функция Хевисайда.

При достижении полного контакта, при котором две зоны контакта сливаются $b = 0$, и из (4.30) следует выражение для фактической длины контакта L_r^* :

$$L_r^* = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{2A_2}{A_1} - \frac{2\sqrt{6A_1A_3 + A_2^2}}{A_1}}. \quad (4.46)$$

Зависимости полной нагрузки, обезразмеренные на нагрузку при внедрении гладкого цилиндра $P_h = \pi a^2 E^* / 4R$, от длины фактической области контакта приведены на рис. 4.12.

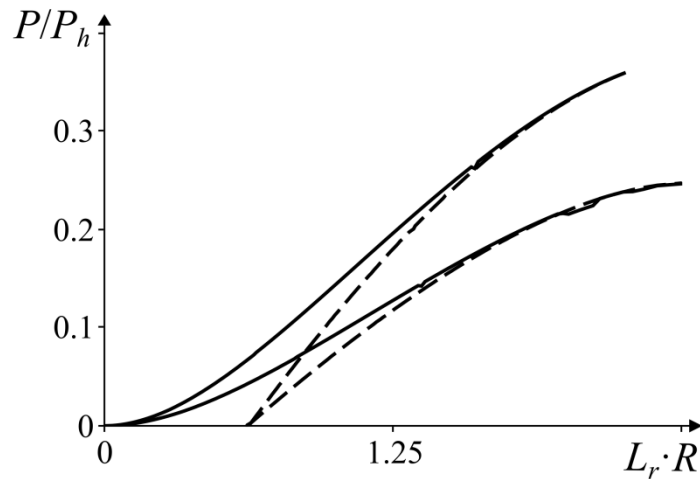


Рис. 4.12 – Зависимость безразмерной нагрузки P от длины фактической области контакта L_r : сплошные линии – точное решение; штриховые линии – расчет на основе (4.34) и (4.45); 1 – $R/\Delta = 1300$; $n = 9$; 2 – $R/\Delta = 1600$; $n = 11$

Из рис. 4.12 видно, что в области больших нагрузок точное и приближенное решение удовлетворительно совпадают. На графике зависимости нагрузки от длины области контакта выделяется наличие трех участков: двух нелинейных (при малых и больших нагрузках соответственно) и линейный переходный участок. Такое же поведение кривой характерно для периодической задачи о контакте волнистой поверхности и полуплоскости (см. глава 2). С ростом угловой частоты и амплитуды волнистости длина фактической области контакта уменьшается, но характер кривых остается прежним.

Описанные результаты относятся к случаю начального контакта тел при двух отрезках контакта. После достижения полного контакта в рамках приведенных допущений область контакта становится односвязной как в случае $\psi = 0$, так и в случае $\psi = \pi$, где начальное касание поверхностей реализуется на одном отрезке контакта $x \in [-a, a]$ (см. рис. 4.11).

Для односвязной области контакта допустимо применение принципа суперпозиции, и контактное давление можно выразить как сумму двух составляющих:

$$p(x) = p_h(x) + p_w(x), \quad (4.47)$$

где $p_h(x)$ – давление, соответствующее параболической компоненте функции зазора $h(x)$; $p_w(x)$ – давление, соответствующее гармонической компоненте (волнистости). Решение интегрального уравнения (4.17) для $L = [-a, a]$ и гармонической компоненты зазора получено в главе 2 (раздел 2.2.2) в виде ряда по многочленам Чебышева 2-го рода. Таким образом, контактное давление в случае односвязной области контакта будет иметь вид:

$$p(x) = \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2} \mp \frac{E^* \Delta n}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(an) U_{2k} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (4.48)$$

где знак минус берется при $\psi = 0$, а знак плюс – при $\psi = \pi$; $J_k(x)$ – функция Бесселя 1-го рода целого порядка k ; $U_k(x)$ – многочлен Чебышева 2-го рода.

Полная нагрузка для односвязной области контакта определяется интегрированием уравнения равновесия (6):

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx = \frac{\pi E^* a^2}{4R} \mp \frac{\pi E^* \Delta n a}{2} J_1(an), \quad (4.49)$$

а длина фактической области контакта $L_r = 2a$.

На рис. 4.13 показаны графики длины фактической области контакта в зависимости от приложенной нагрузки при $R/\Delta = 1300$, $n = 9$ и различном значении фазы ψ .

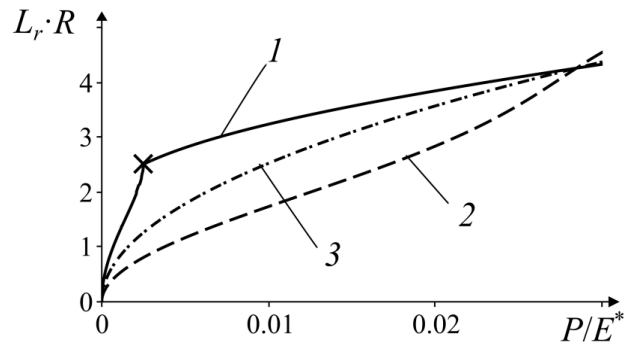


Рис. 4.13 – Зависимости длины фактической области контакта от приложенной нагрузки при $\psi = 0$ (кривая 1); $\psi = \pi$ (кривая 2) и для гладкого цилиндра (кривая 3); значком «x» обозначена точка перехода от двухсвязной области контакта к односвязной

Из рис. 4.13 видно, что фаза гармоники волнистости оказывает значительное влияние на поведение фактической длины области контакта для небольших нагрузок. Это связано с различием, как в количестве областей контакта, так и в производной функции зазора $h(x)$. Кривая для гладкого цилиндра находится между кривыми для $\psi = 0$ и $\psi = \pi$, и при определенном значении нагрузки они пересекаются, что связано с осциллирующим поведением функции $P(a)$ при полном контакте на отрезке $x \in [-a, a]$. Переход от двухсвязной области контакта к односвязной характеризуется немонотонным изменением кривой длины фактической области контакта. Такое поведение согласуется с численными результатами для многоуровневой волнистой поверхности [134] и показывает, что наличие таких переходных участков кривой длины фактической области контакта характеризует изменение связности контактной области. Анализируя полученные результаты, можно заключить, что если достигим полный контакт на конкретном масштабном уровне неровностей, то два механизма образования фактической области контакта – возрастание размеров отдельных пятен контакта и увеличение их количества – могут конкурировать друг с другом. Это приводит к нестабильности поведения контактных и фрикционных характеристик с ростом нагрузки.

4.2.3 Анализ взаимовлияния геометрических параметров на двух масштабных уровнях при переходе от односвязной области контакта к многосвязной при $\psi = 0$ и $\psi = \pi$

Рассмотрим сначала влияние геометрии на переход к многосвязной области контакта в процессе внедрения волнистого цилиндра в полуплоскость с точки зрения теории множественного контакта. В случае многосвязной области контакта задача определения связи между концами дискретных областей контакта сводится к системе нелинейных (алгебраических и/или трансцендентных уравнений), возникающих при удовлетворении условия контакта и условия $p(x) > 0, \forall x \in L$, где L – множество зон контакта. Эту систему уравнений можно записать согласно [15] (рис. 4.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{\eta} \int_{a_m}^{b_m} \frac{(-1)^{\eta-m} \xi^{k_0-1} h'(\xi) d\xi}{\sqrt{\prod_{j=1}^{\eta} (x-a_j)(x-b_j)}} = 0, \quad k_0 = 1, 2, \dots, \eta \\ -\frac{E^*}{2\pi} \int_{b_m}^{a_{m+1}} \int_L \frac{p(\xi)}{x-\xi} d\xi dx = \int_{b_m}^{a_{m+1}} h'(x) dx \end{array} \right., \quad (4.50)$$

где η – количество зон контакта; a_j, b_j – граничные точки j -ой области контакта;

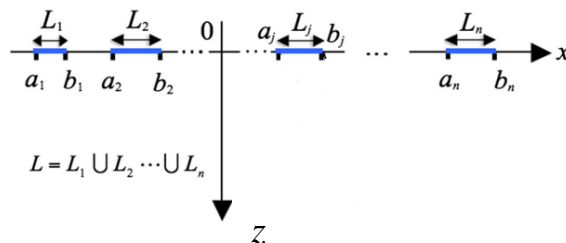


Рис. 4.14 – Схема отрезков контакта многосвязной области

Система уравнений (4.50) содержит определенные интегралы абелевого типа, которые в общем случае не могут быть вычислены в элементарных

функциях, поэтому на практике применяют численные методы решения исходных интегральных уравнений, например, [135]. Кроме того, следует отметить, что задача определения границ области контакта схожа с задачей выполнения обратного преобразования Гильберта на системе интервалов, которая, в свою очередь, может быть решена методом ортогональных многочленов [136]. Коэффициенты данных ортогональных многочленов связаны с границами областей контакта.

В системе уравнений (4.50) уравнения вида:

$$\int_{a_m}^{b_m} \frac{\xi^k h'(\xi)}{\sqrt{R(\xi)}} = 0 \quad (4.51)$$

содержат абелев интеграл. Если представить функцию $h'(x)$ в виде многочлена, то согласно теореме Абеля решение неопределенного интеграла

$$\int \frac{\xi^k h'(\xi)}{\sqrt{R(\xi)}} \quad (4.52)$$

в элементарных функциях возможно, если функция $R(x)$ является многочленом степени $2i$, а функция $h'(x)$ - многочленом степени $i - 1$. При этом функция $\sqrt{R(x)}$ должна раскладываться в цепную дробь [137]. Далее для простоты рассмотрим уже упомянутый случай двух симметричных зон контакта. Условия (4.50) с учетом (4.21) и (4.24) и уравнения равновесия (4.22) имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_b^a \frac{\sum_{j=0}^{i-1} A_j \xi^{2j+1} d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} = 0 \\ \int_b^a \frac{\sum_{j=0}^{i-1} A_j \xi^{2j+3} d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} = \frac{P}{E^*} \end{array} \right. \quad (4.53)$$

Систему (4.53) можно записать в следующем виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^{i-1} A_j \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2} \sin \phi \right)^{j-1} d\phi = 0 \\ \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^{i-1} A_j \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2} \sin \phi \right)^{j+1} d\phi = \frac{P}{E^*} \end{array} \right. \quad (4.54)$$

Интегралы в (4.54) представляют собой многочлены. Если функция $h'(x)$ представима многочленом 5-й степени (формула (4.25)), то систему (4.54) можно представить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} -A_1 \frac{1}{16} (3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4) + A_2 \frac{1}{4} (a^2 + b^2) + A_3 \frac{1}{2} = 0 \\ -A_1 \frac{1}{32} (a^2 + b^2) (5a^4 - 2a^2b^2 + 5b^4) + A_2 \frac{1}{16} (3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4) + A_3 \frac{1}{4} (a^2 + b^2) = \frac{P}{\pi E^*} \end{array} \right. \quad (4.55)$$

При $b = 0$ второе уравнение системы совпадает с формулой (4.34) для определения нагрузки при полном контакте.

На рис. 4.15 показаны профили функции (4.16) при $R/\Delta = 625$ и $n = 8$ при аппроксимации многочленами 6-й и 4-й степени.

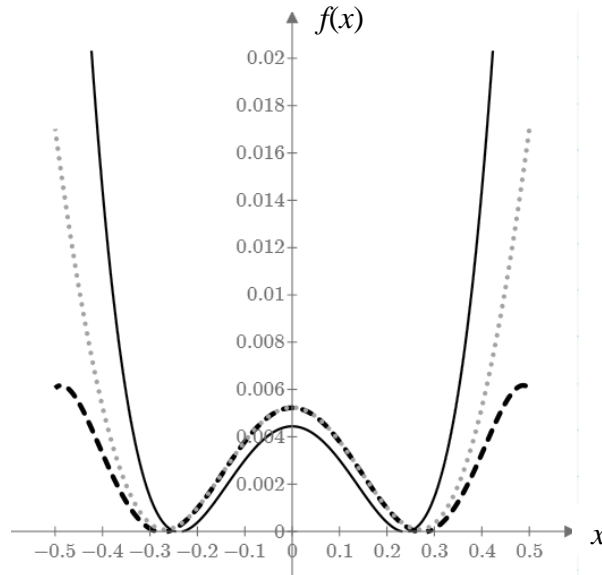


Рис. 4.15 – Вид функции (4.16) при аппроксимации многочленом 4-й степени (сплошная линия), 6-й степени (штриховая линия); точками показана исходная функция (4.16)

Очевидно, что многочлен 6-й степени обеспечивает лучшее приближение исходной функции, однако, если рассматривать эти два профиля, контактирующих в двух зонах с упругой полуплоскостью, то для многочлена 4-й степени коэффициент A_1 в системе уравнений (4.55) равен нулю и с учетом того, что коэффициент A_3 , как правило, отрицателен из первого уравнения системы получим

$$a^2 + b^2 = \frac{2A_3}{A_2} \rightarrow b = \sqrt{\frac{2A_3}{A_2} - a^2} \quad (4.56)$$

Таким образом, в данном случае зависимость между a и b в первой четверти координатной плоскости представляет собой дугу окружности с радиусом $\sqrt{\frac{2A_3}{A_2}}$. Область определения соотношения между a и b содержит точку с координатами $(0, 0)$. Для такого профиля полный контакт возможен при любом сочетании коэффициентов A_1 и A_2 , в то время как для профиля, описанного многочленом 6-й степени и выше, неявная функция $F(a, b) = 0$, заданная первым уравнением системы (4.54), может иметь особые точки (1, см. рис. 4.16, б), т.е. при их наличии полное «заполнение» впадин между неровностями в принципе невозможно. В общем случае многосвязной области контакта возникает комплекс условий, при которых будет достижимо «заполнение» зазоров между неровностями, связанных с подбором многочлена, описывающего профиль волнистой поверхности с конечным числом неровностей, при котором уравнения типа 4.51 будут иметь решения $F_j(a_j, b_j) = 0$, не содержащие особых точек. Для рельефов, встречающихся на практике (волнистость, регулярная шероховатость), такой тип контакта практически никогда не достигается при конечном количестве выступов.

Следует, однако, отметить, что возможно целенаправленно создавать рельеф, в котором будет достижим полный контакт во впадинах рельефа. В

в общем случае задачу можно свести к решению системы алгебраических уравнений. Для случая двух зон контакта может быть применена теорема о неявной функции $F(a, b) = 0$, согласно которой при фиксировании b функция $F(a, b)$ должна быть строго монотонной при $a \geq 0$.

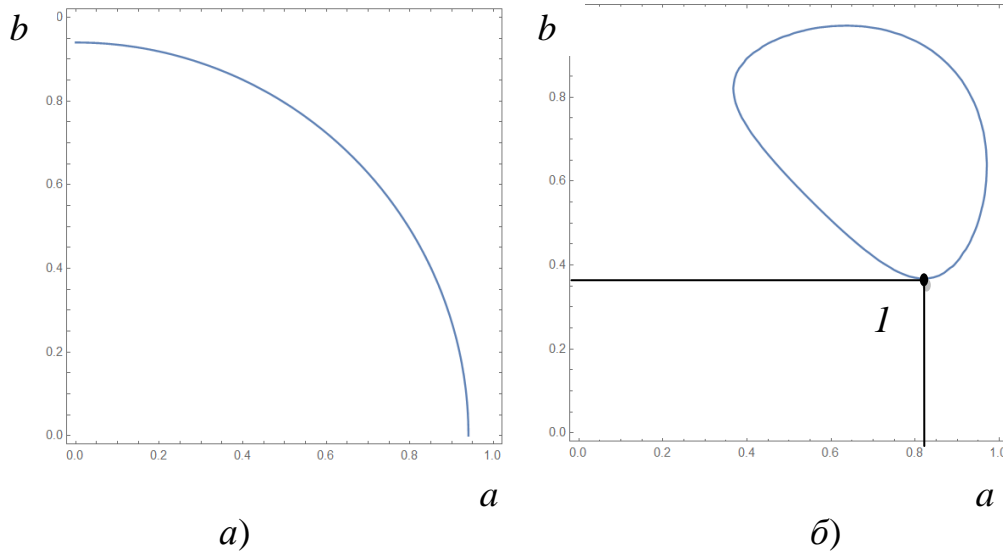


Рис. 4.16 – Зависимость между границами областей контакта для различных коэффициентов многочлена (4.25): а - $A_1 = 0, A_2 = 1, A_3 = -0.46$;
б - $A_1 = 1.95, A_2 = 2.1, A_3 = -0.46$

Случай при $A_1 = 0$ подробно рассмотрен Гладвеллом [13] для $A_2 = 1/(2Rc^2)$ и $A_3 = -1/(2R)$, где R – радиус кривизны профиля в точках начального контакта и c – расстояние между выступами. Следует отметить, что радиус кривизны впадины для такого профиля в 2 раза больше радиуса кривизны выступов (см. рис. 4.15). Используя формулы (4.55) и (4.56) получим выражение для определения полной нагрузки для профиля (4.25) при $A_1 = 0$.

$$P = \frac{\pi E^*}{4} \left(A_2 \left(\frac{(a^2 + b^2)^2}{4} + \frac{a^4 + b^4}{2} \right) + A_3 (a^2 + b^2) \right). \quad (4.57)$$

Для определения распределения контактных давлений при двух зонах контакта воспользуемся соотношениями для многочленов Чебышева 1-го и 2-го рода на двух симметричных интервалах, полученными Гладвеллом [13]:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{|\xi| T_i \left(\frac{2\xi^2 - a^2 - b^2}{a^2 - b^2} \right)}{\sqrt{(a^2 - \xi^2)(\xi^2 - b^2)}} \frac{1}{\xi - x} d\xi = \frac{2x}{a^2 - b^2} U_{i-1} \left(\frac{2x^2 - a^2 - b^2}{a^2 - b^2} \right), \quad L = [-a, -b] \cup [b, a], \quad (4.58)$$

при этом $U_{-1}(x) = 0$.

Функцию $h'(x)$ (выражение (4.25)) при $A_1 = 0$ можно представить в виде

$$h'(x) = A_2 x \left(\frac{(a^2 - b^2)}{2} T_1 \left(\frac{2x^2 - a^2 - b^2}{a^2 - b^2} \right) + \frac{(a^2 + b^2)}{2} T_0 \left(\frac{2x^2 - a^2 - b^2}{a^2 - b^2} \right) \right) + A_3 x T_0 \left(\frac{2x^2 - a^2 - b^2}{a^2 - b^2} \right), \quad (4.59)$$

С использованием (4.18) и (4.58) получим выражение для определения контактного давления

$$p(x) = \frac{E^* A_2 |x|}{2\pi} \sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}. \quad (4.60)$$

Таким образом, распределение контактного давления при контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости в зоне начального касания в двух точках главным образом определяются амплитудой и частотой волнистости (коэффициент A_2) и не зависят от радиуса цилиндра.

Сравнение распределения давления (4.60) с давлением на единичную изолированную синусоидальную неровность, а также с решениями Вестергаарда и Герца при одинаковой нормальной силе на неровность $P = 1.26 E^* \Delta$ и $n = 1$ ($p^* = \pi E^* \Delta n / 2$) показано на рис. 4.17.

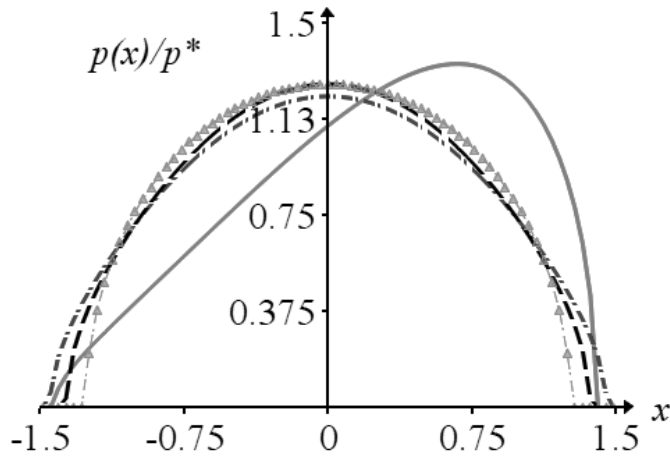


Рис. 4.17 – Распределения контактного давления для двух синусоидальных выступов, вдавливаемых в упругую полуплоскость (сплошная линия) в сравнении с единичной синусоидальной неровностью (штрихпунктирная линия); решением Вестергаарда (штриховая линия) и теорией Герца (штрихпунктирная линия с ▲).

Рис. 4.17 показывает, что для «двухзонной» области контакта максимальное значение давления значительно возрастает по сравнению с контактом одиночных выступов, а распределение давления становится асимметричным.

Рассмотрим теперь переход к многосвязной области с позиций единичного контакта. При множественном контакте нескольких неровностей в рамках односвязной области контакта, достигаемой при выполнении условий $\Delta \ll 2\pi/n$, $an \gg 1$ зависимость (4.48) можно представить в виде асимптотического представления:

$$p(x) \approx \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2} \mp \frac{E^* \Delta n}{2} \cos nx \mp \chi(x), \quad (4.61)$$

где знак минус берется при $\psi = 0$, а знак плюс - при $\psi = \pi$; $\chi(x)$ составляющая, учитывающая ограниченность области контакта на отрезке $x \in [-a, a]$. Данная составляющая приближенно может быть определена

асимптотическим представлением функций Бесселя в выражении (4.48) при больших значениях аргумента an :

$$\chi(x) = \frac{E^* \Delta n}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{\frac{2}{\pi an}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos\left(an - (2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) U_{2j}\left(\frac{x}{a}\right). \quad (4.62)$$

Ряд в (4.62) сходится, и в результате можно записать:

$$\chi(x) = \frac{E^* \Delta n}{2} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi an}} \sin\left(an - \frac{\pi}{4}\right) \right] \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (4.63)$$

Сомножитель в квадратных скобках в формуле (4.63) является асимптотикой функции Бесселя первого рода первого порядка $J_1(an)$ при больших аргументах an . Следовательно, выражение (4.61) может быть преобразовано к виду:

$$p(x) \approx \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2} \mp \frac{E^* \Delta n}{2} \cos nx \mp \frac{E^* \Delta na}{2} \frac{J_1(an)}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad an > 1. \quad (4.64)$$

Последнее слагаемое в (4.64) определяет краевой эффект связанный с полным контактом волнистости на отрезке $[-a, a]$. Этот краевой эффект, при котором центральная неровность нагружена меньше, чем периферийные, ранее изучен для системы из трех одинаковых синусоидальных неровностей [17]. При этом, распределение давления центральной неровности близко к распределению Вестергаарда, наблюдающегося в случае периодической контактной задачи.

При определенных значениях an , соответствующим нулям функции $J_1(an)$, данное слагаемое равно нулю и выражение (4.64) можно записать как

$$p(x) \approx \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2} \mp \frac{E^* \Delta n}{2} \cos nx \quad \text{при} \quad an = j_1^k; J_1(j_1^k) = 0. \quad (4.65)$$

Интересно отметить, что значения an , где контактные давления совпадают по форме с профилем волнистой поверхности (отсутствует краевой

эффект) не совпадают с нулями производной составляющей функции зазора, соответствующей волнистости.

На рис. 4.18 показаны сравнения решения (4.48) с его асимптотикой (4.65) при $\psi = 0$ и $an = 25.9$ ($n = 7$).

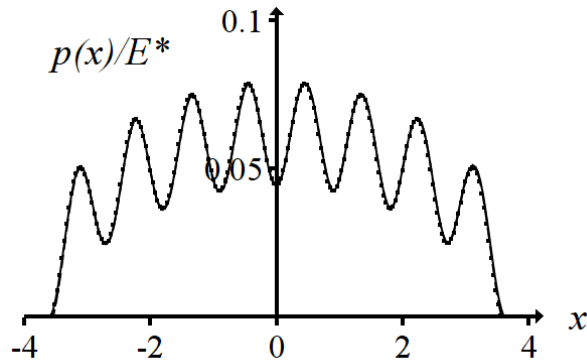


Рис. 4.18 – Распределения контактных давлений в контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости при односвязной области контакта ($\psi = 0$) при $\Delta = 0.005$; $n = 7$; $a/R = 0.123$: сплошные линии – выражение (4.48); точки – выражение (4.65)

Рис. 4.18 показывает хорошее совпадение значений контактного давления, рассчитанного согласно аналитическому решению задачи (4.48) (число членов ряда N в (4.48) было принято равным 40), и асимптотической формуле (4.65) при $an = j_1^k$; $J_1(j_1^k) = 0$.

При увеличении отношения высоты и периода волнистости односвязная область контакта переходит в многосвязную. Представляет практический интерес соотношение параметров неровностей, при которых происходит данный переход. С учетом последнего слагаемого в выражении (4.64) существует переходный режим взаимодействия, при котором для некоторых нагрузок будет наблюдаться многосвязная область контакта, а для других – многосвязная, что связано с осциллирующим поведением функции Бесселя. Односвязная область контакта переходит в многосвязную при

условии $p_{\min}(x) = 0, |x| \neq a$, где $p(x)$ будет определяться выражением (4.65). Применяя теорему о двух милиционерах (теорему сжатия), можно записать формулу для нижней огибающих контактного давления p_{env} :

$$p_{env}(x) \approx \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2} \pm \frac{E^* \Delta n}{2}, \quad (4.66)$$

где знак «+» соответствует верхней огибающей, а знак «-» - нижней.

График контактного давления и его нижней огибающей для параметров, соответствующих рис. 4.18 приведен на рис. 4.19.

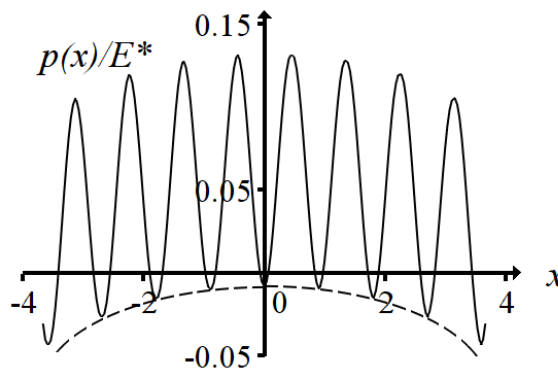


Рис. 4.19 – Распределение контактных давлений, рассчитанное по выражению (4.48) (сплошная линия) и его нижняя огибающая, рассчитанная по (4.66) при $\Delta = 0.02$; $n = 7$; $a/R = 0.123$

Из рис. 4.19 видно, что первыми «выйдут» из контакта выступы волнистости, наиболее близкие к границе области контакта $\pm a$.

Приравнявая $p_{env}(x)$ к нулю и решая получившееся уравнение, можно определить соотношение параметров цилиндра и волнистости, при которых область контакта будет только многосвязной. Для $x = 0$ получим следующую верхнюю оценку.

$$\Delta n \approx \frac{a}{R}, \quad (4.67)$$

С другой стороны, для взаимодействия упругих тел с неизвестной областью контакта площадь фактического контакта является неубывающей функцией приложенной нормальной силы [103].

С использованием выражения (4.49) для полной нормальной нагрузки и условия возрастания функции $P'(a) \geq 0$ получим уравнение для определения критических параметров цилиндра и волнистости, обеспечивающих односвязность области контакта во всем диапазоне нагружения.

$$\frac{\pi E^* a}{2R} \mp \frac{\pi E^* \Delta n^2 a}{4} J_0(an) = 0. \quad (4.68)$$

Используя асимптотическое представление функции Бесселя первого рода, можно определить верхнюю и нижнюю огибающую функции $P'_{env}(a)$ (рис. 4.20):

$$P'_{env}(a) \approx \frac{\pi E^* a}{2R} \pm \frac{\pi E^* \Delta n^2 a}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi an}}, \quad (4.69)$$

где знак «+» соответствует верхней огибающей, а знак «-» - нижней.

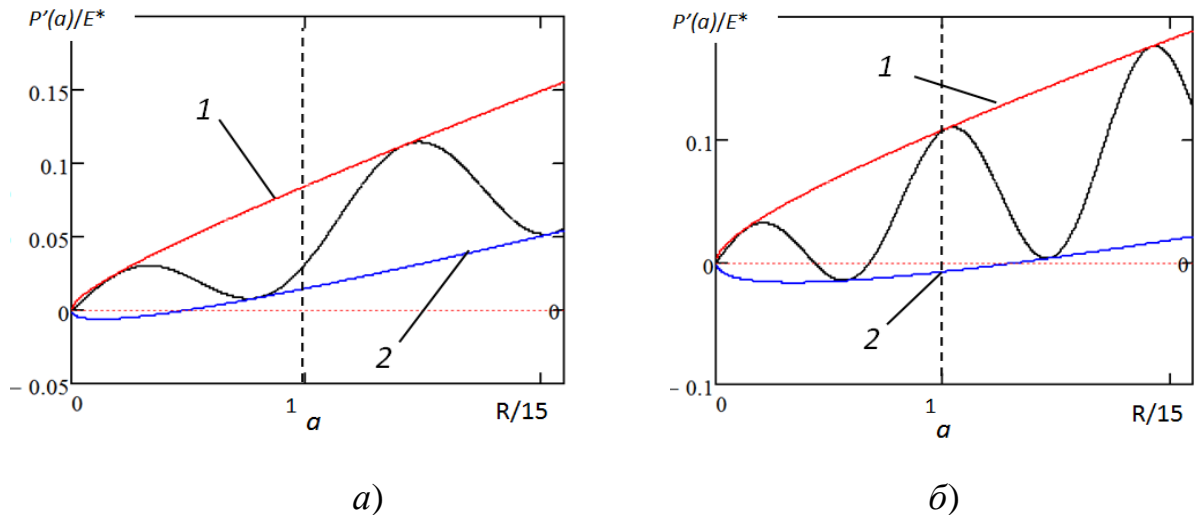


Рис. 4.20 – Зависимость производной функции полной нагрузки от полудлины области контакта и ее верхняя и нижняя огибающая при $\psi = \pi$, $L = 2\pi$, $R = 5L$, $\Delta = 0.005$: а – $n = 5$; б – $n = 7$; 1 – верхняя огибающая, 2 – нижняя огибающая.

Используя условие равенства нулю нижней огибающей, получим выражение для определения нижней оценки критической высоты волнистости:

$$\Delta_c \approx \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{a}}{R} \left(\frac{1}{n} \right)^{3/2} \quad (4.70)$$

Верхняя оценка для критической амплитуды волнистости согласно выражению (4.67) следующая

$$\Delta_c \approx \frac{a}{Rn}, \quad (4.71)$$

Для определения полудлины области контакта в оценках (4.70) и (4.71) будем использовать формулу Герца для контакта цилиндра и полуплоскости,

т.е. $a = \sqrt{\frac{4PR}{\pi E^*}}$. Таким образом, с ростом приложенной нагрузки критическая

высота волнистости, необходимая для поддержания односвязной области контакта увеличивается.

На рис. 4.21 показаны графики верхней и нижней оценок критической амплитуды волнистости, при которых существует односвязная область контакта в зависимости от угловой частоты неровностей волнистости n .

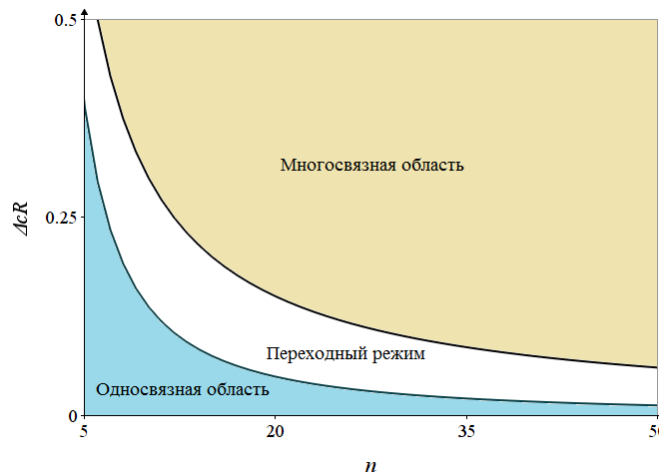


Рис. 4.21 – Зависимость безразмерной критической амплитуды волнистости Δ_c согласно нижней и верхней оценкам в зависимости от ее угловой частоты n при $a/R = 0.03$

Из рис. 4.21 видно наличие промежуточного (переходного) режима взаимодействия волнистого цилиндра и полуплоскости, когда при одних нагрузках будет реализовываться односвязная область контакта, а при других – многосвязная. Следует отметить, что полученные оценки являются приближенными и не учитывают точно особенности поведения контактных характеристик, например, указанный ранее краевой эффект. Более точные оценки можно получить с помощью численного расчета для конкретных геометрических параметров цилиндра и волнистости с учетом указанных критериев ($p_{\min}(x) = 0, |x| \neq a$ и $P'(a) \geq 0$).

4.2.4 Экспериментальные исследования смещений поверхности упругого цилиндра при взаимодействии с волнистой поверхностью малой амплитуды

Для исследования влияния параметров регулярной шероховатости (волнистости) на кривую «нагрузка-внедрение» были проведены экспериментальные исследования на образцах с регулярной шероховатостью, полученных после чистового фрезерования. Экспериментальные исследования проведены на сканирующем нанотвердомере «Наноскан-4D» (ТИСНУМ, Россия) совместно с м.н.с. лаб. трибологии ИПМех РАН Шкалеем Иваном Владимировичем. В качестве контртела использовался цилиндр из силиконовой резины с модулем Юнга $E = 2,1$ МПа. Размеры цилиндра составляли: $D = 12$ мм; $H = 8,5$ мм. Средние геометрические параметры рельефа образцов (по профилю) были получены усреднением по 3-м профилям после фильтрации высокочастотных компонент спектра неровностей в соответствии с ISO 4287 (табл. 4.1). Пример исходного и фильтрованного профиля показан на рис. 4.22, а. С помощью быстрого преобразования Фурье определялась угловая частота основной гармоники n (рис. 4.22, б).

Табл. 4.1 – Параметры рельефа образцов

Номер образца	Средняя высота неровностей рельефа 2Δ , мкм	Средний шаг между выступами L , мкм	$2\Delta/L, 10^{-3}$	Угловая частота волнистости $n = 2\pi/(10^{-3}L)$
1	2,8	830	3.4	7.57
2	7,1	790	9	7.95
3	10,3	1100	9,36	5.71

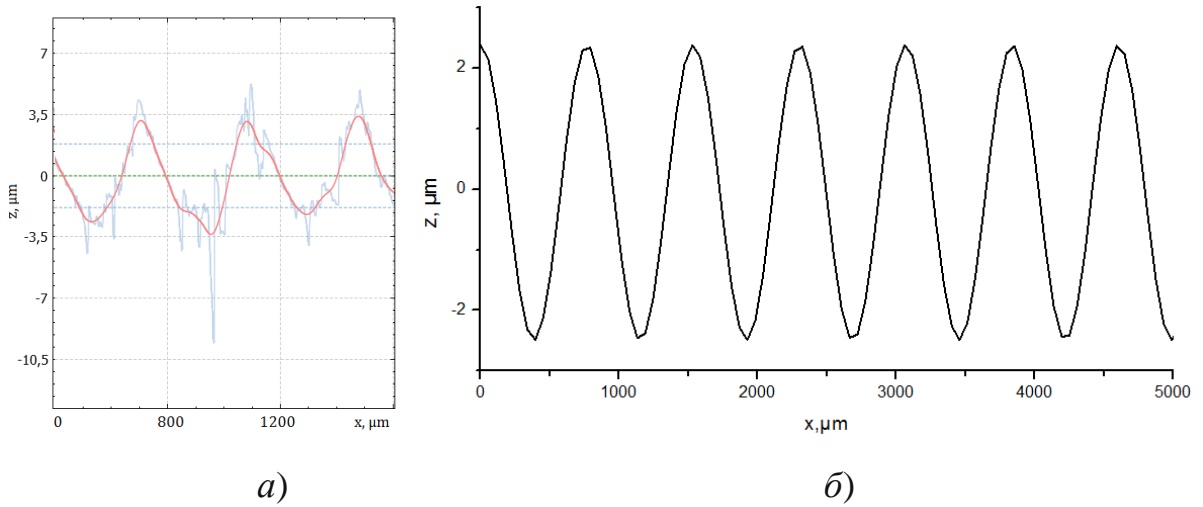


Рис. 4.22 – Пример исходного и фильтрованного профилей образца № 2 (а) и аппроксимация основной гармонике спектра неровностей профиля синусоидальной функцией (б)

В качестве эталонного (гладкого) образца использовалась пластинка из кварцевого стекла.

Цилиндр сжимался при линейно увеличивающейся силе до 150 мН (рис. 4.23). Погонная нагрузка при этом составляла $P = 17.6$ Н/м. Скорость внедрения соответствовала упругому режиму взаимодействия. При этом соблюдались допущения линейной теории упругости: $R \gg L$, $\Delta \ll L$.

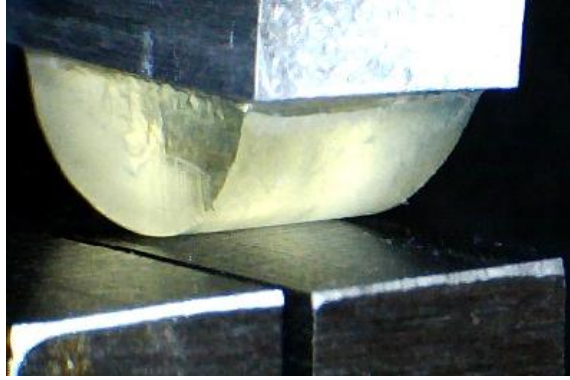


Рис. 4.23 – Фотография упругого цилиндра в контакте с образцом шероховатости

Результаты испытаний были получены при обработке зависимостей нагрузки от сближения тел с помощью встроенного ПО сканирующего нанотвердомера «Наноскан-4D». На рис. 4.24 представлены полученные зависимости «нагрузка–сближение» для исследуемых образцов. Кроме того, размер области контакта фиксировался с помощью оптического микроскопа.

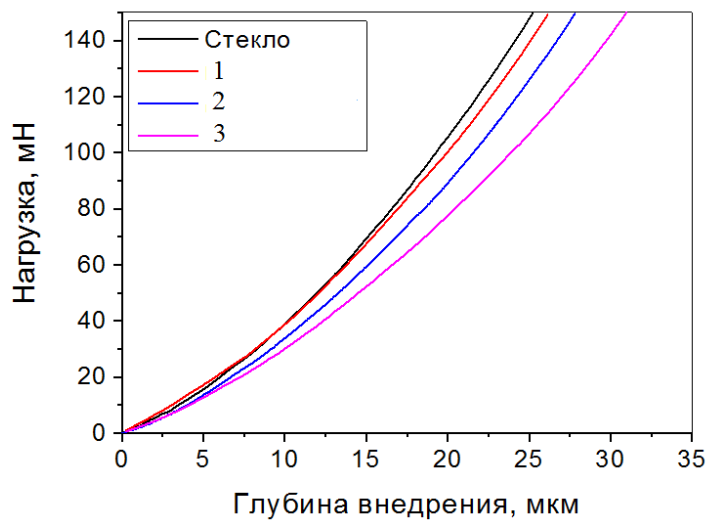


Рис. 4.24 – Кривые «нагрузка–сближение» для исследованных образцов

Кривые, приведенные на рис. 2, показывают, что с увеличением отношения $2\Delta/L$ требуемая нагрузка достигается при большем внедрении, что свидетельствует об уменьшении жесткости контакта с ростом высоты

профиля и уменьшением среднего шага между неровностями. Данный результат соответствует дискретной конфигурации контакта.

Интересно отметить, что кривая, соответствующая минимальному отношению $2\Delta/L$, при нагрузках 20...60 мН почти неотличима от кривой, соответствующей взаимодействию цилиндра и гладкой поверхности (стекло). Этот факт позволяет выдвинуть гипотезу о возможности возникновения области контакта близкой к односвязной на определенном масштабном уровне. Оценки (4.70) и (4.71) показывают односвязность области контакта при учете только одной гармоники волнистости (см. рис. 4.22 (б)). Очевидно, что реальный профиль поверхности (см. рис. 4.22 (а)) имеет отклонения на многих масштабных уровнях, и область контакта не будет односвязной, однако, вследствие того, что кривая «нагрузка-сближение» менее чувствительна к мелкомасштабным высокочастотным компонентам профиля, как показывают результаты данной работы и данные работы [48], в отличие от кривой размера фактической области контакта, результаты эксперимента качественно соотносятся с теоретическими выводами.

4.3 Выводы по главе 4

С помощью развитых в главе 2 методов решения плоских (периодических и непериодических) контактных задач для упругих тел с рельефом сложной формы поставлены и решены задачи о взаимодействии двухуровневой волнистой поверхности и волнистого цилиндра с упругой полуплоскостью.

В результате решения задачи о контакте двухуровневой волнистой поверхности и полуплоскости получены аналитические выражения для расчета распределения контактных давлений, длины фактической области контакта и дополнительного смещения за счет неровностей волнистости при односвязной области контакта. Показано, что при малых и умеренных

нагрузках задача эквивалентна задаче о внедрении волнистого цилиндра в упругую полуплоскость.

Выполнен анализ геометрических параметров волнистости второго уровня – амплитуды и частоты на интегральные контактные характеристики – зависимость длины фактической области контакта, максимального давления и дополнительного смещения от приложенного номинального давления.

Для задачи о внедрении волнистого цилиндра в упругую полуплоскость проанализировано влияние фазы волнистости на интегральные контактные характеристики при односвязной и двухсвязной областях контакта, возникающих при начальном касании.

Получены приближенные оценки амплитуды и частоты волнистости, при которых происходит переход от односвязной области контакта к многосвязной.

Проведены экспериментальные исследования смещений при контактном взаимодействии упругого цилиндра и жесткой волнистой поверхности.

Анализ полученных результатов дает возможность сделать следующие выводы:

- при взаимодействии двухуровневой волнистой поверхности с упругой полуплоскостью в рамках односвязной области контакта распределение контактных давлений, зависимость длины фактической области контакта и дополнительного смещения от нагрузки носит осциллирующий характер, на вид кривых в значительной степени влияет плотность контакта, определяемой частотным и амплитудным коэффициентами волнистой поверхности n и k . При этом зависимость пикового (максимального) давления от номинального не носит осциллирующего характера;

- при наличии в Фурье-спектре рельефа поверхностей составляющих с низкими значениями угловой частоты длина фактической области контакта будет непрерывно меняться с ростом номинального давления. При приближении к полному контакту влияние высокочастотных (мелкомасштабных) составляющих неровностей резко возрастает. С ростом частотного коэффициента гармоник неровностей второго уровня поведение кривой длины фактической области контакта от номинального давления становится более немонотонным и стремится к скачкообразному, что характерно для перехода от одной области контакта к дискретным пятнам;
- фаза гармоник волнистости оказывает значительное влияние на поведение фактической длины контакта для небольших нагрузок. Это связано с различием, как в количестве областей контакта, так и в производной функции зазора. Переход от двухсвязной области контакта к односвязной характеризуется немонотонным изменением кривой длины фактической области контакта. Если достигим полный контакт на конкретном масштабном уровне неровностей, то два механизма образования фактической области контакта – возрастание размеров отдельных пятен контакта и увеличение их количества - могут конкурировать друг с другом, Это приводит к нестабильности поведения контактных и фрикционных характеристик с ростом нагрузки;
- функция профиля поверхности оказывает существенное влияние на возможность осуществления полного контакта при конечном количестве зон контакта. Например, для двух зон контакта профиль в виде многочлена 4-й степени обеспечивает такую возможность при любом соотношении геометрических параметров выступов и впадины, а при описании профиля многочленом 6-й степени и выше возможно соотношение между

геометрическими параметрами, при которых «заполнение» впадины не достигается;

- существует промежуточный (переходный) режим взаимодействия волнистого цилиндра и полуплоскости, когда при одних нагрузках будет реализовываться односвязная область контакта, а при других – многосвязная. При этом с ростом приложенной нагрузки критическая высота волнистости, необходимая для поддержания односвязной области контакта увеличивается.

ГЛАВА 5. ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ РЕЛЬЕФА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНТАКТА С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ ПРИ НОРМАЛЬНОМ И ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

5.1 Постановка и решение периодической контактной задачи для рельефа с параметрически заданной формой с одинаковыми выступами и впадинами и упругой полуплоскости

5.1.1 Постановка и решение задачи при приложении нормальной нагрузки

Профиль волнистого рельефа с параметрически заданной формой может быть представлен следующей функцией:

$$f(x) = \frac{\Delta(m+1)\cos(2\pi x/L)}{|m\cos(2\pi x/L)|+1}, \quad (5.1)$$

где Δ — амплитуда профиля, L — период профиля, m — параметр формы. Величины Δ и L имеют размерность длины (м, в системе СИ), а параметр m — безразмерная величина. График функции (5.1) для различного параметра m представлен на рис. 5.1.

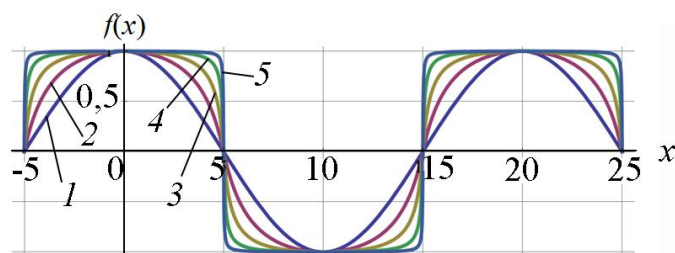


Рис. 5.1 – Графики функции (5.1), описывающей волнистость, при $\Delta = 1$,
 $L = 20$ и $m = 0,2$ (1); 2 (2); 8 (3); 35 (4); 250 (5)

При $m = 0$ функция (5.1) представляет собой синусоиду, при $m = 0,2$ — хорошо аппроксимирует параболу второго порядка. С увеличением

параметра m форма неровности стремится к «прямоугольной». При малой величине параметра m ($m < 1$) и $\Delta \ll L$ профиль поверхности может считаться гладким, и соответствующая контактная задача будет рассматриваться как задача с неизвестными границами области контакта. При $m \gg 1$, профиль волнистости будет контактировать с полуплоскостью с учетом угловых точек, поэтому для таких случаев необходимо рассматривать задачу с заданными границами областей контакта.

Схема периодической контактной задачи и принятые допущения соответствуют разделу 2.1.1 главы 2 (см. рис. 2.1.). С использованием условия контакта и принимая $L = 2\pi$, получим выражение для функции зазора между поверхностями:

$$h(x) = \delta - \left(\Delta - \frac{\Delta(m+1)\cos x}{|m\cos x| + 1} \right), \quad (5.2)$$

где δ – величина сближения.

Производная функции зазора между поверхностью с регулярным рельефом и полуплоскостью будет иметь вид

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = - \frac{\Delta(m+1)\sin x}{(|m\cos x| + 1)^2}. \quad (5.3)$$

В качестве основного интегрального уравнения контактной задачи используется уравнение (2.4), см. глава 2, п. 2.1.1. С помощью замены переменных (2.8), см. глава 2, п. 2.1.2, можно свести периодическую задачу к задаче с одной областью контакта:

$$-\Delta E^* \frac{2(m+1)v(v^2+1)}{(m-mv^2+v^2+1)^2} = \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{p(u)}{v-u} du \quad (5.4)$$

При $m < 1$ профиль не имеет угловых точек, границы областей контакта неизвестны. Так как распределение контактного давления симметрично, используется резольвента (2.12):

$$p(v) = -\frac{\Delta E^*}{\pi} \sqrt{\alpha^2 - v^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(m+1)u(u^2+1)}{(m-mu^2+u^2+1)^2} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-u^2}} \frac{1}{u-v} du. \quad (5.5)$$

Интеграл (5.5) можно вычислить в замкнутом виде с помощью разложения на простые дроби:

$$p(v) = -\frac{\Delta E^* (m+1)^2 \sqrt{\alpha^2 - v^2} (v^2 + 1)(\alpha^2 + 1)}{\sqrt{\alpha^2 + 1} (m - mv^2 + v^2 + 1)^2 (m - m\alpha^2 + \alpha^2 + 1)}. \quad (5.6)$$

Возвращаясь к исходным переменным и произвольному периоду L , и используя тригонометрические преобразования, формулу для определения контактного давления можно записать в виде:

$$p(x) = G(x) \frac{\sqrt{2\pi\Delta E^*}}{L} |\cos(\pi x / L)| \sqrt{\cos(2\pi x / L) - \cos(2\pi a / L)}, \quad (5.7)$$

где $G(x)$ – функция, учитывающая форму рельефа:

$$G(x) = (m+1)^2 (|\cos(\pi x / L)| + 1)^{-2} (m \cos(2\pi a / L) + 1)^{-1}, \quad 2a < L \quad (5.8)$$

Решение (5.7) представляет собой обобщение решения Вестергаарда для синусоидального рельефа [34].

Зависимость длины области контакта от приложенного номинального давления можно определить с помощью уравнения равновесия (2.13), см. глава 2, п. 2.1.2. Решение для полной нормальной нагрузки в преобразованных переменных (2.8), см. глава 2, п. 2.1.2, имеет вид:

$$P(\alpha) = \frac{\pi \Delta E^* (m+1)^{1/2} \alpha^2}{(m - m\alpha^2 + \alpha^2 + 1)^{3/2}}. \quad (5.9)$$

В исходных переменных после выполнения тригонометрических преобразований имеем для $a < L/4$.

$$\bar{p} = \frac{\pi \Delta E^* (m+1)^{1/2} \sin^2(\pi a / L)}{L(m \cos(2\pi a / L) + 1)^{3/2}}, \quad 2a < L/2 \quad (5.10)$$

При $m \gg 1$ формулы (5.7) и (5.10) не применимы для расчета контактных характеристик, так как необходимо использовать общее решение, сингулярное на границах областей контакта.

Следуя методу решения контактных задач с заданной областью контакта [138], развитому для плоских периодических задач в [33], резольвенту интегрального уравнения (5.4) можно записать в виде суммы двух составляющих:

$$p(x) = \frac{C}{\sqrt{\alpha^2 - v^2}} + \frac{E^*}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - v^2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\Delta(m+1)u(u^2+1)}{(m-mu^2+u^2+1)^2} \frac{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}{u-v} du. \quad (5.11)$$

Константа C определяется из уравнения равновесия (2.13) [33]:

$$C = \frac{P\sqrt{1+\alpha^2}}{2\pi\alpha}. \quad (5.12)$$

Возвращаясь к исходным переменным и вычисляя интеграл в (5.11) с помощью разложения подынтегрального выражения на простые дроби, получим следующее выражение для расчета контактного давления при $m \gg 1$ (наличие угловых точек):

$$p(x) = \frac{P\sqrt{1+\tan^2(\pi a/L)}}{2L \tan(\pi a/L) \sqrt{\tan^2(\pi a/L) - \tan^2(\pi x/L)}} + \quad , \quad p(x) > 0 \quad (5.13)$$

$$+ G(x) \frac{\Delta \pi E^* (\tan^2(\pi a/L) - 2 \tan^2(\pi x/L)) \cos^4(\pi x/L) \cos(\pi a/L)}{4L \sqrt{\tan^2(\pi a/L) - \tan^2(\pi x/L)}}$$

где функция $G(x)$ определяется выражением (5.8).

5.1.2 Анализ контактных характеристик

На рис. 5.2 показаны распределения контактных давлений при увеличении полудлины области контакта a при двух значениях параметра m .

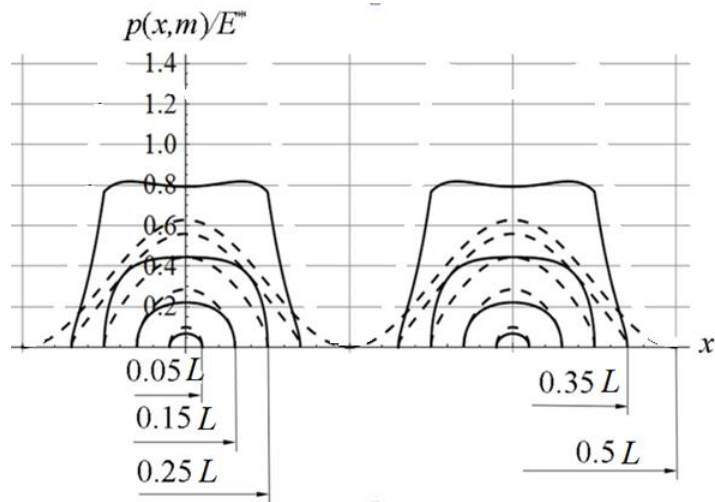


Рис. 5.2 – Изменение контактного давления с ростом полудлины области контакта a при $m = 0$ (штриховые линии) и $m = 0.5$ (сплошные линии); $\Delta = 1$; $L = 20$

На рис. 5.3 представлены распределения давления (на одном периоде) при различных значениях m и $\Delta = 1$; $L = 20$.

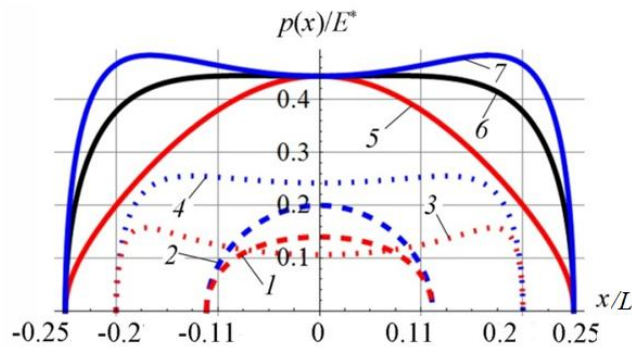


Рис. 5.3 – Безразмерные распределения давления при контакте поверхности с регулярным рельефом при изменении параметра формы m : (1) $m = 0.7$; (2) $m = 0.1$; (3) $m = 8$; (4) $m = 1.7$; (5) $m = 0$; (6) $m = 0.65$; (7) $m = 1$

С увеличением параметра m при малых нагрузках максимальное давление уменьшается по мере увеличения радиуса кривизны выступа. С увеличением m распределение давления сначала стремится к равномерному, а затем приобретает вид с пиками вблизи концов зон контакта. Однако

максимальная зависимость давления от формы рельефа наблюдается при больших нагрузках. При умеренных нагрузках существенно проявляется эффект взаимного влияния выступов. Вместе со значительным увеличением угла наклона выступов эффект взаимного влияния обеспечивает сильный рост максимума давления при увеличении m . При $2a = L/2$ (см. рис. 5.3) давление в центре области контакта одинаково для всех m , однако значения в остальных точках зоны контакта различны. Для достижения больших значений длины фактической области контакта $2a > L/2$ требуются значительные нагрузки при малом росте параметра m . Вследствие того, что любая гладкая периодическая функция формы рельефа может быть представлена тригонометрическим рядом, то увеличение необходимой для достижения полного контакта нагрузки связано с существенным влиянием гармоник более высокой частоты при приближении к полному контакту (см. глава 4).

На рис. 5.4 показано распределение давления для $2a = L/2$, $L = 2\pi$, $\Delta = 1$ и $m = 50$, согласно формуле (5.13).

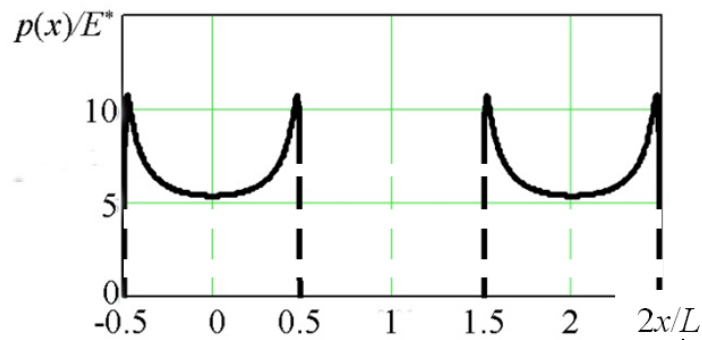


Рис. 5.4 – Пример распределения давления согласно выражению (5.13) при $m = 50$

Решение при наличии угловых точек выступа имеет характерный вид с бесконечными значениями давления по краям зон контакта.

При повышении параметра m существенно увеличивается производная функции зазора между поверхностями $h(x)$. При $2a = L/2$ $\partial h / \partial x = -\Delta(m+1)$,

т.е. с повышением m ограничение, накладываемое на амплитуду профиля Δ должно быть строже, что связано с допущениями использования линейной теории упругости. Для верификации использования модели было проведено сравнение с разработанной в конечно-элементном комплексе COMSOL Multiphysics моделью с учетом конечных деформаций (рис. 5.5).

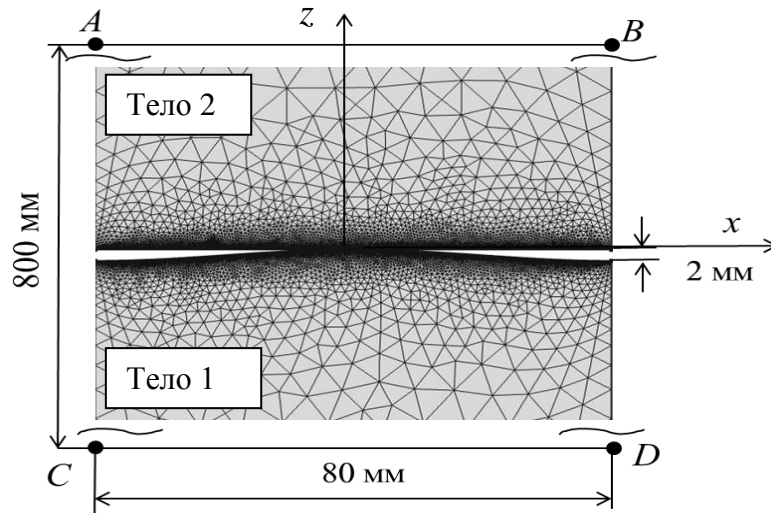


Рис. 5.5 – Конечно-элементная (КЭ) модель контакта волнистой поверхности и полуплоскости ($m = 0$)

В модели были приняты следующие граничные условия и параметры нагружения:

- отрезок AB – перемещение по $-z$ (u_z) с шагом 0.2 мм;
- отрезок CD – отсутствие перемещения по z ;
- отрезки AC и BD – периодические граничные условия;
- упругие постоянные материалов $E_1 = 460$ МПа; $E_2 = 2 \cdot 10^9$ МПа (жесткий штамп); $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$;
- $\Delta/L = 0.013$.
- плоское деформированное состояние.

На рис. 5.6 показаны сравнения распределений давления, полученных по формуле (5.7) с численными расчетами методом конечных элементов при различных m .

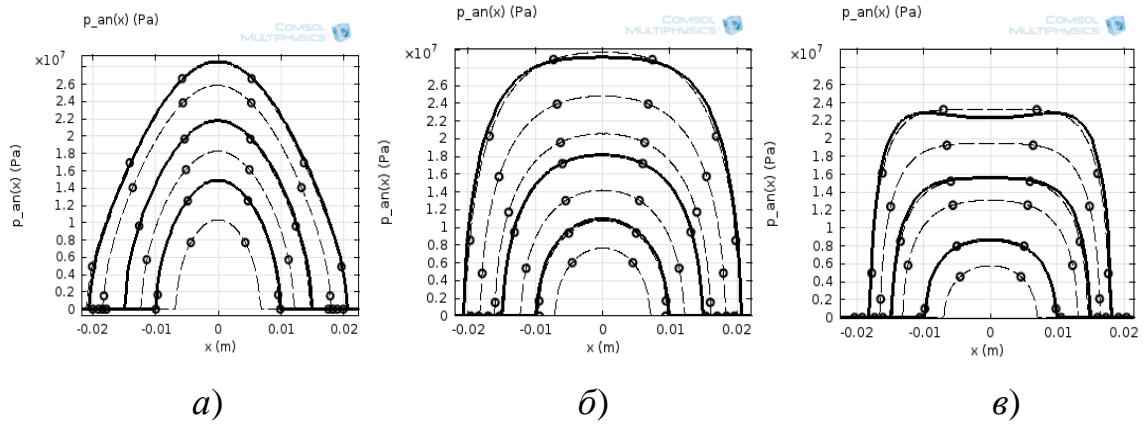


Рис. 5.6 – Сравнение распределений давлений с ростом a , полученных по формуле (5.7) (сплошные линии) и по КЭ-модели (штриховые линии):

$$a - m = 0; \quad б - m = 0.5; \quad в - m = 1.$$

Рис 5.6. показывает, что с ростом длины фактической области контакта $2a$ и параметра m значения, рассчитанные аналитически и численно, начинают расходиться, что связано с нарушением условия малости производной функции зазора. Поэтому при $m > 1$ рассмотренные аналитические выражения не применимы для анализа контактных характеристик при $2a > L/2$.

Полная нормальная нагрузка при $2a > L/2$ может быть определена с использованием численного интегрирования выражения (5.7), а при $2a \leq L/2$ связь номинального давления и длины фактической области контакта определяется формулой (5.10). На рис. 5.7 представлена зависимость безразмерной длины фактической области контакта $a' = 2a / L$ от безразмерного номинального давления $p' = \bar{p} / p^*$, где $p^* = \pi \Delta E^* / L$ при $\Delta = 1$.

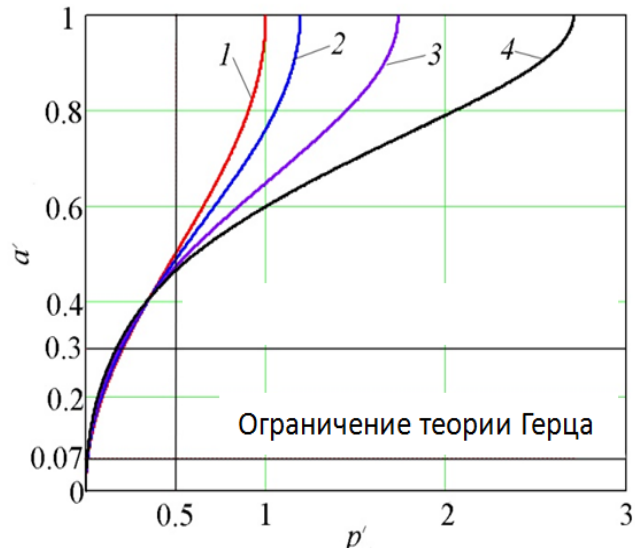


Рис. 5.7 – Зависимость относительной длины контакта от номинального давления при различных значениях параметра формы m :

(1) $m = 0$; (2) $m = 0.1$; (3) $m = 0.3$; (4) $m = 0.5$

Рис. 5.7 показывает, что параметр формы m существенно влияет на зависимость длины фактической области контакта от номинального давления, особенно при достижении $\bar{p}/p^* = 0.5$. С увеличением m при малых значениях a требуемая нагрузка для достижения необходимого размера длины фактической области контакта уменьшается по мере увеличения радиуса кривизны выступа. Предел применимости теории Герца составляет $2a \approx 0,07L$. С ростом m приложенное номинальное давление, необходимое для достижения $2a/L < 0.4$ уменьшается. При $2a/L > 0.4$ наблюдается обратная зависимость от параметра формы m - растет требуемое номинальное давление. После достижения значения $2a/L = 0.5$, зависимость $a'(p')$ резко меняет характер. Из всех рассмотренных форм профиля симметрией кривой $a'(p')$ относительно значения $\bar{p}/p^* = 0.5$ (см. рис. 5.7) обладает только синусоида ($m = 0$).

Анализ внутренних напряжений в подповерхностном слое актуален для определения начала пластического течения/хрупкого разрушения в материала полуплоскости.

Интересным с точки зрения оценки совместного влияния формы выступов и их взаимного влияния является случай при $2a/L = 0.5$. Компоненты напряжений при плоском деформированном состоянии определяются по формулам [39]:

$$\sigma_{xx}(x, z) = -\frac{2z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\xi)(x-\xi)^2 d\xi}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2}; \quad (5.14)$$

$$\sigma_{zz}(x, z) = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\xi)d\xi}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2}; \quad (5.15)$$

$$\tau_{zx}(x, z) = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\xi)(x-\xi)d\xi}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2}, \quad (5.16)$$

$$\sigma_{yy} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}); \quad (5.17)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0. \quad (5.18)$$

Эквивалентные напряжения согласно критерию Мизеса (Па) определяются по формуле [138]:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (5.19)$$

Примеры распределения безразмерных эквивалентных напряжений по Мизесу при различном параметре формы неровности m для случая $2a/L = 0.5$ приведены на рис. 5.8 (показана только половина области контакта на одном периоде).

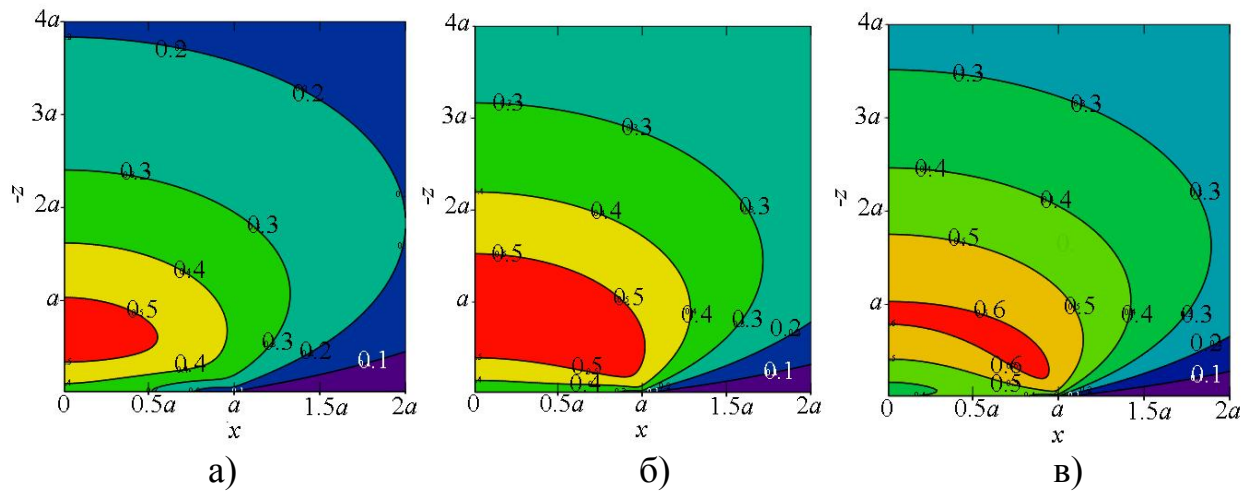


Рис. 5.8 – Изолинии безразмерных эквивалентных напряжений по Мизесу $\sigma_e(x, z, m)/p(0, m)$ при контакте поверхности с регулярным рельефом и полуплоскости ($2a = 0.5L$): (а) $m = 0$; (б) $m = 0.65$;
(в) $m = 1$

Из рис. 5.8 видно, что при величине длины фактической области контакта $2a = L/2$ более благоприятное распределение эквивалентных напряжений дает профиль рельефа при $m = 0$, несмотря на то, что при $m = 0.65$ распределение давлений практически равномерное. С ростом параметра формы m область максимальных эквивалентных напряжений становится более вытянутой и приближается к границе областей контакта. При этом максимум этих напряжений смещается ближе к границе полуплоскости. Таким образом, более равномерное распределение давления, наблюдающееся с ростом m в диапазоне $0 \dots 0.65$ вызывает более благоприятное распределение внутренних напряжений только при меньшем пиковом давлении, что соответствует малым и средним нагрузкам ($2a < L/2$). При высоких значениях нагрузок и состоянию, близкому к полному контакту синусоидальный профиль более благоприятен с точки зрения распределения эквивалентных напряжений по Мизесу.

5.2 Постановка и решение периодической контактной задачи для рельефа с параметрически заданной формой с различными выступами и впадинами и упругой полуплоскости

5.2.1 Постановка и решение задачи при приложении нормальной нагрузки

Профиль рельефа с различной формой выступов и впадин можно представить следующей функцией:

$$f(x) = 2\Delta \sin^{2n} \left(\frac{\pi x}{L} \right), \quad (5.20)$$

где Δ – амплитуда профиля; L – расстояние между впадинами (период); n – параметр, задающий радиус кривизны углубления (ширину выступа); $n \in \mathbb{N}^*$, четно и является безразмерным параметром. При $n = 1$ профиль представляет собой синусоиду. С увеличением степени n растет ширина плоского участка выступов, а углубления становятся более узкими. При $n \rightarrow \infty$ профиль стремится к гладкому, а ширина углублений становится исчезающе малой. Виды профилей и схема контакта показаны на рис. 5.9.

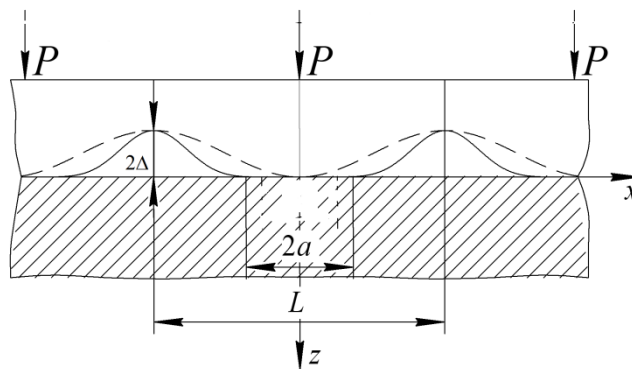


Рис. 5.9. Схема контакта поверхности с регулярным рельефом (функция 5.20) и полуплоскости при $n = 4$ (сплошная линия) и $n = 1$ (штриховая линия)

К каждому выступу, определенному на одном периоде, приложена нормальная нагрузка P , связанная с номинальным давлением выражением

$P = \bar{p}L$. Материалы контактирующих тел представляют собой линейно упругие тела, описываемые двумя константами: модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Также используется гипотеза плоского деформированного состояния. Для применимости уравнений линейной теории упругости необходимо выполнение условия $\Delta \ll L$. С учетом симметрии выступа относительно начала координат используется интегральное уравнение периодической контактной задачи (2.4), см. глава 2, п. 2.1.1. С использованием условия контакта и принимая $L = 2\pi$, запишем выражение для функции зазора между поверхностями:

$$h(x) = \delta - 2\Delta \sin^{2n}\left(\frac{x}{2}\right) = \delta - 2\Delta \left(\frac{\tan^2(x/2)}{\tan^2(x/2) + 1} \right)^n. \quad (5.21)$$

Тогда ее производную в исходных и преобразованных переменных можно записать следующим образом:

$$h'(x) = -2\Delta n \frac{1}{\tan(x/2)} \left(\frac{\tan^2(x/2)}{\tan^2(x/2) + 1} \right)^n; \quad (5.22)$$

$$h'_x(v) = -2\Delta n \frac{1}{v} \left(\frac{v^2}{1 + v^2} \right)^n. \quad (5.23)$$

Функция (5.23) непрерывна, дифференцируема и удовлетворяет условию Гёльдера на ограниченном отрезке $[-\alpha, \alpha]$, что позволяет применять резольвенту (2.12) (см. глава 2, п. 2.1.2) интегрального уравнения с ядром Коши для определения контактных давлений в случае ограниченного давления на обоих концах отрезка зоны контакта (направление $p(v)$ принято положительным):

$$p(v) = \frac{E^*}{2\pi} \sqrt{\alpha^2 - v^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} h'_x(u) \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \frac{1}{u - v} du. \quad (5.24)$$

Нахождение значения сингулярного интеграла в выражении (14) при произвольном n приводит к громоздким вычислениям. Поэтому ограничимся

получением зависимостей для $n = 1$ и 2 . При $n = 1$ выражение для определения контактных давлений имеет вид:

$$p_{n=1}(v) = \frac{\Delta E^* \sqrt{\alpha^2 - v^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2} (1 + v^2)}. \quad (5.25)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим:

$$p_{n=1}(x) = -\left(2\sqrt{2}\pi\Delta E^* / 2L\right) \cos(\pi x / L) \sqrt{\cos(2\pi x / L) - \cos(2\pi a / L)}. \quad (5.26)$$

Выражение (5.26) представляет собой решение Вестергаарда для синусоидальной волнистости [34].

При $n = 2$ выражение для определения контактных давлений в преобразованных переменных имеет следующий вид:

$$p_{n=2}(v) = -\frac{\pi^2 \Delta E^* \sqrt{1 + \alpha^2} \sqrt{\alpha^2 - v^2} (2v^2 (1 + 2a^2) + a^2)}{8\sqrt{2} (1 + \alpha^2)^2 (1 + v^2)^2}. \quad (5.27)$$

Выполняя обратную замену переменных, получим:

$$p_{n=2}(x) = p_{n=1}(x) \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} \left(\left(\sin^2(\pi a / L) + 2 \right) \sin^2(\pi x / L) + \sin^2(\pi a / L) \right), \quad (5.28)$$

где $p_{n=1}(x)$ определяется выражением (5.27).

Для определения зависимости полной нагрузки от полудлины зоны контакта a при произвольном n используем изменение порядка интегрирования:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2p(v)}{1 + v^2} dv = \frac{E^*}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - v^2}}{1 + v^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'_x(u)}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \frac{1}{u - v} dudv = \\ &= \frac{E^*}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'_x(u)}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - v^2}}{1 + v^2} \frac{1}{v - u} dv du \end{aligned} \quad (5.29)$$

Вычислив второй интеграл в (5.29) и с учетом (5.23), приходим к следующему выражению для определения полной нагрузки, действующей на одном периоде:

$$P = E^* \sqrt{1 + \alpha^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{uh'_x(u)}{\sqrt{\alpha^2 - u^2} (1 + u^2)} du = \sqrt{\pi} 2\Delta E^* \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{\Gamma(n)} \frac{\alpha^{2n}}{(1 + \alpha^2)^n}. \quad (5.30)$$

где $\Gamma(z)$ - Гамма-функция.

Применяя обратную замену переменных, запишем искомую формулу для полной нагрузки:

$$P = 2\sqrt{\pi}\Delta E^* \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{\Gamma(n)} \sin^{2n}\left(\frac{\pi a}{L}\right). \quad (5.31)$$

Из (5.31) следует зависимость полудлины области контакта от приложенной на одном периоде нормальной силы:

$$a = \frac{L}{\pi} \arcsin \left(\frac{\Gamma(n)P}{2\sqrt{\pi}\Delta E^* \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)} \right)^{\frac{1}{2n}}. \quad (5.32)$$

Также из формулы (5.31) следует возможность выражения функции $P = f(a)$ при произвольном n через решение Вестергаарда (при $n = 1$):

$$P_n = 2\sqrt{\pi}\Delta E^* \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\pi\Delta E^*} P_{n=1} \right)^n. \quad (5.33)$$

5.2.2. Анализ контактных характеристик

На рис. 5.10 представлены примеры распределений безразмерных контактных давлений $p(x) / p^*$ при $L = 2\pi$.

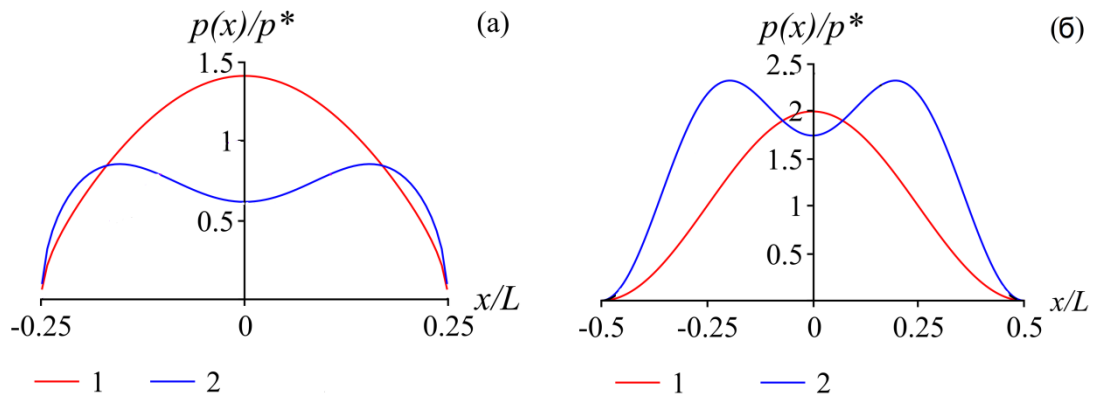


Рис. 5.10 – Распределения безразмерных нормальных давлений при $2a = 0.5L$ (а); при $2a = L$ (б) и $n = 1$ (кривая 1); $n = 2$ (кривая 2)

С ростом степени n , характеризующимся увеличением ширины плоского участка выступов и уменьшением радиуса кривизны впадин, распределение нормальных давлений для упругой полуплоскости (см. рис. 5.10, а, б) меняет форму на «двугорбую». Максимум эпюры давлений при этом смещается от центра к краям области контакта, что характерно и для профиля, рассмотренного в п. 5.1.

На рис. 5.11 показаны графики безразмерной длины фактической области контакта $2a/L$ от безразмерного номинального давления $\bar{p} = P / Lp^*$.

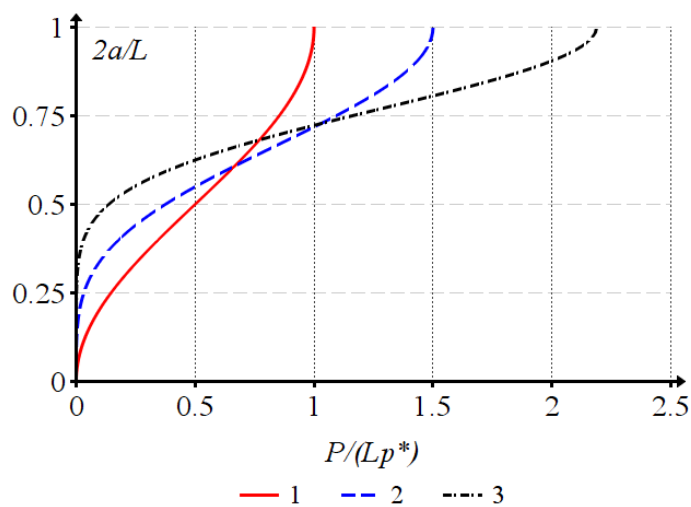


Рис. 5.11 – Зависимость длины фактической области контакта $2a/L$ от номинального давления: $n = 1$ (кривая 1), $n = 2$ (кривая 2), $n = 4$ (кривая 3)

Для рельефа (см. рис. 5.9) с увеличением степени n наблюдается схожая зависимость длины фактической области контакта от номинального давления, как и для рельефа с одинаковой формой выступов и впадин (см. рис. 5.1). При малых и умеренных нагрузках увеличение радиуса кривизны выступов приводит к увеличению длины фактической области контакта, а при высоких нагрузках, наблюдается обратная зависимость, связанная с уменьшением ширины и радиуса кривизны впадин.

Однако, следует отметить, что несмотря на то, что для рельефа с различной формой выступов и впадин (см. рис. 5.9) при увеличении степени n форма выступов и впадин меняется более существенно, чем при увеличении параметра формы m в диапазоне $0 \dots 1$ для профиля, показанного на рис. 5.1, графики зависимости длины области фактического контакта от номинального давления в обоих случаях схожи. Если вычислить производную профиля при $2a = L/2$, то согласно формуле (5.22) имеем

$\partial h / \partial x|_{x=L/2} = -2\Delta n \left(\frac{1}{2}\right)^n$, т.е. скорость роста производной профиля при увеличении m ($\partial h / \partial x|_{x=L/2} = -\Delta(m+1)$) существенно выше, чем при увеличении n для любых положительных m и n . Таким образом, основное влияние на зависимость размера области фактического контакта от нагрузки при высоких значениях нагрузок оказывает производная функции формы рельефа. Эта зависимость характерна и для состояния полного контакта, где высокочастотные гармоники разложения данной функции в ряд Фурье оказывают основное влияние (см. глава 4).

Следует также отметить, что для синусоидальной волнистости соотношение между средним давлением и длиной контакта равно

$$\bar{p} = p^* \sin^2(\pi a / L) = \frac{p^*}{2} (1 - \cos(2\pi a / L)), \quad (5.34)$$

и совпадает по виду с функцией формы волнистой поверхности.

5.3 Постановка и решение периодической контактной задачи для рельефа с параметрически заданной формой и упругой полуплоскости при приложении нормальной и касательной силы

5.3.1 Общие положения теории Каттанео-Миндлина в периодическом случае

Рассмотрим схему периодической контактной задачи при последовательном приложении нормальной и касательной нагрузки (рис. 5.12).

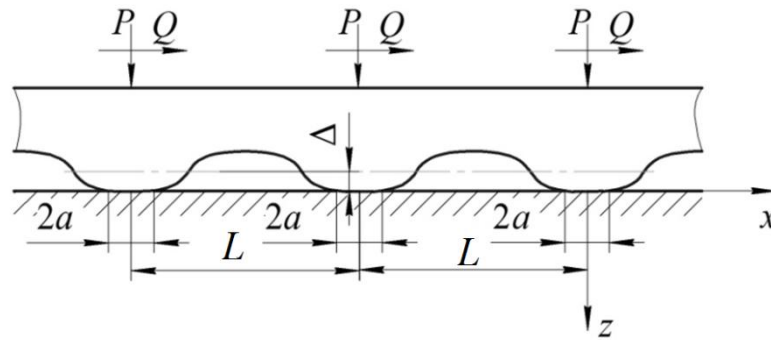


Рис. 5.12 – Схема контакта поверхности с регулярным рельефом и упругой полуплоскости при приложении нормальных и касательных сил

Исходная система интегральных уравнений для определения нормальных и касательных усилий имеет вид ($L = 2\pi$) [33]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E^*}{2} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a p(\xi) \operatorname{ctg} \left(\frac{x-\xi}{2} \right) d\xi - \beta q(x); \\ \frac{E^*}{2} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q(\xi) \operatorname{ctg} \left(\frac{x-\xi}{2} \right) d\xi + \beta p(x); \\ P = \int_{-a}^a p(x) dx; \\ Q = \int_{-a}^a q(x) dx, \end{array} \right. \quad (5.35)$$

где $h(x)$ и $g(x)$ – разности нормальных и касательных смещений контактирующих тел внутри зоны контакта соответственно; $p(\xi)$, $q(\xi)$ – нормальные и касательные усилия соответственно; P , Q – полные нормальные и касательные силы, действующие на одном периоде соответственно; β – параметр, характеризующий несоответствие упругих констант материалов контактирующих тел; E^* – приведенный модуль упругости.

Параметр β определяется формулой:

$$\beta = \frac{\frac{G_2}{G_1}(1-2\nu_1) - (1-2\nu_2)}{2\left(\frac{G_2}{G_1}(1-\nu_1) + (1-\nu_2)\right)}, \quad (5.36)$$

где G_1 и G_2 – модули сдвига материалов контактирующих тел.

В теории Каттанео и Миндлина [53, 54] модули сдвига и коэффициенты Пуассона материалов контактирующих тел принимаются одинаковыми и $\beta = 0$. В этом случае первое и второе уравнения системы (5.35) становятся независимыми.

При приложении касательной силы в зоне контакта возникают силы трения. Так как контакт является неконформным, то по краям области контакта будут возникать зоны проскальзывания. При этом в центре зоны контакта шириной $2a$ будет присутствовать область сцепления шириной $2c$ (см. рис. 5.13). Так как граничные условия задачи симметричны, то области проскальзывания шириной b слева и справа от границы зоны сцепления будут одинаковыми, т.е. $b = a - c$.

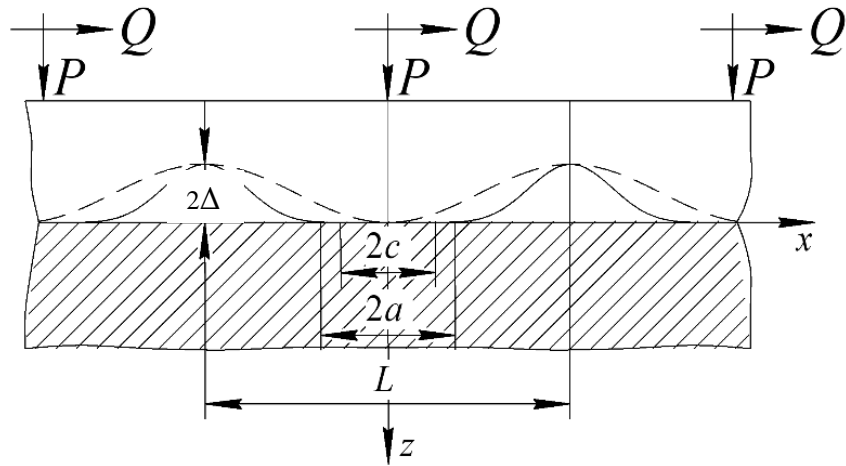


Рис. 5.13 – Контакт поверхности с регулярным рельефом и упругой полуплоскости при наличии зон сцепления и проскальзывания

Предполагается, что действие сил трения в зоне проскальзывания подчиняется закону Амонтона:

$$q(x) = -\mu p(x), \quad c \leq |x| \leq a; \quad (5.37)$$

где μ - коэффициент трения.

Принимая во внимание симметрию зон проскальзывания и форму рельефа относительно начала координат, касательные усилия в зоне сцепления можно определить в соответствии с принципом суперпозиции, предложенным в работах [139, 52]:

$$q(x) = -\mu p(x) + q^*(x), \quad -c \leq x \leq c; \quad c < a, \quad (5.38)$$

где $q^*(x)$ – дополнительные касательные усилия, необходимые для обеспечения конечного значения коэффициента трения на границе областей контакта.

Подставляя уравнение (5.38) в систему (5.35) и принимая во внимание, что относительные касательные перемещения $g(x)$ в зоне сцепления от действия нормальной нагрузки (на одном периоде) P постоянны, интегральное уравнение для определения дополнительных касательных усилий $q^*(x)$ можно записать в виде:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c q^*(\xi) \operatorname{ctg} \left(\frac{x-\xi}{2} \right) d\xi = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-a}^a p(\xi) \operatorname{ctg} \left(\frac{x-\xi}{2} \right) d\xi, \quad |x| < c, \quad (5.39)$$

5.3.2 Решение задач и определение контактных характеристик для рельефов с одинаковой и различной формой выступов и впадин

Для рассмотренного в п. 5.1.1 рельефа с одинаковой формой выступов и впадин, выполнив замену переменной (2.8) в (5.39) и подставив выражение для контактного давления (5.6) получим с учетом симметрии контактного давления:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{q^*(u)}{v-u} du = - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\Delta\mu E^* (m+1)^2 \sqrt{\alpha^2 - u^2} (\alpha^2 + 1)(1+u^2)(1+uv)}{2\pi \sqrt{\alpha^2 + 1} (m - mu^2 + u^2 + 1)^2 (m - m\alpha^2 + \alpha^2 + 1)(v-u)(1+u^2)} du, \quad |v| < \gamma, \quad (5.40)$$

где $\gamma = \operatorname{tg}(c/2)$.

Правая часть выражения (5.40) может быть упрощена с помощью добавления и вычитания v^2 в числителе:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{q^*(u)}{v-u} du = -M \left[(1+v^2) \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}{(m - mu^2 + u^2 + 1)^2 (v-u)} du + v \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}{(m - mu^2 + u^2 + 1)^2} du \right], \quad (5.41)$$

где множитель M определяется выражением

$$M = \frac{\Delta\mu E^* (m+1)^2 \sqrt{\alpha^2 + 1}}{2\pi (m - m\alpha^2 + \alpha^2 + 1)}. \quad (5.42)$$

Решение первого интеграла с помощью разложения подынтегрального выражения на простые дроби приводит к следующему результату:

$$M(1+v^2) \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}{(m - mu^2 + u^2 + 1)^2 (v-u)} du = \frac{\Delta\mu E^* (m+1)v(1+v^2)}{(m - mv^2 + v^2 + 1)^2}. \quad (5.43)$$

Решение второго интеграла дает:

$$Mv \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}{(m - mu^2 + u^2 + 1)^2} du = \frac{\Delta\mu E^* v(m+1)^{1/2} \alpha^2 \sqrt{\alpha^2 + 1}}{2(m - m\alpha^2 + \alpha^2 + 1)^{3/2}}. \quad (5.44)$$

Тогда интегральное уравнение (5.40) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{q^*(u)}{v-u} du = - \left[\frac{\Delta \mu E^* (m+1) v (1+v^2)}{(m-mv^2+v^2+1)^2} + \frac{\Delta \mu E^* v (m+1)^{1/2} \alpha^2 \sqrt{\alpha^2+1}}{2(m-m\alpha^2+\alpha^2+1)^{3/2}} \right], \quad |v| < \gamma. \quad (5.45)$$

Второе слагаемое в правой части интегрального уравнения (5.45) можно представить следующим образом:

$$\frac{\Delta \mu E^* v (m+1)^{1/2} \alpha^2 \sqrt{\alpha^2+1}}{2(m-m\alpha^2+\alpha^2+1)^{3/2}} = \frac{\mu v \sqrt{\alpha^2+1}}{2\pi} P(\alpha). \quad (5.46)$$

Так как дополнительные касательные усилия в зоне сцепления $q^*(x)$ не зависят от нормальной нагрузки, то решая интегральное уравнение (5.45) относительно первого слагаемого, получим:

$$q^*(v, m) = - \frac{\Delta E^* \mu (m+1)^2 \sqrt{\gamma^2 - v^2} (v^2 + 1) (\gamma^2 + 1)}{\sqrt{\gamma^2 + 1} (m - mv^2 + v^2 + 1)^2 (m - m\gamma^2 + \gamma^2 + 1)}. \quad (5.47)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим решение для определения дополнительных касательных усилий $q^*(x)$ в зоне сцепления:

$$q^*(x, m) = G \frac{\sqrt{2\pi\mu\Delta E^*}}{L} \left| \cos(\pi x / L) \right| \sqrt{\cos(2\pi x / L) - \cos(2\pi c / L)}, \quad (5.48)$$

где функция $G(x)$ определяется следующим выражением:

$$G = (m+1)^2 \left(\left| m \cos(2\pi x / L) \right| + 1 \right)^{-2} \left(m \cos(2\pi c / L) + 1 \right)^{-1}. \quad (5.49)$$

Таким образом, учитывая принятые допущения и выражение (5.48), дополнительные касательные усилия определяются выражениями, аналогичными зависимостям для определения контактных давлений с заменой величины a на величину c и умножением на величину коэффициента трения μ . К подобным выводам можно прийти альтернативным способом, рассматривая непосредственно условие контакта:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c q^*(\xi) \cot\left(\frac{x-\xi}{2}\right) d\xi = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-a}^a p(\xi) \cot\left(\frac{x-\xi}{2}\right) d\xi = \frac{\mu E^*}{2} h'(x), \quad |x| < c, \quad (5.50)$$

Для рельефа с различной формой выступов и впадин, рассмотренного в п. 5.2 будем иметь в соответствии с п. 5.3.2 следующие выражения для определения дополнительных касательных усилий $q^*(x)$:

– при $n = 1$

$$q_{n=1}^*(x) = -\left(2\sqrt{2}\pi\mu\Delta E^* / 2L\right)\cos(\pi x / L)\sqrt{\cos(2\pi x / L) - \cos(2\pi c / L)}. \quad (5.51)$$

– при $n = 2$

$$q_{n=2}^*(x) = q_{n=1}^*(x)\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}\left(\left(\sin^2(\pi c / L) + 2\right)\sin^2(\pi x / L) + \sin^2(\pi c / L)\right), \quad (5.52)$$

где $q_{n=1}^*(x)$ определяется выражением (5.51).

Используя уравнение равновесия, определим значение дополнительной касательной силы, действующей в зоне сцепления на одном периоде, аналогично нормальной нагрузке:

$$Q^* = \int_{-c}^c q^*(x)dx = 2\sqrt{\pi}\mu\Delta E^* \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{\Gamma(n)} \sin^{2n}\left(\frac{\pi c}{L}\right). \quad (5.53)$$

Комбинируя выражения (5.31), (5.38) и (5.53) можно получить зависимость для определения отношения касательной нагрузки к нормальной:

$$\frac{Q}{\mu P} = \frac{\bar{q}}{\mu \bar{p}} = 1 - \left(\frac{\sin^2(\pi c / L)}{\sin^2(\pi a / L)}\right)^n, \quad (5.54)$$

где $\bar{p} = P / L$ и $\bar{q} = Q / L$ - нормальные и касательные номинальные давления.

При $n = 1$ зависимость (5.54) совпадает с решением для частичного проскальзывания синусоидальной волнистости, полученного в работе [52]. Следует отметить, что соотношение $Q/\mu P$ не зависит от амплитуды рельефа Δ и определяется периодом L и степенью n . Из зависимостей (5.32) и (5.54) следует выражение для определения полуширины зоны сцепления:

$$c = \frac{L}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{\left(\frac{\Gamma(n)P}{\sqrt{\pi}\Delta E^* \Gamma(0.5 + n)} \left(1 - \frac{Q}{\mu P}\right) \right)^{\frac{1}{n}}} \right). \quad (5.55)$$

5.3.3 Анализ контактных характеристик для различной формы рельефа при последовательном нормальном и касательном нагружении

На рис. 5.14 показаны распределения касательных усилий для рельефа с различной формой выступов и впадин (см. рис. 5.13) при $Q/\mu P = 0.5$, $p^* = \pi E^* A / 2L$.

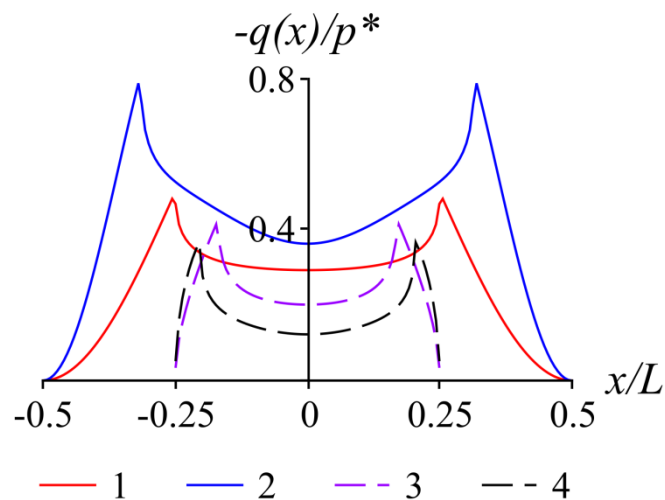


Рис. 5.14 – Распределения безразмерных касательных усилий при $n = 1$ (кривые 1, 3); при $n = 2$ (кривые 2, 4); при $2a = 0.5L$ (кривые 3, 4), при $2a = L$ (кривые 1, 2)

Распределения касательных усилий, показанные на рис. 5.14 имеют характерный вид с максимумами по границам зоны сцепления. Эффект взаимного влияния приводит к увеличению максимальных касательных усилий с ростом нормальной нагрузки (размера области контакта), а также с ростом степени n .

На рис. 5.15 приведены графики отношения касательной нагрузки к нормальной в зависимости от отношения размера зоны сцепления $2c$ к размеру области контакта $2a$ для рельефа с различной формой выступов и впадин (см. рис. 5.13).

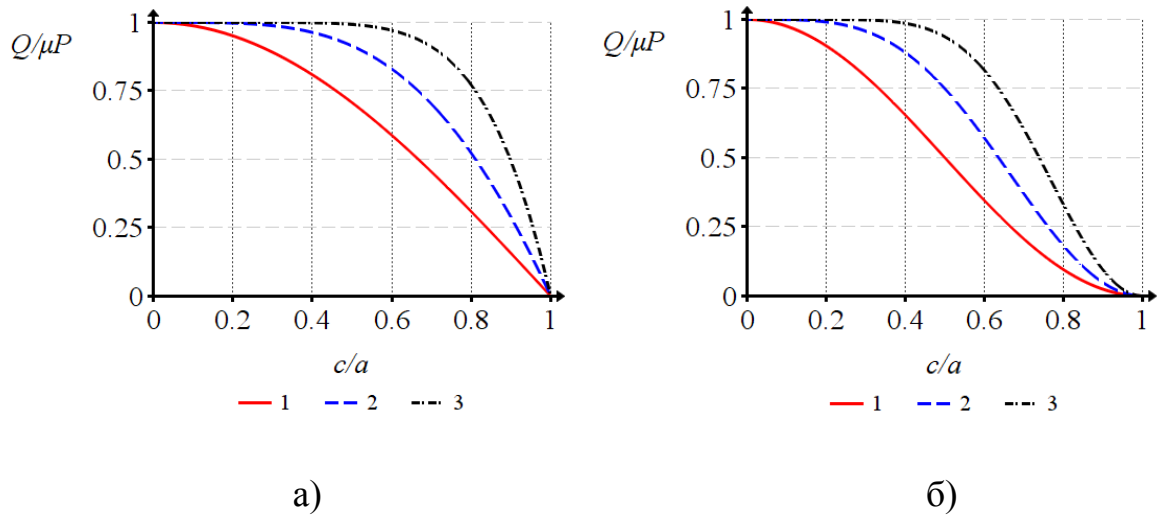


Рис. 5.15 – Зависимость величины $Q/\mu P$ от отношения c/a при $2a = L/2$ (а) и при $2a = L$ (б) при $n = 1$ (кривая 1); $n = 2$ (кривая 2) и $n = 4$ (кривая 3)

Из рис. 5.15 видно, что в условиях неполного контакта (см. рис. 5.15, а) область проскальзывания растет медленно при малых касательных усилиях и быстро при значительных. С увеличением степени n рост области проскальзывания снижается, особенно при высоких значениях Q . Переход от неполного контакта к полному приводит к уменьшению участка медленного роста зоны проскальзывания с увеличением Q для всех n (см. рис 5.15, б). При очень высоких значениях n характер кривых будет приближаться к решению для системы плоских штампов, и следует отметить, что такое решение в рамках теории Каттанео-Миндлина не удастся построить [52]. Решение для системы плоских штампов требует учета разности упругих постоянных материалов штампа и полуплоскости и получено численно [57] и приближенно аналитически с использованием предположения, что касательные усилия слабо влияют на нормальные перемещения [33].

На рис. 5.16 показаны графики отношения касательной нагрузки к нормальной в зависимости от отношения размера зоны сцепления $2c$ к

размеру области контакта $2a$ для рельефа с одинаковой формой выступов и впадин при различном параметре формы m ($m < 1$) (см. рис. 5.1).

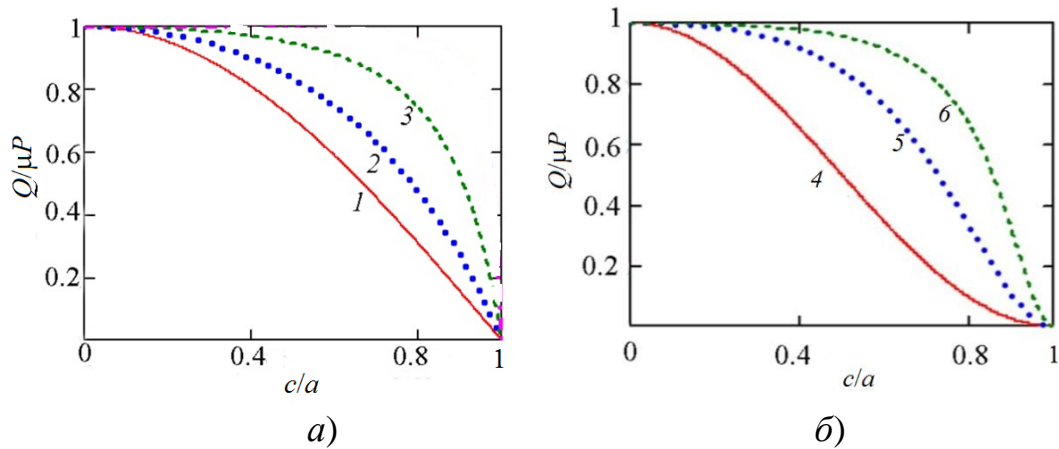


Рис. 5.16 – Зависимость величины $Q/\mu P$ от отношения c/a при $2a = L/2$ (а) и при $2a = L$ (б) и различном параметре формы m : (1) $m = 0$; (2) $m = 0.65$; (3) $m = 3$; (4) $m = 0$; (5) $m = 0.65$; (6) $m = 0.9$

Рис. 5.16 показывает, что с ростом параметра m размер зоны сцепления снижается медленнее с ростом величины Q , и затем происходит резкий переход от сцепления к проскальзыванию. При этом следует, отметить, что графики для рельефов с одинаковой и различной формой выступов и впадин (см. рис. 5.1 и 5.13) по характеру почти не отличаются и схожим образом «реагируют» на изменение параметров формы m и n соответственно. Это обстоятельство связано с допущением о малой высоте рельефа, а также с упрощенной постановкой в рамках теории Каттанео-Миндлина, в которой не учитывается связность нормальных и касательных перемещений в зоне контакта при наличии сил трения, что допустимо при близких упругих постоянных материалов контактирующих тел.

5.4 Выводы по главе 5

На основе методов решения плоских периодических контактных задач для рельефов сложной формы, рассмотренных в главе 2, поставлены и

решены контактные задачи для поверхностей с регулярным рельефом и упругой полуплоскости при приложении нормальных и тангенциальных сил в условиях частичного проскальзывания при одинаковых упругих постоянных материалов контактирующих тел. Предложены две параметрические функции, позволяющие варьировать форму выступов и впадин рельефа.

Получены аналитические выражения для распределения контактных давлений, касательных усилий, размера зон контакта, подобластей сцепления и проскальзывания в зависимости от приложенного номинального давления и формы рельефа.

Проанализировано распределение эквивалентных напряжений по Мизесу для различной формы рельефа и рассмотрены границы применимости полученных решений по высоте рельефа с помощью моделирования методом конечных элементов.

Анализ полученных результатов дает возможность сделать следующие выводы:

- С увеличением параметра формы m для рельефа с одинаковой формой выступов и впадин распределение контактного давления сначала стремится к равномерному, а затем приобретает вид с пиками вблизи концов зон контакта.
- При умеренных нагрузках и значительном увеличении угла наклона профиля рельефа эффект взаимного влияния обеспечивает сильный рост максимума эпюры давлений при увеличении параметров формы рельефа m (при одинаковой форме выступов и впадин, см. рис. 5.1) и n (при различной форме выступов и впадин, см. рис. 5.13).
- Более равномерное распределение давления, наблюдающееся с ростом m в диапазоне $0 \dots 0.65$, вызывает более благоприятное распределение внутренних напряжений только при малых и

средних нагрузках ($2a < L/2$). При высоких значениях нагрузок и состоянию, близкому к полному контакту синусоидальный профиль более благоприятен с точки зрения распределения эквивалентных напряжений по Мизесу.

- Основное влияние на зависимость размера области фактического контакта от нагрузки при высоких значениях нагрузок оказывает производная функции профиля рельефа. Эта зависимость характерна и для состояния полного контакта, где высокочастотные гармоники разложения функции формы рельефа в ряд Фурье оказывают основное влияние (см. глава 4). С ростом длины фактической области контакта $2a$ при существенном увеличении m нарушается допущение о применимости линейной теории упругости.
- Эффект взаимного влияния выступов рельефа приводит к увеличению максимальных касательных усилий с ростом нормальной нагрузки (размера области контакта), а также с ростом параметров формы рельефа m и n .
- В условиях неполного контакта область проскальзывания растет медленно при малых касательных усилиях и быстро при значительных. С увеличением параметров формы рельефа m и n рост области проскальзывания снижается, особенно при высоких значениях касательной силы. Переход от неполного контакта к полному приводит к уменьшению участка медленного роста зоны проскальзывания с увеличением касательной силы для всех рассмотренных значений m и n .
- Зависимости размера зоны сцепления для рельефов с одинаковой и различной формой выступов и впадин (см. рис. 5.1 и 5.13) в рамках рассмотренных допущений по характеру почти не отличаются и схожим образом «реагируют» на изменение параметров формы рельефа m и n соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью проведенных в диссертационной работе исследований являлось развитие методов аналитического решения контактных задач упруго деформируемых тел, обладающих поверхностным рельефом, в широком диапазоне геометрических характеристик его элементов (выступов и впадин) и приложенных нагрузок.

В работе получены следующие основные результаты.

1. Получены точные и асимптотические решения (распределение контактных давлений, размер области контакта, функция дополнительного смещения) контактных задач теории упругости в плоской постановке с неизвестными границами зон контакта для рельефа с симметричной формой выступов (впадин), описываемой четной функцией координаты, и приведены примеры использования этих решений для расчета контактных характеристик для типичных профилей рельефа поверхности (волнистый, пилообразный, система цилиндрических выступов и т.д.).

2. Построены асимптотические решения пространственной периодической контактной задачи для поверхности с пространственным волнистым рельефом и упругого полупространства. Получены выражения для определения интегральных контактных характеристик (площадь фактического контакта, функция дополнительного смещения, максимальное давление), формы области контакта и контактного давления в различных диапазонах нагрузок.

3. В результате решения задачи о контакте волнистой поверхности с двумя масштабными уровнями неровностей и упругой полуплоскости получены аналитические выражения для расчета распределения контактных давлений, размера фактической области контакта и дополнительного смещения за счет неровностей волнистости при односвязной области контакта. Исследовано влияние геометрии неровностей на двух масштабных

уровнях на контактные характеристики взаимодействующих поверхностей при малой высоте неровностей второго масштабного уровня.

4. В результате решения задачи о внедрении волнистого цилиндра в упругую полуплоскость оценено влияние типа начального контакта (с одной и двумя областями) на длину областей контакта и распределение контактных давлений.

5. Получены приближенные оценки амплитуды и частоты волнистости, при которых происходит переход к многосвязной области контакта при внедрении волнистого цилиндра в упругую полуплоскость с одной зоной начального контакта.

6. Даны решения плоских задач механики контактного взаимодействия упругих тел с периодическим рельефом при приложении нормальных и касательных сил в условиях частичного проскальзывания при одинаковых модулях сдвига и коэффициентах Пуассона материалов взаимодействующих тел. Форма выступов и впадин регулярного рельефа задавалась параметрически, что позволяло проанализировать совместное влияние угла наклона, кривизны выступов (впадин) рельефа и расстояния между ними на контактные и фрикционные характеристики поверхностей. В результате решения задач найдены выражения для распределения контактных давлений, касательных усилий, размера зон контакта, подобластей сцепления и проскальзывания в зависимости от отношения нормальных и касательных сил, а также формы выступов (впадин) рельефа. Проведен анализ влияния геометрических параметров рельефа на концентрацию напряжений в подповерхностных слоях в условиях нагружения по нормали к поверхности.

Полученные в работе результаты позволяют разработать метод управления геометрическими параметрами регулярного рельефа поверхностей для достижения необходимых контактных характеристик взаимодействующих тел при заданных их упругих свойствах и значениях приложенных нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев А.Я. Физика и микрогеометрия технических поверхностей. Минск: Беларуская навука, 2016. 248 с.
2. Thomas T.R. Rough Surfaces. London: Imperial College Press, 1999. 278 p.
3. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
4. Демкин Н.Б. Контактное трение шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 228 с.
5. Рыжов Э.В., Суслов А.Г., Федоров В.П. Технологическое обеспечение эксплуатационных свойств деталей машин. М.: Машиностроение, 1979. 176 с.
6. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. XII+518 p.
7. Yastrebov V.A. Numerical Methods in Contact Mechanics. London, Hoboken: Wiley-ISTE, 2013. XVIII+392 p.
8. Hills D., Andresen H., Barber J.R. et al. Modeling and Simulation of Tribological Problems in Technology / Ed. by Paggi M. and Hills D. Cham: Springer, 2020. VII+330 p.
9. Goryacheva I., Makhovskaya Y. Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology. Elsevier, 2022, 220 p.
10. Горячева И.Г., Торская Е.В. Периодическая контактная задача для системы штампов и упругого слоя, сцепленного с упругим основанием // Трение и износ. 1995. Т. 16. № 4. С. 642-652.
11. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1933. 382 с.
12. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.
13. Gladwell G.M.L. Contact problems in the Classical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer Netherlands, 1980. 736 p.

14. Dezyani M., Sharafbafi F., Irani S. A new solution for the two-zonal contact problem // Arab. J. Sci. Eng. 2013. V. 38 № 6. P. 1509–1518.
15. Ghanati P., Adibnazari S. A study on the extent of the contact and stick zones in multiple contacts // Arch Appl Mech. 2019. V. 89. P. 1825–1836.
16. Vergne P., Villechaise B., Berthe D. Elastic behavior of multiple contacts: asperity interaction // J. Tribol-T ASME. 1985. V. 107. № 2. P. 224-228.
17. Berthe D., Vergne P. An elastic approach to rough contact with asperity interactions // Wear. 1987. V. 117. № 2. P. 211–222.
18. Nowell D., Hills D.A. Hertzian contact of ground surfaces // J. Tribol-T ASME. V. 111. № 1. P. 175–179.
19. Sundaram N., Farris T.N. Multiple contacts of similar elastic materials // J. Appl. Mech. T-ASME. 2009. V. 131. № 2. P. 1-12.
20. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 253 с.
21. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
22. Goryacheva I.G., Dobychin M.N. Multiple contact model in the problems of tribomechanics // Tribol. Int. 1991. V. 24. № 1. P. 29–35.
23. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
24. Greenwood J.A., Williamson G.P.B. Contact of nominally flat surfaces // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1966. V. 295. № 1442. P. 300-319.
25. Андрейкив А.Е., Панасюк В.В. Смешанная задача теории упругости для полупространства с круговыми линиями раздела граничных условий // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 3. С. 26-32.
26. Аргатов И.И., Назаров С.А. Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта. В кн. Механика контактных взаимодействий / Под ред. Воровича И.И. и Александрова В.М. М.: Физматлит, 2001. С. 73–82.

27. Аргатов И.И. Об улучшении асимптотического решения, получаемого по методу сращиваемых разложений в контактной задаче теории упругости // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2000. Т. 40. № 4. С. 623–632.
28. Argatov I., Li Q., Popov V.L. Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives // Arch. Appl. Mech. 2019. V. 89. P.1447–1472.
29. Collins W.D. Some coplanar punch and crack problems in three-dimensional elastostatics // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1963. V. 274. № 1359. P. 507–528.
30. Li S., Yao Q., Li Q., Feng X.-Q., Gao H. Contact stiffness of regularly patterned multi-asperity interfaces // J. Mech. Phys. Solids. 2018. V. 111. P. 277–289.
31. Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью // Российский журнал биомеханики. 2017. Т. 21. № 4. С. 418–428.
32. Sadowsky M. Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie // ZAMM. 1928. V. 8 № 2. P. 107–121.
33. Block J.M., Keer L.M. Periodic contact problems in plane elasticity // J. Mech. Mater. Struct. 2008. V. 3. P. 1207-1237.
34. Westergaard H.M. Bearing pressures and cracks // J. Appl. Mech. T-ASME. 1939. V. 6. P. 49-52.
35. Dundurs J., Tsai K.C., Keer L.M. Contact between elastic bodies with wavy surfaces // J. Elast. 1973. V. 3. P. 109–115.
36. Кузнецов Е.А. Периодическая контактная задача с учетом пригрузки, действующей вне штампа // Известия АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 84–93.
37. Hertz H. Ueber die Berührung fester elastischer Körper // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1881. V 92. P. 156-171.

38. Sneddon I.N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1946. V. 187. № 1009. P. 229-260.
39. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
40. Xu Y., Jackson R.L. Periodic contact problems in plane elasticity: The fracture mechanics approach // J. Tribol-T ASME. 2018. V. 140. № 1. P. 1-11.
41. Tsukanov I.Y. Effects of shape and scale in mechanics of elastic interaction of regular wavy surfaces // P. I. Mech. Eng. J.- J. Eng. 2017. V. 231. № 3. P. 332-340.
42. Цуканов И.Ю. Периодическая контактная задача для поверхности с двухуровневой волнистостью // ПММ. Т. 82. Вып. 3. С. 372-380.
43. Tsukanov I.Y. Partial contact of a rigid multisinusoidal wavy surface with an elastic half-plane // Adv. Tribol. 2018. V. 2018. P. 1-8.
44. Ju Y., Farris T.N. Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems // J. Tribol-T ASME. 1996. V. 118. № 2. P. 320-328.
45. Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G. The contact of elastic regular wavy surfaces // Int. J. Mech. Sci. 1985. V. 27. № 6. P. 383–396.
46. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics // J. Inst. Math. Appl. 1977. V. 20. № 2. P. 199-219.
47. Manners W. Partial contact between elastic surfaces with periodic profiles // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1998. V. 454. № 1980. P. 3203–3221.
48. Manners W. Methods for analyzing partial contact between surfaces // Int. J. Mech. Sci. 2003. V. 45. № 6-7. P. 1181–1199.
49. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413-424.
50. Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С.1005-1017.
51. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem, I: Theory // Int. J. Solids Struct. 1998. V. 35. № 18. P. 2349–2362.

52. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem, II: Examples // *Int. J. Solids Struct.* 1998. V. 35. № 18. P. 2363–2378.
53. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei.* 1938. V. 27. P. 342–348.
54. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact // *J. Appl. Mech. T-ASME.* 1949. V. 16. P. 259-268.
55. Klimchuk T., Ostryk V. Stress distributions in the Cattaneo-Mindlin problem on a contact with slip and adhesion of two cylindrical bodies // *Front. Mech. Eng.* 2020. V. 6. P. 1-11.
56. Горячева И.Г., Маланчук Н.И., Мартыняк Р.М. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // *ПММ.* 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 695-709.
57. Antipov Y.A. Galin's problem for a periodic system of stamps with friction and adhesion // *Int. J. Solids Struct.* 2000. V. 37. № 15. P. 2093–2125.
58. Goodman L.E. Contact stress analysis of normally loaded rough spheres // *J. Appl. Mech. T-ASME.* 1962. V. 29. № 3. P. 515-522.
59. Кузнецов Е.А. Периодическая контактная задача для полуплоскости с учетом сил трения // *Прикл. механика.* 1976. Т. 12. № 10. С. 37-44.
60. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. О фактическом контактном давлении // *Проблемы трения и изнашивания.* 1977. Вып. 12. С. 10–13.
61. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. Влияние шероховатости на напряженное состояние тел при фрикционном взаимодействии // *Прикл. мех.* 1978. Т. 14. № 9. С. 62-68.
62. Kuznetsov Ye.A., Gorokhovskiy G.A. Effect of tangential load on the stressed state of rubbing rough bodies // *Wear.* 1981. V. 73. № 1. P. 41–58.
63. Криштафович А.А., Мартыняк Р.М. Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с волнистыми поверхностями // *Трение и износ.* 2000. Т. 21. № 5. С. 1–8.

64. Nosonovsky M., Adams G.G. Steady-state frictional sliding of two elastic bodies with a wavy contact interface // *J. Tribol-T ASME*. 2000. V. 122. № 3. P. 490–495.
65. Солдатенков И.А. Периодическая контактная задача плоской теории упругости. Учет трения, износа и сцепления // *ПММ*. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 337-351.
66. Wang X., Xu Y., Jackson R.L. Elastic sinusoidal wavy surface contact under full stick conditions // *Tribol. Lett.* 2017. V. 65. № 4. P. 156-170.
67. Rostami A., Jackson R.L. Predictions of the average surface separation and stiffness between contacting elastic and elastic-plastic sinusoidal surfaces // *P. I. Mech. Eng. J.- J. Eng.* 2013. V. 227. № 12. P. 1376–1385.
68. Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F. The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // *Tribol. Lett.* 2014. V. 56. № 1. P. 171–183.
69. Tsukanov I.Y. An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces // *Tribol. Lett.* 2019. V. 67. № 4. P. 107-113.
70. Горячева И.Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // *ПММ*. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1036-1044.
71. Goryacheva, I.G., Torskaya E.V. Contact of multi-level periodic system of indenters with coated elastic half-space // *FU Mech. Eng.* 2019. V. 17. № 2. P. 149-159.
72. Огар П.М., Горохов Д.Б. Контактные задачи в герметологии неподвижных соединений. М.: Инфра-Инженерия, 2023. 248 с.
73. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y. Analysis of elastic normal contact of surfaces with regular microgeometry based on the localization principle // *Front. Mech. Eng.* 2020. V. 6. P. 1-10.
74. Золотов Н.Б., Пожарский Д.А. Двойкопериодические контактные задачи для слоя с неизвестной зоной контакта // *ПММ*. 2023. Т. 87. Вып. 1. С. 53-62.
75. Kuznetsov Ye.A. Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression // *Wear*. 1985. V. 102. № 3. P. 177-194.

76. Martynyak R.M. The method of functions of intercontact gaps in problems of local loss of contact between elastic half-spaces // *Math Meth Phys-Mech Fields*. 2000. V. 43. № 1. P. 102–108.
77. Kozachok O.P., Slobodian B.S., Martynyak R.M. Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // *J. Math. Sci.* 2017. V. 222. № 2. P. 131–142.
78. Kozachok O.P., Martynyak R.M. Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // *Math. Mech. Solids*. 2018. V. 24. № 11. P. 3381-3393.
79. Shvarts A.G., Yastrebov V.A. Fluid flow across a wavy channel brought in contact // *Tribol. Int.* 2018. V. 126. P. 116–126.
80. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. R. Soc. London. Ser. A*. 1971. V. 324. № 1558. P. 301-313.
81. Maugis D. Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // *J. Colloid. Interf. Sci.* 1991. V. 150. № 1. P. 243-269.
82. Tabor D. Surface forces and surface interactions // *J. Colloid. Interf. Sci.* 1977. V. 58. № 2. P. 2-13.
83. Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. // *J. Colloid. Interf. Sci.* 1975. V. 53. № 2. P. 314–326.
84. Johnson K.L. The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces // *Int. J. Solids Struct.* 1995. V. 32. № 3-4. P. 423-430.
85. Koiter W. An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet // *Ingng. Arch.* 1959. V. 28. P. 168-172.
86. Zilberman S., Persson B.N.J. Nanoadhesion of elastic bodies: roughness and temperature effects // *J. Chem. Phys.* 2003. V. 118. № 14. P. 6473-6480.
87. Adams G.G. Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // *J. Appl. Mech. T-ASME*. V. 71. № 6. P. 851-856.

88. Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M., Kramer E.J. The mechanics of contact and adhesion of periodically rough surfaces // *J. Polym. Sci. Pol. Phys.* 2001. V. 39. № 11. P. 1195–1214.
89. Jin F., Wan Q., Guo X. A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // *Int. J. Solids Struct.* 2016. V. 102-103. P. 66–76.
90. Маховская Ю.Ю. Дискретный контакт упругих тел при наличии адгезии. Изв. РАН. МТТ. 2003. Т. 38. Вып. 2. С. 39-48.
91. Goryacheva I. *Contact Mechanics in Tribology*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. XIV+346 p.
92. Goryacheva I.G. Mechanics of discrete contact // *Tribol. Int.* 2006. V. 39. № 5. P. 381–386.
93. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y. Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account // *J. Phys. Conf. Ser.* 2018. V. 991. № 1. P. 1-8.
94. Горячева И.Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // *ПММ.* 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 99-105.
95. Галанов Б.А. Пространственные контактные задачи для упругих шероховатых тел при упругопластических деформациях неровностей // *ПММ.* 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1020–1029.
96. Горячева И.Г. Расчет контактных характеристик с учетом параметров макро и микрогеометрии поверхностей // *Трение и износ.* 1999. Т. 20. № 3. С. 239-248.
97. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. Т. 52. № 4. С. 101-111.
98. Goryacheva I., Makhovskaya Y. Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // *Friction.* 2017. V. 5. № 3. P. 339–350.
99. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. 3-е изд., перераб. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 480 с.

100. Чибрикова Л. И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений”, Краевые задачи теории аналитических функций, Учен. зап. Казан. ун-та., 122, № 3, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1962, 95–124.
101. Марданов А.А. Вычисление интегралов с особенностями и решение сингулярных интегральных уравнений. С.П.: СПГУ, 2017. 106 с.
102. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
103. Barber J.R. Contact Mechanics. Cham: Springer International Publishing. 2018. 592 p.
104. Schmueser, D., & Comninou, M. (1979). The periodic array of interface cracks and their interaction. *International Journal of Solids and Structures*, 15(12), 927–934.
105. Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. — М.: «Факториал», 1998. — 432 с.
106. I. N. Sneddon, *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory* (North-Holland Publishing Company—Amsterdam, 1966), viii+282 pp., 80s.
107. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / Перераб. при участии Ю. В. Геронимуса и М. Ю. Цейтлина. 5-е изд., стер. М.: Наука, 1971. 1108 с.
108. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 488 с.
109. Попов, Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / М: Наука, 1982. 342 с.
110. Н. И. Ахиезер, “О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 9:4 (1945), 275–290 с.
111. Kuznetsov, Ye. A. (1978). The use of automorphic functions in the plane theory of elasticity. *Mech. Solids*. 6, 35-44.

112. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю., Морозов А.В., Степанов Ф.И. Трение эластомеров. Моделирование и эксперимент. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 204 с.
113. Srivastava, K. N. and Lowengrub, M. (1970). Finite Hilbert transform technique for triple integral equations with trigonometric kernels. Proc. Roy. Soc. Edn. LXVIII, 309-321.
114. Bueckner, H.F.: The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. J. Appl. Mech. 80, 1225–1230 (1958).
115. Maugis D. Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids. Springer Berlin, Heidelberg. 1999. XIV, 414 p.
116. Barber J. R., Billings D. A. (1990). An approximate solution for the contact area and elastic compliance of a smooth punch of arbitrary shape. International Journal of Mechanical Sciences, 32(12), 991–997.
117. Oldham, K.B., Myland, J., Spanier, J.: An Atlas of Functions, Springer-Verlag, New York. 2009. 735p.
118. Copson E.T. On the problem of the electrified disc. P. Edinburgh Math. Soc. 1947. 8, 14–19.
119. Argatov I. A Comparison of General Solutions to the Non-Axisymmetric Frictionless Contact Problem with a Circular Area of Contact: When the Symmetry Does Not Matter. Symmetry 2022, 14, 1083.
120. Popov V.L. An Approximate Solution for the Contact Problem of Profiles Slightly Deviating from Axial Symmetry // Symmetry, 14, 2022. 390.
121. Fabrikant V.I. Flat punch of arbitrary shape on an elastic half-space. Int. J. Eng. Sci. 1986, 24, 1731–1740.
122. Guidera J.T., Lardner R.W.: Penny-shaped cracks. J. Elast. 5. 1975, 59–73.
123. Martin P.A. The discontinuity in the classic displacement vector across a penny shaped crack under arbitrary loads. J. Elast. 1982. 12, 201–218.
124. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости М.: Наука, 1978. 464 с.

125. Моссаковский В.И. Давление штампа, близкого в плане к круговому, на упругое полупространство // ПММ, 1954. Т. 18, № 6. С. 675-680.
126. Poularikas A.D. (ed.) *The Transforms and Applications Handbook*. CRC Press/IEEE Press, 2000, 1335 pp.
127. Измайлов В.В., Новоселова М.В. Кривая опорной поверхности, статистические распределения и жесткость контакта шероховатых поверхностей // *Механика и физика процессов на поверхности и в контакте твердых тел и деталей технологического и энергетического оборудования: межвуз. сб. науч. тр.* 2018. Вып. 11 С. 17-27.
128. Ghanati P., Adibnazari S. Two-dimensional symmetric double contacts of elastically similar materials // *Proc. Inst. Mech. Eng. Pt. C J. Mechan. Eng. Sci*, 2015, vol. 230, no 10, pp. 1626–1633.
129. Mkhitaryan S.M. On the eigenfunctions of an integral operator generated by the logarithmic kernel on two intervals and the application to contact problems. *Mechanics // Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*. 1982. 35(6). P. 3-18.
130. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. *Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике (2-е изд.)*. М.: Физматлит, 1962. 600 с.
131. Khvedelidze B.V. The method of Cauchy-type integrals in the discontinuous boundary-value problems of the theory of holomorphic functions of a complex variable // *Journal of Soviet Mathematics*, 1977, vol. 7, no 3, pp. 309–415.
132. Manners W., Greenwood J.A. Some observations on Persson's diffusion theory of elastic contact // *Wear*. 2006. V. 261. № 5-6. P. 600–610.
133. Greenwood J.A. On the almost-complete contact of elastic rough surfaces: The removal of tensile patches // *Int. J. Solids Struct*. 2015. V. 56-57. P. 258–264.
134. Paggi M., Reinoso J. A variational approach with embedded roughness for adhesive contact problems // *Mech. Adv. Mater*. 2018. V. 2018. P. 1731-1747.

135. Erdogan, F., and Gupta, G. On the Numerical Solution of Singular Integral Equations. *Q. Appl. Math.*, 1972. 29, P. 525–534.
136. Giang, D.V.: Finite Hilbert transforms. *J. Approx.* 2015. 200(12), P. 221–226.
137. A.J. van der Poorten, X.C. Tran. Quasielliptic integrals and periodic continued fractions. *Monatshefte fur Mathematik.* 2000. 131, P. 155–169.
138. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. Учеб. для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 416 с.
139. Jäger, J., 1997. Half-planes without coupling under contact loading. *Arch. Appl. Mech.* 1997. 67, P. 247–259.