

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи

Ян Наинг У

**КОЛЕБАНИЯ ТВЁРДЫХ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ПОЛОСТИ, НАПОЛНЕННЫЕ
ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

Специальность 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент

Темнов Александр Николаевич

Москва – 2025 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, НАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ	11
1.1. Обзор литературы	11
1.1.1. Исследования динамики твёрдых тел с полостями, полностью и частично наполненными несжимаемой однородной идеальной или вязкой жидкостью	12
1.1.2. Исследование колебаний стратифицированных и криогенных жидкостей в подвижных резервуарах	20
1.1.3. Исследования динамики стратифицированных и криогенных жидкостей, заполняющих ограниченную и открытую области	24
1.2. Вывод по обзору литературы.....	28
ГЛАВА 2. УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА С НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТЬЮ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ОДНОРОДНОЕ ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ	29
2.1. Постановка задачи.....	30
2.2. Уравнения движения твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение	33
2.3. Устойчивость вращения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной неоднородной жидкостью	38
2.4. Вывод по главе 2	49
ГЛАВА 3. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ	50
3.1. Постановка задачи.....	51
3.2. Колебания стратифицированной жидкости, полностью заполняющей цилиндрическую полость при малой скорости вращения	55
3.2.1. Внутренние волны.....	56

3.3. Колебания стратифицированной жидкости, частично заполняющей цилиндрическую полость при малой скорости вращения	65
3.3.1. Внутренние волны.....	65
3.3.2. Поверхностные волны	72
3.4. Вывод по главе 3	77
ГЛАВА 4. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ	79
4.1. Постановка задачи.....	79
4.2. Колебания вращающейся стратифицированной жидкости в цилиндрическом сосуде при наличии свободной поверхности	83
4.2.1. Внутренние волны.....	84
4.2.2. Поверхностные волны	91
4.2.3. Двумерные колебания.....	97
4.3. Колебания вращающейся стратифицированной жидкости в коаксиальном цилиндрическом сосуде при отсутствии свободной поверхности	99
4.3.1. Внутренние волны.....	99
4.3.2. Двумерные колебания.....	104
4.4. Вывод по главе 4	105
ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, НАПОЛНЕННОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ	106
5.1. Устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с полостью, полностью заполненной стратифицированной жидкостью при малой скорости вращения	106
5.1.1. Постановка задачи.....	107
5.1.2. Краевая задача	111
5.1.3. Собственные колебания вращающегося тела с жидкостью	114
5.1.4. Вращение твёрдого тела при отсутствии массы жидкости	118
5.1.5. Вращение твёрдого тела с затвердевшей жидкостью	118
5.1.6. Вращение твёрдого тела с однородной жидкостью	118

5.1.7. Вращение твёрдого тела со стратифицированной жидкостью	121
5.2. Устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с полостью, частично наполненной стратифицированной жидкостью при малой скорости вращения	127
5.2.1. Краевая задача	127
5.2.2. Вращение твёрдого тела с жидкостью при наличии свободной поверхности с учетом внутренних волн	127
5.2.3. Вращение твёрдого тела с жидкостью при наличии свободной поверхности с учетом поверхностных волн.....	132
5.3. Устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с полостью, частично наполненной стратифицированной жидкостью при большой скорости вращения	137
5.3.1. Постановка задачи.....	137
5.3.2. Краевая задача	140
5.3.3. Собственные колебания быстровращающегося тела с жидкостью.....	144
5.3.4. Вращение твёрдого тела с жидкостью при наличии свободной поверхности с учетом внутренних волн	146
5.3.5. Вращение твёрдого тела с жидкостью при наличии свободной поверхности с учетом поверхностных волн.....	151
5.4. Вывод по главе 5	152
ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ	154
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	155

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Исследование колебаний твёрдых тел с вращающейся стратифицированной жидкостью в резервуарах является актуальной задачей в области динамики твёрдых тел. Для решения этой задачи необходимо более глубокое изучение колебаний твёрдых тел и жидкостей во вращающихся резервуарах. Стратифицированные жидкости, такие как криогенные жидкости: жидкие водород, кислород, азот и жидкий метан [11, 92, 132], находят все большее применение в современной ракетно-космической технике и промышленности, благодаря высокой плотности энергии.

Примечательной особенностью стратифицированных жидкостей является то, что их температура и плотность проявляют значительную неоднородность во всех режимах хранения и эксплуатации. В практических приложениях, связанных со стратифицированными жидкостями, наиболее значительное изменение плотности жидкости происходит в направлении поля массовых сил. Стратификация жидкости может быть вызвана различными физическими причинами, наиболее распространенной из которых является гравитационная сила. Жидкость с плотностью, зависящей от одной координаты, в литературе обычно называют стратифицированной жидкостью [1, 19, 50, 56, 89, 118]. В данной диссертации термины «криогенная», «стратифицированная» и «неоднородная» жидкость будут использоваться как синонимы.

Динамика твёрдых тел с полостями, содержащими жидкость, является актуальной областью исследования, особенно в контексте проектирования космических аппаратов [48, 68-69, 107, 113]. Поведение этих систем имеет решающее значение для понимания динамики космических аппаратов, имеющих жидкое топливо, а также для проектирования других сложных механических систем, таких как вращающиеся роторы, центрифуги и гироскопы с жидким наполнением [33, 35]. Одновременно с изучением этих проблем возник интерес к устойчивости их движения. В ряде работ было показано, что на устойчивость движения твёрдых тел с полостями существенно влияет наличие жидкости в полости и форма самой полости [33-35, 39, 54, 64-65, 73, 81-82, 91]. Движение

твёрдых тел с полостями, наполненными однородной идеальной или вязкой жидкостью, широко изучалось в работах [7, 10, 12, 18, 41-42, 57, 98]. Впоследствии было также исследовано движение твёрдых тел с полостями, наполненными стратифицированной или криогенной жидкостью в работах [1-5, 22-23, 26, 28-30, 47, 50-52, 79, 95-96].

В ракетах на жидком топливе движение жидкости оказывает значительное влияние на устойчивость и управление полетом ракеты. Многие учёные изучали движение жидкости во вращающихся сосудах ракеты и показали, что неустойчивость может возникнуть во время полета из-за динамического взаимодействия движения жидкости и системы управления [7, 37-38, 48, 75, 77, 107-109, 113]. Для исследования неустойчивости колебаний твёрдых тел необходимо точно определять динамические характеристики жидкости, такие как собственные частоты, формы мод, демпфирование. Точное определение динамических характеристик жидкости является не простой задачей из-за сложности гидродинамических уравнений движения.

В данной диссертации исследуется устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей стратифицированную жидкость, а также рассматриваются свободные колебания вращающейся стратифицированной жидкости в цилиндрическом сосуде. Влияния стратификации жидкости на устойчивость вращения твёрдого тела в настоящее время изучено недостаточно и является объектом исследования данной работы.

Целью диссертационной работы является исследование динамики вращающихся твёрдых тел, наполненных стратифицированной жидкостью, а также исследование влияния расслоения стратифицированной жидкости на динамику твёрдого тела с жидкостью.

Задачи исследования

1. Исследование устойчивости вращения вокруг вертикальной оси динамической симметрии твёрдого тела, имеющего эллипсоидальную полость, полностью заполненную неоднородной идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.

2. Разработка алгоритмов расчёта собственных частот колебаний вращающейся стратифицированной жидкости, полностью или частично заполняющей цилиндрическую полость в твёрдом теле при малой угловой скорости вращения.
3. Разработка алгоритмов расчёта собственных частот колебаний вращающейся стратифицированной жидкости в цилиндрической полости при большой скорости вращения.
4. Исследование устойчивости стационарного вращения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью или частично наполненной стратифицированной жидкостью.

Методы исследования. В работе использованы известные методы для решений задач динамики движения твёрдого тела с жидкостью. При решении задач, представленных в диссертации, применялись различные математические и вычислительные методы: метод Пуанкаре, метод разделения переменных, метод обобщенных потенциалов Ф.Л. Черноусько и метод Бубнова-Галёркина.

Научную новизну диссертационной работы имеют следующие результаты:

1. Исследованы уравнения сферического движения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной неоднородной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.
2. Получены достаточные условия устойчивости вращения вокруг вертикальной оси динамической симметрии твёрдого тела с эллипсоидной полостью, полностью заполненной неоднородной несжимаемой жидкостью.
3. Исследованы собственные колебания стратифицированной жидкости, частично или полностью заполняющей цилиндрическую полость в твёрдом теле, при малой и большой угловых скоростях вращения.
4. Получены численные результаты собственных частот свободных колебаний вращающейся стратифицированной жидкости для внутренних и поверхностных волн.

5. Рассчитаны области неустойчивости стационарного вращения вокруг неподвижной точки твёрдого тела, имеющего цилиндрическую полость, полностью и частично наполненную стратифицированной жидкостью.

Достоверность полученных результатов следует из сравнения с известными аналитическими и численными решениями, полученными в предыдущих работах, связанных с колебаниями твёрдых тел, имеющих полости, заполненные полостью и частично однородной жидкостью.

Практическая ценность. Разработанные алгоритмы и результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при проектировании космических заправочных станций, космических танкеров и морских газовозов, а также при совершенствовании различных технологических процессов в машиностроении.

Личный вклад соискателя. Постановка проблемы и подробные формулировки задач, представленных в диссертационной работе, были выполнены автором совместно с научным руководителем. Численные расчёты собственных частот колебаний жидкости и построение графиков областей неустойчивости вращения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с жидкостью проводились лично автором с использованием программы Maple. Представленные результаты из совместных публикаций были получены в основном автором и обсуждались совместно вместе с руководителем и научным консультантом.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на всероссийских и международных профильных научных конференциях и семинарах:

1. XLV Международная научная конференция «Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (г. Москва, 30 марта – 2 апреля 2021 г.);
2. III Межвузовская конференция аспирантов, соискателей и молодых ученых «НАУКА, ТЕХНОЛОГИИ И БИЗНЕС», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (г. Москва, 27–28 апреля 2021 г.);

3. VII Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (г. Москва, 7–10 декабря 2021 г.);
4. VI Международная научно-техническая конференция «Динамика и виброакустика машин», Самарский университет им. С.П. Королёва, (г. Самара, 21–23 сентября 2022 г.);
5. 13-ая Международная конференция – школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (г. Москва, 30 ноября – 02 декабря 2022 г.);
6. VIII Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (г. Москва, 6–9 декабря 2022 г.);
7. 14-ая Международная конференция – школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (г. Москва, 28 ноября – 01 декабря 2023 г.);
8. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (г. Москва, 5–8 декабря 2023 г.);
9. Семинар «Прикладная механика сплошных сред» под руководством А.Н. Рожкова, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (г. Москва, 25 апреля 2024 г.);
10. Семинар «Динамические системы и механика» под руководством профессора Б.С. Бардина, Московский авиационный институт, (г. Москва, 30 мая 2024 г.);
11. Семинар «Теория управления и динамика систем» под руководством академика Ф.Л. Черноузько, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (г. Москва, 26 сентября 2024 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 15 научных работах. Из них 7 статей опубликованы в научных журналах, входящих в перечень ВАК и 8 работ – в сборниках материалов и тезисов научных конференций.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав с краткими выводами по каждой главе, заключения, списка публикаций и литературы. Полный объём работы составляет 166 страниц машинописного текста, включая 62 рисунков и 14 таблиц.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доценту Темнов Александру Николаевичу и научному консультанту доценту Шкапову Павлу Михайловичу за постоянное внимание к работе, полезные консультации, обсуждения и советы.

ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, НАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

1.1. Обзор литературы

Движение твёрдых тел, содержащих жидкости в полостях, представляет собой значительную проблему в области теоретической механики, учитывая ее практическое значение для инженерных приложений. В частности, это касается вращательного движения космических аппаратов и теории движения роторов и гироскопов. При проектировании и эксплуатации ракеты на жидком топливе одной из важнейших задач является минимизация массы ракеты, с целью увеличения полезной нагрузки и дальности полета. Крайне важно обеспечить точное и эффективное использование топлива, поскольку оно составляет около 90 % массы ракеты. Колебания жидкости в топливных баках во время полёта могут оказывать значительное влияние на динамику, устойчивость и общую конструкцию ракеты. С другой стороны, исследование колебаний жидкости в баках представляет собой классическую задачу механики, которая является предметом обширных исследований. Значительное число российских и зарубежных учёных проводили исследования твёрдых тел с полостями, наполненными жидкостью.

Все работы, относящиеся к колебаниям твёрдых тел с жидкостями, можно условно разделить на три группы. К первой группе отнесены исследования динамики твёрдых тел с полостями, полностью и частично наполненными несжимаемой однородной идеальной или вязкой жидкостью. Вторая группа связана с исследованиями стратифицированных жидкостей, в частности, с анализом колебательного поведения стратифицированных и криогенных жидкостей в подвижных резервуарах. Третья группа касается исследований динамики стратифицированных и криогенных жидкостей в замкнутых и открытых областях.

1.1.1. Исследования динамики твёрдых тел с полостями, полностью и частично заполненными несжимаемой однородной идеальной или вязкой жидкостью

Задача о движении тела с полостью, полностью наполненной жидкостью, является классической проблемой механики. Впервые этой проблемой занимался Д.Г. Стокс (1842-1847 гг.), а затем Г.Ф. Гельмгольц (1860 г.) и Г. Лэмб (1873 г.). В 1885 году Н.Е. Жуковский провел первое систематическое изучение динамики твёрдого тела с полостями, заполненными однородной идеальной несжимаемой жидкостью. Н.Е. Жуковский [41] показал, что в случае односвязных полостей однородная несжимаемая жидкость может быть заменена эквивалентным твёрдым телом, масса которого равна массе жидкости, а момент инерции отличается от момента инерции затвердевшей жидкости.

Изучение движения твёрдых тел с полостями, заполненными жидкостью, естественным образом приводит к проблеме устойчивости их движения. Лорд Кельвин (1877) проводил эксперименты с волчком в виде тонкостенной оболочки в форме эллипсоида вращения, полностью заполненной жидкостью. Результаты показали, что сплюснутая форма оболочки приводит к устойчивому вращению вокруг оси симметрии с достаточно большой угловой скоростью. Однако если оболочка хоть немного вытянута, вращение волчка становится неустойчивым, независимо от его угловой скорости. Теоретические исследования А.Д. Гринхилла (1880), Ф.А. Слудского (1895), С.С. Хафа (1895), А. Пуанкаре (1910) и А.Б Бассет (1911) были направлены на объяснение экспериментальных результатов Кельвина. В этих работах предполагалось, что однородное вихревое движение порождается идеальной несжимаемой жидкостью, полностью заполняющей эллипсоидальную полость. А. Пуанкаре также рассмотрел устойчивость вращения волчка, рассмотренного Кельвином, принимая во внимание упругость оболочки и неоднородность жидкости [129].

В 1950-х годах в связи с потребностями ракетно-космической техники возникла новая проблема: динамическое взаимодействие тела с жидкостью, частично заполняющей его полости. В разных странах мира появилось множество

публикаций по этой теме. В СССР и России заметный вклад в решение этой проблемы внесли С.Л. Соболев, Н.Г. Четаев, Л.Н. Сретенский, Д.Е. Охоцимский, Г.С. Нариманов, А.Ю. Ишлинский, Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев, Ф.Л. Черноуцько, М.Е. Темченко, С.В. Малашенко, Г.А. Микишев, Б.И. Рабинович, Л.В. Докучаев, К.С. Колесников, С.Г. Крейн, И.А. Луковский, П.В. Харламов и многие другие авторы. Важный вклад внесли и зарубежные ученые, такие как H. Poincaré, S.S. Hough, L. Kelvin, A. E.H. Love, A.G. Webster, J.B. Serrin, H.P. Greenspan, J.W. Daily, L. Lichtenstein, A.V. Basset, A.G. Greenhill, J.W. Miles, K. Stewartson и др.

Среди многочисленных работ по изучению движения жидкости наиболее представительными являются те, которые посвящены исследованию линейных колебаний твёрдого тела с полостями, полностью или частично заполненными однородной идеальной или вязкой жидкостью. Наиболее значимые результаты были получены для случая движения тела с полостями, полностью заполненными несжимаемой однородной жидкостью.

В указанных работах обсуждались вопросы о развитии теории устойчивости А.М. Ляпунова и устойчивости фигур равновесия вращающихся жидкостей применительно к динамике твёрдых тел, содержащих полости, заполненные жидкостью [36, 39, 54, 73, 81-82]. В практических приложениях часто достаточно понимания поведения системы вблизи положения равновесия. Упрощенная задача может быть решена либо методом теории колебаний, либо методом теории устойчивости движения по Ляпунову [62, 67, 81-82].

Чтобы упростить задачу о вихревом движении жидкости, необходимо предположить, что интенсивность вихревого поля является функцией времени. Это предположение справедливо для однородного вихревого движения. С.В. Жак [40] показал, что эллипсоидная полость является единственной полостью в классе замкнутых поверхностей вращения, в которой возможно такое движение. Трехосная эллипсоидальная полость относится к числу асимметричных поверхностей, удовлетворяющих этому требованию [41, 129]. В статье Л.Е. Веселовой [18] рассмотрено движение тела с эллипсоидальной полостью,

заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.

При исследовании колебаний твёрдого тела с цилиндрической полостью, заполненной жидкостью, учитываются свойства, вносимые вихревым характером движения жидкости [83]. В данной работе основное внимание уделяется частотному уравнению системы, которое представляется трансцендентным уравнением с бесконечным числом корней. Уравнение имеет простые полюса в точках, соответствующих частотам свободных колебаний жидкости в полости неподвижного тела. В данном тексте описана потеря устойчивости движения твёрдого тела вследствие внутреннего резонанса. Внутренний резонанс возникает, когда частота колебаний твёрдого тела с жидкостью близка к одной из частот собственных колебаний жидкости в полости твёрдого тела. Важно отметить, что это явление должно быть строго обосновано. Для эллипсоидальной полости число зон неустойчивости конечно. Однако для цилиндрической полости число мод колебаний жидкости, влияющих на устойчивость движения, может быть бесконечным, в зависимости от количества особых точек частотного уравнения. Таким образом, форма полости определяет количество зон неустойчивости.

Наблюдаемое свойство можно объяснить тем, что движение жидкости в эллипсоидной полости характеризуется сохранением вихревого ядра. Это означает, что жидкость, равномерно завихренная в начальный момент времени, с течением времени приобретает квазитвёрдое движение. В результате состояние жидкости внутри полости определяется тремя степенями свободы, которые соответствуют трем линейно независимым формам колебаний жидкости, возбуждаемых движением твёрдого тела. Если полость тела имеет вращательную форму, то её устойчивость зависит только от этих движений. Когда тело с жидкостью совершает вынужденные колебания вдоль вертикальной оси, резонанс возникает на частотах, соответствующих собственным формам осесимметричных колебаний. Эти колебания не влияют на устойчивость движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Это было установлено как теоретически, так и экспериментально в работах [64, 84].

Таким образом, моделирование твёрдого тела с присоединенными массами к твёрдому телу с полостью, содержащей жидкость, отличной от эллипсоида, в общем случае невозможно из-за бесконечного множества взаимно независимых возможных движений, возбуждаемых в жидкости в процессе движения. Однако, согласно работе С.Л. Соболева [83], полный диапазон частот свободных колебаний жидкости без свободной поверхности сосредоточен в интервале $(-2\Omega_0, 2\Omega_0)$, где Ω_0 – угловая скорость стационарного вращения системы движения. Если частоты собственных колебаний системы лежат вне этого интервала, то рассматриваемая задача может быть сведена к задаче динамики твёрдого тела. Такое сведение возможно для любой формы полости, и для таких случаев можно найти аналог потенциалов Стокса-Жуковского. На возможность введения впервые обратил внимание Ф.Л. Черноусько [98].

Экспериментальные и теоретические исследования [64-65] показали, что на поведение несущего тела существенно влияет характер движения жидкости в полости твёрдого тела. Так, например, если устойчивость движения твёрдого тела, содержащего полость, заполненную жидкостью, не имеющей вихрей, полностью определяется положением центра тяжести системы и кинетическим моментом твёрдого тела, то при равномерном завихрении жидкости движение системы существенно зависит и от формы полости. Кельвин впервые установил этот факт в экспериментах со сфероидальным волчком. Когда волчок сплюснут, его вращение устойчиво. Однако если он слегка вытянут, вращение становится неустойчивым. Эту потерю устойчивости невозможно устранить увеличением скорости вращения.

Теоретическое обоснование эксперимента Кельвина можно найти в работах [73, 119], в которых исследовалась задача о колебаниях твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, полностью заполненной несжимаемой однородной жидкостью, относительно положения стационарного движения. Частотное уравнение такой системы имеет вид полинома четвёртой степени, то есть, соответствует системе с четырьмя степенями свободы. Это согласуется с тем фактом, что для жидкости в эллипсоидальной полости существует аналог

потенциалов Стокса-Жуковского, и тем самым позволяет свести рассматриваемую задачу к задаче динамики твёрдого тела с присоединенным гироскопом.

В работе Д.Е. Охоцимского [78] дано определение потенциала скоростей жидкости в полости между круговыми цилиндрами и исследованы движения твёрдого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью. Результаты показывают, что наличие свободной поверхности в некоторых случаях может существенно изменять инерционные характеристики тел с полостями, заполненными жидкостью.

Задачи о колебаниях твёрдого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной несжимаемой однородной жидкостью, посвящены работы [53-54, 134]. Следует отметить, что в работе Б.А. Костандяна [53] была предпринята попытка качественно оценить влияние поверхностных эффектов в жидкости, находящейся в полости гироскопа, на его движение, поскольку применение теории длинных волн при решении задачи о колебаниях быстро вращающейся системы не было обосновано.

Изучение динамики вращающейся жидкости привело к развитию нового типа краевых задач математической физики, известного как краевые задачи типа С.Л. Соболева. Корректность постановки задачи, существование и единственность решения, а также структура и асимптотическое поведение были исследованы для некоторых частных случаев [43, 83-85]. Эти исследования показали, что на спектр задач существенно влияют малые возмущения границ области.

В диссертации М.И. Иванова [44] исследованы свободные гармонические колебания в бассейнах сложной формы. В ходе исследования была установлена зависимость между конфигурацией бассейна и характеристиками его волнового движения.

Влияние вязкости жидкости в основном изучалось в случаях с высокими и низкими числами Рейнольдса. Такой выбор значений числа Рейнольдса позволяет использовать теорию пограничного слоя и методы малых параметров для решения уравнений Навье-Стокса. Однако учет вязкости жидкости требует совместного

изучения уравнений движения твёрдого тела и уравнений Навье-Стокса [41, 73, 98], что существенно усложняет задачу.

Движение гидродинамической системы при наличии сил внутреннего трения характеризуется, согласно [41], существованием некоторого предельного устойчивого состояния, соответствующего вращению несущего тела и жидкости как единого целого вокруг одной из главных осей инерции системы (стационарное движение). Это обстоятельство полезно при решении широкого круга прикладных задач. Ф.Л. Черноушко [98] исследовал процесс перехода системы в состояние стационарного движения при малых числах Рейнольдса.

В работах А.В. Алексеева [6-7] исследованы линеаризованные уравнения движения, приложения теории малых колебаний и спектральной теории операторов. Рассмотрены задачи о движениях тел с полостями, заполненными идеальной и вязкой жидкостями. В отдельных главах исследуется движение трехроторного гиростата, содержащего полость с высоковязкой жидкостью.

В работе [8] получены уравнения движения вокруг неподвижной точки твёрдого тела, содержащего маловязкую жидкость. Эти уравнения могут быть распространены на системы тел с множеством полостей.

Фундаментальные результаты по малым колебаниям однородной вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд произвольной формы, были получены С.Г. Крейнсом и его учениками [10, 57].

В диссертации А.Ю. Боталова [12] проведено численное исследование движения тела, содержащего полость, частично или полностью заполненную вязкой жидкостью. С помощью численного моделирования были получены результаты движения замкнутого сосуда, заполненного вязкой жидкостью, вокруг неподвижной оси и точки, а также поступательного движения тела с полостью, частично заполненной жидкостью.

В статье А.А. Гурченкова [31] исследованы колебания вязкой несжимаемой жидкости в полупространстве, ограниченном плоской стенкой. Вначале жидкость вращается вместе со стенкой как твёрдое тело и подвергается внезапно начинающимся продольным колебаниям.

В работах [68-69, 72] представлены численные и экспериментальные методы решения задач, связанных с движением твёрдых тел с полостями, частично или полностью заполненными однородной и вязкой жидкостью.

В диссертации [115] проведено комплексное исследование динамики твёрдого тела, содержащего одну или несколько полостей, полностью заполненных вязкой жидкостью, движение которой управляется уравнениями Навье-Стокса. Было показано, что вязкие жидкости оказывают стабилизирующее воздействие на движение твёрдого тела в случае инерционного и гравитационного движений.

В работе В.С. Гонткевича [27] рассмотрены собственные колебания вращающейся жидкости в сосуде как при малых, так и при больших скоростях вращения. Представлены результаты экспериментальных исследований эффектов медленного и быстрого вращения жидкости в сосуде.

В работе Р.В. Равлова [80] рассматривается вопрос о свободных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости, частично или полностью заполняющей жесткую полость, вращающуюся в поле массовых сил. Приводятся решения краевой задачи и результаты численных расчётов. В работе [87] исследовано волновое движение вращающегося жидкого кольца, ограниченного снаружи твёрдой стенкой.

В работе [114] исследована периодическая осесимметричная реакция жидкого кольца, заключенного во вращающийся цилиндр. Далее представлен численный подход к исследованию проблемы свободной поверхности. В статье [117] рассмотрена общая теория вязкой жидкости, заполняющей сосуд произвольной формы, вращающийся с постоянной угловой скоростью.

В работах [123-124] разработан метод исследования колебаний вращающейся жидкости в сосуде с неподвижной осью симметрии для глубокой жидкости, но при этом сохраняется гипотеза о возможности замены свободной поверхности жидкости плоскостью. В работе [130] рассмотрены поверхностные волны во вращающейся жидкости, обусловленные источниками и внутренними границами.

Работы [126, 128, 135] посвящены решению конкретных задач, связанных с колебаниями жидкости в цилиндрических полостях при высоких угловых

скоростях вращения. В этих работах делается предположение, что твёрдое тело вращается достаточно быстро, чтобы не учитывать гравитационные силы. Поэтому свободная поверхность считается цилиндром, параллельным оси симметрии.

С практической точки зрения колебательное движение гидромеханической системы важно, когда оно соответствует колебаниям системы относительно состояния стационарного движения, характеризующегося постоянным вектором угловой скорости. Такой тип движения находит все большее применение на практике, что обуславливает необходимость дальнейших исследований. Например, жидкостные гироскопы и угловые акселерометры с жидкостным ротором основаны на законе сохранения импульса для вращающегося жидкого ядра. В гироскопических устройствах с твёрдым ротором жидкость может использоваться в качестве эффективного демпфера для улучшения характеристик устройства [112, 126].

Свойство вязкой жидкости способствовать выравниванию колебаний объясняет её использование в гироскопических устройствах в качестве демпфирующего элемента [112, 125]. Слабая вязкость не оказывает существенного влияния на значения частот свободных колебаний жидкости. Как было замечено в эксперименте [64], в резонансных режимах силы внутреннего трения только ухудшают неустойчивость волны.

В работе [97] исследована динамическое демпфирование резонансных колебаний в гироскопической системе с помощью демпфера, представляющего собой полость в виде коаксиального цилиндра, заполненного вязкой жидкостью. Получено аналитическое выражение для амплитуды вынужденных колебаний в гироскопической системе с демпфером.

В число рассматриваемых задач входят исследования устойчивости движения летательных аппаратов с вращающейся жидкостью на борту. Таким образом, в условиях слабых гравитационных полей наличие малоинтенсивной вихревой вращающейся жидкости может существенно повлиять на общую устойчивость движения системы.

В работах [37-38, 75] рассмотрены задачи движения несжимаемой жидкости в топливных баках с заборными устройствами. Выведены значения собственных колебаний жидкостей в цилиндрических, конических и сферических резервуарах. Кроме того, приведены примеры задач, связанных с движением несжимаемой жидкости, которые часто встречаются на практике. К ним относятся топливные баки в форме цилиндров, конусов и сфер.

В работе [77] авторы исследовали нормальные колебания идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей топливный бак ракеты-носителя и вращающейся вокруг продольной оси.

Гидродинамическое поведение в основном исследовалось в контексте движения жидкости в транспортных системах, таких как автомобили, железные дороги, грузовые или топливные баки. Однако в монографиях [107, 113] основное внимание уделялось ракетам и космическим аппаратам в целом. В этих исследованиях использовались фундаментальные принципы гидродинамической теории, а также аналитические, расчётные и экспериментальные данные для различных ситуаций. Необходимо отметить, что в этих исследованиях рассматривались только жесткие баки. Кроме того, изучалось поведение жидкого ракетного топлива в условиях низкой и нулевой гравитации.

В работах [108-109] представлены динамические характеристики и устойчивость движения жидкости в частично заполненных баках вращающегося космического аппарата. Рассмотрены методы определения необходимых условий устойчивости и коэффициентов усиления колебаний для космического аппарата с жидким топливом.

1.1.2. Исследование колебаний стратифицированных и криогенных жидкостей в подвижных резервуарах

В последнее время растет интерес к изучению колебаний стратифицированных и криогенных жидкостей в резервуарах конечных размеров. Особый интерес представляет изучение колебаний нефтяных и криогенных жидкостей в резервуарах, находящихся в движении. Стратифицированная

жидкость характеризуется значительной неоднородностью плотности жидкости вдоль направления поля массовых сил с интенсивностью \vec{g} , что приводит к более заметному изменению плотности жидкости вдоль одной из координат. Стратификация относится к распределению плотности жидкости $\rho_0(z)$ в однородном силовом поле сил.

Другим фундаментальным понятием в гидродинамике является частота плавучести или частота Брента-Вяйсяля – $N(z)$ [2-3, 47, 50-52, 74, 89, 95-96].

Квадрат частоты плавучести определяется формулой,

$$N^2(z) = -\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} g.$$

Частота плавучести представляет собой частоту малых свободных колебаний частицы жидкости вблизи уровня z .

Исследование посвящено изучению движения вращающейся идеальной стратифицированной жидкости в конечном объёме, в котором возникают своеобразные краевые и начальные задачи. К ним относятся те, которые обсуждаются в работах [19, 22, 89, 118]. Эти задачи характерны для колебаний как однородных жидкостей в ограниченной области (поверхностные волны при наличии свободной поверхности), так и неоднородных (стратифицированных) жидкостей, заполняющих неограниченную область (внутренние волны).

Исследование малых колебаний неоднородных (стратифицированных) жидкостей тесно связано с качественной теорией дифференциальных уравнений. С.Л. Соболев [85] показал, что классические методы могут быть использованы для решения начальной краевой задачи для вращающейся жидкости. Дальнейшие обобщения результатов С.Л. Соболева можно найти в [20, 98].

В работе [1] представлена задача об устойчивости вращения твёрдого тела с эллипсоидной полостью, полностью заполненной стратифицированной жидкостью. Далее приведены области неустойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью в различных случаях.

В статьях Л.Д. Акуленко и С.В. Нестерова [3-5] исследованы колебания двухслойной тяжёлой жидкости, заполняющей прямоугольный сосуд, который

движется вдоль горизонтальной оси. Решение задачи осуществляется методом разделения переменных.

В диссертации С.А. Габова [20] рассмотрены колебания идеальной стратифицированной вращающейся жидкости с экспоненциально меняющейся плотностью, полностью заполняющей цилиндр произвольного сечения. Автор сделал вывод, что спектр колебаний стратифицированной жидкости в ограниченной области может содержать точки непрерывного спектра, характер которого зависит от формы области и закона стратификации.

В работе С.А. Габова [22] исследованы свободные колебания непрерывно стратифицированных жидкостей в стационарных сосудах. В этих работах было показано, что несмешивающиеся жидкости в сосуде имеют дискретный частотный спектр, и что вариационные методы могут быть использованы для решения задачи о колебаниях несмешивающихся жидкостей в любом сосуде.

В работе В.С. Гонткевича [26] исследованы собственные колебания стратифицированной жидкости в прямоугольном сосуде. В результате исследования был сделан вывод, что увеличение степени неоднородности приводит к повышению частоты внутренних волн.

В работах Н.В. Дерендяева [33-35] рассмотрены вопросы устойчивости стационарного вращения цилиндра и ротора, заполненных стратифицированной вязкой жидкостью. Исследование показало, что резонансное возбуждение внутренних волн во вращающейся жидкости, заполняющей цилиндр, является существенным фактором, способствующим возникновению неустойчивости. В работе Л.В. Перовы [79] рассматриваются малые колебания несжимаемой стратифицированной жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг оси.

В работах А.Н. Темнова [90-91] исследована устойчивость сферического движения твёрдого тела с эллипсоидной полостью, полностью заполненной однородной криогенной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. В работах Д.О. Цветкова [95-96] задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости, заполняющей произвольный сосуд,

рассматривается с использованием подхода, связанного с применением операторных блок-матриц.

В работах [110-111] изучалось поведение неустойчивости стратифицированной жидкости с вертикально меняющейся плотностью в неограниченном объёме, содержащем вертикальный цилиндр, при малых возмущениях.

В диссертационной работе [120] численно и аналитически исследовано влияние планетарного вращения на волновую неустойчивость. Во второй части диссертации рассмотрена устойчивость стратифицированного течения Течения Куэтта-Тейлора при радиальном увеличении угловой скорости.

В работе [122] рассматривается теория волнового движения в неоднородной тяжёлой жидкости. Предполагается, что плотность неоднородной несжимаемой жидкости изменяется с глубиной в равновесном состоянии под действием силы тяжести.

В работе [127] проведено теоретическое и экспериментальное исследование фазовой конфигурации малоамплитудных внутренних волн в стратифицированной жидкости. Эксперименты включали в себя создание волн круговым цилиндром, колеблющимся горизонтально с небольшой амплитудой в резервуаре, заполненном раствором соленой воды. Соленость изменялась с глубиной, а частота оставалась практически постоянной.

В книге [132] представлены некоторые системы наддува для ракетных двигателей на жидком топливе. В отдельных главах проведен анализ расслоения криогенного топлива, рассмотрена его аналитическая модель и вычислительная процедура. Представлено сравнение аналитических результатов с данными испытаний. Также исследованы проблемы поведения жидкости в условиях микрогравитации.

Работа [139] посвящена экспериментальному и теоретическому исследованиям малых движений жидкостей в цилиндрической полости, полностью заполненной тремя несжимаемыми идеальными жидкостями. Приведены

аналитические формулы и результаты для определения собственных частот жидкостей в неподвижном резервуаре и движения твёрдых тел.

1.1.3. Исследования динамики стратифицированных и криогенных жидкостей, заполняющих ограниченную и открытую области

Исследование свободных колебаний стратифицированных жидкостей в неограниченных областях имеет давнюю историю, в которую внесли большой вклад многие ученые [56, 74, 121, 131, 136-137]. В настоящее время эти проблемы тщательно изучаются в связи с решением различных технологических и геофизических задач. Изучение малых колебаний в стратифицированных жидкостях впервые проявилось в середине XIX века. Это направление связано с изучением внутренних волн не только в океане и атмосфере, но и в ограниченном объёме твёрдых тел, например, в резервуарах. Изучение подобных прикладных задач для однородной жидкости показало, что, первоначально внутренние волны, возникающие в неоднородной среде, должны рассматриваться в линейных рамках. Из этого следует, что необходимо исследовать малые колебания стратифицированной жидкости.

Внутренние волны, возникающие в жидкой среде в результате действия внешнего силового поля, расслоения жидкости, неравномерного нагрева жидкой массы и т.д. Д.Г. Стокс (1847 г.) [136] и Г.Ф. Гельмгольц (1868 г.) стали пионерами в теоретическом изучении внутренних волн. Они изучали волны, образующиеся на границе раздела двух жидкостей разной плотности. Дж. Рэлей (1883 г.) провел первый теоретический анализ непрерывно слоистой среды [131]. Он применил уравнения непрерывно стратифицированной жидкости к переходному слою между двумя стратифицированными жидкостями и при приближении толщины этого слоя к нулю получил те же динамические свойства, что и Д.Г. Стокса. В 1910 году в своей работе [121], посвященной атмосферным колебаниям, Г. Лэмб первым предложил решение проблемы с использованием степенного закона изменения плотности.

Среди публикаций, посвященных малым колебаниям стратифицированной жидкости в океанах и морях, в первую очередь следует упомянуть монографию немецкого океанолога В. Краусса [56]. В этой монографии основное внимание уделено условиям возникновения линейных внутренних волн с учетом свойств среды, а также геометрии самого водоема. В этой же книге описаны методы сбора, обработки и оценки экспериментальных данных по внутренним волнам.

Основным частотным параметром, характеризующим динамические свойства, характеристики распространения и типы волн в стратифицированной жидкости, является частота Брента-Вяйсяля. Внутренние волны представляют интерес для широкого круга специалистов, включая океанологов, гидробиологов, гидроакустиков, гидротехников и подводников. В отличие от поверхностных волн, внутренние волны невидимы. Они возникают не только в океанах, но и в атмосфере. Возникновение внутренних волн связано с наличием плотностной стратификации жидкости, поэтому параметр $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ (градиент плотности) является основополагающим для существования внутренних волн [25].

В работах [2, 4] рассмотрены двумерные свободные волновые движения стратифицированной жидкости в неограниченной области вдоль одной оси. Также определены частоты внутренних волн стратифицированной жидкости с произвольной зависимостью плотности от глубины.

В статьях Булатова В.В. и Владимирова И.Ю. [14, 15] рассмотрена динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде переменной глубины. Исследована волновая динамика монохроматических внутренних гравитационных волн в клине, получены как точные решения этой задачи, так и асимптотические приближения. Кроме того, проведено сравнение с результатами численного моделирования полной системы гидродинамических уравнений, описывающих эволюцию нелинейных волновых возмущений над неровным океаническим дном.

Работы Булатова В.В. и Владимирова И.Ю. [16, 17] посвящены исследованию вопросов, связанных с динамикой внутренних гравитационных волн в

экспоненциально стратифицированной среде бесконечной глубины. В этих работах рассматривается адекватность и пределы применимости используемой модели стратифицированной среды, а также основные качественные особенности динамики плоских волновых пакетов внутренних гравитационных волн. Полученные аналитические решения позволяют описать амплитудно-фазовые характеристики дальних полей внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде с непостоянной частотой Брента-Вяйсяля.

В книге С.А. Габова и А.Г. Свешникова [19] рассмотрены задачи о внутренних и поверхностных волнах в стратифицированной жидкости, занимающей ограниченную область.

В работах С.А. Габова [21, 23] исследована теория внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости, заполняющей неограниченную область при наличии свободной поверхности. Решена начальная краевая задача для уравнения стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска. В статье [22] рассмотрены задачи, связанных с колебаниями стратифицированной жидкости, а также краевые и спектральные задачи, возникающие в этом контексте.

Отметим, что работы по неоднородным жидкостям связаны с применением методов аналитической механики [28-29]. В этих работах были найдены канонические переменные для описания волновых взаимодействий в стратифицированной жидкости и построен гамильтонианский формализм, позволяющий рассматривать линейные и нелинейные эффекты с единой точки зрения.

В статье [30] исследовано взаимодействие капиллярно-гравитационных волн на свободной поверхности и границе раздела сред, характеризующихся коэффициентами поверхностного натяжения.

В диссертации А.И. Задорожного [42] проанализированы свободные поверхностные и внутренние колебания вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости в ограниченном объёме. Он обнаружил, что частота колебаний вязкой стратифицированной жидкости увеличивается или уменьшается в зависимости от конфигурации области.

В работе [47] рассмотрена проблема о внутренних волнах в произвольно стратифицированной среде с учетом диссипативных эффектов вязкости и диффузии.

В работах Н.Д. Копачевского и А.Н. Темнова [50-52] исследованы начально-краевые и спектральные задачи о малых колебаниях стратифицированной жидкости, заполняющей ограниченную область. Рассмотрены задачи о свободных колебаниях идеальной стратифицированной жидкости, частично или полностью заполняющей бассейн произвольной формы.

В книге Дж. Лайтхилла [58] есть глава, посвященная линейным внутренним волнам. В этой главе внутренние волны рассматриваются как пример существенно анизотропной волновой системы, в которой скорость распространения волны зависит как от ее направления, так и от длины волны.

Статья [63] посвящена определению амплитудных и фазовых характеристик связанных внутренних волн в стратифицированной жидкости. Плотность жидкости имеет экспоненциальное распределение, и в расчёте предполагается бесконечная глубина.

В монографии Ю.З. Миропольского [70] описаны теоретические методы исследования линейных внутренних волн в океане и анализа нелинейных эффектов.

В работе С.В. Нестерова [76] определены собственные частоты внутренних волн в стратифицированной жидкости с использованием приближения Буссинеска. Книга Л.Н. Сретенского [86] посвящена общей теории волновых движений в жидкости. Представлены плоские задачи с движениями тяжёлой жидкости и их решения.

В работе Дж. Тернера [137] изложены некоторые вопросы, возникающие при движении стратифицированных жидкостей. Автор подробно демонстрирует физическую сущность различных явлений, происходящих в неоднородных жидкостях, включая внутренние волны, турбулентность, конвекцию и перемешивание жидкости.

1.2. Вывод по обзору литературы

Проведенный обзор литературы показал, что в настоящее время существуют проблемы, связанные с динамикой вращающихся твёрдых тел с неоднородной жидкостью. В связи с расширением областей применения криогенных и стратифицированных жидкостей с произвольной плотностью возрастает необходимость решения вопросов, связанных с колебаниями стратифицированных жидкостей в резервуарах различной формы. В современных ракетах-носителях и космических аппаратах, приводимых в движение жидким топливом, масса жидкости обычно составляет более 80 % от общей массы аппарата. Важно отметить, что при движении тела с полостью, наполненной жидкостью, возникающие колебания жидкости могут существенно повлиять на устойчивость системы «тело-жидкость».

Данная диссертация посвящена разработке методов расчёта динамики твёрдых тел, содержащих неоднородную жидкость, в частности, стратифицированную жидкость. Также исследуется влияние интенсивности расслоения жидкости на устойчивость движения твёрдого тела с жидкостью.

ГЛАВА 2. УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА С НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТЬЮ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ОДНОРОДНОЕ ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

В главе 2 рассмотрены уравнения сферического движения твёрдого тела с неоднородной несжимаемой жидкостью, заполняющей полностью эллипсоидную полость. Исследована устойчивость вращения вокруг вертикальной оси динамической симметрии твёрдого тела с неоднородной идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Выведены достаточные условия устойчивости вращения вокруг вертикальной оси динамической симметрии твёрдого тела с эллипсоидной полостью, заполненной неоднородной жидкостью.

Задача о движении твёрдого тела с полостями, полностью заполненными жидкостью, является предметом научного интереса уже более века. Об этом интересе свидетельствуют многочисленные исследования, в том числе приведенные в [40-41, 59, 119, 122, 129, 131, 133]. В предыдущих работах широко изучалась устойчивость движения твёрдых тел с полостями, заполненными однородной идеальной или вязкой жидкостью [39, 54, 73, 81-82, 98]. Впоследствии устойчивость движения твёрдых тел с полостями, заполненными неоднородной жидкостью, исследовалась в работах [33-35, 91, 100-101]. Одновременно с вышеупомянутыми исследованиями растёт интерес к устойчивости движения твёрдых тел с полостями, заполненными жидкостью. В ряде работ было показано, что на устойчивость движения твёрдого тела, заполненного жидкостью в полости, существенно влияет наличие жидкости в полости и её геометрия [64-65, 81-82, 91].

Данная глава посвящена исследованию устойчивости вращения твёрдого тела с неоднородной жидкостью, имеющей линейное распределение плотности. Кроме того, рассматривается влияние такой неоднородной жидкости на устойчивость вращения твёрдого тела с жидкостью вокруг оси динамической симметрии. Полученные уравнения движения позволяют исследовать устойчивость стационарных движений системы и оценить влияние стратификации жидкости на динамику твёрдого тела.

2.1. Постановка задачи

Предположим, что твёрдое тело с эллипсоидной полостью вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ вокруг неподвижной точки O , являющейся геометрическим центром полости, а неоднородная идеальная жидкость, полностью заполняющая эту полость, совершает однородное вихревое движение с угловой скоростью $\vec{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ (рис. 2.1).

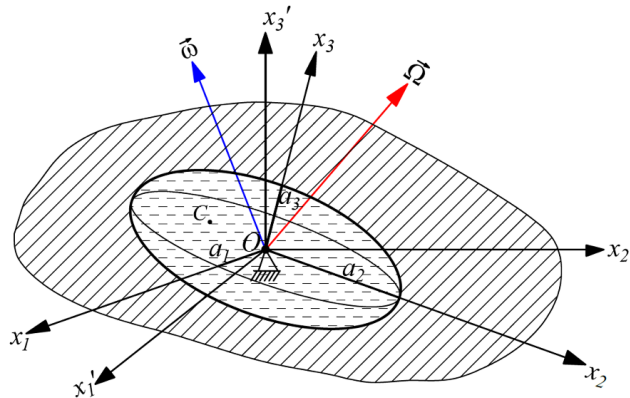


Рис. 2.1. Твёрдое тело с эллипсоидной полостью, полностью заполненной несжимаемой неоднородной жидкостью.

Пусть в рассматриваемом случае центр масс твёрдого тела совпадает с неподвижной точкой, одновременно являющейся геометрическим центром эллипсоидальной полости. Определяются две системы координат: неподвижная система координат $Ox_1'x_2'x_3'$ и подвижная $Ox_1x_2x_3$, связанная с твёрдым телом. Положение твёрдого тела относительно системы координат $Ox_1'x_2'x_3'$ описывается углами Эйлера ψ, φ, θ . Положение частиц жидкости в полости эллипсоида относительно системы координат, связанной с твёрдым телом, также выражается через углы Эйлера $\psi_1, \varphi_1, \theta_1$. Оси x_1, x_2, x_3 совпадают с полуосями эллипсоидальной полости a_1, a_2, a_3 и являются главными центральными осями инерции твёрдого тела с диагональной матрицей инерции Θ^T , $\Theta^T = \{A_0, B_0, C_0\}$. Однородное вихревое движение в неоднородной жидкости характеризуется линейными функциями пространственных координат с коэффициентами, зависящими от времени, как для скоростей частиц жидкости, так и для её плотности.

Внутренняя поверхность эллипсоидальной полости и внешняя поверхность ядра представляются уравнением [66]

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1. \quad (2.1)$$

Следуя А. Пуанкаре, сопоставим каждой точке ядра жидкости точку воображаемой сферы

$$S \equiv x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1,$$

причем штрихованные координаты равны

$$x_1' = \frac{x_1}{a_1}, \quad x_2' = \frac{x_2}{a_2}, \quad x_3' = \frac{x_3}{a_3},$$

а соответствующие скорости

$$v_1' = \frac{V_1}{a_1}, \quad v_2' = \frac{V_2}{a_2}, \quad v_3' = \frac{V_3}{a_3}.$$

Если движение простое, то воображаемые частицы движутся так же, как и частицы твёрдого тела, и движение сводится к вращению. Компоненты угловой скорости относительно осей, связанных со всем телом (главных осей инерции всего тела), будут Ω_1, Ω_2 и Ω_3 , т. е.

$$v_1' = \Omega_2 x_3' - \Omega_3 x_2', \quad v_2' = \Omega_3 x_1' - \Omega_1 x_3', \quad v_3' = \Omega_1 x_2' - \Omega_2 x_1'.$$

Откуда получим

$$u_1 = \frac{a_1}{a_3} \Omega_2 x_3 - \frac{a_1}{a_2} \Omega_3 x_2, \quad u_2 = \frac{a_2}{a_1} \Omega_3 x_1 - \frac{a_2}{a_3} \Omega_1 x_3, \quad u_3 = \frac{a_3}{a_2} \Omega_1 x_2 - \frac{a_3}{a_1} \Omega_2 x_1.$$

Чтобы получить абсолютное движение, необходимо совместить скорости v_i' и u_i в соответствии со следующими формулами [66, 73, 91]:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1}{a_3} \Omega_2 x_3 - \frac{a_1}{a_2} \Omega_3 x_2 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \\ v_2 &= \frac{a_2}{a_1} \Omega_3 x_1 - \frac{a_2}{a_3} \Omega_1 x_3 + \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \\ v_3 &= \frac{a_3}{a_2} \Omega_1 x_2 - \frac{a_3}{a_1} \Omega_2 x_1 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где u_i – проекция относительной скорости жидкости на ось Ox_i , v_i – абсолютная скорость движения жидкости в переменных Эйлера. Плотность неоднородной жидкости изменяется в соответствии с определенным законом

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3, \quad (2.3)$$

где $\rho_i(t)$ ($i=1,2,3$) – неизвестные функции времени.

Кинетическая энергия T системы может быть определена по следующей формуле:

$$2T = \vec{\omega} \cdot \Theta^\Sigma \cdot \vec{\omega} + \vec{\Omega} \cdot \Theta^{3.жс} \cdot \vec{\Omega} + 2\vec{\omega} \cdot \Theta^* \cdot \vec{\Omega}, \quad (2.4)$$

где $\Theta^\Sigma = \{A, B, C\}$ – сумма диагональных тензоров инерции твёрдого тела $\Theta^T = \{A_0, B_0, C_0\}$ и затвердевшей жидкости $\Theta^{3.жс} = \{A_1, B_1, C_1\}$; $\Theta^* = \{F, G, H\}$ – диагональный тензор моментов инерции, учитывающий подвижность жидкости.

С другой стороны, кинетическая энергия равна [66]

$$2T = \sum m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2).$$

Проинтегрировав по объёму τ , занимаемому жидкостью, получим выражение для кинетической энергии [66, 90]:

$$2T = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 + A_1\Omega_1^2 + B_1\Omega_2^2 + C_1\Omega_3^2 + 2F\omega_1\Omega_1 + 2G\omega_2\Omega_2 + 2H\omega_3\Omega_3, \quad (2.5)$$

где $A = A_0 + A_1$, $B = B_0 + B_1$, $C = C_0 + C_1$ – сумма моментов инерции твёрдого тела и затвердевшей жидкости.

Здесь

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{m}{5}(a_2^2 + a_3^2), & B_1 &= \frac{m}{5}(a_1^2 + a_3^2), & C_1 &= \frac{m}{5}(a_1^2 + a_2^2), \\ F &= \frac{2}{5}ma_2a_3, & G &= \frac{2}{5}ma_1a_3, & H &= \frac{2}{5}ma_1a_2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$m = \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 \rho_0$ – масса неоднородной жидкости.

2.2. Уравнения движения твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение

Чтобы получить уравнение движения рассматриваемой системы, необходимо воспользоваться уравнениями Эйлера-Лагранжа [61, 90]. Эти уравнения могут быть выражены в следующем виде, когда на систему действуют потенциальные силы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \hat{\omega}_s} + \sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^n \gamma_{ts}^r \frac{\partial T}{\partial \hat{\omega}_r} \hat{\omega}_t - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_s}, \quad (2.7)$$

где γ_{ts}^r – трёхиндексные символы Больцмана; $\hat{\omega}_s$ – квазискорость, равная проекции угловой скорости твёрдого тела или жидкости на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 ; π_s – квазиордината, соответствующая $\hat{\omega}_s$ квазискорости. Квазиордината π_s вводится при помощи обозначения [61],

$$\frac{d\pi_s}{dt} = \hat{\omega}_s. \quad (2.8)$$

Для вычисления трёхиндексных символов введем обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1 &= \omega_1, & \hat{\omega}_2 &= \omega_2, & \hat{\omega}_3 &= \omega_3, \\ \hat{\omega}_4 &= \Omega_1, & \hat{\omega}_5 &= \Omega_2, & \hat{\omega}_6 &= \Omega_3. \end{aligned}$$

Угловые скорости твёрдого тела $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и частиц жидкости $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ [99]:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, & \omega_2 &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, & \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \\ \Omega_1 &= -\dot{\psi}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1, & \Omega_2 &= -\dot{\psi}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1, & \Omega_3 &= -\dot{\psi}_1 \cos \theta_1 - \dot{\varphi}_1. \end{aligned}$$

В дальнейшем дифференциалы и вариации квазиординат могут быть выражены соотношениям:

$$\begin{aligned} d\pi_1 &= \sin \varphi \sin \theta d\psi + \cos \varphi d\theta; & \delta\pi_1 &= \sin \varphi \sin \theta \delta\psi + \cos \varphi \delta\theta; \\ d\pi_2 &= \cos \varphi \sin \theta d\psi - \sin \varphi d\theta; & \delta\pi_2 &= \cos \varphi \sin \theta \delta\psi - \sin \varphi \delta\theta; \\ d\pi_3 &= \cos \theta d\psi + d\varphi; & \delta\pi_3 &= \cos \theta \delta\psi + \delta\varphi; \\ d\pi_4 &= -\sin \varphi_1 \sin \theta_1 d\psi_1 - \cos \varphi_1 d\theta_1; & \delta\pi_4 &= -\sin \varphi_1 \sin \theta_1 \delta\psi_1 - \cos \varphi_1 \delta\theta_1; \\ d\pi_5 &= -\cos \varphi_1 \sin \theta_1 d\psi_1 + \sin \varphi_1 d\theta_1; & \delta\pi_5 &= -\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \delta\psi_1 + \sin \varphi_1 \delta\theta_1; \\ d\pi_6 &= -\cos \theta_1 d\psi_1 - d\varphi_1; & \delta\pi_6 &= -\cos \theta_1 \delta\psi_1 - \delta\varphi_1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Используя выражения (2.9), символы Больцмана определяются с помощью следующих перестановочных соотношений:

$$d(\delta\pi_s) - \delta(d\pi_s) = \sum_{t=1}^n \sum_{m=1}^n \gamma_{tm}^s d\pi_t \delta\pi_m. \quad (2.10)$$

Выражения билинейных форм, стоящие в левой части равенства (2.10), в рассматриваемом случае сводятся к следующей формуле:

$$d(\delta\pi_s) - \delta(d\pi_s) = d\pi_t \delta\pi_m - d\pi_m \delta\pi_t,$$

и следовательно

$$\begin{aligned} \gamma_{32}^1 = -\gamma_{23}^1 = 1; \quad \gamma_{13}^2 = -\gamma_{31}^2 = 1; \quad \gamma_{21}^3 = -\gamma_{12}^3 = 1; \\ \gamma_{56}^4 = -\gamma_{65}^4 = 1; \quad \gamma_{64}^5 = -\gamma_{46}^5 = 1; \quad \gamma_{45}^6 = -\gamma_{54}^6 = 1. \end{aligned}$$

Остальные γ_{ts}^r равны нулю.

Перейдем к вычислению потенциальной энергии Π системы тело-жидкость. В рассматриваемом случае центр масс твёрдого тела неподвижен, и поэтому потенциальная энергия системы складывается исключительно из потенциальной энергии жидкости:

$$\Pi = mg(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3), \quad (2.11)$$

где γ_i – направляющие косинусы, определяющие ориентацию твёрдого тела в пространстве относительно направления однородного поля массовых сил, обладающих интенсивностью \vec{g} ; c_i – координаты центра масс неоднородной жидкости, определяемые по формуле

$$c_i = \frac{\int \rho_0 x_i d\tau}{\int \rho_0 d\tau} = \frac{\rho_i a_i^2}{5\rho_0}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.12)$$

Производные $\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_s}$ определим по формуле

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_s} = \sum_{r=1}^n b_{rs} \frac{\partial \Pi}{\partial q_r}, \quad (2.13)$$

где коэффициенты b_{rs} есть элементы матрицы \mathbf{b} такой, что

$$\mathbf{b} \mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{E}, \quad (2.14)$$

\mathbf{E} – Единичная матрица, \mathbf{a} – невырожденная матрица коэффициентов a_{sk} форм $d\pi_s$ (2.9).

Положение центра масс жидкости в полости и положение твёрдого тела в пространстве определяются формулами:

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = [\vec{\Omega} \times \vec{c}], \quad (2.15)$$

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = [\vec{\gamma} \times \vec{\omega}], \quad (2.16)$$

Уравнения (2.15), (2.16) запишем в развернутом виде:

$$\frac{d\bar{c}_1}{dt} = \bar{c}_3\Omega_2 - \bar{c}_2\Omega_3, \quad \frac{d\bar{c}_2}{dt} = \bar{c}_1\Omega_3 - \bar{c}_3\Omega_1, \quad \frac{d\bar{c}_3}{dt} = \bar{c}_2\Omega_1 - \bar{c}_1\Omega_2, \quad (2.17)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \quad (2.18)$$

где $\bar{c}_i = \frac{c_i}{a_i}$, $\bar{\gamma}_i = \gamma_i a_i$, ($i=1,2,3$).

Используя выражения (2.11) – (2.18), получим следующие выражения для правой части уравнений (2.7):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_1} &= mg(\gamma_2 c_3 - \gamma_3 c_2), & -\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_4} &= mg(\gamma_2 c_3 \frac{a_2}{a_3} - \gamma_3 c_2 \frac{a_3}{a_2}), \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_2} &= mg(\gamma_3 c_1 - \gamma_1 c_3), & -\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_5} &= mg(\gamma_3 c_1 \frac{a_3}{a_1} - \gamma_1 c_3 \frac{a_1}{a_3}), \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_3} &= mg(\gamma_1 c_2 - \gamma_2 c_1), & -\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_6} &= mg(\gamma_1 c_2 \frac{a_1}{a_2} - \gamma_2 c_1 \frac{a_2}{a_1}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подставляя значения кинетической энергии (2.5) и выражения (2.20) в уравнение Эйлера-Лагранжа и учитывая значение γ_{is}^r и соотношение (2.20), получим уравнения движения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение [90, 99]:

$$\frac{d}{dt}(\vec{M}^\Sigma + \vec{M}^\Gamma) + \vec{\omega} \times (\vec{M}^\Sigma + \vec{M}^\Gamma) = mg[\vec{\gamma} \times \vec{c}], \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{M}^* + \vec{M}^{\mathcal{J}}) + (\vec{M}^* + \vec{M}^{\mathcal{J}}) \times \vec{\Omega} = mg[\vec{\gamma} \times \vec{c}]. \quad (2.22)$$

В уравнениях (2.21) и (2.22) приняты обозначения:

$\vec{M}^\Sigma = \Theta^\Sigma \cdot \vec{\omega}$ – сумма кинетических моментов твёрдого тела ($\vec{M}^\Gamma = \Theta^\Gamma \cdot \vec{\omega}$) и «затвердевшей» жидкости ($\vec{M}^{\mathcal{J}} = \Theta^{\mathcal{J}} \cdot \vec{\omega}$),

$\vec{M}^\Gamma = \Theta^* \cdot \vec{\Omega}$ – гиостатический момент жидкости,

$\vec{M}^{\mathcal{J}} = \Theta^{\mathcal{J}} \cdot \vec{\Omega}$ – кинетический момент жидкости при движении с угловой скоростью затвердевшей жидкости $\Theta_{11}^{\mathcal{J}} = A_1$, $\Theta_{22}^{\mathcal{J}} = B_1$, $\Theta_{33}^{\mathcal{J}} = C_1$,

$\vec{M}^* = \Theta^* \cdot \vec{\omega}$ – кинетический момент жидкости при движении с угловой скоростью твёрдого тела $\Theta_{11}^* = F$, $\Theta_{22}^* = G$, $\Theta_{33}^* = H$.

В проекциях на подвижные оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 уравнения (2.21) и (2.22) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A\omega_1 + F\Omega_1) + \omega_2\omega_3(C - B) + H\omega_2\Omega_3 - G\omega_3\Omega_2 &= mg(\gamma_2c_3 - \gamma_3c_2), \\ \frac{d}{dt}(B\omega_2 + G\Omega_2) + \omega_1\omega_3(A - C) + F\omega_3\Omega_1 - H\omega_1\Omega_3 &= mg(\gamma_3c_1 - \gamma_1c_3), \\ \frac{d}{dt}(C\omega_3 + H\Omega_3) + \omega_1\omega_2(B - A) + G\omega_1\Omega_2 - F\omega_2\Omega_1 &= mg(\gamma_1c_2 - \gamma_2c_1). \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_1\Omega_1 + F\omega_1) + \Omega_2\Omega_3(B_1 - C_1) + G\omega_2\Omega_3 - H\omega_3\Omega_2 &= mg(\bar{\gamma}_2\bar{c}_3 - \bar{\gamma}_3\bar{c}_2), \\ \frac{d}{dt}(B_1\Omega_2 + G\omega_2) + \Omega_1\Omega_3(C_1 - A_1) + H\omega_3\Omega_1 - F\omega_1\Omega_3 &= mg(\bar{\gamma}_3\bar{c}_1 - \bar{\gamma}_1\bar{c}_3), \\ \frac{d}{dt}(C_1\Omega_3 + H\omega_3) + \Omega_1\Omega_2(A_1 - B_1) + F\omega_1\Omega_2 - G\omega_2\Omega_1 &= mg(\bar{\gamma}_1\bar{c}_2 - \bar{\gamma}_2\bar{c}_1). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Как следует из уравнений (2.15) – (2.21), движения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение в эллипсоидальной полости, можно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка.

Следует отметить, что уравнение (2.21) эквивалентно уравнению движения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с кинетическим моментом \vec{M}^Γ , к

которому присоединено вращающееся переносимое твёрдое тело с кинетическим моментом \vec{M}^T . Однако вращение присоединенного твёрдого тела происходит таким образом, что центр масс переносимого тела меняет своё положение относительно несущего, а моменты инерции переносимого тела остаются постоянными. Следовательно, рассматриваемая механическая система не может быть определена как гириостат из-за переменного положения центра масс в системе координат, связанной с переносимым телом. Вместо этого она представляет собой более общую механическую систему.

Таким образом, эффект неоднородной жидкости, совершающей однородное вихревое движение, тождествен совместному эффекту некоторого эквивалентного тела с «затвердевшей» жидкостью и вращающегося вокруг неподвижной точки твёрдого тела с тензором инерции Θ^* с центром масс, не совпадающим с неподвижной точкой несущего тела, присоединенных к несущему телу и образующих в совокупности систему твёрдых тел.

Случай неподвижного твёрдого тела, т. е. ($\vec{M}^* = 0$). Тогда уравнение одной жидкости описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}^{\text{ж}}}{dt} + \vec{M}^{\text{ж}} \times \vec{\Omega} &= mg(\vec{\gamma} \times \vec{c}), \\ \frac{d\vec{c}}{dt} &= \vec{\Omega} \times \vec{c}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

которые после замены $\vec{\omega}$ на $-\vec{\omega}$ совпадают с уравнениями Эйлера-Пуассона движения тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Таким образом, можно утверждать, что для всех интегрируемых случаев движения тяжёлого твёрдого тела могут быть определены решения задачи (2.25) о движении неоднородной жидкости в эллипсоидной полости.

Отметим частный случай шаровой полости $a_1 = a_2 = a_3$. При этом, считаем, что моменты инерции $A_1 = B_1 = C_1 = F = G = H$ и $\vec{\gamma}_i \vec{c}_i = \vec{\gamma}_i c_i$. Из уравнений движения (2.23) и (2.24) имеем

$$\begin{aligned}
A_0 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \omega_3 (C_0 - B_0) &= 0, \\
B_0 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1 \omega_3 (A_0 - C_0) &= 0, \\
C_0 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1 \omega_2 (B_0 - A_0) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (A_1 \Omega_1 + A_1 \omega_1) + A_1 (\omega_2 \Omega_3 - \omega_3 \Omega_2) &= mg (\gamma_2 c_3 - \gamma_3 c_2), \\
\frac{d}{dt} (B_1 \Omega_2 + B_1 \omega_2) + B_1 (\omega_3 \Omega_1 - \omega_1 \Omega_3) &= mg (\gamma_3 c_1 - \gamma_1 c_3), \\
\frac{d}{dt} (C_1 \Omega_3 + C_1 \omega_3) + C_1 (\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1) &= mg (\gamma_1 c_2 - \gamma_2 c_1).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Как видно из уравнений (2.26) и (2.27), движение жидкости в сферической полости не влияет на движение твёрдого тела, если центр масс твёрдого тела совпадает с геометрическим центром сферы и одновременно является неподвижной точкой. Движение твёрдого тела с неоднородной жидкостью в сферической полости описывается уравнениями, идентичными уравнениям для твёрдого тела без жидкости в эйлеровом случае.

2.3. Устойчивость вращения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной неоднородной жидкостью

Исследуем устойчивость вращения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной неоднородной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение (рис. 2.1). В задачах об устойчивости движения тел, заполненных жидкостью, нас в первую очередь интересует вопрос об устойчивости движения твёрдого тела, а вопрос об устойчивости движения жидкости интересует нас лишь постольку, поскольку движение жидкости влияет на устойчивость движения тела. Эти две стороны одного и того же вопроса связаны друг с другом. В такой постановке проблема устойчивости движения твёрдого тела и жидкости в его полости сводится к изучению устойчивости по отношению к части переменных [82], но не ко всем переменным, определяющим движение механической системы с бесконечным числом степеней свободы. Далее этот вопрос будет рассмотрен с помощью второго

метода Ляпунова, который основан на комплексных решениях возмущенного движения.

Уравнения движения твёрдого тела с неоднородной жидкостью (2.17) – (2.18) и (2.23) – (2.24) допускают ряд первых интегралов. Умножив уравнения (2.23) на $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, соответственно, и сложив их с учетом уравнения (2.18), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) + 2F\omega_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + 2G\omega_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + 2H\omega_3 \frac{d\Omega_3}{dt} = \\ = -2mg \left(c_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + c_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + c_3 \frac{d\gamma_3}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Умножение уравнений (2.24) на $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и последующее сложение, с учетом равенства (2.17), дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_1\Omega_1^2 + B_1\Omega_2^2 + C_1\Omega_3^2) + 2F\Omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + 2G\Omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} + 2H\Omega_3 \frac{d\omega_3}{dt} = \\ = -2mg \left(\gamma_1 \frac{dc_1}{dt} + \gamma_2 \frac{dc_2}{dt} + \gamma_3 \frac{dc_3}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Сумма уравнений (5.28) и (5.29) дает интеграл энергии

$$\begin{aligned} A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 + 2F\omega_1\Omega_1 + 2G\omega_2\Omega_2 + 2H\omega_3\Omega_3 + \\ + 2mg(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3) = V_1. \end{aligned}$$

Умножив уравнение (2.23) на $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и сложив полученные члены. С учетом уравнения (2.18) получается интеграл площадей.

$$\gamma_1(A\omega_1 + F\Omega_1) + \gamma_2(B\omega_2 + G\Omega_2) + \gamma_3(C\omega_3 + H\Omega_3) = V_2.$$

Очевидно, что уравнения (2.17) и (2.18) позволяют интегрировать геометрические формы для твёрдого тела и жидкости, соответственно:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = V_3,$$

$$a_2^2 a_3^2 c_1^2 + a_1^2 a_3^2 c_2^2 + a_1^2 a_2^2 c_3^2 = V_4.$$

Умножая последовательно уравнения (2.24) на $\frac{c_1}{a_1}$, $\frac{c_2}{a_2}$ и $\frac{c_3}{a_3}$, а затем

складывая полученные значения, получим интеграл площадей для жидкости

$$(A_1\Omega_1 + F\omega_1) \frac{c_1}{a_1} + (B_1\Omega_2 + G\omega_2) \frac{c_2}{a_2} + (C_1\Omega_3 + H\omega_3) \frac{c_3}{a_3} = V_5.$$

Исследуем устойчивости движения твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение по отношению к изменению переменных: $\Omega_i^*, \omega_i, \gamma_i, c_i (i=1,2,3)$ [81, 91],

где [73]

$$\Omega_1^* = \omega_1 + \frac{a_2^2 + a_3^2}{2a_2a_3}\Omega_1, \quad \Omega_2^* = \omega_2 + \frac{a_1^2 + a_3^2}{2a_1a_3}\Omega_2, \quad \Omega_3^* = \omega_3 + \frac{a_1^2 + a_2^2}{2a_1a_2}\Omega_3. \quad (2.30)$$

Формула (2.30) показывает переход от угловых скоростей твёрдого тела и жидкости к угловым скоростям эллиптического вращения, введённым Жуковским [41]. Вращательное движение твёрдого тела с полостями, полностью заполненными жидкостью, эквивалентно вращательному движению абсолютно твёрдого тела с эквивалентным моментом инерции. Можно показать, что эквивалентные моменты инерции всегда меньше моментов инерции твёрдого тела с затвердевшей жидкостью [48]. Формулы (2.30) используются для преобразования уравнений (2.21), (2.24) и (2.17) к виду [73]

$$\Theta_* \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \Theta^{(2)} \frac{d\vec{\Omega}^*}{dt} + \vec{\omega} \times (\Theta_* \cdot \vec{\omega} + \Theta^{(2)} \cdot \vec{\Omega}^*) = mg(\vec{\gamma} \times \vec{c}), \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}a_2a_3 \frac{d\Omega_1^*}{dt} + \frac{4}{5} \frac{(a_3^2 - a_2^2)a_1^2a_2a_3}{(a_3^2 + a_2^2)(a_1^2 + a_2^2)} \Omega_2^*\Omega_3^* + \\ + \frac{4}{5}a_1^2a_2a_3 \left(\frac{\omega_2\Omega_3^*}{a_1^2 + a_3^2} - \frac{\omega_3\Omega_2^*}{a_1^2 + a_3^2} \right) = g(\bar{c}_3\bar{\gamma}_2 - \bar{c}_2\bar{\gamma}_3), \quad (1,2,3). \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}_1}{dt} &= \frac{2a_1a_3\bar{c}_3}{a_1^2 + a_3^2}(\Omega_2^* - \omega_2) - \frac{2a_1a_2\bar{c}_2}{a_1^2 + a_2^2}(\Omega_3^* - \omega_3), \\ \frac{d\bar{c}_2}{dt} &= \frac{2a_2a_2\bar{c}_1}{a_1^2 + a_2^2}(\Omega_3^* - \omega_3) - \frac{2a_2a_3\bar{c}_3}{a_2^2 + a_3^2}(\Omega_1^* - \omega_1), \\ \frac{d\bar{c}_3}{dt} &= \frac{2a_2a_3\bar{c}_2}{a_2^2 + a_3^2}(\Omega_1^* - \omega_1) - \frac{2a_1a_3\bar{c}_1}{a_1^2 + a_3^2}(\Omega_2^* - \omega_2), \end{aligned} \quad (2.33)$$

где $\Theta_* = \{A, B, C\}$ – сумма диагональных тензоров инерции твёрдого тела $\Theta^T = \{A_0, B_0, C_0\}$ и эквивалентного тела $\Theta^{\mathcal{J}} = \{A_{\mathcal{J}}, B_{\mathcal{J}}, C_{\mathcal{J}}\}$. Компоненты диагонального тензора инерции эквивалентного тела,

$$\Theta_{11}^{\mathfrak{g}} = A_{\mathfrak{g}} = \frac{m(a_2^2 - a_3^2)^2}{5(a_2^2 + a_3^2)}, \quad \Theta_{22}^{\mathfrak{g}} = B_{\mathfrak{g}} = \frac{m(a_3^2 - a_1^2)^2}{5(a_3^2 + a_1^2)}, \quad \Theta_{33}^{\mathfrak{g}} = C_{\mathfrak{g}} = \frac{m(a_1^2 - a_2^2)^2}{5(a_1^2 + a_2^2)},$$

$\Theta^{(2)} = \{A_2, B_2, C_2\}$ – тензор, равный разности между тензором инерции затвердевшей жидкости $\Theta^{3..ж} = \{A_1, B_1, C_1\}$ и эквивалентного тела $\Theta^{\mathfrak{g}} = \{A_{\mathfrak{g}}, B_{\mathfrak{g}}, C_{\mathfrak{g}}\}$, и определенный компонентами

$$\begin{aligned} \Theta_{11}^{(2)} &= A_2 = A_1 - A_{\mathfrak{g}} = \frac{4}{5}m \frac{a_2^2 a_3^2}{a_2^2 + a_3^2}, \\ \Theta_{22}^{(2)} &= B_2 = B_1 - B_{\mathfrak{g}} = \frac{4}{5}m \frac{a_3^2 a_1^2}{a_3^2 + a_1^2}, \\ \Theta_{33}^{(2)} &= C_2 = C_1 - C_{\mathfrak{g}} = \frac{4}{5}m \frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}. \end{aligned}$$

Здесь и далее суммы моментов инерции приняты:

$$A = A_0 + A_{\mathfrak{g}}, B = B_0 + B_{\mathfrak{g}}, C = C_0 + C_{\mathfrak{g}}.$$

Преобразованные уравнения также позволяют вывести первые интегралы.

Интеграл энергии

$$\begin{aligned} A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 + A_2(\Omega_1^{*2} - \omega_1^2) + B_2(\Omega_2^{*2} - \omega_2^2) + C_2(\Omega_3^{*2} - \omega_3^2)^2 + \\ + 2mg(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3) = V_1, \end{aligned}$$

и интеграл площадей для твёрдого тела с жидкостью

$$A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C\omega_3\gamma_3 + A_2\gamma_1(\Omega_1^* - \omega_1) + B_2\gamma_2(\Omega_2^* - \omega_2) + C_2\gamma_3(\Omega_3^* - \omega_3) = V_2,$$

и геометрические интегралы V_3 и V_4 для твёрдого тела и жидкости соответственно.

Интеграл площадей для жидкости при использовании переменных $\Omega_1^*, \Omega_2^*, \Omega_3^*$ имеет вид:

$$a_2^2 a_3^2 \Omega_1^* c_1 + a_1^2 a_2^2 \Omega_2^* c_2 + a_1^2 a_2^2 \Omega_3^* c_3 = V_5.$$

Уравнения движения системы (2.31) – (2.33), (2.18) допускают следующее частное решение:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_0; \quad \Omega_1^* = \Omega_2^* = 0, \quad \Omega_3^* = \Omega_0, \\ c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = z_0; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \end{aligned} \quad (2.34)$$

которому соответствует равномерное вращение твёрдого тела вокруг оси, параллельной вектору \vec{g} , и установившемуся движению с угловой скоростью Ω_0

неоднородной жидкости, плотность которой в установившемся вращении изменяется по закону:

$$\rho = \rho_0 + \rho_3 x_3.$$

Рассмотрим движение системы, описываемой частным решением (2.34), как невозмущенное движение твёрдого тела и жидкости в его полости, и исследуем устойчивость вращательного движения твёрдого тела и жидкости. Важно отметить, что система, состоящая из твёрдого тела и жидкости, обладает бесконечным числом степеней свободы. Однако переменные $c_i (i=1,2,3)$ позволяют описать движение системы «тело-жидкость» конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае под устойчивостью движения, как всей системы, так и отдельной жидкости, следует понимать не устойчивость по отношению ко всем переменным, характеризующим движение, а устойчивость по отношению к части переменных $\omega_i, \Omega_i^*, \gamma_i, c_i (i=1,2,3)$ [73, 81–82]. Такая постановка задачи наиболее подходит для прикладных задач, которые в первую очередь касаются устойчивости движения твёрдого тела. Это обстоятельство позволяет рассматривать устойчивость системы «тело-жидкость» как задачу об устойчивости системы с конечным числом переменных. Для решения вопроса об устойчивости движения системы воспользуемся вторым методом Ляпунова, распространённым на подобные системы в работе [73].

Уравнения возмущённого движения получаются из уравнений (2.31) – (2.33) и (2.12) путём введения возмущённого движения

$$\omega_3 = \omega_0 + y_1, \quad \Omega_3^* = \Omega_0 + y_2, \quad \gamma_3 = 1 + y_3, \quad c_3 = z_0 + y_4, \quad (2.35)$$

и сохраняя прежние обозначения для других переменных. Уравнения возмущённого движения также обладают следующими первыми интегралами

$V_i (i=1 \div 5)$:

$$V_1 = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C(y_1^2 + 2\omega_0 y_1) + A_2\Omega_1^{*2} + B_2\Omega_2^{*2} + C_2(y_2^2 + 2\Omega_0 y_0) + 2mg(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + z_0 y_3 + y_4 + y_3 y_4),$$

$$V_2 = A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C(y_1 + y_1 y_3 + \omega_0 y_3) + A_2\gamma_1\Omega_1^* + B_2\gamma_2\Omega_2^* + C_2(y_2 + y_2 y_3 + \Omega_0 y_3),$$

$$V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2y_3 + y_3^2,$$

$$V_4 = a_2^2 a_3^2 c_1^2 + a_1^2 a_3^2 c_2^2 + a_1^2 a_2^2 (y_4^2 + 2z_0 y_4),$$

$$V_5 = a_2^2 a_3^2 \Omega_1^* c_1 + a_1^2 a_2^2 \Omega_2^* c_2 + a_1^2 a_2^2 (y_2 y_4 + y_2 z_0 + \Omega_0 y_4).$$

Для построения функции Ляпунова воспользуемся методом Четаева [73].

Составим связку первых интегралов

$$V = V_1 - 2\omega_0 V_2 + T_1 V_4 - 2T_2 V_5 + \mu V_3 + \frac{1}{4} \chi V_3^2, \quad (2.36)$$

где

$$T_1 = \frac{C_2 \Omega_0 (\Omega_0 - \omega_0)}{a_1^2 a_2^2 z_0^2} - \frac{mg}{a_1^2 a_2^2 z_0} = T_2 \frac{\Omega_0}{z_0} - \frac{mg}{a_1^2 a_2^2 z_0},$$

$$T_2 = \frac{C_2 (\Omega_0 - \omega_0)}{a_1^2 a_2^2 z_0}, \quad \mu = (C\omega_0 + C_2 \Omega_0) \omega_0 - mgz_0.$$

После небольших преобразований, функция V приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} V = & A\omega_1^2 - 2\omega_0 A\omega_1 \gamma_1 - 2\omega_0 A_2 \Omega_1^* \gamma_1 + \mu \gamma_1^2 + A_2 \Omega_1^{*2} - 2T_2 a_2^2 a_3^2 \Omega_1^* c_1 + \\ & + T_1 a_2^2 a_3^2 c_1^2 + 2mgc_1 \gamma_1 + \\ & + B\omega_2^2 - 2\omega_0 B\omega_2 \gamma_2 - 2\omega_0 B_2 \Omega_2^* \gamma_2 + \mu \gamma_2^2 + B_2 \Omega_2^{*2} - 2T_2 a_1^2 a_3^2 \Omega_2^* c_2 + \\ & + T_1 a_1^2 a_3^2 c_2^2 + 2mgc_2 \gamma_2 + \\ & + Cy_1^2 - 2\omega_0 Cy_1 y_3 - 2\omega_0 C_2 y_2 y_3 + \mu y_3^2 + C_2 y_2^2 - 2T_2 a_1^2 a_2^2 y_2 y_4 + \\ & + T_1 a_1^2 a_2^2 y_4^2 + 2mgy_3 y_4 + \chi y_3^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.37)$$

Многооточие означает не выписанные члены выше 2-го порядка малости, а коэффициент χ остается пока произвольным. Функцию V (2.37) можно рассматривать как сумму трех квадратичных форм, каждая из которых зависит от четырех переменных

$$V = V^{(1)}(\omega_1, \gamma_1, \Omega_1^*, c_1) + V^{(2)}(\omega_2, \gamma_2, \Omega_2^*, c_2) + V^{(3)}(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Выведены следующие обозначения:

$$V^{(1)}(\omega_1, \gamma_1, \Omega_1^*, c_1) = A\omega_1^2 - 2\omega_0 A\omega_1\gamma_1 - 2\omega_0 A_2\Omega_1^*\gamma_1 + \mu\gamma_1^2 + A_2\Omega_1^{*2} - \\ - 2T_2 a_2^2 a_3^2 \Omega_1^* c_1 + T_1 a_2^2 a_3^2 c_1^2 + 2mgc_1\gamma_1,$$

$$V^{(2)}(\omega_2, \gamma_2, \Omega_2^*, c_2) = B\omega_2^2 - 2\omega_0 B\omega_2\gamma_2 - 2\omega_0 B_2\Omega_2^*\gamma_2 + \mu\gamma_2^2 + B_2\Omega_2^{*2} - \\ - 2T_2 a_1^2 a_3^2 \Omega_2^* c_2 + T_1 a_1^2 a_3^2 c_2^2 + 2mgc_2\gamma_2.$$

Построим матрицы M_1 и M_2 коэффициентов квадратичных форм $V^{(1)}(\omega_1, \gamma_1, \Omega_1^*, c_1)$ и $V^{(2)}(\omega_2, \gamma_2, \Omega_2^*, c_2)$

$$M_1 = \begin{vmatrix} A & -\omega_0 A & 0 & 0 \\ -\omega_0 A & \mu & -\omega_0 A_2 & mg \\ 0 & -\omega_0 A_2 & A_2 & -T_2 a_2^2 a_3^2 \\ 0 & mg & -T_2 a_2^2 a_3^2 & T_1 a_2^2 a_3^2 \end{vmatrix},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} B & -\omega_0 B & 0 & 0 \\ -\omega_0 B & \mu & -\omega_0 B_2 & mg \\ 0 & -\omega_0 B_2 & B_2 & -T_2 a_1^2 a_3^2 \\ 0 & mg & -T_2 a_1^2 a_3^2 & T_1 a_1^2 a_3^2 \end{vmatrix}.$$

В соответствии с критерием Сильвестра, для того чтобы квадратичная форма была положительно-определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы коэффициентов квадратичной формы были строго больше нуля [67]. Диагональные миноры для матриц M_1 и M_2 имеют следующие:

$$\Delta_1^A = A, \quad \Delta_2^A = \begin{vmatrix} A & -\omega_0 A \\ -\omega_0 A & \mu \end{vmatrix} = A\Delta_2^{*A},$$

$$\Delta_3^A = \begin{vmatrix} A & -\omega_0 A & 0 \\ -\omega_0 A & \mu & -\omega_0 A_2 \\ 0 & -\omega_0 A_2 & A_2 \end{vmatrix} = AA_2\Delta_3^{*A},$$

$$\Delta_4^A = \begin{vmatrix} A & -\omega_0 A & 0 & 0 \\ -\omega_0 A & \mu & -\omega_0 A_2 & mg \\ 0 & -\omega_0 A_2 & A_2 & -T_2 a_2^2 a_3^2 \\ 0 & mg & -T_2 a_2^2 a_3^2 & T_1 a_2^2 a_3^2 \end{vmatrix} = \frac{A}{z_0^2} \Delta_4^{*A},$$

$$\Delta_1^B = B, \quad \Delta_2^B = \begin{vmatrix} B & -\omega_0 B \\ -\omega_0 B & \mu \end{vmatrix} = B \Delta_2^{*B},$$

$$\Delta_3^B = \begin{vmatrix} B & -\omega_0 B & 0 \\ -\omega_0 B & \mu & -\omega_0 B_2 \\ 0 & -\omega_0 B_2 & B_2 \end{vmatrix} = B B_2 \Delta_3^{*B},$$

$$\Delta_4^B = \begin{vmatrix} B & -\omega_0 B & 0 & 0 \\ -\omega_0 B & \mu & -\omega_0 B_2 & mg \\ 0 & -\omega_0 B_2 & B_2 & -T_2 a_1^2 a_3^2 \\ 0 & mg & -T_2 a_1^2 a_3^2 & T_1 a_1^2 a_3^2 \end{vmatrix} = \frac{B}{z_0^2} \Delta_4^{*B},$$

при выполнении условий для матрицы M_1 ,

$$\Delta_2^{*A} = (C - A)\omega_0^2 + C_2 \Omega_0 \omega_0 - mgz_0 > 0,$$

$$\Delta_3^{*A} = (C - A^*)\omega_0^2 + C_2 \Omega_0 \omega_0 - mgz_0 > 0, \quad (2.38)$$

$$\Delta_4^{*A} = \Delta_3^{*A} \frac{a_3^2}{a_1^2} \left[(\Omega_0 - \omega_0) \Omega_0 A_2 C_2 - (\Omega_0 - \omega_0)^2 C_2^2 \frac{a_3^2}{a_1^2} - A_2 mgz_0 \right] -$$

$$- A_2 \left[(\Omega_0 - \omega_0) C_2 \omega_0 \frac{a_3^2}{a_1^2} - mgz_0 \right]^2 > 0, \quad (2.39)$$

и аналогично выполнены условия для матрицы M_2 ,

$$\Delta_2^{*B} = (C - B)\omega_0^2 + C_2 \Omega_0 \omega_0 - mgz_0 > 0,$$

$$\Delta_3^{*B} = (C - B^*)\omega_0^2 + C_2 \Omega_0 \omega_0 - mgz_0 > 0,$$

$$\Delta_4^{*B} = \Delta_3^{*B} \frac{a_3^2}{a_2^2} \left[(\Omega_0 - \omega_0) \Omega_0 B_2 C_2 - (\Omega_0 - \omega_0)^2 C_2^2 \frac{a_3^2}{a_2^2} - B_2 mgz_0 \right] -$$

$$- B_2 \left[(\Omega_0 - \omega_0) C_2 \omega_0 \frac{a_3^2}{a_2^2} - mgz_0 \right]^2 > 0.$$

Для динамически симметричного относительно оси Ox_3 твёрдого тела ($A_0 = B_0$) с эллипсоидальной полостью вращения ($a_1 = a_2$) исследуем неравенства (2.38) и (2.39), допускаемые первой квадратичной формой $V^{(1)}(\omega_1, \gamma_1, \Omega_1^*, c_1)$.

Теорема Ляпунова об устойчивости утверждает, что неравенства (2.38) и (2.39) служат достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения

(2.35) относительно переменных $\omega_i, \Omega_i^*, c_i, \gamma_i (i=1,2,3)$. Это особенно актуально, когда Ω_0 очень мало и неоднородная жидкость проявляет свойства, сходные с потенциальным движением. Более того, когда $\Omega_0 = \omega_0$, жидкость и тело вращаются как единое целое благодаря влиянию вязкости.

Рассмотрим первый случай, когда $\Omega_0 = \omega_0$. В этом случае, при $z_0 \neq 0$ неравенства (2.38) и (2.39) принимают вид:

$$(C^* - A^*)\omega_0^2 - mgz_0 > 0, \quad (2.40)$$

$$(A^* - C^*)\omega_0^2 + mgz_0 \frac{a_3^2 - a_1^2}{a_3^2} > 0. \quad (2.41)$$

Если $z_0 = 0$, неравенства (2.40) и (2.41) принимают вид:

$$C^* - A^* > 0, \quad (2.42)$$

$$A^* - C^* > 0. \quad (2.43)$$

Неравенства (2.42) и (2.43) совпадает с достаточными условиями устойчивости невозмущенного инерционного движения твёрдого тела с однородной жидкостью, обладающих суммарными моментами инерции

$$A^* = A_0 + A_3 + A_2 = A_0 + A_1, \quad C^* = C_0 + C_3 + C_2 = C_0 + C_1.$$

Если $z_0 > 0$, неравенства (2.40) и (2.41) не изменяются. При $z_0 < 0$, невозмущённое движение системы будет устойчиво, если выполняются неравенства:

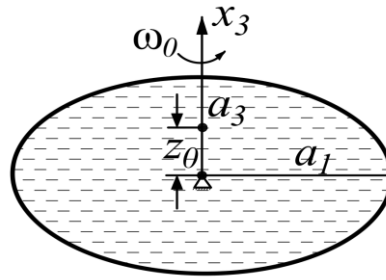
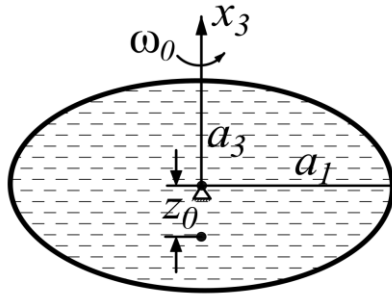
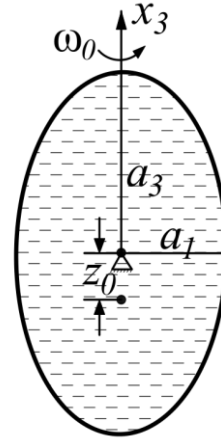
$$(C^* - A^*)\omega_0^2 + mgz_0 > 0, \quad (2.44)$$

$$(A^* - C^*)\omega_0^2 - mgz_0 \frac{a_3^2 - a_1^2}{a_3^2} > 0. \quad (2.45)$$

Если оболочка очень тонкая и считаем, что её моменты инерции можно пренебречь ($A_0 = B_0 = C_0 \approx 0$). Тогда для тонкой оболочки неравенства (2.40) и (2.41) при $z_0 \neq 0$ превращаются в следующие условия:

$$(a_1^2 - a_3^2)\omega_0^2 - 5gz_0 > 0, \quad (2.46)$$

$$a_3^2\omega_0^2 + 5gz_0 > 0. \quad (2.47)$$

(a) $z_0 > 0, a_1 > a_3$ (б) $z_0 < 0, a_1 > a_3$ (в) $z_0 < 0, a_3 > a_1$ **Рис. 2.2.** Эллипсоид вращения с жидкостью.

Рассмотрим уравнения (2.46) и (2.47) в различных случаях эллипсоида вращения, и при разных знаках z_0 . В случае $z_0 > 0$ неравенства (2.46) и (2.47) выполняются, только когда $a_1 > a_3$, что указывает на выполнение условий для сплюснутого эллипсоида вращения, рис. 2.2 (а). В случае $z_0 < 0$, достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения являются следующие:

$$(a_1^2 - a_3^2)\omega_0^2 + 5gz_0 > 0, \quad (2.48)$$

$$a_3^2\omega_0^2 - 5gz_0 > 0, \quad (2.49)$$

которые, как показано на рис. 2.2 (б) и (в) выполняются в случаях $a_1 > a_3$ и $a_3 > a_1$.

Теперь рассмотрим второй случай, когда угловая скорость жидкости Ω_0 достаточно мала ($\Omega_0 \approx 0$). Это происходит на начальных этапах процесса раскручивания, когда основная часть неоднородной жидкости либо неподвижна, либо совершает движение, близкое к потенциальному. В этом случае, при $z_0 \neq 0$, неравенства (2.38) и (2.39) принимают следующий вид:

$$(C - A^*)\omega_0^2 - mgz_0 > 0, \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} & \left[(A^* - C)\omega_0^2 + mgz_0 \right] \frac{a_3^2}{a_1^2} \left(C_2^2 \omega_0^2 \frac{a_3^2}{a_1^2} + A_2 mgz_0 \right) - \\ & - A_2 \left(C_2^2 \omega_0^2 \frac{a_3^2}{a_1^2} + mgz_0 \right)^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Если $z_0 = 0$, неравенства (2.50) и (2.51) принимают вид:

$$C - A^* > 0, \quad (2.52)$$

$$A - C > 0. \quad (2.53)$$

При $z_0 > 0$, неравенства (2.50) и (2.51) не изменяются, а при $z_0 < 0$ они будут

$$(C - A^*)\omega_0^2 + mgz_0 > 0, \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} & \left[(A^* - C)\omega_0^2 + mgz_0 \right] \frac{a_3^2}{a_1^2} \left(C_2^2 \omega_0^2 \frac{a_3^2}{a_1^2} - A_2 mgz_0 \right) - \\ & - A_2 \left(C_2^2 \omega_0^2 \frac{a_3^2}{a_1^2} - mgz_0 \right)^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Для тонкой оболочки ($A_0 = C_0 \approx 0$), при $z_0 \neq 0$ неравенства (2.50) и (2.51) превращаются в следующие условия:

$$(a_1^2 + a_3^2)\omega_0^2 + 5gz_0 < 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{1}{25} \omega_0^4 a_3^2 (a_3^2 - a_1^2) + gz_0 \left(\frac{2}{5} \omega_0^2 a_3^2 + gz_0 \right) > 0. \quad (2.57)$$

При $z_0 > 0$ неравенства (2.56), (2.57) являются несовместными. При $z_0 < 0$ неравенства (2.56) и (2.57) принимают вид:

$$(a_1^2 + a_3^2)\omega_0^2 - 5gz_0 < 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{1}{25} \omega_0^4 a_3^2 (a_3^2 - a_1^2) - gz_0 \left(\frac{2}{5} \omega_0^2 a_3^2 - gz_0 \right) > 0. \quad (2.57)$$

Для твёрдого тела, представляющего собой тонкую оболочку с пренебрежимо малыми по сравнению с жидкостью моментами инерции, неравенства (2.56) и (2.57) могут служить достаточными условиями устойчивости в рассматриваемом случае при $z_0 < 0$. Важно отметить, что неравенства (2.56) и (2.57) приводят к физически правильному результату: невозмущенная жидкость

может быть устойчивой только при $z_0 < 0$, когда плотность жидкости в невозмущенном состоянии возрастает в направлении однородного силового поля.

2.4. Вывод по главе 2

В главе 2 получены и проанализированы уравнения сферического движения твёрдого тела с эллипсоидной полостью, заполненной неоднородной идеальной жидкостью. Также выведены достаточные условия устойчивости вращения твёрдого тела с неоднородной жидкостью вокруг вертикальной оси динамической симметрии. Полученные условия имеют вид неравенств, вытекающих из требования положительной определённости функции Ляпунова. Из полученных результатов следует, что условия устойчивого вращения твёрдого тела с неоднородной жидкостью существенно отличаются от условий вращения с однородной жидкостью. Для устойчивости стационарных вращений вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс твёрдого тела и геометрическим центром эллипсоидальной полости, требование неравенства между моментами инерции $(A, B > C)$ и $(A, B < C)$ недостаточно для твёрдого тела с неоднородной жидкостью т.к. требуется выполнение неравенств (2.40), (2.41) или (2.50), (2.51).

В случае тонкой оболочки отметим два случая устойчивости вращения, которые не являются очевидными. Первый случай – возможность устойчивого вращения сжатого сфероида, полностью заполненного статически неустойчивой стратифицированной жидкостью (рис. 2.2. а); второй – возможность устойчивого вращения вытянутого сфероида, полностью заполненного статически устойчивой стратифицированной жидкостью (рис. 2.2. в).

ГЛАВА 3. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ

В главе 3 рассматриваются задачи о свободных колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости, заполняющей цилиндрический сосуд. Исследуются свободные колебания стратифицированной жидкости, полностью или частично заполняющей цилиндрический сосуд при малой угловой скорости вращения. Численные результаты собственных частот свободных колебаний вращающейся стратифицированной жидкости при постоянной частоте плавучести представлены в виде таблиц и графиков с граничными условиями для внутренних и поверхностных волн.

Многие области науки и техники неразрывно связаны с вращением различных типов жидкостей. В науке вращающиеся жидкости можно наблюдать на Земле, а в технике – в роторе турбины или в топливном баке космического аппарата [35, 113, 138]. Важное применение вращающиеся жидкости можно наблюдать в многочисленных транспортных средствах, содержащих жидкости, часто в качестве топлива. В некоторых случаях масса транспортного средства достаточно велика по отношению к количеству топлива, поэтому движение транспортного средства может быть определено независимо от жидкости. В других случаях, например, в топливозаправщиках или космических кораблях, масса жидкости может превышать массу конструкции транспортного средства. Например, во время запуска космический аппарат может состоять из более чем 90 % жидкого топлива по массе, а спутники обычно имеют более 50 % жидкости по массе при выводе на орбиту. По мере дальнейшего освоения космоса способность предсказывать вращательные движения аппаратов, содержащих большое количество жидкости, будет иметь большое значение для успеха [138].

Задачи о свободных колебаниях стратифицированной жидкости в неограниченной области (внутренние волны в океанах) имеют давнюю историю [56, 74, 137]. В настоящее время эти задачи достаточно изучены в связи с решением ряда инженерных и геофизических проблем. Изучение движения вращающейся жидкости в ограниченном объёме приводит к весьма своеобразным краевым и

начальным задачам [20, 89, 117-118]. Возникают задачи, характерные для колебаний как однородных жидкостей в ограниченной области (поверхностные волны при наличии свободной поверхности), так и неоднородных (слоистых) жидкостей, заполняющих неограниченную область (внутренние волны). В работах [26-27, 80, 102-103, 105, 124, 126] рассмотрены собственные колебания вращающейся жидкости в полости твёрдого тела и представлены решения задач о собственных колебаниях жидкости.

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим цилиндрический сосуд, вращающийся с равномерной скоростью и заполненный стратифицированной жидкостью, находящейся в поле действия массовых сил. Стратифицированные жидкости характеризуются неоднородным изменением температуры и плотности в процессе эксплуатации и хранения. Наиболее значительное расслоение стратифицированной жидкости происходит в направлении действия внешнего поля массовых сил. Для исследования движения подобной механической системы использована модель стратифицированной несжимаемой идеальной жидкости. Введем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$, которая равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ вместе с жидкостью вокруг оси Ox_3 (рис. 3.1). Пусть в невозмущенном движении вектор градиента плотности и вектор угловой скорости вращения являются коллинеарными векторами в невозмущенном движении. Действие однородного силового поля описывается силовой функцией $U_0 = gx_3$. Ограничимся случаем, когда угловая скорость вращения ω_0 мала, и выполняется условие $(\omega_0^2 \ell / g \ll 1)$, здесь ℓ – характерный размер объёма, g – постоянное ускорение силы тяжести. В невозмущенном состоянии изгиб поверхностей с одинаковой плотностью мал, и им можно пренебречь.

Предполагается, что в отсутствие внешних возмущений жидкость движется в состоянии невозмущенного равномерного вращения с постоянной угловой скоростью и удовлетворяет условиям механического равновесия:

$$\vec{u}_0 = 0; \quad \nabla \rho_0 \times \nabla \Pi_0 = 0,$$

где $\rho_0(x_3) = \rho_0^*(1 - \beta x_3)$, $\Pi_0 = -U_0 = -gx_3$, \vec{u}_0 , ρ_0 – вектор относительной скорости и поле плотности вращающейся жидкости, Π_0 – потенциальная энергия.

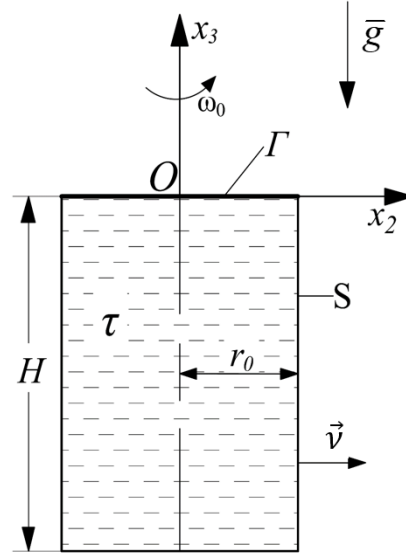


Рис. 3.1. Цилиндрический сосуд, заполненный стратифицированной жидкостью.

Пусть в возмущенном движении жидкость приобретает поле скоростей, давлений и плотностей – \vec{u} , p , ρ . Считая \vec{u} , p , ρ – величинами первого порядка малости. Здесь \vec{u} обозначает скорость жидкости относительно оси, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$; полное ускорение состоит из относительного ускорения $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ (конвективным членом $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ пренебрегаем в соответствии с гипотезой малых относительных движений), ускорения Кориолиса $(2\vec{\omega}_0 \times \vec{u})$ и центростремительного ускорения $\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r})$. Уравнения возмущенного движения вращающейся неоднородной жидкости и граничные условия в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют вид [27, 80, 113, 124]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} - \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p \quad \text{в } \tau, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad (3.2)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau; \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{на } S, \quad (3.3)$$

здесь ρ_0^* – постоянное среднее значение плотности жидкости, τ – область полости, занятая жидкостью, S – смачиваемая поверхность полости, Γ – свободная поверхность жидкости (при частичном заполнении), $\vec{\nu}$ – орт внешней нормали к смачиваемой поверхности и свободной поверхности жидкости (рис. 3.1).

При исследовании вихревого движения во вращающейся однородной жидкости обычно используется либо метод функций состояния, предложенный С.Л. Соболевым, либо метод обобщенных потенциалов, разработанный Ф.Л. Черноушко. Однако применение метода С.Л. Соболева к неоднородной жидкости представляет собой сложную задачу. В этом случае более подходящим является метод обобщенных потенциалов, который накладывает ограничения на изменение переменных во времени. Метод Ф.Л. Черноушко позволяет полностью отделить гидродинамическую задачу от общей задачи механики системы тело-жидкость [98]. Здесь этот метод будет распространен на случай стратифицированной жидкости.

Решение задачи о собственных колебаниях вращающейся жидкости в полости представим в виде гармонических колебаний. Пусть все переменные по времени изменяются пропорционально $e^{\lambda t}$ [16, 27, 80],

$$\vec{u} = \vec{v} e^{\lambda t}, \quad p = \varphi e^{\lambda t}, \quad \rho = \psi e^{\lambda t},$$

где $\lambda = i\omega$ – комплексное число, ω – частота колебаний жидкости. Вышеупомянутые уравнения (3.1) – (3.3) в дальнейшем будут выражены в следующей форме:

$$\lambda \vec{v} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v} + \frac{N^2}{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla \varphi, \quad (3.4)$$

$$\psi = \frac{1}{\lambda} \rho_0^* \beta \vec{v} \cdot \vec{e}_3, \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad \vec{v} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{на } S, \quad (3.6)$$

здесь $N^2 = \frac{1}{\rho_0^*} \nabla \rho_0 \cdot \nabla \Pi_0 = -\frac{g}{\rho_0^*} \frac{d\rho_0}{dx_3} = g\beta$ – квадрат частоты плавучести или квадрат частоты Брента-Вяйсяля при вертикальном распределении плотности [2-3, 47, 50-52, 74, 89, 95-96].

Переписав уравнение движения жидкости (3.4) в виде проекции, получим следующее выражение:

$$\lambda v_1 - 2\omega_0 v_2 = -\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \lambda v_2 - 2\omega_0 v_1 = -\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \lambda v_3 = -\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{N^2}{\lambda}, \quad (3.7)$$

и из этого выражения (3.7) можно вывести компоненты скорости частиц жидкости в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\chi}{2\omega_0(\chi^2 - 1)} \left(-i \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right), \\ v_2 &= \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\chi}{2\omega_0(\chi^2 - 1)} \left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right), \\ v_3 &= \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\chi}{2\omega_0(\chi^2 - 1)} (\sigma^2 - 1) i \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Скорость частиц жидкости можно записать в векторной форме [36],

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\chi}{2\omega_0(\chi^2 - 1)} \left[\chi \vec{e}_3 \times \nabla \varphi - i \nabla \varphi + i \sigma^2 \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \cdot \nabla \varphi) \right], \quad (3.9)$$

где $\chi = \frac{2\omega_0}{\omega}$, $\sigma^2 = \frac{N^2 - 4\omega_0^2}{N^2 - \omega^2} = \frac{\chi^2(1 - Fr^2)}{1 - Fr^2\chi^2}$, $Fr^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2}$, \vec{e}_3 – орт оси вращения x_3 .

Краевая задача, отвечающая первое уравнение (3.6), переписется в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \quad (3.10)$$

и второе уравнение (3.6) в виде

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} v_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} v_2 \right) - i \chi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} v_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} v_2 \right) + (1 - \sigma^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} v_3 = 0. \quad (3.11)$$

3.2. Колебания стратифицированной жидкости, полностью заполняющей цилиндрическую полость при малой скорости вращения

Рассмотрим случай полного заполнения полости жидкостью. В этом случае смоченная поверхность S совпадает с поверхностью полости, и свободная поверхность жидкости отсутствует. Определим решение задачи о собственных колебаниях жидкости в цилиндрических координатах (r, η, x) :

$$x_1 = r \cos \eta, \quad x_2 = r \sin \eta, \quad x_3 = x,$$

при положении начало координат на поверхности жидкости Γ , краевая задача (3.11) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (3.12)$$

а граничное условие, отвечающее уравнение (3.11) при полном заполнении полости будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad \text{при } x = 0, \quad x = -H. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если жидкость однородная несжимаемая, то есть, когда $N^2 = 0$, $Fr^2 = 0$, тогда уравнение (3.12) будет [113]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + (1 - \chi^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (3.14)$$

Таким образом, задача исследования свободных колебаний стратифицированной жидкости во вращающейся полости сводится к решению линейной однородной краевой задачи на собственные значения (3.12) для функции φ . Частоты колебаний жидкости выражаются собственные числа ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) по формуле $q_n = \frac{\omega_n}{2\omega_0}$, а по известным собственным функциям φ_n профиль скоростей определяется с помощью формул (3.9). Решения уравнения (3.12) должны удовлетворять граничным условиям (3.13) на стенке и дне сосуда, а также на

верхней поверхности жидкости. Прежде чем дать эти условия, необходимо обсудить форму дифференциального уравнения.

В случае однородной несжимаемой жидкости уравнение (3.14) является эллиптическим при $\omega > 2\omega_0$ и гиперболическим при $\omega < 2\omega_0$. Напротив, гиперболические дифференциальные уравнения чаще всего встречаются в сжимаемых потоках, в которых могут наблюдаться ударные волны и другие разрывы. Более того, нельзя гарантировать, что решения эллиптического дифференциального уравнения могут удовлетворять граничным условиям гиперболического дифференциального уравнения, независимо от начальных условий, из которых может возникнуть решение [113].

Когда жидкость неоднородная, уравнение (3.12) не может быть непосредственно определено как эллиптическое или гиперболическое, как это имеет место для однородной несжимаемой жидкости, в силу формулы σ^2 ,

$$\sigma^2 = \frac{N^2 - 4\omega_0^2}{N^2 - \omega^2} \text{ или } \sigma^2 = \frac{4\omega_0^2 - N^2}{\omega^2 - N^2}.$$

3.2.1. Внутренние волны

Полагая функцию $\varphi(r, \eta, x) = R(r)H(\eta)Z(x)$, и применяя метод разделения переменных [48, 68-69], получаем следующие краевые задачи [27]:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + m^2 H = 0, \quad H(\eta) = H(\eta + 2\pi), \quad (3.16)$$

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{k^2}{(\sigma^2 - 1)} Z = 0, \quad (3.17)$$

с граничными условиями,

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} + \frac{m\chi}{r} R = 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{dZ}{dx} = 0, \quad \text{при } x = 0, \quad x = -H. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь функции $R(r)$, $H(\eta)$, $Z(x)$ являются соответственно решениями дифференциальных уравнений (3.15) – (3.17), и k , m – постоянные разделения уравнения (3.12).

Общие решения уравнения (3.15) – (3.17) представляются функциями

$$R(r) = C_1 J_m(\xi \bar{r}) + C_2 Y_m(\xi \bar{r}), \quad H(r) = C_3 e^{im\eta}, \quad Z(x) = C_4 \cos(k_l x), \quad (3.19)$$

где

$$k^2 = k_l^2 (\sigma^2 - 1), \quad k_l = \frac{l\pi}{H}, \quad \xi = k r_0, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0},$$

$$l = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) – произвольные постоянные, $J_m(\xi \bar{r})$ и $Y_m(\xi \bar{r})$ – функции Бесселя 1-го и 2-го родов m -го порядка.

В силу периодичности функции $H(r)$ с периодом 2π постоянная m может быть только целым числом ($m = 1, 2, 3, \dots$). Определим постоянные разделения и постоянные интегрирования в решениях (3.19). Из физических соображений следует, что первая функция $R(r)$ из (3.19) должна быть регулярной в произвольной точке объёма жидкости, в том числе и при $r = 0$. Поэтому для исключения особенности, вносимой функцией Бесселя 2-го рода в нулевой точке следует положить $C_2 = 0$.

Каждое главное колебание характеризуется собственной частотой ω и собственной функцией φ колебаний жидкости. В рассматриваемом частном случае выражение функции φ , связанной с краевой задачей (3.12) и граничным условием (3.13), имеет следующий вид:

$$\varphi_{lmp} = \frac{J_m(\xi_{lmp} \bar{r})}{J_m(\xi_{lmp})} e^{im\eta} \cos k_l x. \quad (3.20)$$

Из (3.20) следует, что внутренние волны обладают тремя множествами узловых линий: l , m и p . Граничные условия на баковых поверхностях цилиндрической полсти приводят к нахождению корней уравнения относительно величины ξ ,

$$Y_2(\xi_{lmp}) = \xi_{lmp} J_m'(\xi_{lmp}) + m \chi_{lmp} J_m(\xi_{lmp}) = 0, \quad \text{при } r = r_0, \quad (3.21)$$

где ξ_{lmp} – p -ый корень уравнения (3.21), $J'_m(\xi_{lmp}) = \frac{dJ_m(\xi_{lmp})}{d(\xi_{lmp})}$.

Безразмерные собственные частоты (собственные числа) краевой задачи находится по формуле

$$q_{lmp} = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 + \xi_{lmp}^2 Fr^2}{\bar{k}_l^2 + \xi_{lmp}^2}}, \quad (3.22)$$

где $\bar{k}_l = k_l r_0$.

В случае вращения с малой скоростью можно показать, что параметр Fr^2 удовлетворяет следующим неравенствам: $Fr^2 < 1$, $Fr^2 > 1$. Очевидно, что при $Fr \rightarrow \infty$, характеристическое уравнение (2.21) становится независимым от числа χ и принимает следующий вид.

$$\frac{dJ_m(\xi_{lmp})}{d(\xi_{lmp})} = 0. \quad (3.23)$$

Корни уравнения (3.23) ξ_{lmp} являются корнями в случае задачи для невращающейся несжимаемой стратифицированной ($Fr \neq 0$) и однородной ($Fr = 0$) жидкости, как описано в [69, 82]. В случае однородной вращающейся жидкости уравнение (3.21) совпадает с трансцендентным уравнением, используемым для определения ξ_{lmp} и q_{lmp} . Это происходит в предположении, что $Fr^2 = 0$. Это уравнение было предметом обширного исследования в литературе, с заметным вкладом в [27, 80, 124].

Результаты показывают, что во вращающейся стратифицированной жидкости наблюдаются два различных типа внутренних бегущих волн. Прямые волны соответствуют значениям $m > 0, (q_{lmp}^+, \xi_{lmp}^+)$ и движутся в направлении вращения жидкости, а обратные волны соответствуют числам $m < 0, (q_{lmp}^-, \xi_{lmp}^-)$. Значение $m = 0$ соответствует осесимметричным стоячим волнам ($m = 0, q_{lmp}^0, \xi_{lmp}^0$), так как в этом случае функции φ_{lmp} не зависят от аргумента η . В случае, когда $m \neq 0$, во вращающейся жидкости происходит расщепление стоячей волны, в результате чего образуются волны, движущиеся в противоположных направлениях с разными

скоростями. Расщепление стоячей волны происходит под действием сил инерции, обусловленных ускорением Кориолиса ($2\vec{\omega}_0 \times \vec{u}$). Уравнение (3.21) было оценено с помощью вычислительной программы Maple при различных числах Fr^2 и высоте жидкости $H = 2$, когда $m = -1, 0, 1$; $l = 1$ (рис. 3.2).

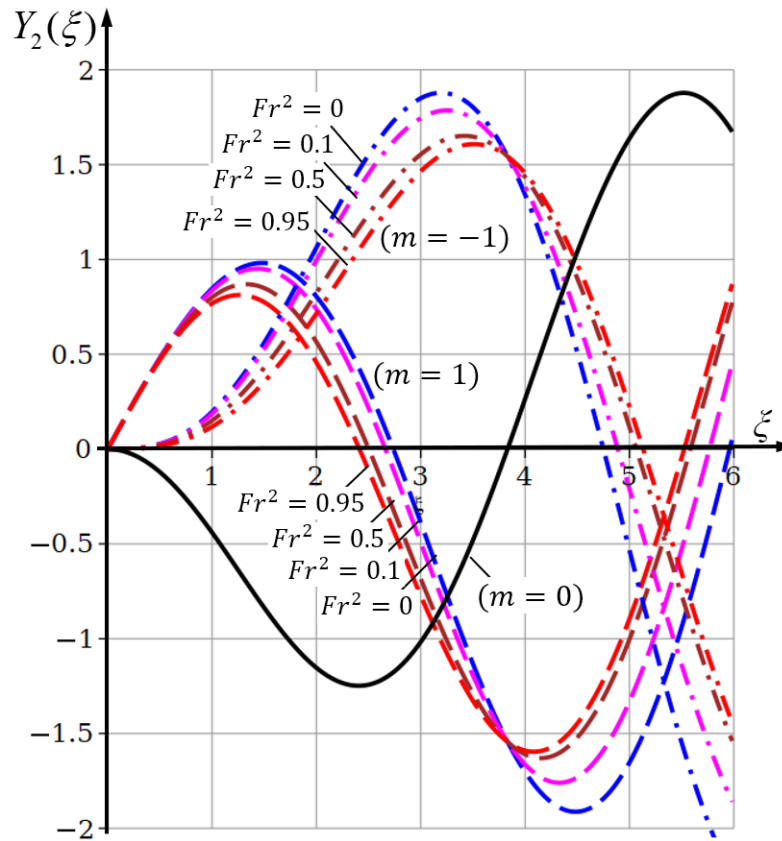


Рис. 3.2. Графическое решение уравнений (3.21) при $m = -1, 0, 1$; $l = 1$, $H = 2$.

Пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$), штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

График на рис. 3.2 показывает, что колебания вращающейся стратифицированной жидкости проявляются как прямые и обратные бегущие волны с неодинаковыми частотами распространения. Графическое решение показывает, что значения корней ξ_{lmp} меняются при различных числах Fr^2 . Значения корней ξ_{lmp} оказывают влияние как на собственные частоты q_{lmp} , так и на частоты колебаний вращающейся стратифицированной жидкости. В таблице 3.1 приведены значения корней ξ_{lmp} для случаев $l = 1, 2, 3$; $m = -1, 0, 1$; $p = 1, 2, 3$; при $H = 2$.

Таблица 3.1. Значения корней ξ_{lmp} при $l = 1, 2, 3$; $m = -1, 0, 1$; $p = 1, 2, 3$; $H = 2$, в

случае полного заполнения полости.

l	m	p	ξ_{lmp} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
			$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
1	-1	1	4.750748	4.962565	5.042223	5.086236	5.114992	5.131015
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.736958	2.606783	2.530573	2.477423	2.437073	2.412287
	-1	2	7.970964	8.288839	8.353174	8.384455	8.403789	8.414266
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.960211	5.687166	5.608531	5.566624	5.539498	5.524414
	-1	3	11.14337	11.52088	11.57177	11.59548	11.60990	11.61764
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		9.134066	8.778506	8.71965	8.685617	8.666826	8.656630
2	-1	1	4.970362	5.032863	5.072093	5.099407	5.119747	5.131982
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.513619	2.484632	2.460303	2.439386	2.421078	2.408719
	-1	2	8.209528	8.319973	8.363746	8.388656	8.405219	8.414549
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.703009	5.625496	5.583297	5.555565	5.535496	5.523596
	-1	3	11.38901	11.53606	11.57644	11.59727	11.61048	11.61776
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		8.872316	8.750329	8.706355	8.681766	8.665506	8.656367
3	-1	1	5.046107	5.073030	5.093831	5.110469	5.124142	5.132927
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.456291	2.444321	2.433354	2.423177	2.413696	2.406988
	-1	2	8.296974	8.347038	8.375144	8.393667	8.407028	8.414917
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.617873	5.585868	5.562976	5.545492	5.531549	5.522756
	-1	3	11.48102	11.55264	11.58243	11.59972	11.61134	11.61793
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		8.779092	8.724472	8.695649	8.677075	8.663813	8.656022

Продолжение таблицы 3.1.

l	m	p	ξ_{lmp} при $Fr^2 > 1$					
			$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 2$	$Fr^2 = 4$	$Fr^2 = 6$	$Fr^2 = 8$	$Fr^2 = 10$
1	-1	1	5.143967	5.189899	5.230381	5.248703	5.259707	5.267244
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.390902	2.302549	2.207828	2.157081	2.123947	2.09998
	-1	2	8.422601	8.451387	8.476028	8.487037	8.493618	8.498116
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.512223	5.468864	5.430294	5.412673	5.402033	5.394718
	-1	3	11.62377	11.64479	11.66263	11.67057	11.67530	11.67854
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		8.648506	8.620366	8.596152	8.585292	8.578786	8.574333
2	-1	1	5.142351	5.182531	5.222031	5.240977	5.252619	5.260692
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.397344	2.343641	2.270512	2.225373	2.193462	2.169169
	-1	2	8.422141	8.449418	8.473884	8.485076	8.491829	8.496467
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.513593	5.475257	5.437767	5.419707	5.408559	5.400798
	-1	3	11.62359	11.64400	11.66178	11.66979	11.67460	11.67789
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		8.648934	8.622226	8.598207	8.587183	8.580521	8.575937
3	-1	1	5.140709	5.173888	5.211134	5.230489	5.242799	5.251502
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.400596	2.367502	2.314687	2.277671	2.249517	2.227007
	-1	2	8.421527	8.446607	8.470668	8.482094	8.489087	8.493926
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.515052	5.482906	5.447544	5.429236	5.417562	5.409287
	-1	3	11.62331	11.64280	11.66045	11.66857	11.67348	11.67686
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		8.649512	8.624891	8.601283	8.590062	8.583179	8.578407

В таблице 3.2 приведены собственные частоты q_{lmp} при $l=1,2,3$; $m=-1,0,1$; $p=1,2,3$; $H=2$ и $Fr^2=0 \div 10$ для случая полного заполнения полости.

Таблица 3.2. Значения собственных частот q_{lmp} при $l=1,2,3$; $m=-1,0,1$; $p=1,2,3$; $H=2$, в случае полного заполнения полости.

l	m	p	q_{lmp} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
			$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
1	-1	1	0.313926	0.522353	0.673111	0.796761	0.904012	0.976874
	0		0.379311	0.561339	0.697371	0.810895	0.910371	0.978363
	1		0.497767	0.642732	0.752916	0.845397	0.926661	0.982287
	-1	2	0.193346	0.477216	0.648454	0.783303	0.898194	0.975543
	0		0.218491	0.488048	0.654708	0.786826	0.899749	0.975903
	1		0.254845	0.506659	0.666063	0.793412	0.902710	0.976596
	-1	3	0.139583	0.463250	0.640981	0.779237	0.896435	0.975142
	0		0.152593	0.467577	0.643407	0.780587	0.897028	0.975276
	1		0.169483	0.474151	0.647193	0.782731	0.897976	0.975496
2	-1	1	0.534286	0.651392	0.752570	0.842644	0.924503	0.981646
	0		0.634029	0.722215	0.800747	0.872237	0.938296	0.984937
	1		0.780826	0.831961	0.878581	0.921709	0.962018	0.990701
	-1	2	0.357400	0.547567	0.688612	0.805730	0.908029	0.977812
	0		0.408695	0.577604	0.707262	0.816586	0.912911	0.978955
	1		0.482501	0.624646	0.737755	0.834816	0.921262	0.980929
	-1	3	0.265913	0.505206	0.664196	0.792051	0.902022	0.976425
	0		0.295053	0.519274	0.672483	0.796756	0.904106	0.976910
	1		0.333781	0.539765	0.684926	0.803936	0.907322	0.977660
3	-1	1	0.682526	0.755352	0.822615	0.885333	0.944268	0.986340
	0		0.775881	0.825586	0.872465	0.916949	0.959374	0.990000
	1		0.886765	0.911258	0.934716	0.957263	0.978996	0.994814
	-1	2	0.493866	0.627179	0.737751	0.834183	0.920769	0.980784
	0		0.557591	0.669870	0.765862	0.851095	0.928538	0.982622
	1		0.642662	0.729816	0.806642	0.876200	0.940271	0.985427
	-1	3	0.379710	0.560465	0.696572	0.810346	0.910102	0.978296
	0		0.420302	0.584228	0.711330	0.818938	0.913964	0.979200
	1		0.472947	0.616995	0.732262	0.831327	0.919598	0.980526

Продолжение таблицы 3.2.

l	m	p	q_{lmp} при $Fr^2 > 1$						
			$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 2$	$Fr^2 = 4$	$Fr^2 = 6$	$Fr^2 = 8$	$Fr^2 = 10$	
1	-1	1	1.044734	1.384226	1.936958	2.364104	2.725215	3.043839	
			0	1.041927	1.362396	1.889013	2.297959	2.644402	2.950442
			1	1.034336	1.297077	1.729678	2.065762	2.350535	2.602121
	0	2	-1	1.047205	1.402358	1.974940	2.415449	2.787203	3.114910
			0	1.046530	1.397234	1.963870	2.400272	2.768724	3.093599
			1	1.045222	1.387007	1.941226	2.368884	2.730252	3.049033
	1	3	-1	1.047953	1.407881	1.986592	2.431262	2.806339	3.136889
			0	1.047698	1.405957	1.982460	2.425609	2.799466	3.128967
			1	1.047286	1.402805	1.975617	2.416204	2.787997	3.115727
2	-1	1	1.035771	1.315781	1.789626	2.162943	2.481066	2.762988	
			0	1.029466	1.264122	1.671531	1.997505	2.277287	2.526271
			1	1.018235	1.165136	1.424549	1.634197	1.814957	1.976239
	0	2	-1	1.042969	1.370601	1.907219	2.323190	2.675308	2.986224
			0	1.040816	1.353871	1.870535	2.272628	2.613575	2.914912
			1	1.037059	1.323752	1.802567	2.177727	2.496810	2.779321
	1	3	-1	1.045558	1.390017	1.948593	2.379522	2.743600	3.064737
			0	1.044650	1.383092	1.933605	2.358965	2.718566	3.035867
			1	1.043237	1.372152	1.909625	2.325893	2.678163	2.989171
3	-1	1	1.026810	1.243615	1.628004	1.939029	2.207238	2.446536	
			0	1.019706	1.182374	1.481224	1.729174	1.945780	2.140578
			1	1.010249	1.096146	1.258221	1.395303	1.516276	1.625753
	0	2	-1	1.037379	1.327640	1.814103	2.195612	2.520134	2.807454
			0	1.033881	1.299651	1.751364	2.108426	2.413223	2.683622
			1	1.028494	1.255048	1.648012	1.962565	2.232697	2.473205
	1	3	-1	1.042058	1.363539	1.891776	2.301927	2.649363	2.956265
			0	1.040353	1.350313	1.862803	2.262018	2.600657	2.900019
			1	1.037840	1.330454	1.818627	2.200762	2.525609	2.813128

Как видно из таблицы 3.2, собственные частоты q_{lmp} зависят не только от значений корней ξ_{lmp} и \bar{k}_l , но и от числа Fr^2 . При $Fr^2 < 1$, величины собственных

частот q_{lmp} прямых волн неизменно больше, чем обратных ($q_{lmp}^+ > q_{lmp}^-$). Подробное сравнение значений q_{lmp} для трех типов волн при $Fr^2 < 1$ показывает, что $q_{lmp}^+ > q_{lmp}^0 > q_{lmp}^-$. При $Fr^2 > 1$, величины собственных частот q_{lmp} обратных волн всегда больше, чем прямых ($q_{lmp}^- > q_{lmp}^+$). При подробном сравнении значений q_{lmp} для трех типов волн при $Fr^2 > 1$ можно показать, что $q_{lmp}^- > q_{lmp}^0 > q_{lmp}^+$.

Кроме того, исследуем связь между собственными частотами q_{lmp} и изменением величины чисел Fr^2 , а также безразмерным параметром (относительной глубиной жидкости) $\bar{H} = H/r_0$. На рис. 3.3 показана зависимость собственных частот q_{lmp} от безразмерного параметра \bar{H} при различных числах Fr^2 , ($Fr^2 = 0 \div 10$), в случае полного заполнения полости.

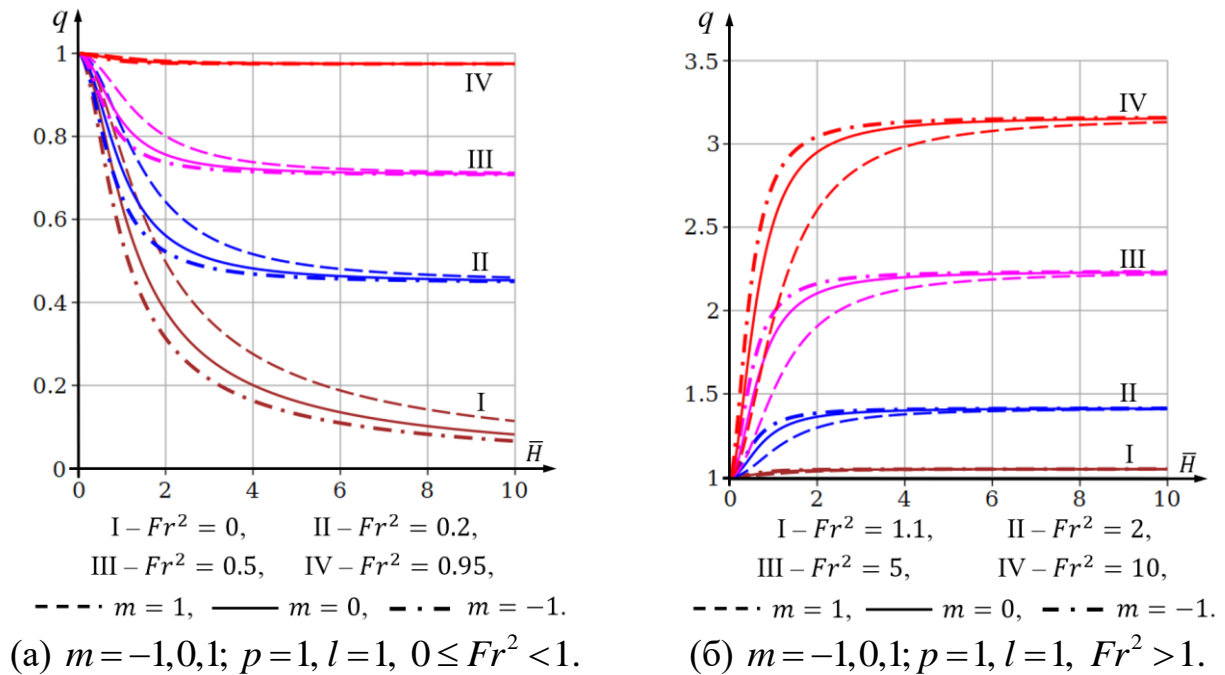


Рис. 3.3. Зависимость собственных частот $q_{lmp} = \omega_{lmp}/\omega_0$ от параметра \bar{H} .

Пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$), штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

Как видно из таблицы 3.2 и рис. 3.3, наличие стратификации приводит к увеличению частот свободных колебаний жидкости для прямой, обратной и

стоячей волн. С увеличением значения Fr^2 возрастает значение собственных частот q_{lmp} . Кроме того, на рис. 3.3 показано, что собственные частоты q_{lmp} уменьшаются с увеличением параметра \bar{H} . При достаточно большом значении параметра \bar{H} значения q_{lmp} для всех трех типов волн ($m = -1, 0, 1$) стремятся к постоянному значению.

3.3. Колебания стратифицированной жидкости, частично заполняющей цилиндрическую полость при малой скорости вращения

Перейдем к рассмотрению вращения стратифицированных жидкостей в частично заполненной полости. В этом случае граничные условия (3.13) могут быть выражены в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad \text{при } x = -H, \\ (N^2 - \omega^2)\varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad \text{при } x = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.3.1. Внутренние волны

Когда полость частично заполнена жидкостью, первое уравнение граничных условий (3.24) имеет решение,

$$\xi_{lmp} J_m'(\xi_{lmp}) + \frac{m}{q_{lmp}} J_m(\xi_{lmp}) = 0, \quad \text{при } r = r_0. \quad (3.25)$$

Полагая $Z(x_3) = \cos k_l(x_3 + H)$, и из второго и третьего уравнений условия (3.24), получается следующее выражение,

$$N^2 - \omega^2 = g k_l \tan k_l H, \quad (3.26)$$

или преобразуя к безразмерному виду,

$$f(y) = \tan(y) = \frac{Fr^2 - q^2}{y} \bar{H} \varepsilon^2, \quad (3.27)$$

здесь

$$y = \bar{k}_l \bar{H}, \quad \varepsilon^2 = \frac{4\omega_0^2 r_0}{g} = \frac{\bar{\beta}}{Fr^2}, \quad \bar{\beta} = \beta r_0. \quad (3.28)$$

Из уравнений (3.25), (3.27) и (3.28) определяются собственные частоты q_{lmp} при $r_0 = 1$, $H = 2$, полагая, что в рассматриваемом случае ($\omega_0^2 \ell / g \ll 1$) и $\varepsilon \approx 0.2$. Для того чтобы определить значения \bar{k}_l из уравнения (3.27) при фиксированных значениях (l, m, p, Fr^2) в случае частичного заполнения полости, необходимо поступить следующим образом. В первом приближении сначала задается значение $k_l = \frac{l\pi}{H}$, после чего корни ξ_{lmp} и q_{lmp} определяются граничным условием (3.24). Затем из уравнения (3.27) выводится новое значение \bar{k}_l (рис. 3.4). Далее этот циклический процесс повторяется до момента, когда значения \bar{k}_l остаются постоянными.

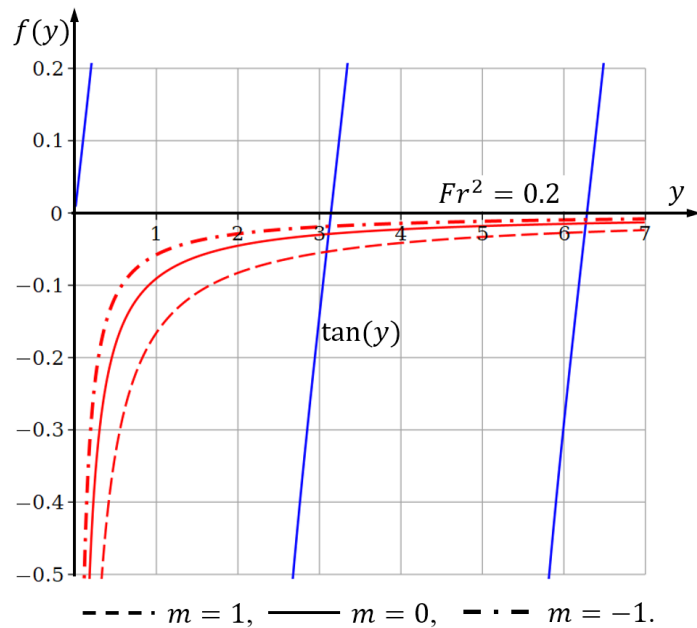


Рис. 3.4. Определение значения y при $m = -1, 0, 1$; $p = 1$; $l = 1$; $Fr^2 = 0.2$ в случае частичного заполнения полости для внутренних волн.

Пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$), штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

Таблица 3.3. Значения корней ξ_{lmp} внутренних волн при $l = 1, 2, 3$; $m = -1, 0, 1$; $p = 1, 2, 3$; $H = 2$, в случае частичного заполнения полости.

l	m	p	ξ_{lmp} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
			$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
1	-1	1	4.747605	4.962078	5.042097	5.086202	5.114984	5.131014
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.737879	2.607128	2.531972	2.477912	2.437172	2.412289
	-1	2	7.969689	8.288776	8.353161	8.384451	8.403789	8.414267
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.962702	5.687469	5.608613	5.566647	5.539502	5.524416
	-1	3	11.14270	11.52087	11.57177	11.59548	11.60990	11.61764
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		9.135158	8.778556	8.715977	8.685619	8.666827	8.656630
2	-1	1	4.969006	5.032374	5.071913	5.09934	5.119737	5.131981
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.516058	2.485946	2.460934	2.439631	2.421131	2.408722
	-1	2	8.208851	8.319849	8.363709	8.388647	8.405219	8.414549
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.704259	5.625890	5.583439	5.555609	5.535515	5.523597
	-1	3	11.38862	11.53602	11.57643	11.59726	11.61049	11.61776
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		8.872948	8.750436	8.706386	8.681775	8.665509	8.656367
3	-1	1	5.045498	5.072739	5.09370	5.110426	5.124134	5.132927
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.456918	2.444737	2.433567	2.423265	2.413716	2.406990
	-1	2	8.296593	8.346918	8.375103	8.393654	8.407026	8.414917
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.618469	5.586133	5.563087	5.545532	5.531558	5.522756
	-1	3	11.48078	11.55260	11.58241	11.59971	11.61134	11.61793
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		8.779462	8.724582	8.695687	8.677086	8.663815	8.656022

Продолжение таблицы 3.3.

l	m	p	ξ_{imp} при $Fr^2 > 1$					
			$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 2$	$Fr^2 = 4$	$Fr^2 = 6$	$Fr^2 = 8$	$Fr^2 = 10$
1	-1	1	5.143966	5.189860	5.230253	5.248511	5.259458	5.266948
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.390921	2.304732	2.213187	2.166423	2.136559	2.115138
	-1	2	8.422601	8.451387	8.476017	8.487018	8.493593	8.498087
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.512223	5.468894	5.430400	5.412839	5.402251	5.394981
	-1	3	11.62377	11.64479	11.66263	11.67056	11.67530	11.67854
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		8.648506	8.620369	8.596163	8.585309	8.578808	8.574359
2	-1	1	5.142349	5.182437	5.221703	5.240465	5.251959	5.259910
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.397356	2.344453	2.274647	2.232952	2.204036	2.182206
	-1	2	8.422141	8.449406	8.473844	8.485014	8.491749	8.496372
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.513595	5.475332	5.438043	5.420151	5.409139	5.401497
	-1	3	11.62359	11.64402	11.66177	11.66978	11.67458	11.67787
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		8.648934	8.622237	8.598244	8.587243	8.580597	8.576028
3	-1	1	5.140708	5.173784	5.210722	5.229819	5.241919	5.250449
	0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
	1		2.400601	2.367872	2.316868	2.282028	2.255983	2.235376
	-1	2	8.421526	8.446587	8.470607	8.481987	8.488945	8.493758
	0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
	1		5.515054	5.482992	5.447898	5.429821	5.418342	5.410227
	-1	3	11.62331	11.64279	11.66043	11.66855	11.67345	11.67682
	0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
	1		8.649512	8.624908	8.601348	8.590164	8.583313	8.578568

Таблица 3.4. Значения собственных частот q_{lmp} внутренних волн при $l = 1, 2, 3$;

$m = -1, 0, 1$; $p = 1, 2, 3$; $H = 2$, в случае частичного заполнения полости.

l	m	p	q_{lmp} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
			$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
1	-1	1	0.311838	0.521613	0.672805	0.796649	0.903988	0.976873
	0		0.375480	0.559692	0.696623	0.810610	0.910307	0.978359
	1		0.496878	0.642274	0.750625	0.844468	0.926445	0.982274
	-1	2	0.192813	0.477089	0.648403	0.783284	0.898189	0.975543
	0		0.217683	0.487817	0.654610	0.786790	0.899741	0.975903
	1		0.253479	0.506176	0.665848	0.793330	0.902692	0.976595
	-1	3	0.139377	0.463213	0.640966	0.779229	0.896433	0.975142
	0		0.152313	0.467517	0.643382	0.780575	0.897023	0.975276
	1		0.169075	0.474049	0.647163	0.782715	0.897972	0.975497
2	-1	1	0.532177	0.650289	0.752037	0.842433	0.924456	0.981644
	0		0.630908	0.720469	0.799864	0.871877	0.938212	0.984931
	1		0.776679	0.829529	0.877315	0.921181	0.961891	0.990690
	-1	2	0.356620	0.547246	0.688471	0.805677	0.908017	0.977811
	0		0.407535	0.577079	0.707021	0.816494	0.912889	0.978954
	1		0.480660	0.623733	0.737318	0.834642	0.921222	0.980927
	-1	3	0.265569	0.505089	0.664148	0.792033	0.902017	0.976424
	0		0.294579	0.519100	0.672409	0.796729	0.904103	0.976909
	1		0.333089	0.539486	0.684801	0.803888	0.907311	0.977659
3	-1	1	0.681031	0.754485	0.822168	0.885147	0.944225	0.986339
	0		0.774191	0.824572	0.871928	0.916722	0.959320	0.989996
	1		0.885358	0.910394	0.934246	0.957063	0.978950	0.994811
	-1	2	0.493064	0.626774	0.737560	0.834109	0.920751	0.980783
	0		0.556510	0.669310	0.765587	0.850985	0.928513	0.982620
	1		0.641215	0.728999	0.806226	0.876032	0.940231	0.985424
	-1	3	0.379295	0.560287	0.696493	0.810314	0.910095	0.978295
	0		0.419756	0.583976	0.711213	0.818896	0.913955	0.979200
	1		0.472191	0.616621	0.732085	0.831259	0.919582	0.980525

Продолжение таблицы 3.4.

l	m	p	q_{imp} при $Fr^2 > 1$					
			$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 2$	$Fr^2 = 4$	$Fr^2 = 6$	$Fr^2 = 8$	$Fr^2 = 10$
1	-1	1	1.044729	1.383850	1.60285	2.358902	2.716529	3.031180
	0		1.041913	1.361351	1.882360	2.283074	2.619609	2.914546
	1		1.034286	1.293058	1.701860	2.003224	2.248189	2.457883
	-1	2	1.047204	1.402296	1.974549	2.414567	2.785714	3.112719
	0		1.046529	1.397108	1.963068	2.398461	2.765664	3.089094
	1		1.045218	1.386695	1.939188	2.364233	2.722362	3.037420
	-1	3	1.047953	1.407863	1.986478	2.431003	2.805904	3.136244
	0		1.047698	1.405926	1.982266	2.425168	2.798719	3.127866
	1		1.047285	1.402747	1.975246	2.415359	2.786566	3.113608
2	-1	1	1.035760	1.314969	1.784414	2.151246	2.461503	2.734589
	0		1.029447	1.262590	1.661348	1.974508	2.239004	2.471160
	1		1.018205	1.162693	1.407907	1.596690	1.753642	1.889913
	-1	2	1.042967	1.370409	1.906001	2.320431	2.670648	2.979366
	0		1.040811	1.353524	1.868294	2.267532	2.604959	2.902252
	1		1.037050	1.323049	1.797914	2.167072	2.478786	2.752911
	-1	3	1.045557	1.390017	1.948194	2.378618	2.742071	3.062483
	0		1.044649	1.382991	1.932955	2.357486	2.716060	3.032173
	1		1.043235	1.371973	1.908464	2.323246	2.673667	2.982534
3	-1	1	1.026800	1.242803	1.622523	1.926524	2.186183	2.415852
	0		1.019694	1.181285	1.473576	1.711468	1.915875	2.097139
	1		1.010238	1.095133	1.250855	1.378128	1.487387	1.584116
	-1	2	1.037375	1.327350	1.812211	2.191298	2.512832	2.796718
	0		1.033875	1.299191	1.748316	2.101451	2.401400	2.666245
	1		1.028485	1.254307	1.642979	1.950943	2.212967	2.444280
	-1	3	1.042056	1.363427	1.891053	2.300279	2.646573	2.952148
	0		1.040351	1.350141	1.861688	2.259476	2.596347	2.893659
	1		1.037836	1.330179	1.816814	2.196604	2.518541	2.802705

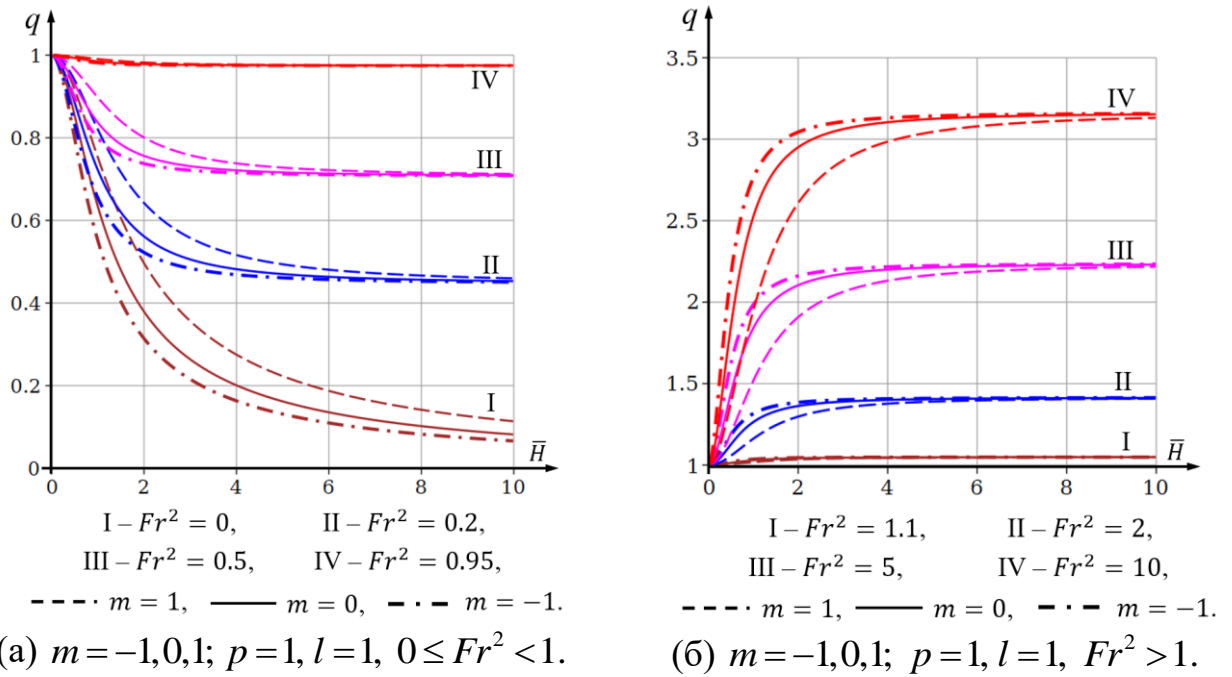


Рис. 3.5. Зависимость собственных частот $q_{lmp} = \omega_{lmp} / \omega_0$ от параметра \bar{H} .

Пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$), штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

В таблицах 3.3 и 3.4 приведены значения корней ξ_{lmp} и собственных частот q_{lmp} внутренних волн при $m = -1, 0, 1$; $p = 1$; $l = 1$; $H = 2$ и $Fr^2 = 0 \div 10$ в случае частичного заполнения полости. Рис. 3.5 показывает связь между собственными частотами q_{lmp} внутренних волн и параметром \bar{H} при различных числах Fr^2 , ($Fr^2 = 0 \div 10$), в случае частичного заполнения полости.

Как показано в таблице 3.4 и рис. 3.5, собственные частоты q_{lmp} внутренних волн при частичном заполнении полости практически идентичны тем, которые наблюдаются при полном заполнении полости жидкостью (таблица 3.2, рис. 3.3). Результаты показывают, что при $Fr^2 < 1$ собственные частоты прямых волн постоянно превышают собственные частоты обратных волн ($q_{lmp}^+ > q_{lmp}^-$), а при $Fr^2 > 1$ собственные частоты обратных волн постоянно превышают собственные частоты прямых волн ($q_{lmp}^- > q_{lmp}^+$).

3.3.2. Поверхностные волны

Для расчёта поверхностных волн первое уравнение граничных условий (3.24) может быть выражено в следующей форме:

$$\xi_{mp} J_m'(\xi_{mp}) + \frac{m}{q_{mp}} J_m(\xi_{mp}) = 0, \quad \text{при } r = r_0. \quad (3.29)$$

Из (3.29) видно, что поверхностные волны обладают только двумя множествами узловых линий: m и p .

Полагая $Z(x_3) = \cosh \mu(x_3 + H)$, и тогда из второго и третьего уравнений условия (3.24), получается следующее граничное условие,

$$N^2 - \omega^2 = -g \mu \tanh \mu H, \quad (3.30)$$

и если преобразовать к безразмерному виду,

$$f(z) = \tanh(z) = \frac{z(1 - Fr^2)}{z^2 - \xi^2 \bar{H}^2} \bar{H} \varepsilon^2. \quad (3.31)$$

Формула безразмерной собственной частоты $q_{mp} = \frac{\omega_{mp}}{2\omega_0}$ поверхностных волн

при фиксированных значениях m, p и Fr^2 :

$$q_{mp} = \sqrt{\frac{\bar{\mu}^2 - \xi_{mp}^2 Fr^2}{\bar{\mu}^2 - \xi_{mp}^2}}, \quad (3.32)$$

здесь

$$z = \bar{\mu} \bar{H}, \quad \bar{\mu} = \mu r_0.$$

Из уравнений (3.29), (3.31) и (3.32) определяются собственные частоты q_{mp} поверхностных волн при $r_0 = 1, H = 2$ в предположении $\varepsilon \approx 0.2$ в данном условии ($\omega_0^2 \ell / g \ll 1$). Для того чтобы определить значения $\bar{\mu}$ через z , необходимо сначала

рассмотреть уравнение (3.31) при фиксированных значениях (m, p, Fr^2) в случае частичного заполнения полости. В первом приближении будем считать, что

$\frac{1}{q_{mp}} = \frac{2\omega_0}{\omega_{mp}}$ очень мало, поэтому им можно пренебречь. В дальнейшем, применяя

граничное условие (3.29), получим корни $\xi_{11} = 1.841183$ для антисимметричных

($m=1, p=1$) колебаний жидкости и $\xi_{01} = 3.831706$ для стоячих волн ($m=0, p=1$). Затем из графического решения (3.31) выводится новое значение $\bar{\mu}$ (рис. 3.6). Этот циклический процесс повторяется до момента, когда значения $\bar{\mu}$ остаются постоянными.

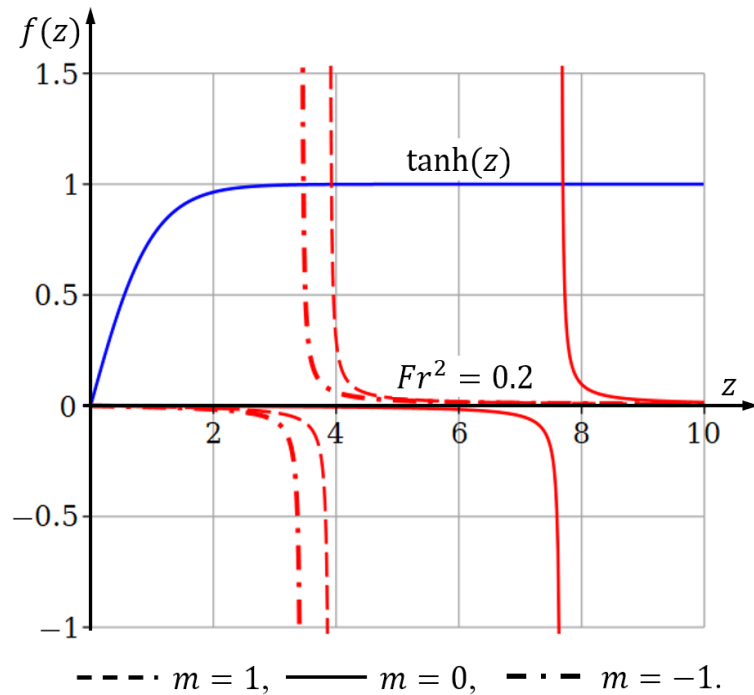


Рис. 3.6. Определение значения z при $m = -1, 0, 1$; $p = 1$; $Fr^2 = 0.2$ в случае частичного заполнения полости для поверхностных волн.

Пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$), штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

В таблицах 3.5 и 3.6 приведены значения корней ξ_{mp} и собственных частот q_{mp} поверхностных волн при различных числах Fr^2 , ($Fr^2 = 0 \div 10$), в случае частичного заполнения полости.

Таблица 3.5. Значения корней ξ_{mp} поверхностных волн при $m = -1, 0, 1$; $p = 1, 2, 3$;

$H = 2$, в случае частичного заполнения полости.

m	p	ξ_{mp} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
-1	1	1.716834	1.716975	1.717227	1.717134	1.717645	1.717687
0		3.831707	3.831707	3.831707	3.831707	3.831707	3.831707
1		1.945436	1.945332	1.945282	1.945033	1.944984	1.944953
-1	2	5.314586	5.314612	5.314615	5.314618	5.314719	5.314624
0		7.015587	7.015587	7.015587	7.015587	7.015587	7.015587
1		5.348188	5.348185	5.348162	5.348127	5.348055	5.348047
-1	3	8.528184	8.528185	8.528186	8.528187	8.528188	8.528189
0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
1		8.544324	8.544323	8.544322	8.544322	8.544321	8.544321

Продолжение таблицы 3.5.

m	p	ξ_{mp} при $Fr^2 > 1$					
		$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 2$	$Fr^2 = 4$	$Fr^2 = 6$	$Fr^2 = 8$	$Fr^2 = 10$
-1	1	1.717755	1.718435	1.719858	1.721328	1.722809	1.724223
0		3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706	3.831706
1		1.944952	1.944591	1.943562	1.942581	1.941665	1.940736
-1	2	5.314616	5.314650	5.314709	5.314771	5.314832	5.314894
0		7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586	7.015586
1		5.348159	5.348148	5.348069	5.348008	5.347951	5.347886
-1	3	8.528298	8.528212	8.528225	8.528245	8.528263	8.528281
0		10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346	10.17346
1		8.544419	8.544405	8.544389	8.544372	8.544354	8.544336

Таблица 3.6. Значения собственных частот q_{mp} поверхностных волн при $m = -1, 0, 1$; $p = 1, 2, 3$; $H = 2$, в случае частичного заполнения полости.

m	p	q_{mp} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
-1	1	6.583466	6.591539	6.598686	6.607403	6.617740	6.624765
0		9.813589	9.817927	9.823059	9.827804	9.830965	9.840504
1		7.007257	7.015216	7.021773	7.034027	7.034961	7.050588
-1	2	11.54829	11.55454	11.55780	11.56358	11.56941	11.58638
0		13.26418	13.26622	13.27115	13.27496	13.28255	13.29398
1		11.58521	11.58915	11.59395	11.60077	11.60268	11.64208
-1	3	14.61919	14.62161	14.62396	14.63233	14.63580	14.65731
0		15.96263	15.96707	15.96992	15.97415	15.98392	16.00157
1		14.63335	14.63712	14.63987	14.64377	14.65017	14.65195

Продолжение таблицы 3.6.

m	p	q_{mp} при $Fr^2 > 1$					
		$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 2$	$Fr^2 = 4$	$Fr^2 = 6$	$Fr^2 = 8$	$Fr^2 = 10$
-1	1	6.630923	6.661376	6.738863	6.817342	6.896612	6.976273
0		9.850044	9.864132	9.915185	9.966145	10.017723	10.069737
1		7.051432	7.076954	7.145886	7.216041	7.286734	7.358361
-1	2	11.56826	11.59092	11.63487	11.67893	11.72267	11.76638
0		13.29538	13.30017	13.33803	13.37572	13.41371	13.45168
1		11.61231	11.62903	11.67091	11.71434	11.75783	11.80127
-1	3	14.64398	14.65451	14.68697	14.72172	14.75575	14.79055
0		15.98785	15.99589	16.02559	16.05773	16.08967	16.12087
1		14.65337	14.66896	14.70095	14.73497	14.76968	14.80405

Из таблицы 3.6 видно, что значения собственных частот прямых волн больше, чем обратных волн ($q_{mp}^+ > q_{mp}^-$) при различных числах Fr^2 . При более подробном рассмотрении значений q_{mp} для трех типов поверхностных волн выясняется, что $q_{mp}^0 > q_{mp}^+ > q_{mp}^-$.

Теперь рассмотрим зависимость собственных частот q_{mp} для поверхностных волн от изменения величины числа Fr^2 и от безразмерного параметра $\bar{H} = H/r_0$. На рис. 3.7 показана зависимость собственных частот q_{mp} поверхностных волн от параметра \bar{H} при различных числах Fr^2 , ($Fr^2 = 0 \div 10$), в случае частичного заполнения полости.

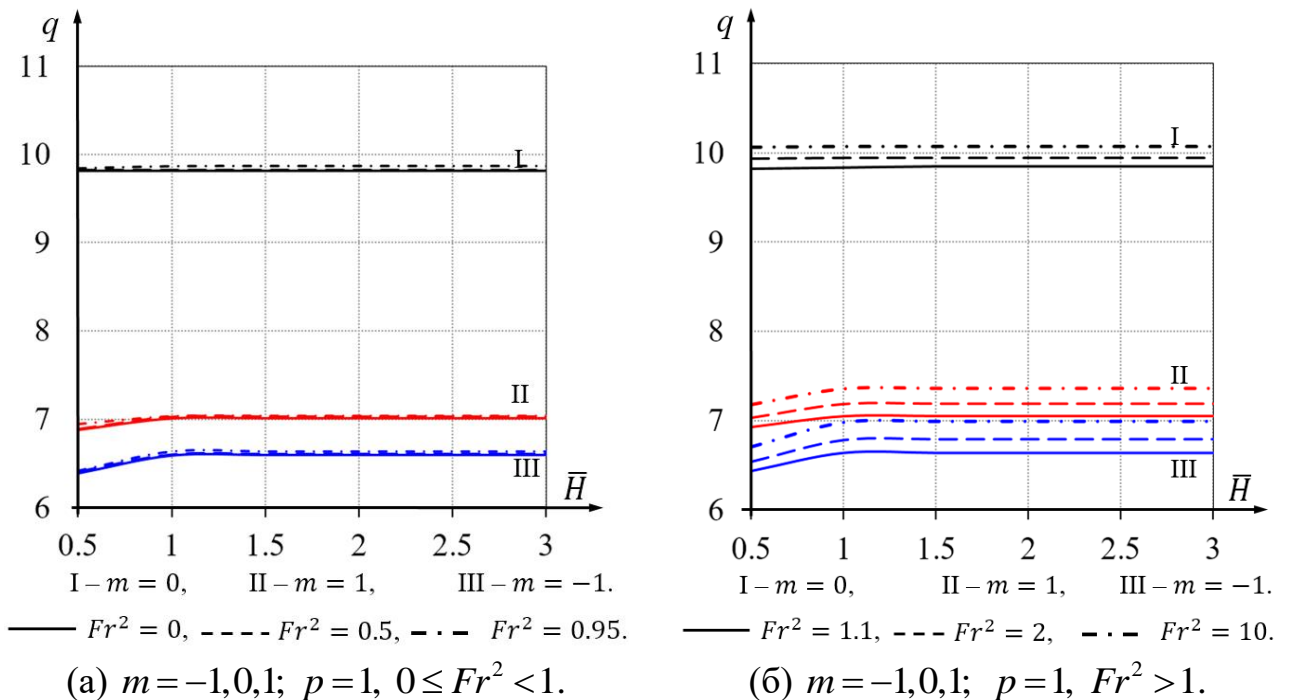


Рис. 3.7. Зависимость собственных частот $q_{mp} = \omega_{mp} / \omega_0$ поверхностных волн от параметра \bar{H} .

Из рис. 3.7 видно, что наличие стратификации приводит к увеличению частот свободных колебаний поверхностных прямых, обратных и стоячих волн с ростом числа Fr^2 . Однако при медленном вращении изменение значений собственных частот поверхностных волн в зависимости от числа Fr^2 относительно мало по сравнению с изменением собственных частот в зависимости от типа волн, т. е. в

зависимости от значения числа m ($m = -1, 0, 1$). С увеличением безразмерного параметра \bar{H} собственные частоты q_{mp} поверхностных волн возрастают, достигая постоянного значения примерно при $\bar{H} \geq 1.5$. При любых числах Fr^2 , ($0 \leq Fr^2 < 1$ и $Fr^2 > 1$), собственные частоты стоячих волн являются наибольшими из трех типов волн, т. е. ($q_{mp}^0 > q_{mp}^+ > q_{mp}^-$).

3.4. Вывод по главе 3

Полученные результаты показывают, что во вращающейся стратифицированной жидкости при малой скорости вращения, в зависимости от числа Fr^2 , могут возникать различные типы волн. Собственные частоты этих волн существенно зависят от соотношения сил плавучести и кориолисовых сил инерции. Проведённое исследование колебаний вращающейся стратифицированной жидкости показало, что спектр собственных частот колебаний состоит из двух множеств действительных чисел: двухиндексного множества q_{mp} для поверхностных волн и трёхиндексного q_{lmp} для внутренних волн. Частоты свободных колебаний жидкости для внутренних и поверхностных волн увеличиваются по мере увеличения стратификации.

При малой скорости вращения, полученные собственные частоты внутренних волн при полном и частичном заполнении полости, отличаются незначительно, если значения стратификации и высоты жидкости в цилиндре одинаковы. При $0 \leq Fr^2 < 1$, частоты колебаний внутренних прямых волн вращающейся стратифицированной жидкости всегда больше частот колебаний внутренних обратных волн ($q_{lmp}^+ > q_{lmp}^-$). В этом диапазоне чисел Fr^2 , собственные частоты внутренних прямых волн являются наибольшими из трех типов бегущих волн ($q_{lmp}^+ > q_{lmp}^0 > q_{lmp}^-$). При $Fr^2 > 1$, частоты колебаний внутренних обратных волн вращающейся стратифицированной жидкости всегда больше частот колебаний внутренних прямых волн ($q_{lmp}^- > q_{lmp}^+$). Собственные частоты внутренних обратных

волн являются наибольшими из трех типов бегущих волн ($q_{imp}^- > q_{imp}^0 > q_{imp}^+$). При любых числах Fr^2 , собственные частоты поверхностных прямых волн вращающейся жидкости всегда больше частот поверхностных обратных волн ($q_{mp}^+ > q_{mp}^-$), а стоячие поверхностные волны являются самыми значительными по частоте из трех типов бегущих волн, т. е. ($q_{mp}^0 > q_{mp}^+ > q_{mp}^-$).

ГЛАВА 4. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ

В главе 4 исследуется задача о свободных колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в поле центробежных сил инерции. Получены собственные функции жидкости и собственные частоты свободных колебаний быстровращающейся жидкости, заполняющей цилиндрический сосуд. Представлены результаты исследования собственных частот свободных колебаний неоднородной быстровращающейся жидкости, частично заполняющей цилиндрический сосуд и полностью заполняющей коаксиальный цилиндрический сосуд.

Когда угловая скорость вращения жидкости становится достаточно большой, действием силы тяжести по сравнению с действием центробежной силы можно пренебречь. При ослаблении силы тяжести переход к случаю больших скоростей осуществляется более быстро. Колебания вращающейся жидкости в случае больших скоростей были предметом изучения в ряде работ, в том числе [27, 80, 87, 126]. Из них наиболее полную информацию дает метод, связанный с использованием потенциала ускорений (см. [126]). Экспериментальное исследование колебаний быстро вращающейся жидкости можно встретить в работе Гонткевича В.С. [27].

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим цилиндрический сосуд, наполненный стратифицированной жидкостью, которая вращается вокруг вертикальной оси симметрии сосуда Ox_3 с угловой скоростью ω_0 . Начало координат $Ox_1x_2x_3$ находится в точке пересечения оси симметрии сосуда с верхним основанием. Таким образом, на жидкость действуют гравитационные и центробежные силы, направленные во взаимно перпендикулярных плоскостях. При достаточно больших значениях угловой скорости ω_0 центробежное поле инерции значительно больше гравитационного поля. На это указывает условие $(\omega_0^2 \ell / g \gg 1)$, ℓ – характерный геометрический

размер объёма жидкости, g – постоянное ускорение силы тяжести. Следовательно, потенциальная энергия на единицу массы жидкости равна $\Pi_0 = \omega_0^2 r^2 / 2$. В результате свободная поверхность Γ вращающейся жидкости в закрытом сосуде имеет форму цилиндра, соосного с боковой стенкой полости [27, 80, 126] (рис. 4.1). Можно приближенно оценить величину угловой скорости, при которой в цилиндрической полости будет иметь место случай больших скоростей вращения.

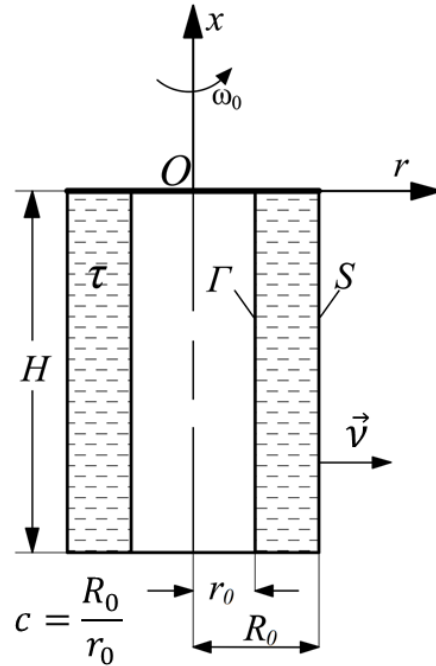


Рис. 4.1. Цилиндрический сосуд, наполненный стратифицированной жидкостью.

Пусть в возмущенном движении жидкость приобретает поле скоростей, давлений и плотностей – \vec{u} , p , ρ . Считая \vec{u} , p , ρ – величинами первого порядка малости. Уравнения возмущенного движения вращающейся неоднородной жидкости и граничные условия в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют вид [27, 80, 113]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} - \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p \quad \text{в } \tau, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad (4.2)$$

здесь ρ_0^* – постоянное среднее значение плотности жидкости, τ – область полости, занятая жидкостью, S – смачиваемая поверхность полости, Γ – свободная

поверхность жидкости (при частичном заполнении), \vec{v} – орт внешней нормали к смачиваемой поверхности и свободной поверхности жидкости, r_0 – радиус цилиндрической свободной поверхности жидкости, определяемой её количеством в полости (рис. 4.1).

При малом отклонении движения будем считать, что $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}'$. ρ_0, \vec{u}_0 – плотность и скорость жидкости при невозмущенном состоянии, ρ', \vec{u}' – отклонение плотности и скорости жидкости в возмущенном состоянии. Целесообразно изучить движение жидкости в цилиндрической системе координат (r, η, x) . Перепишем уравнение (4.2) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \cdot v_r = 0,$$

где $\vec{u}' = v_r$. Пусть $v_r = \frac{\partial w_r}{\partial t}$ и в невозмущенном движении жидкости закон

изменения плотности имеет вид $\rho_0(r) = \rho_0^* (1 + k_\rho \ln \bar{r})$, ($\bar{r} = \frac{r}{r_0}$, $r \geq r_0$), тогда

получим

$$\rho = -w_r \rho_0^* \frac{k_\rho}{r},$$

k_ρ – число стратификации, т.е. постоянная, зависящая от соотношения плотностей жидкости.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат (r, η, x) может быть выражено следующим образом:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \text{в } \tau. \quad (4.3)$$

Для того чтобы получить решение уравнений возмущенного движения, необходимо наложить граничные условия:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{на } S, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_r \frac{\partial p_0(r)}{\partial r} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (4.5)$$

В проекции на оси цилиндрической системе координат (r, η, x) уравнения малых движений (4.1) записываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} &= 2\omega_0 v_\eta - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho}{\rho_0^*} \frac{\partial \Pi_0}{\partial r}, \\ \frac{\partial v_\eta}{\partial t} &= -2\omega_0 v_r - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p}{\partial x}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Введем квадрат частот плавучести $N^2(r)$,

$$N^2(r) = \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho_0(r)}{\partial r} \frac{\partial \Pi_0}{\partial r}, \quad (4.7)$$

который аналогичен квадрату частоты Брента-Вяйсяля по радиальному направлению при быстром вращении жидкости [16, 56, 89]. Для рассматриваемого закона изменения плотности имеем

$$N^2(r) = N_{rr}^2 = k_\rho \omega_0^2. \quad (4.8)$$

Перепишем уравнения движения (4.6) с учетом (4.8) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} &= 2\omega_0 v_\eta - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p}{\partial r} - w_r N_{rr}^2, \\ \frac{\partial v_\eta}{\partial t} &= -2\omega_0 v_r - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p}{\partial x}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Решение задачи о собственных колебаниях вращающейся жидкости в полости будем искать в виде гармонических колебаний. Пусть все переменные по времени изменяются пропорционально $e^{\lambda t}$, где $\lambda = i\omega$ – комплексное число. Из первого и второго соотношений уравнения (4.9) получим компоненты w_r и w_η в виде

$$\begin{aligned}w_r &= \frac{1}{\omega^2 - 4\omega_0^2 - N_{rr}^2} \frac{1}{\rho_0^*} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right), \\ w_\eta &= \frac{1}{\omega^2 - 4\omega_0^2 - N_{rr}^2} \frac{1}{\rho_0^*} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\omega^2 - N_{rr}^2}{\omega^2 r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right).\end{aligned}\quad (4.10)$$

После небольших преобразований уравнения неразрывности жидкости (4.3), с учетом (4.9), преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + N_{rr}^2 \Delta_{\eta x} p + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (4.11)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \Delta_{\eta x} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

4.2. Колебания вращающейся стратифицированной жидкости в цилиндрическом сосуде при наличии свободной поверхности

Определим собственные частоты $q = \frac{\omega}{2\omega_0}$ и собственные функции задачи о свободных колебаниях жидкости $\varphi(r, \eta, x)$, полагая $p = \varphi e^{i\omega t}$. Уравнение для определения собственных колебаний жидкости при возмущенном движении, отвечающее (4.11), запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + (1 - Fr^2 \chi^2) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + [1 - \chi^2 (1 + Fr^2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (4.12)$$

а граничные условия (4.4) и (4.5) для быстро вращающегося цилиндра со стратифицированной жидкостью имеют вид:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - i\chi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = R_0, \\ r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 4 \frac{[1 - \chi^2 (1 + Fr^2)]}{\chi^2} \varphi - i\chi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad \text{при } x = 0, \quad x = -H. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Если жидкость однородная несжимаемая ($\kappa_p = 0$), то уравнения (4.12) и (4.13) становятся [80]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + (1 - \chi^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = R_0, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(4\chi_3 \varphi - i\chi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad \text{при } x = 0, \quad x = -H,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

где $\chi = \frac{2\omega_0}{\omega}$, ω – частота колебаний жидкости, $Fr^2 = \frac{N_{rr}^2}{4\omega_0^2}$, $\chi_3 = \frac{1 - \chi^2(1 + Fr^2)}{\chi^2}$.

Исследование свободных колебаний сводится к следующей задаче на собственные значения: найти те значения параметра χ , при которых дифференциальное уравнение (4.12) имеет ненулевые решения, удовлетворяющие граничным условиям (4.13). Тогда частота для любой данной моды определяется $q = \omega/2\omega_0$, а узловая структура моды описывается целыми числами m (количество η -узлов), l (количество x -узлов) и нулями функции R (радиальные узлы).

4.2.1. Внутренние волны

Полагая функцию $\varphi(r, \eta, x) = R(r)H(\eta)Z(x)$ и используя метод разделения переменных, получаем следующие краевые задачи из (4.12) для случая $\chi^2(1 + Fr^2) > 1$:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0, \tag{4.16}$$

$$\frac{d^2 H(\eta)}{d^2 \eta^2} + \frac{m^2}{1 - Fr^2 \chi^2} H(\eta) = 0, \tag{4.17}$$

$$\frac{d^2 Z(x)}{dx^2} + \frac{k^2}{\chi^2(1 + Fr^2) - 1} Z(x) = 0, \tag{4.18}$$

с граничными условиями,

$$\begin{aligned}
r \frac{dR(r)}{dr} + m \chi_2 R(r) &= 0, \quad \text{при } r = R_0, \\
r \frac{dR(r)}{dr} + (4\chi_3 + m\chi_2) R(r) &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\
\frac{dZ(x)}{dx} &= 0, \quad \text{при } x = 0, \quad x = -H,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

здесь k, m – постоянные разделения уравнения (3.12). Обозначим

$$\chi_2 = \frac{\chi}{\sqrt{1 - Fr^2 \chi^2}}, \quad \chi_3 = \frac{1 - \chi^2(1 + Fr^2)}{\chi^2}. \quad (4.20)$$

В рассматриваемом частном случае решение задачи (4.12) и (4.13) имеет вид [27, 80, 126]:

$$\varphi_{lmp} = \left[AJ_m(\xi_{lmp} \bar{r}) + BY_m(\xi_{lmp} \bar{r}) \right] e^{\frac{im\eta}{\sqrt{1 - Fr^2 \chi^2}}} \cos k_l x, \quad (4.21)$$

где

$$\xi = kR_0, \quad \bar{r} = \frac{r}{R_0}, \quad k = k_l \sqrt{\chi^2(1 + Fr^2) - 1}, \quad k_l = \frac{l\pi}{H},$$

$$\chi = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 + \xi^2}{\bar{k}_l^2(1 + Fr^2)}}, \quad \bar{k}_l = k_l R_0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

здесь $J_m(\xi_{lmp} \bar{r})$ и $Y_m(\xi_{lmp} \bar{r})$ – функции Бесселя 1-го и 2-го родов m -го порядка.

Функция $\varphi_{lmp}(r, \eta, x)$ из (4.21) удовлетворяла граничными условиями (4.13),

то есть

$$\begin{aligned} & A \left[\xi_{lmp} J'_m(\xi_{lmp}) + m \chi_2 J_m(\xi_{lmp}) \right] + \\ & \quad + B \left[\xi_{lmp} Y'_m(\xi_{lmp}) + m \chi_2 Y_m(\xi_{lmp}) \right] = 0, \quad \text{при } r = R_0, \\ & A \left[\xi_{lmp} c J'_m(\xi_{lmp} c) + (m \chi_2 + 4 \chi_3) J_m(\xi_{lmp} c) \right] + \\ & \quad + B \left[\xi_{lmp} c Y'_m(\xi_{lmp} c) + (m \chi_2 + 4 \chi_3) Y_m(\xi_{lmp} c) \right] = 0, \quad \text{при } r = r_0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$J'_m(\xi_{lmp}) = \frac{dJ_m(\xi_{lmp})}{d(\xi_{lmp})}, \quad Y'_m(\xi_{lmp}) = \frac{dY_m(\xi_{lmp})}{d(\xi_{lmp})}, \quad c = \frac{r_0}{R_0},$$

здесь ξ_{lmp} – p -ый корень характеристического уравнения (4.50). Условие существования нетривиальных решений системы двух однородных алгебраических уравнений (4.22), выраженное в виде уравнения, имеет следующий вид [126]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{lmp} J'_m(\xi_{lmp}) + m \chi_2 J_m(\xi_{lmp}) & \xi_{lmp} Y'_m(\xi_{lmp}) + m \chi_2 Y_m(\xi_{lmp}) \\ \xi_{lmp} c J'_m(\xi_{lmp} c) + (m \chi_2 + 4 \chi_3) J_m(\xi_{lmp} c) & \xi_{lmp} c Y'_m(\xi_{lmp} c) + (m \chi_2 + 4 \chi_3) Y_m(\xi_{lmp} c) \end{vmatrix} = 0, \quad (4.23)$$

или

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m \chi_2 + m) J_m(\xi_{lmp}) - \xi_{lmp} J_{m+1}(\xi_{lmp}) & (m \chi_2 + m) Y_m(\xi_{lmp}) - \xi_{lmp} Y_{m+1}(\xi_{lmp}) \\ (m \chi_2 + m + 4 \chi_3) J_m(\xi_{lmp} c) - \xi_{lmp} c J_{m+1}(\xi_{lmp} c) & (m \chi_2 + m + 4 \chi_3) Y_m(\xi_{lmp} c) - \xi_{lmp} c Y_{m+1}(\xi_{lmp} c) \end{vmatrix} = 0,$$

может служить одновременно уравнением для определения частотного спектра внутренних волн жидкости.

Безразмерные собственные частоты $q_{lmp} = \frac{\omega_{lmp}}{2\omega_0}$ внутренних волн при

фиксированных значениях l, m, p и Fr^2 определяется формулой:

$$q_{lmp} = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 (1 + Fr^2)}{\bar{k}_l^2 + \xi_{lmp}^2}}. \quad (4.24)$$

Одной из важнейших характеристик колебательного движения жидкости является спектр частот собственных колебаний, который в рассматриваемом случае определяется уравнениями (4.23) и (4.24). Эти уравнения для однородной жидкости ($Fr^2 = 0$) были получены в работах [27, 126].

Исследуем далее уравнение (4.23) для определения значения корней ξ_{lmp} и собственных частот q_{lmp} . Графическое решение уравнения (4.23) для случая $m = 1, l = 1, c = 0.5$, полученное с помощью пакета Maple при различных числах Fr^2 и высоте жидкости $H = 2$ приведено на рис. 4.2, численные результаты корней ξ_{lmp} для случаев $m = -1, 0, 1; l = 1, p = 1$, при $H = 2$ в таблице 4.1.

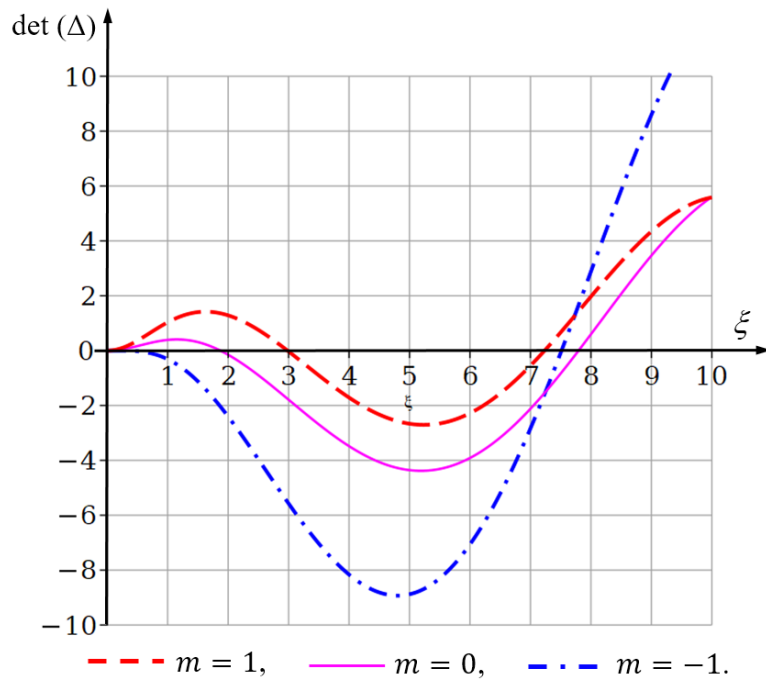


Рис. 4.2. Графическое решение уравнений (4.23) при $m=0$, $l=1$, $H=2$, $c=0.5$.

Пунктирные линии – прямые волны ($m=1$), сплошные линии – стоячие волны ($m=0$), штрихпунктирные линии – обратные волны ($m=-1$).

Таблица 4.1. Значения корней ξ_{lmp} при $m=-1,0,1$; $l=1$, $p=1$, $H=2$,
 $c=0.1,0.2,0.5,0.8$.

c	m	ξ_{lmp} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
0.1	-1	4.876379	0.220031	0.329029	0.380246	0.407266	0.418659
	0	4.815638	4.839841	4.857815	4.871683	4.882707	4.889595
	1	5.708976	2.983806	2.299607	1.913254	1.672198	1.541155
0.2	-1	5.207568	0.307208	0.389461	0.430111	0.450760	0.458650
	0	5.349182	5.397732	5.434505	5.463286	5.486407	5.500962
	1	5.608329	2.877741	2.284992	1.908694	1.670248	1.540032
0.5	-1	7.513627	0.377999	0.444185	0.476712	0.491973	0.496758
	0	7.795259	7.941969	8.064640	8.168324	8.256852	8.315088
	1	7.233169	2.874746	2.283754	1.913837	1.676137	1.545783
0.8	-1	17.01606	2.069524	1.811716	1.607111	1.451568	1.358581
	0	17.12757	17.36417	17.58799	17.79963	17.99974	18.14263
	1	16.32452	3.191509	2.370413	1.961061	1.708628	1.572259

Продолжение таблицы 4.1.

c	m	ξ_{imp} при $Fr^2 > 1$					
		$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 1.2$	$Fr^2 = 1.4$	$Fr^2 = 1.6$	$Fr^2 = 1.8$	$Fr^2 = 2$
0.1	-1	0.425229	0.427693	0.429388	0.428119	0.424967	0.420621
	0	4.895563	4.899119	4.905392	4.910750	4.915381	4.919422
	1	1.436721	1.377829	1.278934	1.198661	1.131817	1.075033
0.2	-1	0.462373	0.463206	0.462111	0.458532	0.453429	0.447408
	0	5.513638	5.521218	5.534641	5.546157	5.556146	5.564891
	1	1.436058	1.377367	1.278730	1.198607	1.131856	1.075134
0.5	-1	0.497896	0.497223	0.493524	0.487766	0.480806	0.473185
	0	8.367438	8.399472	8.457579	8.508853	8.554395	8.595085
	1	1.441537	1.382647	1.283627	1.203163	1.136118	1.079140
0.8	-1	1.280583	1.235182	1.156808	1.091363	1.035721	0.987693
	0	5.028476	5.099186	5.229140	5.345794	5.451116	5.546691
	1	1.463990	1.403088	1.301057	1.218447	1.149793	1.091567

Важным отличием частотного спектра колебаний жидкости в поле инерционных сил от частотного спектра жидкости в поле гравитационных сил является влияние геометрического размера объёма жидкости на значения частот свободных колебаний. При медленном вращении, величины собственных частот зависят только от безразмерного параметра $\bar{H} = H/R_0$ (относительной глубины), т.е. от одного параметра \bar{H} . В случае больших скоростей вращения в поле центробежных сил инерции корни уравнений (4.23) полностью определяются безразмерными параметрами $\bar{H} = H/R_0$ и $c = r_0/R_0$. Это означает, что существует двухпараметрическое множество объёмов однородной жидкости, обладающих одинаковым спектром частот. Корни уравнений (4.23) в рассматриваемой задаче зависят не только от параметров \bar{H} и c , но и от числа Fr^2 .

Далее рассмотрим зависимость собственных частот q_{imp} внутренних волн от величины чисел Fr^2 , безразмерных параметров \bar{H} и c . На рис. 4.3 показана связь между собственными частотами q_{imp} и параметрами \bar{H} и c при большой скорости

вращения. В таблице 4.2 приведены значения собственных частот q_{lmp} внутренних волн для случаев $m = -1, 0, 1$; $p = 1, l = 1$ при различных числах Fr^2 , ($Fr^2 = 0 \div 2$).

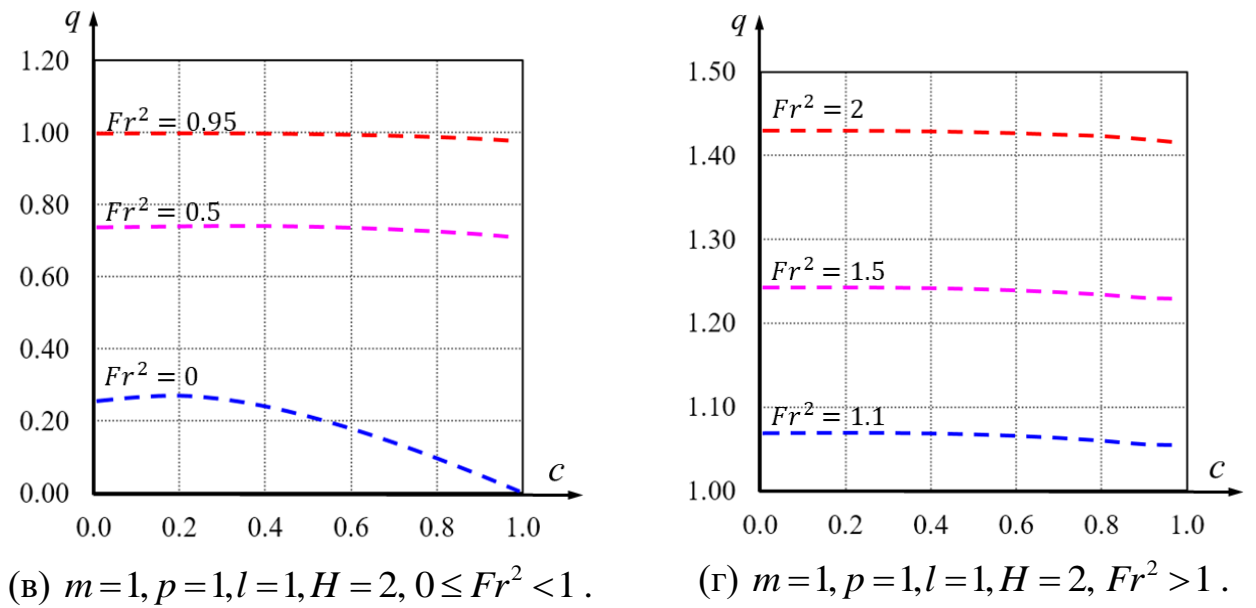
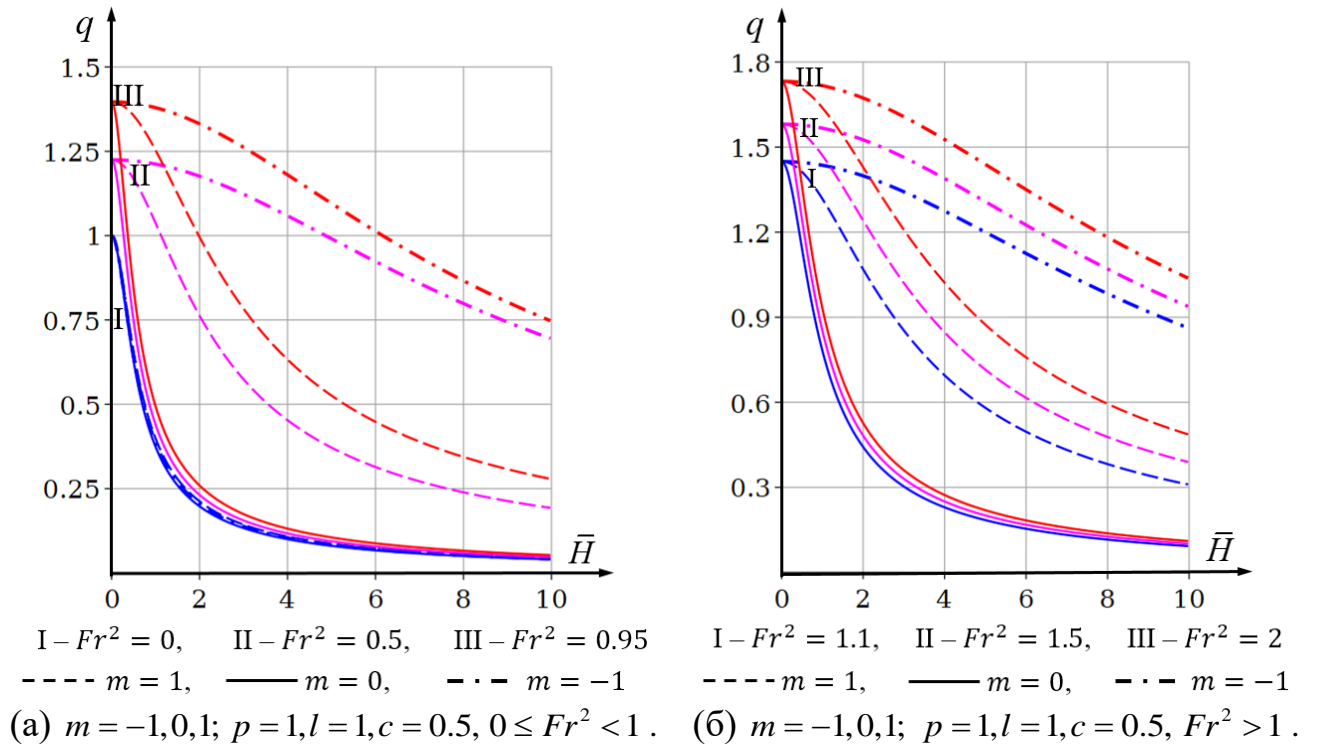


Рис. 4.3. Зависимость собственных частот $q_{lmp} = \omega_{lmp} / \omega_0$ внутренних волн от параметров \bar{H} и c .

Пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$), штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

Таблица 4.2. Значения собственных частот q_{lmp} внутренних волн при $m = -1, 0, 1$;
 $l = 1, p = 1, H = 2, c = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$.

c	m	q_{lmp} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
0.1	-1	0.306608	1.084854	1.158083	1.229403	1.298700	1.349321
	0	0.310116	0.338168	0.364040	0.388172	0.410875	0.427108
	1	0.265286	0.510295	0.667383	0.802646	0.918569	0.996780
0.2	-1	0.288785	1.075077	1.148443	1.220002	1.289594	1.340452
	0	0.281754	0.306088	0.328550	0.349526	0.369284	0.383422
	1	0.269704	0.524843	0.670286	0.803787	0.919143	0.997138
0.5	-1	0.204635	1.065042	1.138570	1.210398	1.280314	1.331431
	0	0.197536	0.212544	0.226211	0.238870	0.250739	0.259212
	1	0.212219	0.525265	0.670533	0.802497	0.917423	0.995312
0.8	-1	0.091920	0.662291	0.775104	0.884150	0.985338	1.056192
	0	0.091328	0.098693	0.105255	0.111195	0.116639	0.120452
	1	0.095781	0.483739	0.653599	0.790783	0.908010	0.986962

Продолжение таблицы 4.2.

c	m	q_{lmp} при $Fr^2 > 1$					
		$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 1.2$	$Fr^2 = 1.4$	$Fr^2 = 1.6$	$Fr^2 = 1.8$	$Fr^2 = 2$
0.1	-1	1.398790	1.431139	1.494367	1.555705	1.615251	1.673105
	0	0.442740	0.452860	0.472449	0.491253	0.509362	0.526848
	1	1.069314	1.115061	1.201354	1.281861	1.357611	1.429356
0.2	-1	1.390163	1.422673	1.486214	1.547852	1.607680	1.665797
	0	0.397051	0.405877	0.422974	0.439400	0.455226	0.470520
	1	1.069539	1.115224	1.201430	1.281883	1.357595	1.429313
0.5	-1	1.381403	1.414086	1.477962	1.539918	1.600043	1.658437
	0	0.267372	0.272656	0.282889	0.292724	0.302210	0.311384
	1	1.067682	1.113366	1.199597	1.280090	1.355848	1.427615
0.8	-1	1.123186	1.165943	1.247423	1.324209	1.396979	1.466277
	0	0.432090	0.436660	0.445692	0.454581	0.463332	0.471947
	1	1.060102	1.106198	1.193084	1.274082	1.350244	1.422342

Как видно из таблицы 4.2 и рис. 4.3, наличие стратификации приводит к увеличению частот свободных колебаний жидкости, чем больше значение числа Fr^2 , тем больше значения собственных частот q_{imp} внутренних волн. При больших скоростях вращения, собственные частоты внутренних волн слабо зависят от типа бегущих волн ($m = -1, 0, 1$), и существенно различаются при разных числах Fr^2 .

4.2.2. Поверхностные волны

Теперь рассмотрим поверхностные волны. В этом случае будем считать уравнение (4.12) имеет $\chi^2(1 + Fr^2) < 1$. Следовательно, для поверхностных волн, краевые задачи (4.16) – (4.18) будут иметь вид:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \left(\kappa^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{d^2 H(\eta)}{d^2 \eta^2} + \frac{m^2}{1 - Fr^2 \chi^2} H(\eta) = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{d^2 Z(x)}{d^2 x^2} + \frac{\kappa^2}{1 - \chi^2(1 + Fr^2)} Z(x) = 0, \quad (4.27)$$

с граничными условиями (4.19).

Собственные функции жидкости для поверхностных волн могут быть представлены следующим образом [80, 126]:

$$\varphi_{lm} = [C I_m(\mu_{lm} \bar{r}) + D K_m(\mu_{lm} \bar{r})] e^{\frac{im\eta}{\sqrt{1 - Fr^2 \chi^2}}} \cos \kappa_l x, \quad (4.28)$$

где

$$\bar{r} = \frac{r}{R_0}, \quad \kappa_l = \frac{l\pi}{H}, \quad \mu = \kappa R_0, \quad \kappa = \kappa_l \sqrt{1 - \chi^2(1 + Fr^2)},$$

$$\chi = \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_l^2 - \mu^2}{\bar{\kappa}_l^2(1 + Fr^2)}}, \quad \bar{\kappa}_l = \kappa_l R_0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots,$$

здесь $I_m(\mu_{lm} \bar{r})$ и $K_m(\mu_{lm} \bar{r})$ – функции Бесселя мнимого аргумента (модифицированные функции Бесселя) m -го порядка.

Функция $\varphi_{lm}(r, \eta, x)$ из (4.28) удовлетворяла граничными условиями (4.19), то есть

$$\begin{aligned} C[\mu_{lm} I'_m(\mu_{lm}) + m\chi_2 I_m(\mu_{lm})] + \\ + D[\mu_{lm} K'_m(\mu_{lm}) + m\chi_2 K_m(\mu_{lm})] = 0, \quad \text{при } r = R_0, \\ C[\mu_{lm} c I'_m(\mu_{lm} c) + (4\chi_3 + m\chi_2) I_m(\mu_{lm} c)] + \\ + D[\mu_{lm} c K'_m(\mu_{lm} c) + (m\chi_2 + 4\chi_3) K_m(\mu_{lm} c)] = 0, \quad \text{при } r = r_0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где

$$I'_m(\mu_{lm} \bar{r}) = \frac{dI_m(\mu_{lm} \bar{r})}{d(\mu_{lm} \bar{r})}, \quad K'_m(\mu_{lm} \bar{r}) = \frac{dK_m(\mu_{lm} \bar{r})}{d(\mu_{lm} \bar{r})}, \quad c = \frac{r_0}{R_0},$$

здесь μ_{lm} – корень характеристического уравнения (4.29). Условие существования нетривиальных решений системы двух однородных алгебраических уравнений (3.29), записанное в виде уравнения [126]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_{lm} c I'_m(\mu_{lm}) + m\chi_2 I_m(\mu_{lm}) & \mu_{lm} K'_m(\mu_{lm}) + m\chi_2 K_m(\mu_{lm}) \\ \mu_{lm} c I'_m(\mu_{lm} c) + (m\chi_2 + 4\chi_3) I_m(\mu_{lm} c) & \mu_{lm} c K'_m(\mu_{lm} c) + (m\chi_2 + 4\chi_3) K_m(\mu_{lm} c) \end{vmatrix} = 0, \quad (4.30)$$

или

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m\chi_2 + m) I_m(\mu_{lm}) + \mu_{lm} I_{m+1}(\mu_{lm}) & (m\chi_2 + m) K_m(\mu_{lm}) - \mu_{lm} K_{m+1}(\mu_{lm}) \\ (4\chi_3 + m\chi_2 + m) I_m(\mu_{lm} c) + \mu_{lm} c I_{m+1}(\mu_{lm} c) & (4\chi_3 + m\chi_2 + m) K_m(\mu_{lm} c) - \mu_{lm} c K_{m+1}(\mu_{lm} c) \end{vmatrix} = 0,$$

может служить одновременно уравнением для определения частотного спектра поверхностных волн жидкости.

Безразмерные собственные частоты $q_{lm} = \frac{\omega_{lm}}{2\omega_0}$ поверхностных волн при фиксированных значениях l, m и Fr^2 определяется формулой:

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_l^2 (1 + Fr^2)}{\bar{\kappa}_l^2 - \mu_{lm}^2}}. \quad (4.31)$$

Определяем корни μ_{lm} характеристического уравнения (4.30) и спектр частот собственных колебаний q_{lm} уравнения (4.31) для поверхностных волн. Эти уравнения для однородной жидкости ($Fr^2 = 0$) исследовались в работах [27, 126]. Графическое решение уравнения (4.29) для случая $m = -1, l = 1, c = 0.1, H = 2,$

полученное с помощью пакета Maple при различных числах Fr^2 представлено на рис. 4.4. Численные результаты корней μ_{lm} для случаев $m = -1, 0, 1; l = 1$ в таблице 4.3.

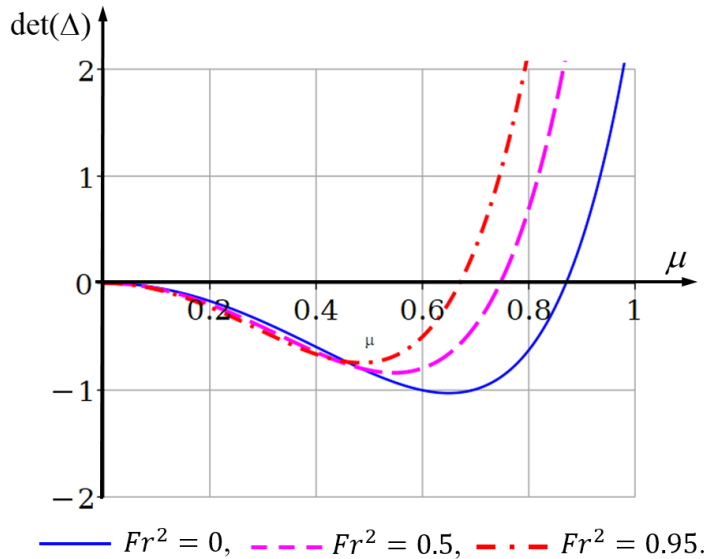


Рис. 4.4. Графическое решение уравнений (4.30) при $m = -1, l = 1, H = 2, c = 0.1$.

Пунктирные линии – $Fr^2 = 0$, сплошные линии – $Fr^2 = 0.5$, штрихпунктирные линии – $Fr^2 = 0.95$.

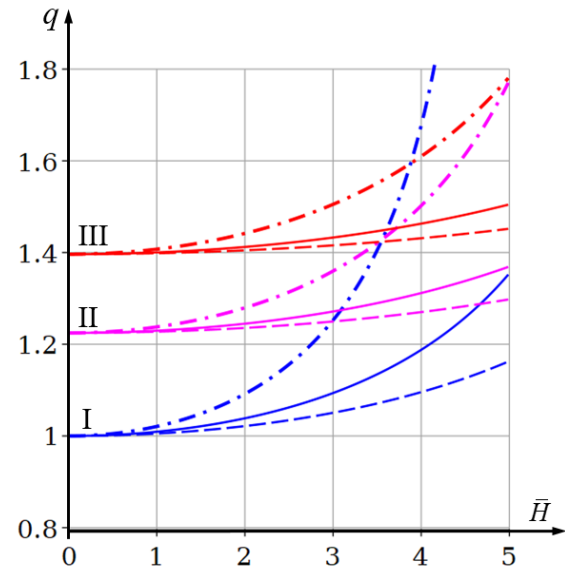
Таблица 4.3. Значения корней μ_{lm} при $m = -1, 0, 1; l = 1, H = 2, c = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$.

c	m	μ_{lm} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
0.1	-1	0.849316	0.812968	0.766507	0.726621	0.692130	0.640026
	0	0.394797	0.345619	0.307519	0.276780	0.250718	0.234348
	1	0.119546	0.103159	0.088857	0.077748	0.070774	0.065088
0.2	-1	0.835525	0.775690	0.726600	0.684333	0.648361	0.624435
	0	0.422770	0.367758	0.324702	0.290839	0.263425	0.245708
	1	0.200749	0.168551	0.147888	0.128977	0.113717	0.108646
0.5	-1	0.630527	0.559046	0.501630	0.454846	0.415560	0.390782
	0	0.423895	0.363441	0.317590	0.281182	0.253317	0.234348
	1	0.320976	0.271810	0.235525	0.208118	0.186218	0.172180
0.8	-1	0.363868	0.309291	0.268670	0.235944	0.211013	0.196318
	0	0.317954	0.267866	0.231813	0.205125	0.182652	0.168149
	1	0.291750	0.246068	0.212290	0.187781	0.167627	0.153223

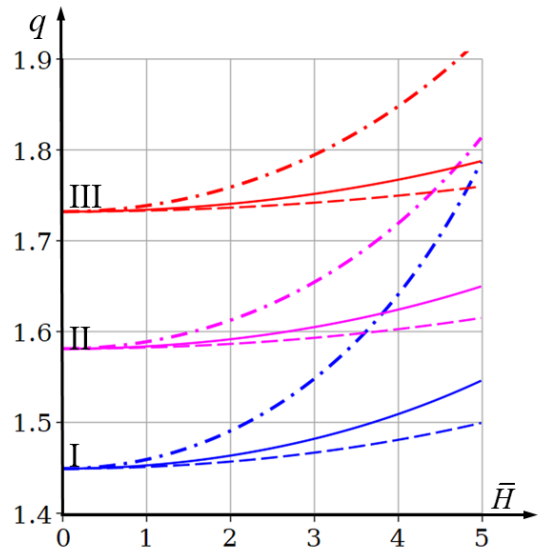
Продолжение таблицы 4.3.

c	m	μ_{lm} при $Fr^2 > 1$					
		$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 1.2$	$Fr^2 = 1.4$	$Fr^2 = 1.6$	$Fr^2 = 1.8$	$Fr^2 = 2$
0.1	-1	0.649561	0.636342	0.613091	0.448987	0.572558	0.555084
	0	0.394797	0.345619	0.306586	0.276780	0.172494	0.163861
	1	0.063593	0.054118	0.055090	0.046650	0.050948	0.046278
0.2	-1	0.603518	0.590198	0.566234	0.543966	0.524608	0.506600
	0	0.230431	0.220902	0.204566	0.190423	0.177201	0.166438
	1	0.098760	0.093670	0.087289	0.083370	0.076760	0.068577
0.5	-1	0.368574	0.354566	0.329908	0.308437	0.291970	0.273986
	0	0.219416	0.210815	0.193131	0.179751	0.167664	0.155897
	1	0.161693	0.152860	0.140777	0.128335	0.122300	0.111261
0.8	-1	0.184286	0.175057	0.160952	0.151050	0.141057	0.132264
	0	0.157221	0.150460	0.138033	0.128335	0.118883	0.111261
	1	0.145474	0.135143	0.126505	0.118707	0.111758	0.103327

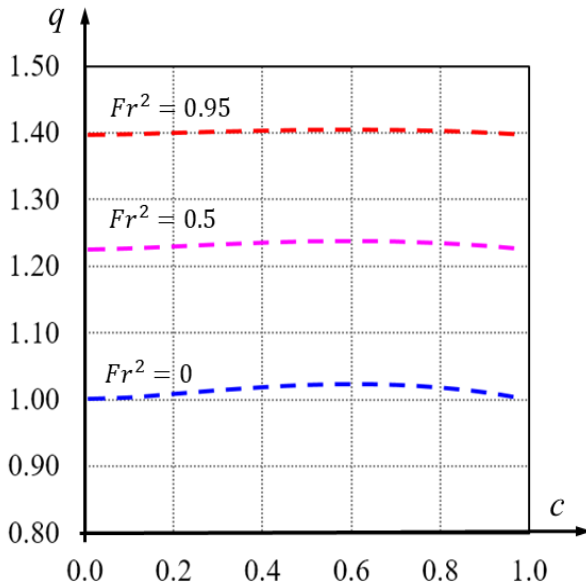
На рис. 4.5 показана связь между собственными частотами поверхностных волн q_{lm} и параметрами $\bar{N} = H/R_0$ и c при большой скорости вращения. В таблице 4.4 представлены численные результаты собственных частот q_{lm} поверхностных волн для случаев $m = -1, 0, 1; l = 1$ при различных числах Fr^2 , ($Fr^2 = 0 \div 2$).



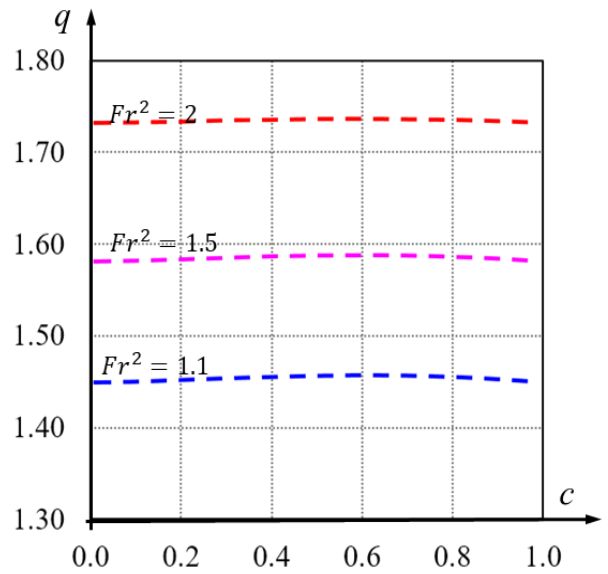
I – $Fr^2 = 0$, II – $Fr^2 = 0.5$, III – $Fr^2 = 0.95$
 - - - - $m = 1$, — $m = 0$, - · - · $m = -1$
 (а) $m = -1, 0, 1; l = 1, c = 0.5, 0 \leq Fr^2 < 1$.



I – $Fr^2 = 1.1$, II – $Fr^2 = 1.5$, III – $Fr^2 = 2$
 - - - - $m = 1$, — $m = 0$, - · - · $m = -1$
 (б) $m = -1, 0, 1; l = 1, c = 0.5, Fr^2 > 1$.



(в) $m = 1, l = 1, H = 2, 0 \leq Fr^2 < 1$.



(г) $m = 1, l = 1, H = 2, Fr^2 > 1$.

Рис. 4.5. Зависимость собственных частот $q_{lm} = \omega_{lm} / \omega_0$ поверхностных волн от параметров \bar{H} и c .

Пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$), штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

Таблица 4.4. Значения собственных частот q_{lm} поверхностных волн при $m = -1, 0, 1$; $l = 1$, $H = 2$, $c = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$.

c	m	q_{lm} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
0.1	-1	1.200624	1.280246	1.355565	1.426737	1.494545	1.543925
	0	1.033165	1.122965	1.206564	1.285017	1.359065	1.412230
	1	1.002908	1.097815	1.185115	1.266464	1.343003	1.397624
0.2	-1	1.180916	1.259763	1.334579	1.405284	1.472971	1.521838
	0	1.038314	1.126761	1.209336	1.287167	1.360915	1.413827
	1	1.008268	1.101807	1.188495	1.269197	1.345171	1.399776
0.5	-1	1.091822	1.172196	1.248595	1.321528	1.391208	1.441753
	0	1.038529	1.125999	1.208167	1.285678	1.359434	1.412230
	1	1.021555	1.112223	1.196745	1.276161	1.351169	1.404889
0.8	-1	1.027961	1.117318	1.200913	1.279427	1.353913	1.407460
	0	1.021138	1.111729	1.196315	1.275836	1.350804	1.404494
	1	1.017708	1.109139	1.194172	1.274048	1.349346	1.403115

Продолжение таблицы 4.4.

c	m	q_{lm} при $Fr^2 > 1$					
		$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 1.2$	$Fr^2 = 1.4$	$Fr^2 = 1.6$	$Fr^2 = 1.8$	$Fr^2 = 2$
0.1	-1	1.591596	1.622323	1.682652	1.682652	1.796945	1.851509
	0	1.033165	1.122965	1.206418	1.285017	1.683502	1.741553
	1	1.450326	1.484120	1.550147	1.613163	1.674201	1.732802
0.2	-1	1.569612	1.600512	1.660854	1.718804	1.775253	1.829826
	0	1.464987	1.498127	1.562500	1.624431	1.684069	1.741857
	1	1.452011	1.485884	1.551590	1.614726	1.675322	1.733703
0.5	-1	1.490757	1.522533	1.584535	1.644466	1.702997	1.759015
	0	1.463486	1.496782	1.561037	1.623113	1.682935	1.740644
	1	1.456876	1.490313	1.555452	1.617861	1.678416	1.736413
0.8	-1	1.459215	1.492537	1.557390	1.619958	1.680108	1.738224
	0	1.456452	1.490091	1.555210	1.617861	1.678134	1.736413
	1	1.455392	1.488760	1.554243	1.617076	1.677571	1.735810

Как видно из таблицы 4.4 и рис. 4.5, наличие стратификации приводит к увеличению частот свободных колебаний жидкости, чем больше значение числа Fr^2 , тем больше значение собственных частот q_{lm} . Рис. 4.5 показывает, что значения собственных частот q_{lm} увеличиваются с ростом значений параметра \bar{H} и демонстрируют минимальное изменение в зависимости от параметра c .

4.2.3. Двумерные колебания

Наиболее простым частным случаем является двумерное движение, для которого $l = 0$, а давление при колебаниях не зависит от осевой координаты [130]. Решение (4.25) при $\bar{\kappa}_l^2 = 0$ дается следующей формулой:

$$R(r) = Ar^m + Br^{-m}.$$

Соответствующая форма колебаний двумерных волн выражается следующим образом:

$$\varphi_{0m} = (Ar^m + Br^{-m})e^{\frac{im\eta}{\sqrt{1-Fr^2}\chi^2}}, \quad (4.32)$$

Подставляя (4.32) в граничные условия на боковой стенке и свободной поверхности (4.19) и приравнивая определитель результатов к нулю, получаем уравнение на собственные значения

$$(m + 4\gamma Fr^2)\chi^2 - 4\chi\sqrt{1 - Fr^2}\chi^2 - 4\gamma = 0, \quad (4.33)$$

где $\gamma = \frac{c^{-m} + c^m}{c^{-m} - c^m}$, $c = \frac{r_0}{R_0}$.

Следующие численные результаты представляют собственные частоты $q_{0m} = \frac{1}{\chi}$ двумерных волн при различных числах Fr^2 , ($Fr^2 = 0 \div 2$), для случаев $m = 1, 2, 3$ при $\chi > 0$, как получено из уравнения (4.33).

Таблица 4.5. Значения собственных частот q_{0m} двумерных волн при $m=1,2,3$;

$$H = 2, \quad c = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8.$$

c	m	q_{0m} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
0.1	1	0.206501	0.492587	0.665313	0.801648	0.917953	0.996314
	2	0.366009	0.577894	0.730727	0.856714	0.966417	1.041142
	3	0.500000	0.670821	0.806224	0.921956	1.024734	1.095445
0.2	1	0.204635	0.491808	0.664738	0.801172	0.917540	0.995926
	2	0.365777	0.577747	0.730609	0.856619	0.966333	1.041054
	3	0.499985	0.670807	0.806217	0.921947	1.024687	1.095438
0.5	1	0.189897	0.485861	0.660349	0.797537	0.914361	0.993009
	2	0.356202	0.571735	0.725863	0.852573	0.962741	1.037729
	3	0.496085	0.667909	0.803806	0.919836	1.022791	1.093665
0.8	1	0.148941	0.471364	0.649755	0.788786	0.906741	0.985989
	2	0.293846	0.535114	0.697384	0.828459	0.941460	1.018011
	3	0.431503	0.621446	0.765632	0.886674	0.993078	1.065924

Продолжение таблицы 4.5.

c	m	q_{0m} при $Fr^2 > 1$					
		$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 1.2$	$Fr^2 = 1.4$	$Fr^2 = 1.6$	$Fr^2 = 1.8$	$Fr^2 = 2$
0.1	1	1.068944	1.114738	1.201100	1.281655	1.357440	1.429210
	2	1.110840	1.154973	1.238533	1.316800	1.390670	1.460809
	3	1.161895	1.204159	1.284523	1.360146	1.431783	1.499999
0.2	1	1.068586	1.114395	1.200781	1.281356	1.357158	1.428943
	2	1.110763	1.154900	1.238464	1.316735	1.390610	1.460752
	3	1.161888	1.204153	1.284517	1.360141	1.431777	1.499995
0.5	1	1.065862	1.111783	1.198358	1.279086	1.355014	1.426906
	2	1.107647	1.151903	1.235669	1.314109	1.388122	1.458383
	3	1.160217	1.202539	1.283005	1.358712	1.430421	1.498700
0.8	1	1.059332	1.105525	1.192553	1.273650	1.349883	1.422034
	2	1.089195	1.134171	1.219158	1.298593	1.373443	1.444419
	3	1.134106	1.177368	1.259443	1.336486	1.409324	1.478579

4.3. Колебания вращающейся стратифицированной жидкости в коаксиальном цилиндрическом сосуде при отсутствии свободной поверхности

Для того чтобы сравнить результаты по внутренним волнам, необходимо рассмотреть колебательное движение жидкости в коаксиальном цилиндрическом сосуде с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом R_0 . Граничные уравнения (4.13) преобразуются в более простую форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad \text{при } r = R_0, \quad r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0, \quad \text{при } x_3 = 0, \quad x_3 = -H, \end{aligned} \quad (4.34)$$

и в этом состоянии поверхностные волны становятся невозможными.

4.3.1. Внутренние волны

В данном случае трансцендентное уравнение по граничным уравнениям (3.34) и частотное уравнение для внутренних волн предоставляются так:

$$\begin{aligned} A \left[\xi_{lmp} c J'_m(\xi_{lmp} c) + m \chi_2 J_m(\xi_{lmp} c) \right] + \\ + B \left[\xi_{lmp} c Y'_m(\xi_{lmp} c) + m \chi_2 Y_m(\xi_{lmp} c) \right] = 0, \quad \text{при } r = R_0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} A \left[\xi_{lmp} J'_m(\xi_{lmp}) + m \chi_2 J_m(\xi_{lmp}) \right] + \\ + B \left[\xi_{lmp} Y'_m(\xi_{lmp}) + m \chi_2 Y_m(\xi_{lmp}) \right] = 0, \quad \text{при } r = r_0, \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{lmp} c J'_m(\xi_{lmp} c) + m \chi_2 J_m(\xi_{lmp} c) & \xi_{lmp} c Y'_m(\xi_{lmp} c) + m \chi_2 Y_m(\xi_{lmp} c) \\ \xi_{lmp} J'_m(\xi_{lmp}) + m \chi_2 J_m(\xi_{lmp}) & \xi_{lmp} Y'_m(\xi_{lmp}) + m \chi_2 Y_m(\xi_{lmp}) \end{vmatrix} = 0, \quad (4.36)$$

или

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m \chi_2 + m) J_m(\xi_{lmp} c) - \xi_{lmp} c J_{m+1}(\xi_{lmp} c) & (m \chi_2 + m) Y_m(\xi_{lmp} c) - \xi_{lmp} c Y_{m+1}(\xi_{lmp} c) \\ (m \chi_2 + m) J_m(\xi_{lmp}) - \xi_{lmp} J_{m+1}(\xi_{lmp}) & (m \chi_2 + m) Y_m(\xi_{lmp}) - \xi_{lmp} Y_{m+1}(\xi_{lmp}) \end{vmatrix} = 0.$$

Определяем корни ξ_{lmp} и собственные частоты $q_{lmp}^{(вну.)}$ для рассматриваемого случая при отсутствии свободной поверхности. Графическое решение уравнения (4.36) для случая $m=1$, $l=1$, $c=0.5$, полученное с помощью пакета Maple при

различных числах Fr^2 и высоте жидкости $H = 2$, представлено на рис. 4.6. Численные результаты ξ_{imp} для случаев $m = -1, 0, 1$; $p = 1, l = 1$ в таблице 4.6.

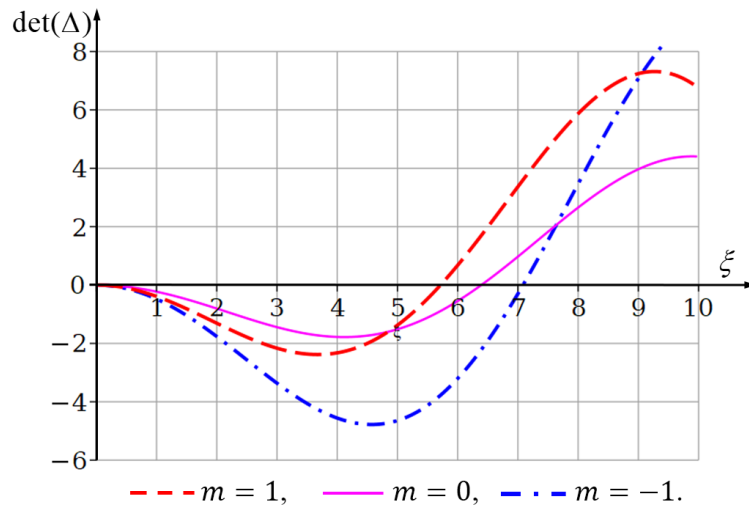


Рис. 4.6. Графическое решение уравнений (4.36) при $m = 1, l = 1, H = 2, c = 0.5$.

Пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$), штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

Таблица 4.6. Значения корней ξ_{imp} при $m = -1, 0, 1$; $l = 1, p = 1, H = 2$, $c = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$.

c	m	ξ_{imp} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
0.1	-1	4.841711	0.210031	0.317029	0.380246	0.406146	0.406759
	0	3.940942	3.940942	3.940942	3.940942	3.940942	3.940942
	1	2.897802	2.683806	2.189607	1.723254	1.542198	1.321155
0.2	-1	5.094931	0.297208	0.376461	0.428111	0.438760	0.442650
	0	4.235748	4.235748	4.235748	4.235748	4.235748	4.235748
	1	3.281669	2.787741	2.194992	1.768694	1.530248	1.460032
0.5	-1	7.085253	0.353999	0.435185	0.452712	0.478973	0.482758
	0	6.393157	6.393157	6.393157	6.393157	6.393157	6.393157
	1	5.715924	2.853746	2.261754	1.904837	1.663137	1.536783
0.8	-1	16.27343	1.959524	1.791716	1.567111	1.438568	1.342581
	0	15.73755	15.73755	15.73755	15.73755	15.73755	15.73755
	1	15.21865	3.061509	2.280413	1.781061	1.588628	1.553259

Продолжение таблицы 4.6.

c	m	ξ_{lmp} при $Fr^2 > 1$					
		$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 1.2$	$Fr^2 = 1.4$	$Fr^2 = 1.6$	$Fr^2 = 1.8$	$Fr^2 = 2$
0.1	-1	0.416229	0.418693	0.418388	0.419119	0.415967	0.411621
	0	3.940942	3.940942	3.940942	3.940942	3.940942	3.940942
	1	1.417721	1.368829	1.289934	1.109661	1.122817	1.067033
0.2	-1	0.453373	0.454206	0.453111	0.449532	0.444429	0.438408
	0	4.235748	4.235748	4.235748	4.235748	4.235748	4.235748
	1	1.427058	1.368367	1.269730	1.189607	1.122856	1.066134
0.5	-1	0.488896	0.488223	0.484524	0.478766	0.471806	0.464185
	0	6.393157	6.393157	6.393157	6.393157	6.393157	6.393157
	1	1.432537	1.391647	1.274627	1.194163	1.125118	1.061140
0.8	-1	1.271583	1.226182	1.147808	1.082363	1.026721	0.978693
	0	15.73755	15.73755	15.73755	15.73755	15.73755	15.73755
	1	1.454990	1.394088	1.292057	1.209447	1.138793	1.082567

В таблице 4.7 приведены численные результаты собственных частот q_{lmp} внутренних волн для случаев $m = -1, 0, 1$ при различных числах Fr^2 , ($Fr^2 = 0 \div 2$). Зависимость собственных частот q_{lmp} от безразмерных параметров $\bar{H} = H/R_0$ и $c = r_0/R_0$ в коаксиальном цилиндрическом сосуде при большой скорости вращения представлена на рис. 4.7. Из таблицы 4.7 и рис. 4.7 видно, что наличие стратификации приводит к увеличению частот свободных колебаний жидкости. Как видно из рис. 4.7, значения собственных частот q_{lmp} внутренних волн уменьшаются при увеличении значения параметра \bar{H} и заметно не изменяются в зависимости от параметра c .

Таблица 4.7. Значения собственных частот q_{lmp} внутренних волн при $m = -1, 0, 1$;
 $l = 1, p = 1, H = 2, c = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$.

c	m	q_{lmp} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
0.1	-1	0.308595	1.085782	1.159829	1.229403	1.298924	1.351835
	0	0.370257	0.405596	0.438093	0.468342	0.496751	0.517034
	1	0.476554	0.553340	0.689703	0.852118	0.957358	1.068683
0.2	-1	0.294621	1.076348	1.150632	1.220397	1.292178	1.344076
	0	0.347704	0.380890	0.411409	0.439814	0.466494	0.485543
	1	0.431747	0.537754	0.688584	0.839950	0.961006	1.022824
0.5	-1	0.216444	1.068644	1.140264	1.215439	1.283307	1.334807
	0	0.238603	0.261376	0.282319	0.301812	0.320120	0.333191
	1	0.264987	0.528234	0.674940	0.804755	0.921219	0.998168
0.8	-1	0.096079	0.685163	0.780009	0.895477	0.989412	1.061517
	0	0.099315	0.108798	0.117515	0.125629	0.133250	0.138691
	1	0.102670	0.500069	0.671200	0.836674	0.943314	0.992948

Продолжение таблицы 4.7.

c	m	q_{lmp} при $Fr^2 > 1$					
		$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 1.2$	$Fr^2 = 1.4$	$Fr^2 = 1.6$	$Fr^2 = 1.8$	$Fr^2 = 2$
0.1	-1	1.400794	1.433200	1.497001	1.557948	1.617564	1.675479
	0	0.536553	0.549179	0.573598	0.597022	0.619556	0.641301
	1	1.075771	1.118231	1.197238	1.316980	1.361300	1.432749
0.2	-1	1.392304	1.424868	1.488502	1.550220	1.610115	1.668292
	0	0.503870	0.515727	0.538660	0.560654	0.581818	0.602239
	1	1.072594	1.118394	1.204803	1.285426	1.361284	1.433130
0.5	-1	1.383668	1.416401	1.480368	1.542399	1.602591	1.661043
	0	0.345768	0.353906	0.369642	0.384737	0.399259	0.413273
	1	1.070733	1.110206	1.202967	1.283632	1.360357	1.435247
0.8	-1	1.126340	1.169191	1.250836	1.327764	1.400656	1.470059
	0	0.143926	0.147313	0.153863	0.160146	0.166192	0.172025
	1	1.063135	1.158678	1.196445	1.277619	1.354751	1.426160

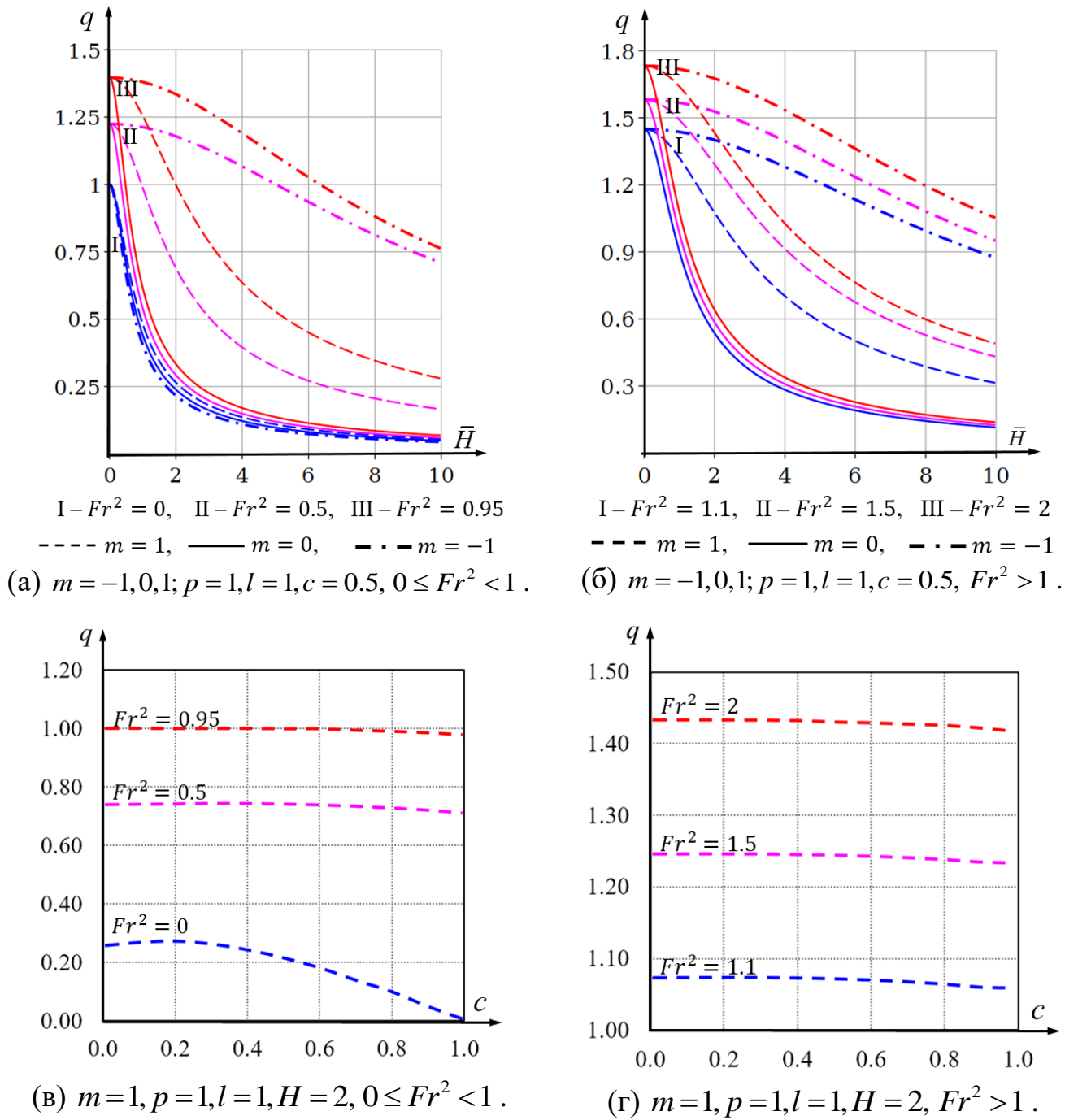


Рис. 4.7. Зависимость собственных частот $q_{lmp} = \omega_{lmp} / \omega_0$ внутренних волн от параметров \bar{H} и c .

Пунктирные линии – прямые волны ($m = 1$), сплошные линии – стоячие волны ($m = 0$), штрихпунктирные линии – обратные волны ($m = -1$).

Как следует из численных результатов, представленных в таблицах 4.2 и 4.7, при большой скорости вращения собственные частоты q_{lmp} всех типов внутренних волн ($m = -1, 0, 1$) в цилиндрическом сосуде при наличии свободной поверхности и

в коаксиальном цилиндрическом сосуде при отсутствии при свободной поверхности мало отличаются.

4.3.2. Двумерные колебания

Собственные числа двумерных волн в коаксиальном цилиндрическом сосуде при $l=0$ определяются подстановкой (4.32) в граничные условия на внешней и внутренней стенках. Это достигается решением первого уравнения граничного условия (4.34). В результате получаем характеристическое уравнение

$$[\chi^2(1 + Fr^2) - 1](c^{-m} - c^m) = 0. \quad (4.37)$$

Определяем численные результаты собственных чисел $q_{0m} = \frac{1}{\chi}$ двумерных волн при различных числах Fr^2 , ($Fr^2 = 0 \div 2$), для случаев $m = 1, 2, 3$ при $\chi > 0$ по уравнению (4.37). Полученные численные результаты не зависят от соотношения радиусов c и m (таблица 4.7).

Таблица 4.8. Значения собственных частот q_{0m} двумерных волн при $H = 2$.

c	m	q_{0m} при $0 \leq Fr^2 < 1$					
		$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.2$	$Fr^2 = 0.4$	$Fr^2 = 0.6$	$Fr^2 = 0.8$	$Fr^2 = 0.95$
0.1, 0.2, ..., 0.9	1, 2, ...	1	1.095445	1.183216	1.264912	1.341641	1.396424

Продолжение таблицы 4.8.

c	m	q_{0m} при $Fr^2 > 1$					
		$Fr^2 = 1.1$	$Fr^2 = 1.2$	$Fr^2 = 1.4$	$Fr^2 = 1.6$	$Fr^2 = 1.8$	$Fr^2 = 2$
0.1, 0.2, ..., 0.9	1, 2, ...	1.449137	1.483239	1.549194	1.612451	1.673321	1.732052

4.4. Вывод по главе 4

Полученная краевая задача приводит к эллиптическому или гиперболическому дифференциальному уравнению, в зависимости от соотношения частоты плавучести и угловой скорости вращения. Проведённое исследование свободных колебаний стратифицированной жидкости при большой скорости вращения показало, что спектр собственных чисел колебаний состоит из двух множеств действительных чисел: двухиндексного множества q_{lm} для поверхностных волн и трёхиндексного q_{lmp} для внутренних волн.

При большой скорости вращения, собственные частоты q_{lmp} внутренних волн в обычном цилиндрическом сосуде со свободной поверхностью и в коаксиальном цилиндрическом сосуде без свободной поверхности близки между собой, если значения стратификации и размеры цилиндрической полости одинаковы. В случае полного заполнения при любых числах Fr^2 , ($Fr^2 = k_\rho / 4$) собственные частоты внутренних обратных волн больше частот прямых волн ($q_{lmp}^- > q_{lmp}^+$), и значения обратных волн самые большие их трех типов бегущих волн ($q_{lmp}^- > q_{lmp}^+ > q_{lmp}^0$). Частичное заполнение также приводит к образованию прямых, обратных и стоячих бегущих волн на свободной поверхности. Собственные частоты поверхностных обратных волн больше стоячих и прямых волн ($q_{lm}^- > q_{lm}^0 > q_{lm}^+$) в независимости от числа Fr^2 . Из приведенных результатов следует, что наличие стратификации приводит к увеличению частот свободных колебаний жидкости для внутренних и поверхностных волн.

ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, НАПОЛНЕННОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В главе 5 рассматривается устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью или частично наполненной стратифицированной жидкостью. Устойчивость стационарного вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью исследуется с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициенты этих уравнений определяются из решения краевых задач гидродинамики, не зависящих от времени. Получены характеристические уравнения краевой задачи и уравнения движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью, вращающегося вокруг своей оси. Записаны уравнения движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью в векторной форме и выражены коэффициенты их интегралов. Представлены области неустойчивости стационарного вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью и частично наполненной (а) однородной жидкостью и (б) стратифицированной жидкостью в безразмерных параметрах.

5.1. Устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с полостью, полностью заполненной стратифицированной жидкостью при малой скорости вращения

Устойчивость движения твёрдого тела, содержащего жидкость в полости, широко исследовалась многими учеными, в том числе в работах [1, 33-36, 54, 65, 73, 81-82, 91, 104]. По мере расширения использования криогенных и стратифицированных жидкостей в различных областях возрастает интерес к проблемам колебаний этих жидкостей в резервуарах различной формы. Хорошо известно, что криогенные жидкости обладают неоднородностью плотности и температуры во всех режимах хранения и эксплуатации. Конвективное перемешивание криогенной жидкости в резервуаре приводит к образованию слоя со значительным градиентом плотности и температуры в вертикальном направлении. Такой тип жидкости в научной литературе называется

стратифицированной жидкостью (89). Несжимаемая стратифицированная жидкость является подходящей моделью для изучения движения такой механической системы.

В работах [33-35] исследована устойчивость стационарного вращения твёрдого тела цилиндрической формы, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью. Работа [65] сосредоточена на экспериментальном исследовании устойчивости движения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной жидкостью. В этих работах сделан вывод о том, что наличие жидкости в полости исследуемой модели оказывает существенное влияние на её поведение при вращении, и что резонансное возбуждение внутренних волн во вращающейся жидкости, заполняющей сосуд, является ключевым фактором возникновения неустойчивости. В работах [1, 36, 104] рассматривалась устойчивость при стационарном вращении твёрдого тела с полостью, заполненной однородной или стратифицированной жидкостью. Также были построены зоны неустойчивости движения твёрдого тела с жидкостью.

5.1.1. Постановка задачи

Предположим, что имеется твёрдое тело с цилиндрической полостью, полностью заполненной стратифицированной жидкостью. Тело совершает стационарное вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ вокруг неподвижной точки O_1 , являющейся центром масс всей механической системы. Геометрический центр полости O_1^* находится на оси O_1x_3 на расстояние d от неподвижной точки O_1 (рис. 5.1).

Связь между координатами $O_1x_1x_2x_3$ и $O_1^*x_1^*x_2^*x_3^*$:

$$x_1 = x_1^*, \quad x_2 = x_2^*, \quad x_3 = x_3^* + d.$$

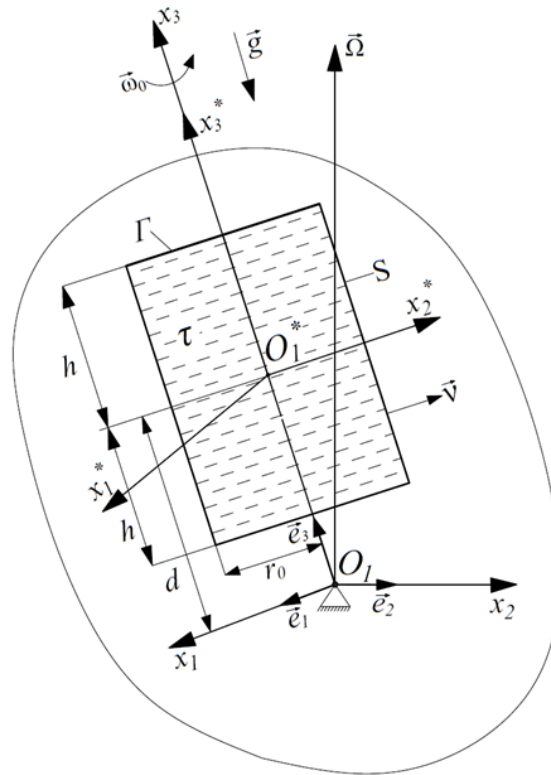


Рис. 5.1. Твёрдое тело с цилиндрической полостью, полностью заполненной стратифицированной жидкостью.

Предполагая стационарное вращение с постоянной угловой скоростью ($\omega_0 = const$) в невозмущенном движении, можно считать, что свободная поверхность жидкости расположена перпендикулярно вектору \vec{g} и удовлетворяется условие ($\omega_0^2 \ell / g \ll 1$) (ℓ – характерный размер полости). В этом случае потенциальная энергия на единицу массы жидкости равна $\Pi_0 = -\vec{g} x_3$, если пренебречь центробежными силами инерции при вращении.

Рассмотрим возмущенное движение относительно стационарного вращения твёрдого тела, имеющего полость, заполненную стратифицированной жидкостью. Угловая скорость тела представляется в виде [36]

$$\vec{\omega}_T = \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega} = \omega_0 \vec{e}_3 + \vec{\Omega}, \quad (5.1)$$

здесь $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3$ – угловая скорость стационарного вращения тела, направленная по орту \vec{e}_3 оси $O_1 x_3$, связанной с телом системы координат $O_1 x_1 x_2 x_3$, $\vec{\Omega}$ – угловая скорость тела в возмущенном движении, являющаяся величиной первого порядка

малости по сравнению с $\vec{\omega}_0$ и введем вектор малых углов поворота $\vec{\theta}(t)$,

$$\vec{\Omega} = \dot{\vec{\theta}} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}.$$

Используем двойное приближение Обербека-Буссинеска [24, 89]: $\rho_0 = \rho_0^* = const$ в уравнениях движения, для вычисления ρ и \vec{u} . С учетом сделанных допущений уравнения возмущённого движения стратифицированной жидкости в системе $O_1x_1x_2x_3$ с точностью до второго порядка малости имеют вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} - \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p - g(\vec{e}_3 \times \vec{\theta}) \quad \text{в } \tau, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad (5.3)$$

с граничным условием

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{на } S, \quad (5.4)$$

Здесь \vec{u} – скорость жидкости в системе $O_1x_1x_2x_3$, \vec{r} – радиус-вектор, ρ – плотность жидкости, τ – область, занятая жидкостью, S – граница области τ , $\vec{\nu}$ – орт внешней нормали к поверхности S , ρ_0^* – постоянное среднее значение плотности жидкости при использовании двойного приближения Обербека-Буссинеска.

Для решения краевой задачи при использовании приближения Обербека-Буссинеска необходимо учитывать плотность жидкости при невозмущенном движении, которая изменяется по закону

$$\rho_0 = \rho_0^*(1 - \beta x_3^*) = \rho_0^*[1 - \beta(x_3 - d)].$$

При $\vec{\Omega} \equiv 0$, уравнения (5.2) и (5.3) сводятся к задаче о собственных колебаниях жидкости в полости вращающегося тела. Эта задача допускает частные решения, пропорциональные $e^{\lambda t}$ [35-36]. Для того чтобы найти решение задачи, будем рассматривать гармонические колебания:

$$\vec{u} = \vec{v} e^{\lambda t}, \quad p = \varphi e^{\lambda t}, \quad \rho = \psi e^{\lambda t},$$

где $\lambda = i\omega$ – характеристическое комплексное число, ω – частота колебаний жидкости. Режим стационарного вращения будем считать устойчивым, если все

числа λ имеют отрицательные действительные части, и неустойчивым, если хотя бы одно из возможных значений λ имеет положительную действительную часть.

Уравнения возмущённого движения стратифицированной жидкости с граничным условием (5.2) – (5.4), пропорциональным $e^{\lambda t}$, получаются в следующих формах:

$$\lambda \vec{v} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v} + \frac{N^2}{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla \varphi, \quad (5.5)$$

$$\psi = \frac{1}{\lambda} \rho_0^* \beta \vec{v} \cdot \vec{e}_3, \quad (5.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ в } \tau, \quad \vec{v} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ на } S, \quad (5.7)$$

здесь $N^2 = \frac{1}{\rho_0^*} \nabla \rho_0 \cdot \nabla \Pi_0 = -\frac{g}{\rho_0^*} \frac{d\rho_0}{dx_3} = g\beta$ – квадрат частоты плавучести или квадрат частоты Брента-Вяйсяля [2-3, 47, 50-52, 74, 89, 95-96].

В результате компоненты скорости частиц жидкости могут быть выражены в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\chi}{2\omega_0(\chi^2 - 1)} \left(-i \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right), \\ v_2 &= \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\chi}{2\omega_0(\chi^2 - 1)} \left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right), \\ v_3 &= \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\chi}{2\omega_0(\chi^2 - 1)} (\sigma^2 - 1) i \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $\chi = \frac{2\omega_0}{\omega}$, $\sigma^2 = \frac{N^2 - 4\omega_0^2}{N^2 - \omega^2} = \frac{\chi^2(1 - Fr^2)}{1 - Fr^2\chi^2}$, $Fr^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2}$, \vec{e}_3 – орт оси вращения x_3 .

Краевая задача, соответствующая первому уравнению (5.7), будет переписана в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \quad (5.9)$$

а второе уравнение (5.7) будет переписано в виде:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} v_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} v_2 \right) - i \chi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} v_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} v_2 \right) + (1 - \sigma^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} v_3 = 0. \quad (5.10)$$

Введем цилиндрическую систему координат (r, η, x) ,

$$x_1 = r \cos \eta, \quad x_2 = r \sin \eta, \quad x_3 = x.$$

5.1.2. Краевая задача

Краевая задача (5.9) в цилиндрических координатах (r, η, x) , выражается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (5.11)$$

а граничное условие, соответствующее уравнению (5.10) при положении начало координат в неподвижной точке O_1 , имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad \text{при } x = d \pm h. \end{aligned} \quad (5.12)$$

где $\chi = \frac{2\omega_0}{\omega}$, $\sigma^2 = \frac{N^2 - 4\omega_0^2}{N^2 - \omega^2} = \frac{\chi^2(1 - Fr^2)}{1 - Fr^2\chi^2}$, $Fr^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2}$, $\bar{\beta} = \beta r_0 = \varepsilon^2 Fr^2$,

$\varepsilon = 2\omega_0 \sqrt{r_0/g}$, полагая при медленном вращении $\varepsilon \approx 0.2$.

Непосредственная проверка показывает, что краевая задача (5.11) и граничные условия (5.12) идентичны задачам для однородной вращающейся жидкости, описанным Л.В. Докучаевым [36].

Полагая функцию $\varphi(r, \eta, x) = R(r)H(\eta)Z(x)$, и применяя метод разделения переменных [48, 68-69], получим решение краевой задачи (5.11) с граничным условием (5.12) в виде:

$$\varphi_{lmp} = \frac{J_m(\xi_{lmp} \bar{r})}{J_m(\xi_{lmp})} e^{im\eta} \sin k_l(x-d), \quad (5.13)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{r_0}, \quad k_l = \frac{(2l+1)\pi}{2h}, \quad \xi_{lmp} = \bar{k}_l \sqrt{\frac{\chi_{lmp}^2 - 1}{1 - Fr^2 \chi_{lmp}^2}}, \quad \bar{k}_l = k_l r_0, \\ \chi_{lmp} &= \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 + \xi_{lmp}^2}{\bar{k}_l^2 + \xi_{lmp}^2 Fr^2}}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad p = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

здесь $J_m(\xi_{lmp}\bar{r})$ – функция Бесселя 1-го рода m -го порядка.

Не все тона колебаний равноценны по своему значению. При исследовании совместных колебаний жидкости и корпуса летательного аппарата важны лишь асимметричные колебания, соответствующие значению $m = 1$, так как только они создают поперечные силы и моменты, действующие на корпус. Причем первостепенное значение имеет основной тон колебаний [69].

Функции φ_{lmp} будут представлены в виде произведения для случая $m = 1$ [36],

$$\varphi_{lp} = \varphi_n = g_n(x, r)e^{in}. \quad (5.14)$$

Функция $g_n(x, r)$ должна, согласно краевой задачей (5.11) и граничным условиям (5.12).

$$\frac{\partial^2 g_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g_n}{\partial r} - \frac{g_n}{r^2} + (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2} = 0, \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n}{\partial r} + \chi_n \frac{g_n}{r} &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial g_n}{\partial x} &= 0, \quad \text{при } x = d \pm h. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Решение краевой задачи для случая $m = 1$ получаем в виде,

$$g_n = g_{lp}(x, r) = \frac{J_1(\xi_{lp}\bar{r})}{J_1(\xi_{lp})} \sin k_l(x - d), \quad (5.17)$$

Гармоники, симметричные по координате x , не возбуждаются. Индекс n представляет собой всевозможные сочетания порядковых номеров продольных и поперечных гармоники l и p . Величина ξ_{lp} является p -м корнем характеристического уравнения

$$Y_2(\xi) = \xi J_1'(\xi) + \chi_{lp} J_1(\xi) = 0, \quad \text{при } r = r_0. \quad (5.18)$$

Графическое решение уравнения (5.18) для случая $\chi_{lp} > 0$ при различных числах Fr^2 и корней (l, p) рассмотрено в главе (3).

Скорость частиц жидкости может быть выражена в векторной форме, как описано в ссылке [36],

$$\vec{v}_n = \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\chi_n}{2\omega_0(\chi_n^2 - 1)} \left[\chi_n \vec{e}_3 \times \nabla \varphi_n - i \nabla \varphi_n + i \sigma_n^2 \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \cdot \nabla \varphi_n) \right], \quad (5.19)$$

и обладает свойством ортогональности в области τ

$$\int_{\tau} \vec{v}_n \cdot \vec{v}_n^* d\tau = 0, \quad \text{при } n \neq n^*. \quad (5.20)$$

Здесь \vec{v}_n^* является функцией комплексно-сопряженной с \vec{v}_n .

Применим метод Бубнова-Галёркина к уравнению (5.2). Процедура Галеркина предполагает приближенное решение краевой задачи с помощью линейной комбинации конечного числа базисных функций $\vec{v}_n(x)$ [24]. Вектор скорости может быть представлен в виде разложения функции собственных векторов (5.19) краевой задачи (5.11) [36].

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_n(t) \vec{v}_n(x_1, x_2, x_3), \quad (5.21)$$

$$2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}_n = -\lambda_n \vec{v}_n - \frac{N^2}{\lambda_n} \vec{v}_n \cdot \vec{e}_3 - \frac{1}{\rho_0^*} \nabla \varphi, \quad (5.22)$$

здесь $\dot{s}_n(t)$ – коэффициенты в разложения (5.21), которые теперь зависят от времени.

Подставим разложение (5.21) в уравнение (5.2) и с учетом уравнения (5.22) сводит к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{s}_n \vec{v}_n + \dot{s}_n \left(-i\omega_n \vec{v}_n + \frac{i}{\omega_n} N^2 \vec{v}_n \cdot \vec{e}_3 - \frac{1}{\rho_0^*} \nabla p \right) + N^2 s_n \vec{v}_n \cdot \vec{e}_3 \right] + \vec{\theta} \times \vec{r} + \frac{1}{\rho_0^*} \nabla p + g(\vec{e}_3 \times \vec{\theta}) = 0. \quad (5.23)$$

Умножим уравнение (5.23) скалярно на \vec{v}_n^* и проинтегрируем по объёму τ . В силу свойства ортогональности (5.20) уравнение (5.23) сводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$N_n^2 (\ddot{s}_n - i\omega_n \dot{s}_n) + N_{3n}^2 \left(\frac{i}{\omega_n} \dot{s}_n + s_n \right) + \vec{a}_n^* \cdot \vec{\theta} + \vec{d}_n^* \cdot \vec{\theta} = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (5.24)$$

Коэффициенты в уравнениях (5.24) выражаются через собственные функции \vec{v}_n и \vec{v}_n^*

$$\begin{aligned} N_n^2 &= \int_{\tau} \rho_0 (\vec{v}_n \cdot \vec{v}_n^*) d\tau & ; & & N_{3n}^2 &= N^2 \int_{\tau} \rho_0 (v_{3n} \cdot v_{3n}^*) d\tau ; \\ \vec{a}_n^* &= \int_{\tau} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{v}_n^*) d\tau & ; & & \vec{d}_n^* &= g \int_{\tau} \rho_0 (\vec{v}_n^* \times \vec{e}_3) d\tau . \end{aligned} \quad (5.25)$$

5.1.3. Собственные колебания вращающегося тела с жидкостью

Рассмотрим собственные колебания свободного вращающегося тела со стратифицированной жидкостью около стационарного вращения (см. рис. 5.1). Уравнения возмущенного движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью, находящегося в однородном поле массовых сил интенсивности \vec{j} , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} J \cdot \vec{\dot{\Omega}} + \vec{\Omega} \times J \cdot \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_0 \times J \cdot \vec{\Omega} + \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \vec{\dot{u}} d\tau + \int_{\tau} \rho_0 \vec{\omega}_0 \times (\vec{r} \times \vec{u}) d\tau + \\ + \int_{\tau} \dot{\rho} (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau - \int_{\tau} \rho (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau = \vec{M} , \end{aligned} \quad (5.26)$$

здесь $J = J^0 + J'$, J^0 – тензор инерции твёрдого тела без жидкости, J' – тензор инерции затвердевшей жидкости, \vec{M} – момент внешних сил.

Уравнение (5.26) при учете разложения (5.21) будет иметь следующий вид:

$$J \cdot \vec{\ddot{\theta}} + \vec{\dot{\theta}} \times J \cdot \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_0 \times J \cdot \vec{\dot{\theta}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{s}_n \vec{a}_n + \dot{s}_n (\vec{\omega}_0 \times \vec{a}_n - \vec{b}_n) + s_n c_n \right] = \vec{M} . \quad (5.27)$$

Представленные формы (5.24) и (5.27) дают систему уравнений для возмущенного движения тела. Эта система позволяет рассматривать режимы, в которых на тело действуют произвольные управляющие моменты.

Для осесимметричной полости гидростатический момент стратифицированной жидкости относительно оси симметрии равен нулю. Кроме того, скалярное уравнение движения вокруг оси O_1x_3 отделяется от остальных, а уравнения вращения тела относительно поперечных осей O_1x_1 и O_1x_2 идентичны.

Коэффициенты в уравнении (5.27) обозначим

$$\vec{a}_n = \int_{\tau} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{v}_n) d\tau, \quad \vec{b}_n = \int_{\tau} \nabla \rho_0 \vec{v}_n (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau, \quad \vec{c}_n = \int_{\tau} \nabla \rho_0 \vec{v}_n (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau. \quad (5.28)$$

Здесь обозначим ещё один коэффициент

$$\vec{d}_n = g \int_{\tau} \rho_0 (\vec{v}_n \times \vec{e}_3) d\tau. \quad (5.29)$$

Результаты интегралов показывают, что компоненты векторных величин коэффициентов \vec{a}_n, \vec{a}_n^* и \vec{d}_n, \vec{d}_n^* обладают следующими свойствами.

$$a_{1n} = a_{1n}^* = -ia_{2n} = ia_{2n}^* ; \quad d_{1n} = d_{1n}^* = -id_{2n} = id_{2n}^*. \quad (5.30)$$

Коэффициенты из уравнений (5.25), (5.28) и (5.29) через функцию g_n выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} N_n^2 &= \frac{\pi \chi_n^2}{2 \rho_0^* \omega_0^2} \int_{-h}^h \int_0^{r_0} \left\{ \frac{(\sigma_n^2 - 1)^2}{(\chi_n^2 - 1)^2} \left(\frac{\partial g_n}{\partial x} \right)^2 + \frac{\chi_n^2 + 1}{(\chi_n^2 - 1)^2} \left[\left(\frac{\partial g_n}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{g_n}{r} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 \chi_n}{(\chi_n^2 - 1)^2} \frac{\partial g_n}{\partial r} \frac{g_n}{r} \right\} r dr dx, \\ N_{3n}^2 &= \frac{2 \pi F r^2 \chi_n^2 (\sigma_n^2 - 1)^2}{\rho_0^* (\chi_n^2 - 1)^2} \int_{-h}^h \int_0^{r_0} \left(\frac{\partial g_n}{\partial x} \right)^2 r dr dx, \\ a_n = a_{1n} &= -\frac{\pi \chi_n}{2 \omega_0} \int_{-h}^h \int_0^{r_0} \left[\frac{\sigma_n^2 - 1}{\chi_n^2 - 1} r \frac{\partial g_n}{\partial x} + \frac{x}{\chi_n - 1} \left(\frac{\partial g_n}{\partial r} + \frac{g_n}{r} \right) \right] r dr dx, \\ b_n = ib_{1n} = b_{2n} &= -\frac{2 \pi F r^2 \chi_n (\sigma_n^2 - 1) \omega_0^2}{g (\chi_n^2 - 1)} \int_{-h}^h \int_0^{r_0} x \frac{\partial g_n}{\partial x} r^2 dr dx, \\ c_n = c_{1n} &= \frac{2 \pi F r^2 \chi_n (\sigma_n^2 - 1) \omega_0}{\chi_n^2 - 1} \int_{-h}^h \int_0^{r_0} \frac{\partial g_n}{\partial x} r^2 dr dx, \\ d_n = d_{1n} &= \frac{\pi g \chi_n}{2 \omega_0 (\chi_n - 1)} \int_{-h}^h \int_0^{r_0} \left(\frac{\partial g_n}{\partial r} + \frac{g_n}{r} \right) r dr dx. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Компоненты векторного уравнения (5.27) получим

$$\begin{aligned} M_1 &= J_{11}\ddot{\theta}_1 + (J_{33} - J_{11})\dot{\theta}_2\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{s}_n a_{1n} + \dot{s}_n(-\omega_0 a_{2n} - b_{1n}) + s_n c_{1n}], \\ M_2 &= J_{22}\ddot{\theta}_2 - (J_{33} - J_{11})\dot{\theta}_1\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{s}_n a_{2n} + \dot{s}_n(\omega_0 a_{1n} - b_{2n}) + s_n c_{2n}], \\ M_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Если ось Ox_3 является главной осью инерции системы и осью вращения, то имеем

$$J_{jk} = J_{kj} = 0; \quad (j, k = 1, 2, 3).$$

Когда заменим $J_{22} = J_{11}$, $a_{2n} = ia_{1n}$, $b_{1n} = -ib_{2n}$, $c_{2n} = ic_{1n}$ уравнение (5.32) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} M_1 &= J_{11}\ddot{\theta}_1 + (J_{33} - J_{11})\dot{\theta}_2\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{s}_n a_{1n} + i\dot{s}_n(-\omega_0 a_{1n} + b_{2n}) + s_n c_{1n}], \\ M_2 &= J_{11}\ddot{\theta}_2 - (J_{33} - J_{11})\dot{\theta}_1\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [i\ddot{s}_n a_{1n} + \dot{s}_n(\omega_0 a_{1n} - b_{2n}) + i s_n c_{1n}], \\ M_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Теперь из первого уравнения (5.33) вычтем второе уравнение, умноженное на мнимую единицу, и получаем в виде

$$M_1 - iM_2 = J_{11}(\ddot{\theta}_1 - i\ddot{\theta}_2) + i\omega_0(J_{33} - J_{11})(\dot{\theta}_1 - i\dot{\theta}_2) + \sum_{n=1}^{\infty} 2[\ddot{s}_n a_{1n} + i\dot{s}_n(b_{2n} - \omega_0 a_{1n}) + s_n c_{1n}]. \quad (5.34)$$

Заменим $J_{11} = J_{22} = A$, $J_{33} = C$, $\theta_1 - i\theta_2 = \theta$, $M_1 - iM_2 = M$, $a_{1n} = a_{1n}^* = a_n$, $b_{2n} = b_n$, $c_{1n} = c_n$, $d_{1n} = d_{1n}^* = d_n$ получим следующую систему уравнений, эквивалентную системам (5.24) и (5.34)

$$A\ddot{\theta} + i(C - A)\dot{\theta}\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2[\ddot{s}_n a_n + i\dot{s}_n(b_n - \omega_0 a_n) + s_n c_n] = M, \quad (5.35)$$

$$N_n^2(\ddot{s}_n - i\omega_n \dot{s}_n) + N_{3n}^2 \left(\frac{i}{\omega_n} \dot{s}_n + s_n \right) + a_n \cdot \ddot{\theta} + d_n \cdot \theta = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5.36)$$

Здесь

$$A = A^0 + A' = J_{11}^0 + J_{11}', \quad C = C^0 + C' = J_{33}^0 + J_{33}'.$$

Для решения системы уравнений (5.35) и (5.36) полагая $\theta = \theta_0 e^{i\alpha t}$, $s_n = s_{n_0} e^{i\alpha t}$ и подставим в уравнение (5.36), получим

$$s_{n_0} = \frac{\theta_0 (a_n \alpha^2 - d_n)}{\left(N_n^2 \alpha + N_{3n}^2 \frac{1}{\omega_n} \right) (\omega_n - \alpha)}. \quad (5.37)$$

Рассмотрим случай, когда момент внешних сил равен нулю ($\vec{M} = 0$). В этом случае уравнение (5.35), с учетом уравнения (5.37), можно выразить в следующей форме:

$$A\alpha^2 + (C - A)\omega_0\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(a_n\alpha^2 - d_n)}{\left(N_n^2\alpha + N_{3n}^2 \frac{1}{\omega_n} \right) (\omega_n - \alpha)} \left[a_n\alpha^2 + (b_n - a_n\omega_0)\alpha - c_n \right] = 0. \quad (5.38)$$

Разделив на $\rho_0^* r_0^5 \bar{g}$ и уравнение (5.38) можно выразить в безразмерной форме:

$$\bar{A}\bar{\alpha}^2 + (\bar{C} - \bar{A})\bar{\omega}_0\bar{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\bar{a}_n\bar{\alpha}^2 - \bar{d}_n)}{\left(\bar{N}_n^2\bar{\alpha} + \bar{N}_{3n}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_n} \right) (\bar{\omega}_n - \bar{\alpha})} \left[\bar{a}_n\bar{\alpha}^2 + (\bar{b}_n - \bar{a}_n\bar{\omega}_0)\bar{\alpha} - \bar{c}_n \right] = 0. \quad (5.39)$$

Чтобы облегчить исследование уравнения (5.39), необходимо ввести безразмерные параметры:

$$\bar{A} = \frac{A}{\rho_0^* r_0^5}, \quad \bar{C} = \frac{C}{\rho_0^* r_0^5}, \quad \bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{g}}, \quad \bar{\omega}_n = \frac{\omega_n}{\sqrt{g}}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{g}},$$

$$\bar{a}_n = \frac{a_n}{\rho_0^* r_0^4}, \quad \bar{b}_n = \frac{b_n}{\rho_0^* r_0^4 \sqrt{g}}, \quad \bar{c}_n = \frac{c_n}{\rho_0^* r_0^4 g}, \quad \bar{d}_n = \frac{d_n}{\rho_0^* r_0^4 g},$$

$$\bar{N}_n^2 = \frac{N_n^2}{\rho_0^* r_0^3}, \quad \bar{N}_{3n}^2 = \frac{N_{3n}^2}{\rho_0^* r_0^3 g}, \quad \bar{g} = \frac{g}{r_0}.$$

Здесь $A = A^0 + A'$, $C = C^0 + C'$, A^0 и A' – моменты инерции твёрдого тела без жидкости и затвердевшей жидкости относительно поперечной оси O_1x_1 . C^0 и C' – относительно перпендикулярной оси O_1x_3 .

5.1.4. Вращение твёрдого тела при отсутствии массы жидкости

Случай, когда твёрдое тело не имеет жидкости в полости, т.е. при $\rho_0(x_3) = 0$, уравнение (5.39) сводится к виду

$$\bar{A}^0 \bar{\alpha} + (\bar{C}^0 - \bar{A}^0) \bar{\omega}_0 = 0, \quad (5.40)$$

где

$$\bar{A}^0 = \frac{A^0}{\rho_0^* r_0^5}, \quad \bar{C}^0 = \frac{C^0}{\rho_0^* r_0^5}.$$

Для устойчивости стационарного вращения твёрдого тела должно выполняться неравенство

$$\bar{C}^0 - \bar{A}^0 \geq 0. \quad (5.41)$$

Неравенство (5.41) является известным условием устойчивости стационарного вращения свободного твёрдого тела. Это условие требует, чтобы момент инерции C^0 был либо наибольшим, либо наименьшим главным центральным моментом инерции системы.

5.1.5. Вращение твёрдого тела с затвердевшей жидкостью

В этом случае жидкость не движется, а центр масс жидкости относительно твёрдого тела остается неподвижным. Моменты инерции всей механической системы $J_{jk} = J_{jk}^0 + J'_{jk}$ также остаются постоянными. Поэтому остается в силе предыдущий вывод: твёрдое тело с жидкостью будет устойчиво вращаться вокруг оси с наибольшим или наименьшим главным центральным моментом инерции системы.

5.1.6. Вращение твёрдого тела с однородной жидкостью

В этом разделе выведем условия устойчивости для цилиндрической полости, содержащей однородную жидкость. В этом случае уравнение (5.39) принимает вид [36],

$$\bar{A} \bar{\alpha} + (\bar{C} - \bar{A}) \bar{\omega}_0 - \bar{\alpha} (\bar{\alpha} - \bar{\omega}_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{E}_n}{\bar{\alpha} - \bar{\omega}_n} = 0, \quad (5.42)$$

здесь $\bar{E}_n = \frac{2\bar{a}_n^2}{\bar{N}_n^2}$.

В первом приближении, когда вместо бесконечной суммы в уравнении (5.42) можно оставить один главный член ($n=1$), получаем квадратное уравнение относительно α и его решение в виде

$$\bar{\alpha} = \frac{-[(\bar{C} - \bar{A})\bar{\omega}_0 - \bar{A}\bar{\omega}_1 + \bar{E}_1\bar{\omega}_0] \pm \sqrt{[(\bar{C} - \bar{A})\bar{\omega}_0 - \bar{A}\bar{\omega}_1 + \bar{E}_1\bar{\omega}_0]^2 + 4(\bar{C} - \bar{A})(\bar{A} - \bar{E}_1)\bar{\omega}_0\bar{\omega}_1}}{2(\bar{A} - \bar{E}_1)} \quad (5.43)$$

Для устойчивости стационарного вращения (необходимое условие) все корни уравнения (5.43) должны быть действительными. Для этого должно быть

$$\left[(\bar{C} - \bar{A})\bar{\omega}_0 - \bar{A}\bar{\omega}_1 + \bar{E}_1\bar{\omega}_0 \right]^2 + 4(\bar{C} - \bar{A})(\bar{A} - \bar{E}_1)\bar{\omega}_0\bar{\omega}_1 > 0, \quad (5.44)$$

Из условия (5.44) получим уравнение границ области устойчивости в безразмерных параметрах

$$\Delta = -\bar{E}_1 - (\bar{A} - 2\bar{E}_1)\delta_1 \pm 2\sqrt{\bar{E}_1\delta_1(\bar{A} - \bar{E}_1)(1 - \delta_1)}, \quad (5.45)$$

здесь $\Delta = \bar{C} - \bar{A}$, $\delta_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_0} = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{2}{\chi_1}$.

Предлагаем, что моменты инерции тела для произвольной формы $A^0 = const$, $C^0 = const$ и для затвердевшей однородной жидкости

$$A' = 2\pi\rho_0^*r_0^2h\left(\frac{1}{4}r_0^2 + \frac{1}{3}h^2 + d^2\right), \quad C' = \pi\rho_0^*r_0^4h.$$

Моменты инерции A' и C' затвердевшей однородной жидкости в безразмерных видах будут

$$\bar{A}' = 2\pi\bar{h}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\bar{h}^2 + \bar{d}^2\right), \quad \bar{C}' = \pi\bar{h}.$$

Безразмерные параметры следующие:

$$\bar{A}' = \frac{A'}{\rho_0^*r_0^5}, \quad \bar{C}' = \frac{C'}{\rho_0^*r_0^5}, \quad \bar{h} = \frac{h}{r_0}, \quad \bar{d} = \frac{d}{r_0}.$$

В этом случае для однородной жидкости ($Fr^2 = 0$) коэффициенты N_1^2 и a_1^2 записываются в виде

$$N_1^2 = \frac{\pi\chi_1^2}{8\rho_0^*\omega_0^2(\chi_1^2 - 1)^2} \left\{ (\chi_1^2 - 1)^2 \frac{k_l r_0^2}{\xi_1} [2k_l h + \sin(2k_l h)] \cos(2k_l d) \left[\xi_1 \left(\frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + 1 \right) - 2 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right] + \frac{1}{k_l} [2k_l h - \sin(2k_l h) \cos(2k_l d)] \left[(\chi_1^2 + 1) \left(\xi_1^2 \frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + \xi_1^2 - 2 \right) + 4\chi_1 \right] \right\},$$

$$a_1 = -\frac{\pi\chi_1}{\omega_0} \cos(k_l d) \left\{ \frac{r_0^3}{\xi_1^2} \sin(k_l h) \left(2 - \xi_1 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right) + \frac{r_0}{k_l^2 (\chi_1 - 1)} [\sin(k_l h) - k_l h \cos(k_l h)] \right\}. \quad (5.46)$$

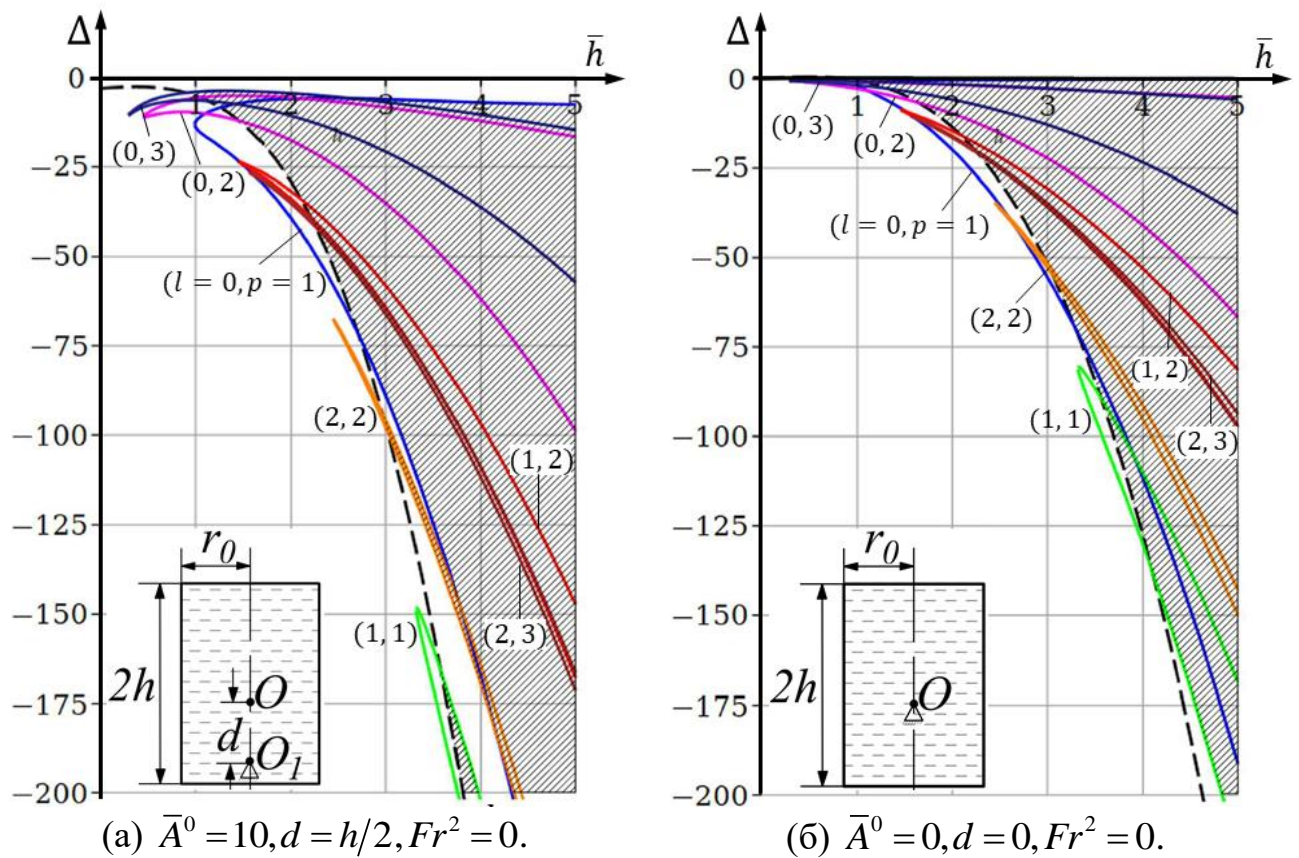


Рис. 5.2. Области неустойчивости вращения твёрдого тела с однородной жидкостью, полученные Докучаевым Л.В. [36].

Области неустойчивости в безразмерных параметрах Δ и \bar{h} ($\bar{h} = h/r_0$) построены по формуле (5.45). На рис. 5.2 показаны области неустойчивости твёрдого тела с однородной жидкостью в безразмерных переменных Δ и \bar{h} ($\bar{h} = h/r_0$) при различных значениях корней l и p ($l = 0 \div 2$; $p = 1 \div 3$). Области неустойчивости на рис. 5.2. (а) построены для твёрдого тела с жидкостью при

заданных параметрах $\bar{A}^0 = 10$, $d = h/2$. На рис. 5.2. (б) области неустойчивости для жидкости без твёрдого тела, т.е. при $\bar{A}^0 = 0$, $d = 0$. Здесь зоны неустойчивости заштрихованы. Пунктирная линия представляет собой границу на плоскости параметров Δ и \bar{h} физически возможных значений моментов инерции тела с жидкостью $(\bar{C} - \bar{A})$. Область под этой линией соответствует отрицательным значениям моментов инерции и, следовательно, должна быть исключена из рассмотрения [1, 36].

Из проведенных графических расчётов (рис. 5.2) видно, что увеличение числа p сдвигает ветви в область меньших значений абсолютной величины Δ , а ветви с большим числом l опускаются вниз на плоскости переменных Δ и \bar{h} . Одновременное увеличение чисел l и p приводит к слиянию соответствующих этим числам ветви с ветвями для меньших чисел l и p . Например, в обоих двух случаях при $\bar{A}^0 = 10$, $d = h/2$ ветви [(1,2),(2,3)] и при $\bar{A}^0 = 0$, $d = 0$ ветви [(1,2),(2,2),(2,3)] сливаются с основной зоной неустойчивости (0,1).

5.1.7. Вращение твёрдого тела со стратифицированной жидкостью

Выведем условия устойчивости для цилиндрической полости, содержащей стратифицированную жидкость ($Fr^2 \neq 0$). В первом приближении, когда вместо бесконечной суммы в уравнении (5.39) можно оставить один главный член ($n = 1$), получается следующее уравнение:

$$y_0 \bar{\alpha}^4 + y_1 \bar{\alpha}^3 + y_2 \bar{\alpha}^2 + y_3 \bar{\alpha} + y_4 = 0, \quad (5.47)$$

здесь

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{\bar{A}\bar{N}_1^* - (\bar{C} - \bar{A})\bar{N}_1^2 \bar{\omega}_0 + 2(\bar{a}_1 \bar{b}_1 - \bar{a}_1^2 \bar{\omega}_0)}{2\bar{a}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2},$$

$$y_2 = \frac{\bar{A}\bar{N}_{31}^2 + (\bar{C} - \bar{A})\bar{N}_1^* \bar{\omega}_0 - 2\bar{a}_1(\bar{c}_1 + \bar{d}_1)}{2\bar{a}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2}, \quad y_4 = \frac{2\bar{c}_1 \bar{d}_1}{2\bar{a}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2},$$

$$y_3 = \frac{(\bar{C} - \bar{A})\bar{N}_{31}^2 \bar{\omega}_0 + 2\bar{d}_1(\bar{a}_1 \bar{\omega}_0 - \bar{b}_1)}{2\bar{a}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2}, \quad \bar{N}_1^* = \bar{N}_1^2 \delta_1 \bar{\omega}_0 - \bar{N}_{31}^2 \frac{1}{\delta_1 \bar{\omega}_0}.$$

Коэффициенты из уравнения (5.31) для стратифицированной жидкости при $n = 1$ представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
N_1^2 &= \frac{\pi \chi_1^2}{8 \rho_0^* \omega_0^2 (\chi_1^2 - 1)^2} \left\{ (\sigma_1^2 - 1)^2 \frac{k_l r_0^2}{\xi_1} [2k_l h + \sin(2k_l h)] \cos(2k_l d) \left[\xi_1 \left(\frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + 1 \right) - 2 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{k_l} [2k_l h - \sin(2k_l h) \cos(2k_l d)] \left[(\chi_1^2 + 1) \left(\xi_1^2 \frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + \xi_1^2 - 2 \right) + 4 \chi_1 \right] \right\}, \\
N_{31}^2 &= \frac{\pi Fr^2 \chi_1^2 (\sigma_1^2 - 1)^2}{2 \rho_0^* (\chi_1^2 - 1)^2} \frac{k_l r_0^2}{\xi_1} [2k_l h + \sin(2k_l h)] \cos(2k_l d) \left[\xi_1 \left(\frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + 1 \right) - 2 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right], \quad (5.48) \\
a_1 &= -\frac{\pi \chi_1}{\omega_0} \cos(k_l d) \left\{ \frac{\sigma_1^2 - 1}{\chi_1^2 - 1} \frac{r_0^3}{\xi_1^2} \sin(k_l h) \left(2 - \xi_1 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right) + \frac{r_0}{k_l^2 (\chi_1 - 1)} [\sin(k_l h) - k_l h \cos(k_l h)] \right\}, \\
b_1 &= -\frac{4 \pi Fr^2 \chi_1 \omega_0^2 (\sigma_1^2 - 1)}{g (\chi_1^2 - 1)} \frac{r_0^3}{\xi_1^2} [\sin(k_l h) - k_l h \cos(k_l h)] \sin(k_l d) \left(2 - \xi_1 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right), \\
c_1 &= \frac{4 \pi Fr^2 \chi_1 (\sigma_1^2 - 1) \omega_0}{\chi_1^2 - 1} \frac{r_0^3}{\xi_1^2} \sin(k_l h) \cos(k_l d) \left(2 - \xi_1 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right), \\
d_1 &= -\frac{\pi g \chi_1}{\omega_0 (\chi_1 - 1)} \frac{r_0}{k_l} \sin(k_l h) \sin(k_l d).
\end{aligned}$$

Если $y_0 \neq 0$ дискриминант уравнения (5.47) имеет вид

$$\begin{aligned}
D &= 256 y_0^3 y_4^3 - 192 y_0^2 y_1 y_3 y_4^2 - 128 y_0^2 y_2^2 y_4^2 + 144 y_0^2 y_2 y_3^2 y_4 - \\
&\quad - 27 y_0^2 y_3^4 + 144 y_0 y_1^2 y_2 y_4^2 - 6 y_0 y_1^2 y_3^2 y_4 - 80 y_0 y_1 y_2^2 y_3 y_4 + \\
&\quad + 18 y_0 y_1 y_2 y_3^3 + 16 y_0 y_2^4 y_4 - 4 y_0 y_2^3 y_3^2 - 27 y_1^4 y_4^2 + \\
&\quad + 18 y_1^3 y_2 y_3 y_4 - 4 y_1^3 y_3^3 - 4 y_1^2 y_2^3 y_4 + y_1^2 y_2^2 y_3^2. \quad (5.49)
\end{aligned}$$

Приравняв $D = 0$, и получим уравнение 4-го порядка относительно $(\bar{C} - \bar{A})$,

$$z_1 (\bar{C} - \bar{A})^4 + z_2 (\bar{C} - \bar{A})^3 + z_3 (\bar{C} - \bar{A})^2 + z_4 (\bar{C} - \bar{A}) + z_5 = 0, \quad (5.50)$$

здесь

$$\begin{aligned}
z_1 &= \bar{\omega}_0^6 (\bar{N}_1^2)^2 (\bar{N}_{31}^2)^2 \left[4 \bar{N}_1^2 \bar{N}_{31}^2 + (\bar{N}_1^*)^2 \right], \\
z_2 &= 8 \bar{\omega}_0^5 (\bar{N}_{31}^2)^2 \left\{ \left[\left(\bar{A} \bar{N}_{31}^2 - \frac{\bar{a}_1 \bar{c}_1}{2} \right) \bar{N}_1^* + 3 \bar{a}_1^2 \bar{N}_{31}^2 \bar{\omega}_0 \right] (\bar{N}_1^2)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{N}_1^2 \bar{N}_1^*}{4} \left[2 \bar{N}_1^* \bar{a}_1^2 \bar{\omega}_0 + \bar{A} (\bar{N}_1^*)^2 - 18 \bar{N}_{31}^2 \bar{a}_1^2 \right] - (\bar{N}_1^*)^3 \bar{a}_1^2 \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_3 = & -8\bar{\omega}_0^4 (\bar{N}_{31}^2)^2 \left\{ \left[\frac{27}{2} (\bar{N}_{31}^2)^2 + (9\bar{N}_1^* \bar{\omega}_0 - 6\bar{N}_1^2 \bar{\omega}_0^2) \bar{N}_{31}^2 - \frac{(\bar{N}_1^*) \bar{\omega}_0^2}{2} \right] \bar{a}_1^4 + \right. \\
& + 2\bar{c}_1 \left[\bar{N}_1^* (\bar{N}_1^2 \bar{\omega}_0 - 3\bar{N}_1^*) - \frac{9}{2} \bar{N}_1^2 \bar{N}_{31}^2 \right] \bar{a}_1^3 + \left[\frac{\bar{A} \bar{N}_1^*}{2} (\bar{N}_1^2 \bar{\omega}_0 - 3\bar{N}_1^*) - \right. \\
& - 9\bar{A} \bar{N}_1^2 (\bar{N}_{31}^2)^2 + \frac{\bar{A} \bar{N}_1^* \bar{\omega}_0}{2} - \frac{\bar{N}_1^2 \bar{c}_1^2}{2} \left. \right] \bar{a}_1^2 + 5\bar{A} \bar{N}_1^2 \bar{c}_1 \left[\bar{N}_1^2 \bar{N}_{31}^2 + \frac{2}{5} (\bar{N}_1^*)^2 \right] \bar{a}_1 + \\
& \left. + \bar{A}^2 \left[\bar{N}_1^2 \bar{N}_{31}^2 - \frac{(\bar{N}_1^*)^2}{2} \right] \left[\bar{N}_1^2 \bar{N}_{31}^2 + \frac{(\bar{N}_1^*)^2}{4} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_4 = & -8\bar{\omega}_0^3 \bar{N}_{31}^2 \left\{ 2\bar{c}_1 \bar{\omega}_0 (\bar{N}_1^* \bar{\omega}_0 - 9\bar{N}_{31}^2) \bar{a}_1^5 - 4\bar{N}_{31}^2 \bar{a}_1^6 \bar{\omega}_0^3 + \right. \\
& + \left[9\bar{A} (\bar{N}_{31}^2)^2 \bar{\omega}_0 + 5\bar{A} \bar{N}_1^* \bar{N}_{31}^2 \bar{\omega}_0^2 - 2\bar{c}_1^2 (\bar{N}_1^2 \bar{\omega}_0 - 6\bar{N}_1^*) \right] \bar{a}_1^4 + \\
& + 11\bar{A} \bar{c}_1 \left[\left(\bar{N}_1^2 \bar{\omega}_0 - \frac{3}{11} \bar{N}_1^* \right) \bar{N}_{31}^2 - \frac{2}{11} (\bar{N}_1^*)^2 \bar{\omega}_0 \right] \bar{a}_1^3 - \\
& - 5\bar{A} \left[\bar{A} \left(\bar{N}_1^2 \bar{\omega}_0 + \frac{3}{10} \bar{N}_1^* \right) (\bar{N}_{31}^2)^2 + \frac{2}{5} \bar{A} (\bar{N}_1^*)^2 \bar{N}_{31}^2 \bar{\omega}_0 + \bar{N}_1^2 \bar{c}_1^2 \bar{N}_1^* \right] \bar{a}_1^2 + \\
& \left. + \frac{1}{2} \bar{A}^2 \bar{c}_1 \bar{N}_1^* (\bar{N}_1^2 \bar{N}_{31}^2 + (\bar{N}_1^*)^2) \bar{a}_1 + \bar{A}^3 \bar{N}_1^* \bar{N}_{31}^2 \left(\bar{N}_1^2 \bar{N}_{31}^2 + \frac{(\bar{N}_1^*)^2}{4} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_5 = & 4(\bar{N}_{31}^2)^2 \bar{\omega}_0^2 (\bar{A} \bar{N}_{31}^2 - 2\bar{a}_1 \bar{c}_1)^2 \left\{ \bar{a}_1^4 \bar{\omega}_0^2 + 4\bar{a}_1^3 \bar{c}_1 - \bar{A} (\bar{N}_1^* \bar{\omega}_0 + 2\bar{N}_{31}^2) \bar{a}_1^2 - \right. \\
& \left. - 2\bar{A} \bar{N}_1^2 \bar{a}_1^2 \bar{c}_1 + \bar{A}^2 \left[\bar{N}_1^2 \bar{N}_{31}^2 + \frac{(\bar{N}_1^*)^2}{4} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

После несложных вычислений из уравнения (5.50) получим два действительные и два комплексные корни $(\bar{C} - \bar{A})_k$, $(k=1, \dots, 4)$. Например, когда задаются значения параметров: $r_0 = 1$, $h = 1$, $\rho_0^* = 1$, $l = 0$, $Fr^2 = 0.01$, $\xi_1 = 2.727912$, $\bar{A}^0 = 10$, $d = h/2$ получим четыре корня $(\bar{C} - \bar{A})$,

$$(\bar{C} - \bar{A})_1 = -12.364163,$$

$$(\bar{C} - \bar{A})_2 = -14.452344,$$

$$(\bar{C} - \bar{A})_3 = 0.165476 + 0.306911i,$$

$$(\bar{C} - \bar{A})_4 = 0.165476 - 0.306911i.$$

Для построения области неустойчивости возьмём два действительных корня. Уравнение границ области устойчивости в безразмерных параметрах будет иметь вид уравнения (5.45). Предлагаем, что моменты инерции твёрдого тела для произвольной формы $A^0 = const$, $C^0 = const$ и для затвердевшей стратифицированной жидкости

$$A' = 2\pi\rho_0^*r_0^2h\left(\frac{1}{4}r_0^2 + \frac{1}{3}h^2 + d^2 + \frac{2}{3}\beta h^2d\right), \quad C' = \pi\rho_0^*r_0^4h. \quad (5.51)$$

Моменты инерции A' и C' затвердевшей стратифицированной жидкости в безразмерных видах будут

$$\bar{A}' = 2\pi\bar{h}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\bar{h}^2 + \bar{d}^2 + \frac{2}{3}\bar{\beta}\bar{h}^2\bar{d}\right), \quad \bar{C}' = \pi\bar{h}.$$

Безразмерные параметры следующие:

$$\bar{A}' = \frac{A'}{\rho_0^*r_0^5}, \quad \bar{C}' = \frac{C'}{\rho_0^*r_0^5}, \quad \bar{\beta} = \beta r_0, \quad \bar{h} = \frac{h}{r_0}, \quad \bar{d} = \frac{d}{r_0}.$$

На рис. 5.3 показаны области неустойчивости твёрдого тела со стратифицированной жидкостью ($Fr^2 \neq 0$) в безразмерных параметрах Δ и \bar{h} при различных значениях корней l и p ($l = 0 \div 2$; $p = 1 \div 3$). Области неустойчивости на рис. 5.3. (а) при $Fr^2 = 0.01$ и (в) при $Fr^2 = 0.1$, построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах $\bar{A}^0 = 10$, $d = h/2$; на рис. 5.3. (б) при $Fr^2 = 0.01$ и (г) при $Fr^2 = 0.1$ – для жидкости без твёрдого тела, т.е. при $\bar{A}^0 = 0$, $d = 0$ (зоны неустойчивости заштрихованы). Пунктирные линии имеют тот же смысл, что и при рассмотрении движения с однородной жидкостью.

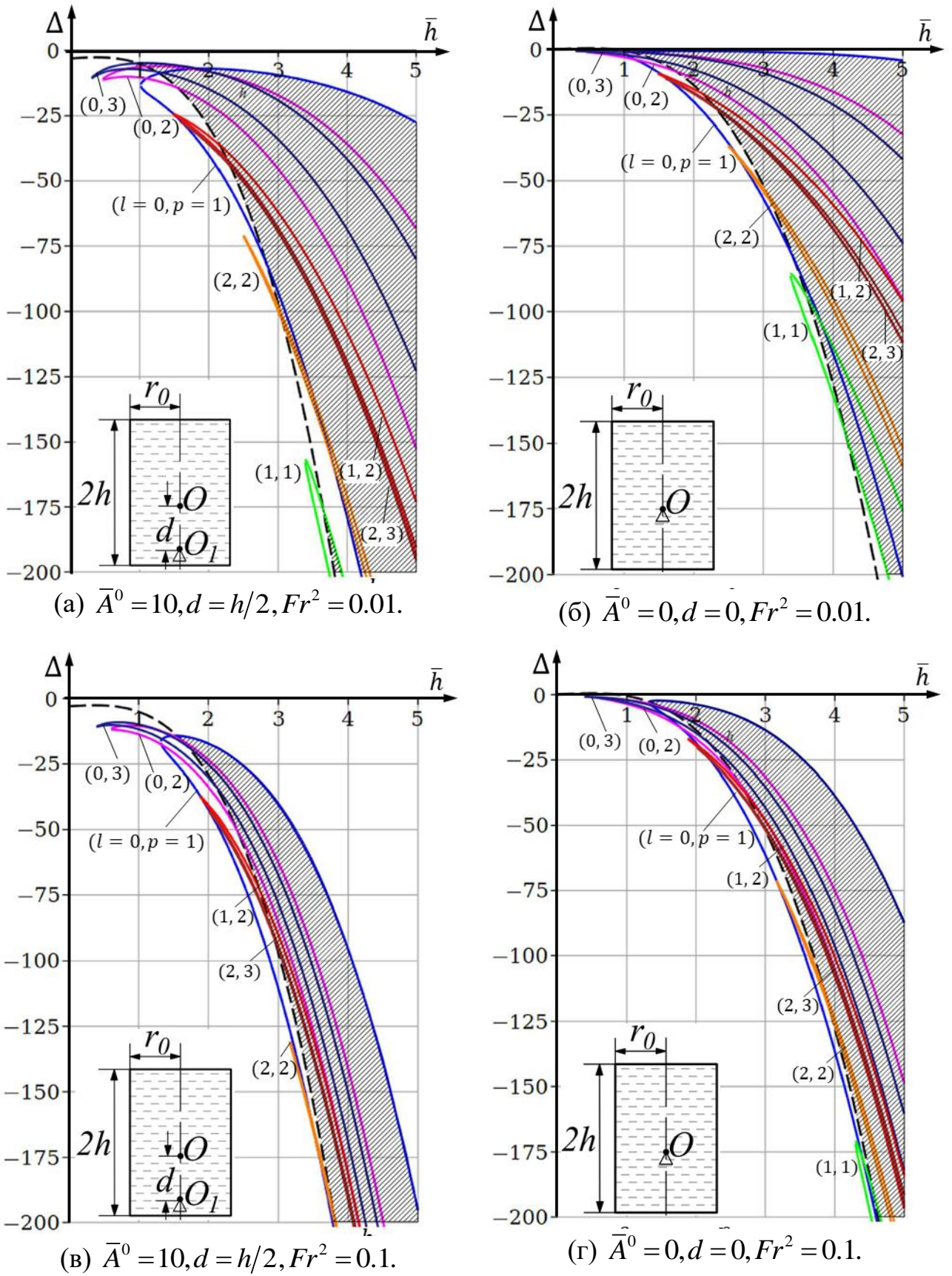


Рис. 5.3. Области неустойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью при различных корнях l и p .

Как показано на рис. 5.3, ветви при различных корнях l и p в присутствии стратификации ($Fr^2 \neq 0$) получаются аналогично ветвям однородной жидкости ($Fr^2 = 0$). При увеличении значения p область неустойчивости расширяется. И наоборот, при увеличении значения l область неустойчивости сужается. При одновременном увеличении чисел l и p ветви сливаются с ветвями, соответствующими меньшим числам l и p .

Затем необходимо рассмотреть, как получаются зависящие от чисел Fr^2 области неустойчивости для первого члена $n = 1$ с корнями $l = 0, p = 1$. На рис. 5.4 показаны области неустойчивости для твёрдого тела со стратифицированной жидкостью в безразмерных переменных Δ и \bar{h} при различных числах Fr^2 , ($Fr^2 = 0, 0.01, 0.1, 0.2$), с постоянными корнями $l = 0, p = 1$. Области неустойчивости, изображенные на рис. 5.4. (а) построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах $\bar{A}^0 = 10, d = h/2$; рис. 5.4. (б) – для жидкости без твёрдого тела, то есть при $\bar{A}^0 = 0, d = 0$ (зоны неустойчивости заштрихованы).

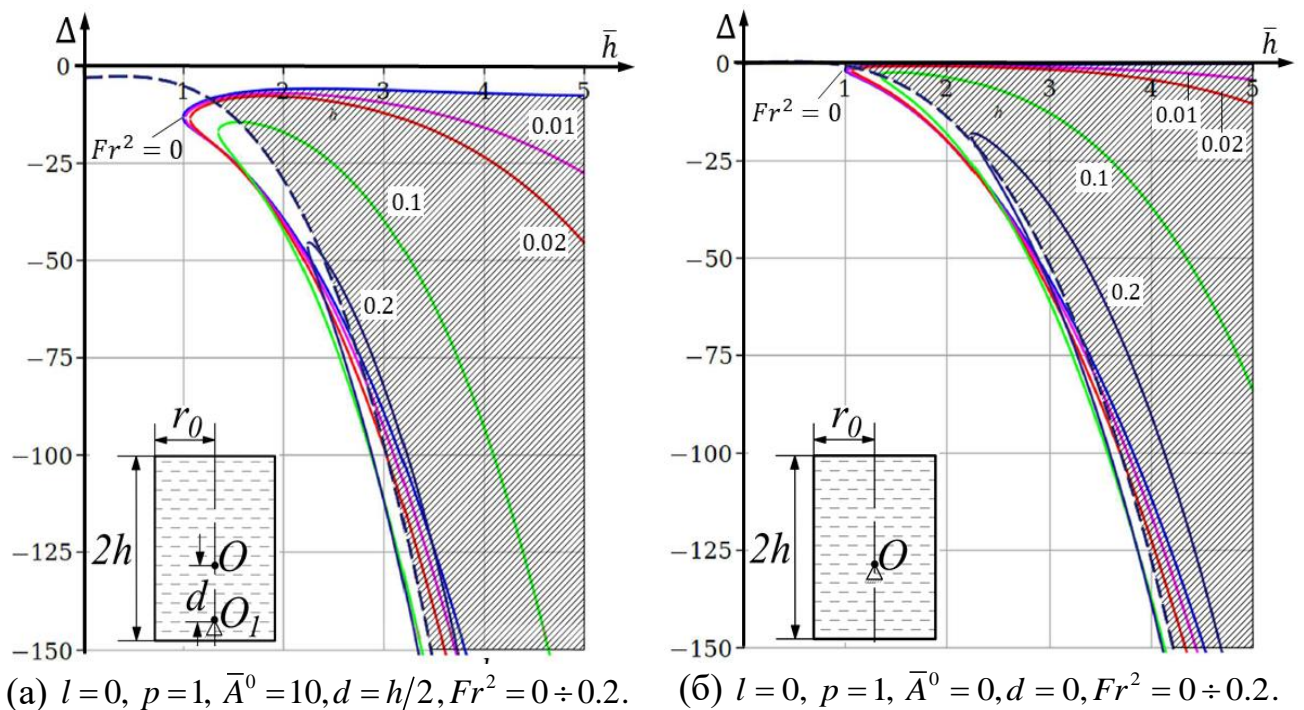


Рис. 5.4. Области неустойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью при различных числах Fr^2 .

На рис. 5.4 показано, что при наличии стратификации области неустойчивости уменьшаются. Области с большими значениями числа Fr^2 почти полностью заключены в области неустойчивости с меньшими значениями числа Fr^2 .

5.2. Устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с полостью, частично наполненной стратифицированной жидкостью при малой скорости вращения

5.2.1. Краевая задача

Теперь рассмотрим случай частичного заполнения полости. В этом случае краевая задача (5.9) в цилиндрических координатах (r, η, x) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (5.52)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = d - h, \\ (N^2 - \omega^2) \varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = d + h. \end{aligned} \quad (5.53)$$

5.2.2. Вращение твёрдого тела с жидкостью при наличии свободной поверхности с учетом внутренних волн

Для решения краевой задачи методом разделения переменных, полагая $Z(x) = \sin k_l (x - d) + C_1 \cos k_l (x - d)$ [80], при $x_3 = d - h$ получаем $C_1 = \cot(k_l h)$. При $x_3 = d + h$ получается

$$N^2 - \omega^2 = g k_l \tan(2k_l h), \quad (5.54)$$

или преобразуя к безразмерному виду,

$$f(y) = \tan(y) = \frac{Fr^2 - q^2}{y} \bar{H} \varepsilon^2, \quad (5.55)$$

здесь

$$y = \bar{k}_l \bar{H}, \quad \bar{k}_l = k_l r_0, \quad \bar{H} = 2\bar{h}, \quad \bar{h} = \frac{h}{r_0}, \quad \varepsilon = \frac{\bar{\beta}}{Fr^2}, \quad \bar{\beta} = \beta r_0. \quad (5.56)$$

Решение краевой задачи для случая $m = 1$ имеет вид,

$$g_n = g_{lp}(x, r) = \frac{J_1(\xi_{lp} \bar{r})}{J_1(\xi_{lp})} \left[\sin k_l(x - d) - \cot(k_l h) \cos k_l(x - d) \right]. \quad (5.57)$$

(а) Вращение твёрдого тела со стратифицированной жидкостью

В первом приближении, когда один из главных членов $n = 1$, уравнение (5.47), полученное для полного заполнения стратифицированной жидкостью ($Fr^2 \neq 0$), справедливо для рассматриваемого случая при наличии свободной поверхности жидкости. Коэффициенты из уравнения (5.48) для случая частичного заполнения полости стратифицированной жидкостью при главном члене $n = 1$ записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_1^2 &= \frac{\pi \chi_1^2}{4 \rho_0^* \omega_0^2 (\chi_1^2 - 1)^2} \left\{ (\sigma_1^2 - 1)^2 \frac{k_l r_0^2}{\xi_1} \left[(2 - 4 \cos^2(k_l h))(2 - 4 \cos^2(k_l d)) \cot(k_l h) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_l h \csc^2(k_l h) - 4 \cos^2(k_l h) \cos(k_l d) \sin(k_l d) \right] \cdot \left[\xi_1 \left(\frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + 1 \right) - 2 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k_l} \left[\left((4 \cos^2(k_l h) - 2) \cos^2(k_l d) - 2 \cos^2(k_l h) + 1 \right) \cot(k_l h) + k_l h \csc^2(k_l h) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4 \cos^2(k_l h) \cos(k_l d) \sin(k_l d) \right] \cdot \left[(\chi_1^2 + 1) \left(\xi_1^2 \frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + \xi_1^2 - 2 \right) + 4 \chi_1 \right], \right. \\ N_{31}^2 &= \frac{\pi Fr^2 \chi_1^2 (\sigma_1^2 - 1)^2}{\rho_0^* (\chi_1^2 - 1)^2} \frac{k_l r_0^2}{\xi_1} \left[(2 - 4 \cos^2(k_l h))(2 - 4 \cos^2(k_l d)) \cot(k_l h) + \right. \\ &\quad \left. k_l h \csc^2(k_l h) - 4 \cos^2(k_l h) \cos(k_l d) \sin(k_l d) \right] \cdot \left[\xi_1 \left(\frac{J_0^2(\xi_1)}{J_1^2(\xi_1)} + 1 \right) - 2 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} \right], \quad (5.58) \\ a_1 &= -\frac{\pi \chi_1}{\omega_0} \left\{ \frac{\sigma_1^2 - 1}{\chi_1^2 - 1} \frac{r_0^3}{\xi_1^2} \sin(k_l(d - h)) \left(\xi_1 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} - 2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_0}{k_l^2 (\chi_1^2 - 1)} \csc(k_l h) \left[k_l h (\sin(k_l(d - 2h)) + \sin(k_l d)) - \cos(k_l(d - 2h)) + \cos(k_l d) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$b_1 = -\frac{2\pi Fr^2 \chi_1 \omega_0^2 (\sigma_1^2 - 1)}{g (\chi_1^2 - 1)} \frac{r_0^2}{k_l \xi^2} \csc(k_l h) [k_l h (\cos(k_l (d - 2h)) + \cos(k_l d)) + \\ + \sin(k_l (d - 2h)) - \sin(k_l d)] \left(\xi_1 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} - 2 \right),$$

$$c_1 = \frac{4\pi Fr^2 \chi_1 (\sigma_1^2 - 1) \omega_0 r_0^3}{\chi_1^2 - 1 \xi_1^2} \sin(k_l (d - h)) \left(\xi_1 \frac{J_0(\xi_1)}{J_1(\xi_1)} - 2 \right),$$

$$d_1 = -\frac{\pi g \chi_1}{\omega_0 (\chi_1 - 1)} \frac{r_0}{k_l} \cos(k_l (d - h)).$$

По уравнению (5.50) получим два действительные и два комплексные корни $(\bar{C} - \bar{A})_k$, $(k=1, \dots, 4)$. Когда задаются значения параметров: $r_0 = 1$, $h = 1$, $\rho_0^* = 1$, $l = 0$, $Fr^2 = 0.01$, $\xi = 2.736620$, $A^0 = 10$, $d = h/2$, получим четыре корня $(\bar{C} - \bar{A})$,

$$(\bar{C} - \bar{A})_1 = -13.324624,$$

$$(\bar{C} - \bar{A})_2 = -14.583521,$$

$$(\bar{C} - \bar{A})_3 = 0.136393 + 0.207953 i,$$

$$(\bar{C} - \bar{A})_4 = 0.136393 - 0.207953 i.$$

Области неустойчивости твёрдого тела со стратифицированной жидкостью в безразмерных параметрах Λ и \bar{h} для рассматриваемого случая построены так же, как и для предыдущего случая полного заполнения полости. На рис. 5.5 показаны области неустойчивости твёрдого тела со стратифицированной жидкостью ($Fr^2 \neq 0$) в случае частичного заполнения при различных значениях корней l и p ($l = 0 \div 2$; $p = 1 \div 3$). Области неустойчивости на рис. 5.5 (а) при $Fr^2 = 0.01$ и (в) при $Fr^2 = 0.1$ построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах $\bar{A}^0 = 10$, $d = h/2$; на рис. 5.5. (б) при $Fr^2 = 0.01$ и (г) при $Fr^2 = 0.1$ – для жидкости без твёрдого тела, т.е. при $\bar{A}^0 = 0$, $d = 0$ (зоны неустойчивости заштрихованы).

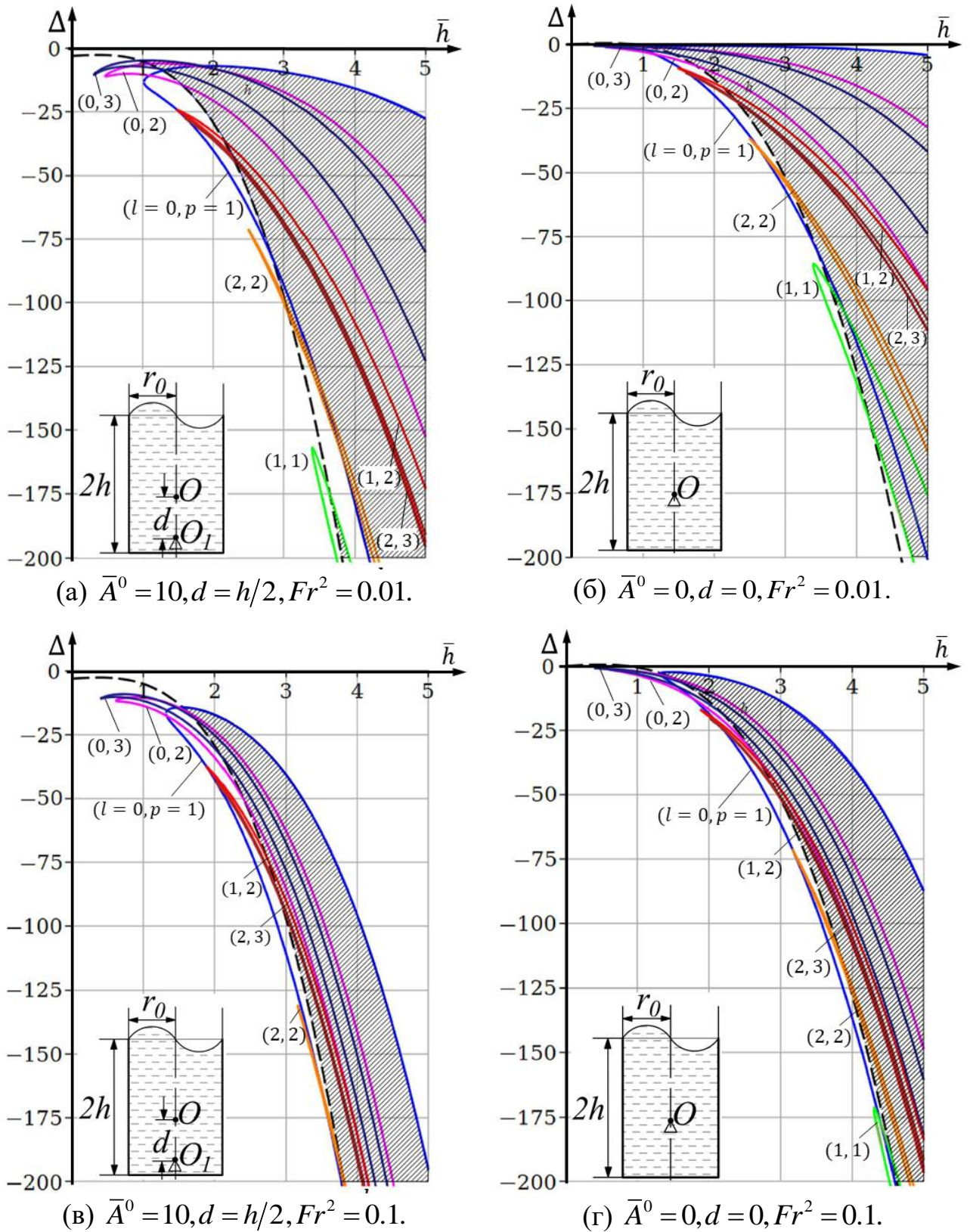


Рис. 5.5. Области неустойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью при различных корнях l и p .

(б) Вращение твёрдого тела с однородной жидкостью

В случае частичного заполнения для однородной жидкости ($Fr^2 = 0$) построим области неустойчивости по формуле (5.45). На рис. 5.6 показаны области неустойчивости твёрдого тела с однородной жидкостью в безразмерных параметрах Δ и \bar{h} при различных значениях корней l и p ($l = 0 \div 2$; $p = 1 \div 3$). Области неустойчивости на рис. 5.6. (а) построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах $\bar{A}^0 = 10$, $d = h/2$; на рис. 5.6. (б) – для жидкости без твёрдого тела, т.е. при $\bar{A}^0 = 0$, $d = 0$ (зоны неустойчивости заштрихованы).

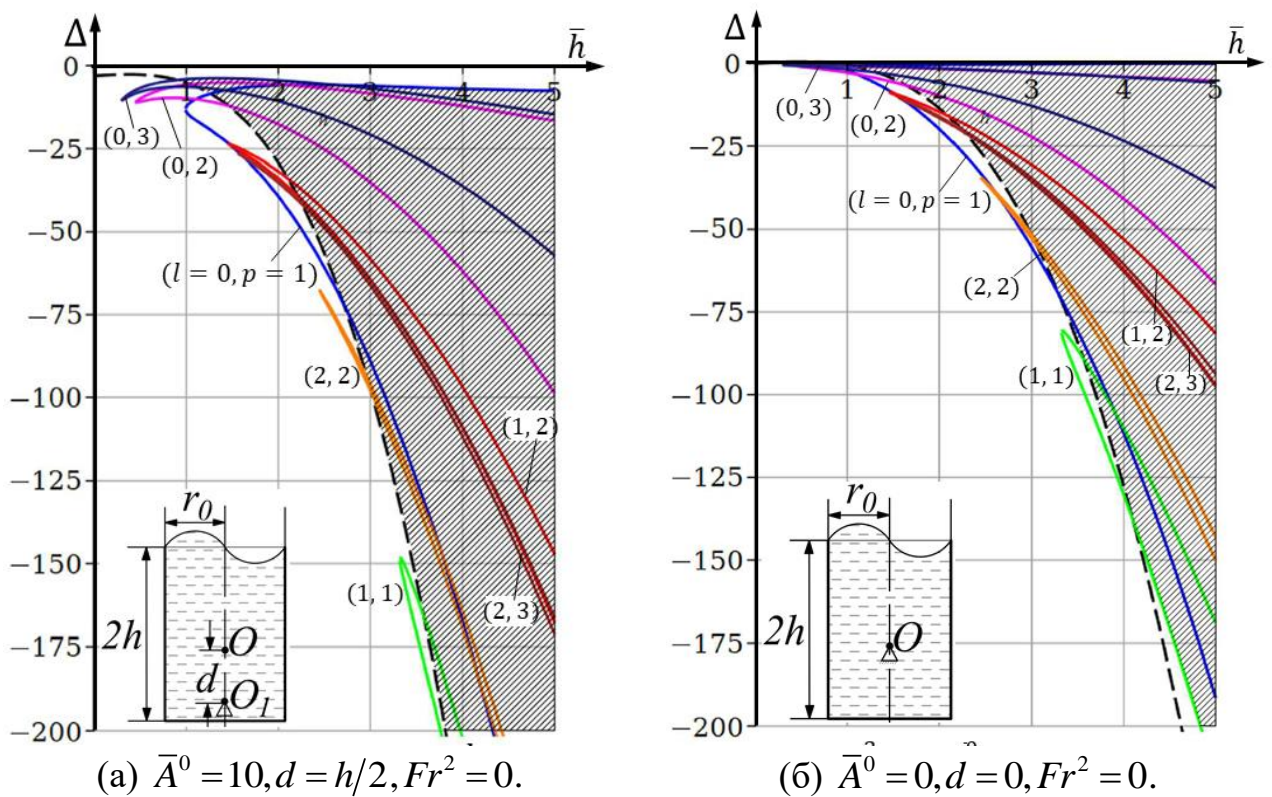


Рис. 5.6. Области неустойчивости вращения твёрдого тела с однородной жидкостью.

Перейдем к рассмотрению областей неустойчивости в зависимости от чисел Fr^2 в частичном заполнении при первом члене $n = 1$ с корнями $l = 0, p = 1$. На рис. 5.7 показаны области неустойчивости твёрдого тела со стратифицированной жидкостью в случае частичного заполнения полости при различных числах Fr^2 , ($Fr^2 = 0, 0.01, 0.02, 0.1, 0.2$), с постоянными корнями $l = 0, p = 1$. Области неустойчивости на рис. 5.7. (а) построены для твёрдого тела с жидкостью при

заданных параметрах $\bar{A}^0 = 10$, $d = h/2$; на рис. 5.7. (б) области неустойчивости построены для жидкости без твёрдого тела, т.е. при $\bar{A}^0 = 0$, $d = 0$ (зоны неустойчивости заштрихованы).

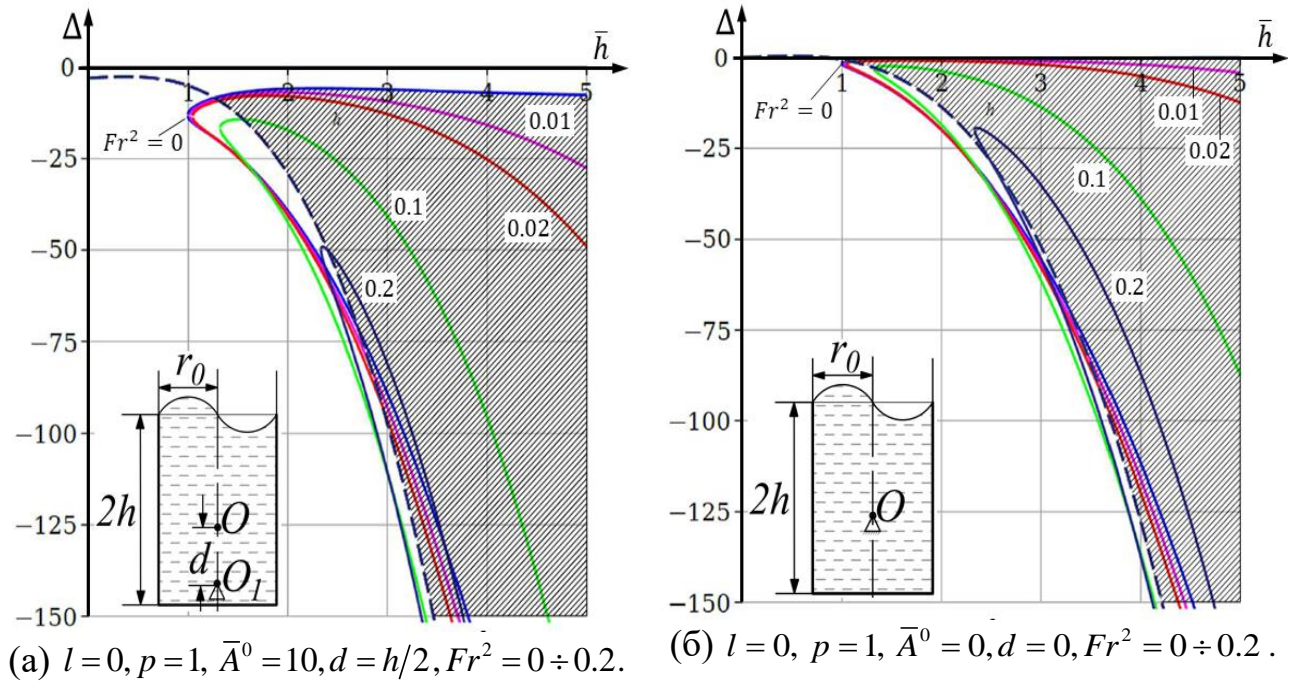


Рис. 5.7. Области неустойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью при различных числах Fr^2 .

Результаты показывают, что при малых скоростях вращения полученные кривые об области неустойчивости для случаев полного и частичного заполнения с учетом внутренних волн имеют минимальные расхождения.

5.2.3. Вращение твёрдого тела с жидкостью при наличии свободной поверхности с учетом поверхностных волн

Для поверхностных волн, полагая $Z(x) = \sinh \mu(x - d) + C_2 \cosh \mu(x - d)$ [80], при $x_3 = d - h$ получим $C_2 = \coth(\mu h)$. При $x_3 = d + h$ получается

$$N^2 - \omega^2 = -g\mu h(2\mu h), \quad (5.59)$$

и если преобразовать к безразмерному виду,

$$f(z) = \tanh(z) = \frac{z(1 - Fr^2)}{z^2 - \xi^2 \bar{H}^2} \bar{H} \varepsilon^2, \quad (5.60)$$

формула собственных значений χ_p для поверхностных волн

$$\chi_p = \sqrt{\frac{\bar{\mu}^2 - \xi_p^2}{\bar{\mu}^2 - \xi_p^2 Fr^2}}, \quad (p=1,2,3,\dots), \quad (5.61)$$

здесь $z = \bar{\mu}\bar{H}$, $\bar{\mu} = \mu r_0$, $\bar{H} = 2\bar{h}$, $\bar{h} = h/r_0$.

Решение краевой задачи для случая $m=1$ получается в виде,

$$g_n = g_p(x, r) = \frac{J_1(\xi_p \bar{r})}{J_1(\xi_p)} \left[\sinh \mu(x-d) + \coth(\mu h) \cosh \mu(x-d) \right]. \quad (5.62)$$

Коэффициенты из уравнения (5.31) для случая частичного заполнения полости стратифицированной жидкостью, с учетом уравнения (5.62) при главном члене $n=1$, представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_1^2 &= \frac{\pi \chi_1^2}{16 \rho_0^* \omega_0^2 (\chi_1^2 - 1)^2} \operatorname{csch}^2(\mu h) \left\{ (\sigma_1^2 - 1)^2 \frac{\mu r_0^2}{\xi_1} \left[\xi_1 J_0^2(\xi_1) + \xi_1 J_1^2(\xi_1) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2J_0(\xi_1)J_1(\xi_1) \right] (e_{2\mu} - 4\mu h) + \frac{1}{\mu} \left[(\chi_1^2 + 1) (\xi_1^2 J_0^2(\xi_1) + (\xi_1^2 - 2) J_1^2(\xi_1)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4\chi_1 J_1^2(\xi_1) \right] (e_{2\mu} + 4\mu h) \right\}, \\ N_{31}^2 &= \frac{\pi Fr^2 \chi_1^2 (\sigma_1^2 - 1)^2}{4 \rho_0^* (\chi_1^2 - 1)^2} \frac{\mu r_0^2}{\xi_1} \operatorname{csch}^2(\mu h) \left[\xi_1 J_0^2(\xi_1) + \xi_1 J_1^2(\xi_1) - 2J_0(\xi_1)J_1(\xi_1) \right] (e_{2\mu} - 4\mu h), \\ a_1 &= -\frac{\pi \chi_1}{\omega_0} \frac{e^{\mu(3h-2d)}}{e^{2\mu h} - 1} \left\{ \frac{\sigma_1^2 - 1}{\chi_1^2 - 1} \frac{r_0^3}{\xi_1^2} \left(e^{\mu(3d-2h)} - e^{\mu(3d-4h)} + e^{\mu(d-2h)} - e^{\mu d} \right) (\xi_1 J_0(\xi_1) - 2\xi_1 J_1(\xi_1)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\chi_1 - 1} \frac{r_0}{\mu^2} \left[(\mu h + 1) (e^{\mu(d-2h)} - e^{\mu(3d-4h)}) + (\mu h - 1) (e^{\mu d} - e^{\mu(3d-4h)}) \right] J_1(\xi_1) \right\}, \\ b_1 &= \frac{2\pi Fr^2 \chi_1 \omega_0^2 (\sigma_1^2 - 1)}{g(\chi_1^2 - 1)} \frac{r_0^2}{\mu \xi^2} \frac{e^{\mu(3h-2d)}}{e^{2\mu h} - 1} \left\{ \left[(\mu h + 1) (e^{\mu(3d-4h)} + e^{\mu(d-2h)}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\mu h - 1) (e^{\mu(3d-2h)} + e^{\mu d}) \right] (\xi J_0(\xi) - 2J_1(\xi)) \right\}, \quad (5.63) \\ c_1 &= \frac{2\pi Fr^2 \chi_1 (\sigma_1^2 - 1)}{\chi_1^2 - 1} \frac{r_0^3}{\xi_1^2} \frac{e^{\mu(3h-2d)}}{e^{2\mu h} - 1} \left(e^{\mu(3d-2h)} - e^{\mu(3d-4h)} + e^{\mu(d-2h)} - e^{\mu d} \right) (\xi_1 J_0(\xi_1) - 2J_1(\xi_1)), \\ d_1 &= -\frac{\pi g \chi_1}{4\omega_0 (\chi_1 - 1)} \frac{e^{\mu(3h-2d)}}{e^{2\mu h} - 1} \frac{r_0}{\mu} \left[(\coth(\mu h) + 3) e^{\mu(d-2h)} + (\coth(\mu h) - 3) e^{\mu(3d-2h)} - \right. \\ &\quad \left. - (\coth(\mu h) + 1) e^{\mu d} - (\coth(\mu h) - 1) e^{\mu(3d-4h)} \right] J_1(\xi_1), \end{aligned}$$

где

$$e_{2\mu} = \left(\cosh^2(\mu h) + \cosh(\mu h) \sinh(\mu h) - \frac{1}{2} \right) e^{-2\mu(d-h)} + \left(\cosh(\mu h) \sinh(\mu h) - \cosh^2(\mu h) + \frac{1}{2} \right) e^{2\mu(d-h)} + \left(\frac{1}{2} - \cosh^2(\mu h) - \cosh(\mu h) \sinh(\mu h) \right) e^{-2\mu(d+h)} + \left(\cosh^2(\mu h) - \cosh(\mu h) \sinh(\mu h) - \frac{1}{2} \right) e^{2\mu(d+h)}.$$

(а) Вращение твёрдого тела с однородной жидкостью

Из проведенных результатов следует, что значение δ для поверхностных волн всегда получено больше единицы ($\delta = \omega/\omega_0 > 1$). Поэтому уравнение (5.45), использованное построением области неустойчивости с учетом внутренних волн, невозможно использовать для случая с поверхностными волнами. Используем другой подход. При рассмотрении первых трёх членов ($n=3$) уравнение суммы ряда (5.42) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \bar{A}\bar{\alpha}(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_1)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_2)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_3) + (\bar{C} - \bar{A})\bar{\omega}_0(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_1)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_2)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_3) - \\ & - \bar{\alpha}(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_0)[\bar{E}_1(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_2)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_3) + \bar{E}_2(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_1)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_3) + \bar{E}_3(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_1)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_2)] = 0. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Уравнение границ области неустойчивости для вращения твёрдого тела с однородной жидкостью ($Fr^2 = 0$) получим в виде

$$\Delta = \frac{K_3 - K_1}{K_2}, \quad (5.65)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \bar{C} - \bar{A}, \quad K_1 = \bar{A}\bar{\alpha}(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_1)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_2)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_3), \\ K_2 &= \bar{\omega}_0(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_1)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_2)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_3), \\ K_3 &= \bar{\alpha}(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_0) \left[\bar{E}_1(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_2)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_3) + \bar{E}_2(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_1)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_3) + \bar{E}_3(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_1)(\bar{\alpha} - \bar{\omega}_2) \right]. \end{aligned}$$

С помощью формулы (5.65) можно построить области неустойчивости в безразмерных параметрах Δ и \bar{h} . На рис. 5.8 показаны области неустойчивости твёрдого тела с однородной жидкостью в безразмерных параметрах Δ и \bar{h} для первых трех членов ($n=3$). Изображенные на рис. 5.8. (а) области неустойчивости построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах $\bar{A}^0 = 10$, $\bar{C}^0 = 0.7\bar{A}^0$, $d = h/2$; на рис. 5.8. (б) области неустойчивости построены для жидкости без твёрдого тела, т.е. при $\bar{A}^0 = 0$, $\bar{C}^0 = 0$, $d = 0$ (зоны неустойчивости

заштрихованы). Пунктирная линия представляет собой границу на плоскости параметров Δ и \bar{h} физически возможных значений моментов инерции тела с жидкостью ($\bar{C} - \bar{A}$).

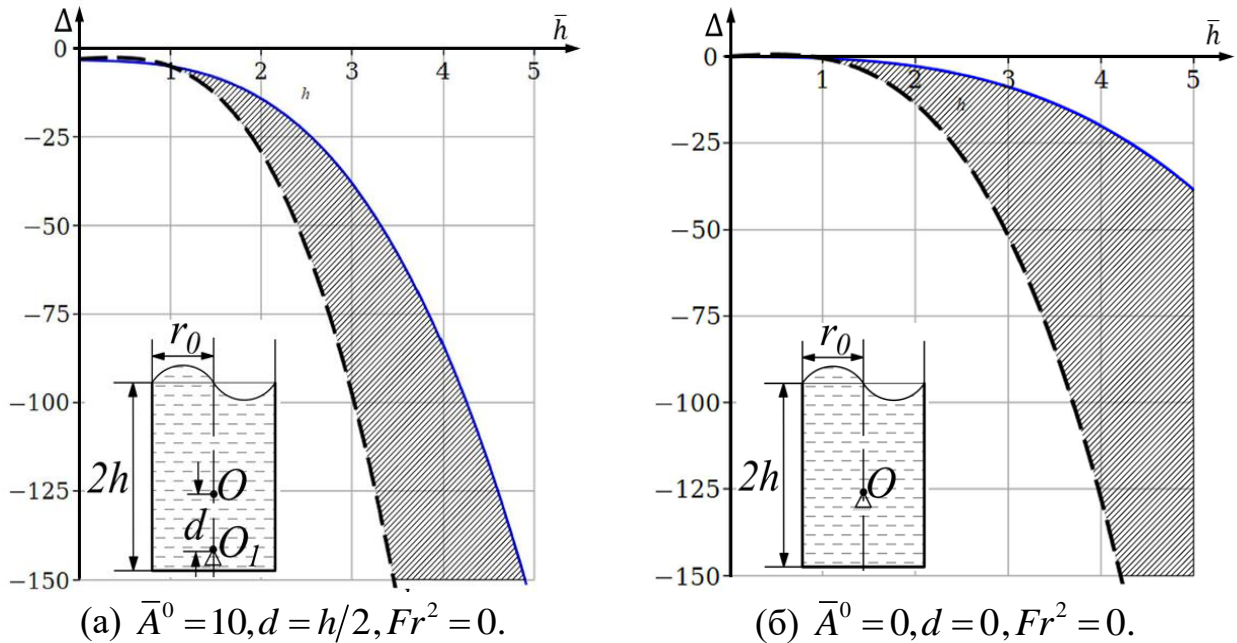


Рис. 5.8. Области неустойчивости вращения твёрдого тела с однородной жидкостью с учетом поверхностных волн.

(б) Вращение твёрдого тела со стратифицированной жидкостью

При учете первых трёх членов ($n=3$) уравнение границ области неустойчивости для вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью ($Fr^2 \neq 0$) из уравнения суммы ряда (5.39) будет получено в следующем виде:

$$\Delta = -\frac{K_1 + K_3}{K_2}, \quad (5.66)$$

где

$$K_1 = \bar{A}\bar{\alpha}^2 \left(\bar{N}_1^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{31}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_1} \right) \left(\bar{N}_2^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{32}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_2} \right) \left(\bar{N}_3^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{33}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_3} \right) (\bar{\omega}_1 - \bar{\alpha})(\bar{\omega}_2 - \bar{\alpha})(\bar{\omega}_3 - \bar{\alpha}),$$

$$K_2 = \bar{\omega}_0 \bar{\alpha} \left(\bar{N}_1^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{31}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_1} \right) \left(\bar{N}_2^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{32}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_2} \right) \left(\bar{N}_3^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{33}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_3} \right) (\bar{\omega}_1 - \bar{\alpha})(\bar{\omega}_2 - \bar{\alpha})(\bar{\omega}_3 - \bar{\alpha}),$$

$$\begin{aligned}
K_3 = 2 & \left\{ (\bar{a}_1 \bar{\alpha}^2 - \bar{d}_1) \left[\bar{a}_1 \bar{\alpha}^2 + (\bar{b}_1 - \bar{a}_1 \bar{\omega}_0) \bar{\alpha} - \bar{c}_1 \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left(\bar{N}_2^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{32}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_2} \right) \left(\bar{N}_3^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{33}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_3} \right) (\bar{\omega}_2 - \bar{\alpha})(\bar{\omega}_3 - \bar{\alpha}) + \\
& + (\bar{a}_2 \bar{\alpha}^2 - \bar{d}_2) \left[\bar{a}_2 \bar{\alpha}^2 + (\bar{b}_2 - \bar{a}_2 \bar{\omega}_0) \bar{\alpha} - \bar{c}_2 \right] \cdot \\
& \cdot \left(\bar{N}_1^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{31}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_1} \right) \left(\bar{N}_3^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{33}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_3} \right) (\bar{\omega}_1 - \bar{\alpha})(\bar{\omega}_3 - \bar{\alpha}) + \\
& + (\bar{a}_3 \bar{\alpha}^2 - \bar{d}_3) \left[\bar{a}_3 \bar{\alpha}^2 + (\bar{b}_3 - \bar{a}_3 \bar{\omega}_0) \bar{\alpha} - \bar{c}_3 \right] \cdot \\
& \left. \cdot \left(\bar{N}_1^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{31}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_1} \right) \left(\bar{N}_2^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{32}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_2} \right) (\bar{\omega}_1 - \bar{\alpha})(\bar{\omega}_2 - \bar{\alpha}) \right\}.
\end{aligned}$$

По формуле (5.66) построены области неустойчивости в безразмерных параметрах Δ и \bar{h} . На рис. 5.9 показаны области неустойчивости твёрдого тела со стратифицированной жидкостью в безразмерных параметрах Δ и \bar{h} для первых трех членов ($n=3$). Области неустойчивости, изображенные на рис. 5.9. (а) построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах $\bar{A}^0 = 10$, $\bar{C}^0 = 0.7\bar{A}^0$, $d = h/2$. На рис. 5.9. (б) области неустойчивости построены для жидкости без твёрдого тела, т.е. при $\bar{A}^0 = 0$, $\bar{C}^0 = 0$, $d = 0$ (зоны неустойчивости заштрихованы).

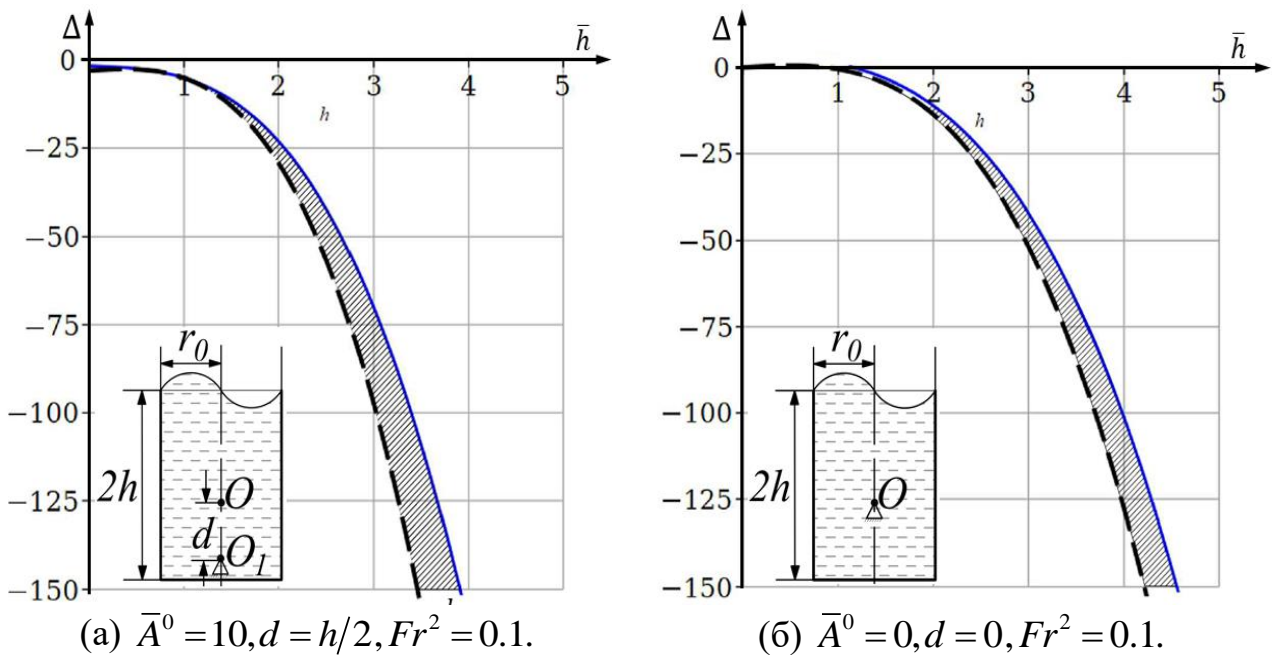


Рис. 5.9. Области неустойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью с учетом поверхностных волн.

На рис. 5.8 и 5.9 показано, что при малой скорости вращения на устойчивость твёрдого тела с жидкостью влияет устойчивая стратификация при учете поверхностных волн. Области неустойчивости вращения твёрдого тела с жидкостью с поверхностными волнами уменьшаются при наличии стратификации. С увеличением величины чисел Fr^2 границы области неустойчивости приближаются к пунктирной линии.

5.3. Устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с полостью, частично наполненной стратифицированной жидкостью при большой скорости вращения

5.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим случай стационарного вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью при большой скорости вращения. Твёрдое тело с цилиндрической полостью, частично заполненной стратифицированной жидкостью. Тело совершает стационарное вращение с большой угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ вокруг неподвижной точки O_1 , являющейся центром масс всей механической системы. Геометрический центр полости O_1^* находится на оси O_1x_3 на расстоянии d от неподвижной точки O_1 . При достаточно больших значениях угловой скорости ω_0 удовлетворяет условию $(\omega_0^2 \ell / g \gg 1)$ и центробежные силы значительно больше гравитационных сил. Потенциальная энергия на единицу массы жидкости будет $\Pi_0 = \omega_0^2 r^2 / 2$. В этом случае предположим, что свободная поверхность Γ вращающейся жидкости в закрытом сосуде имеет форму цилиндрической поверхности с внутренним радиусом r_0 (рис. 5.10).

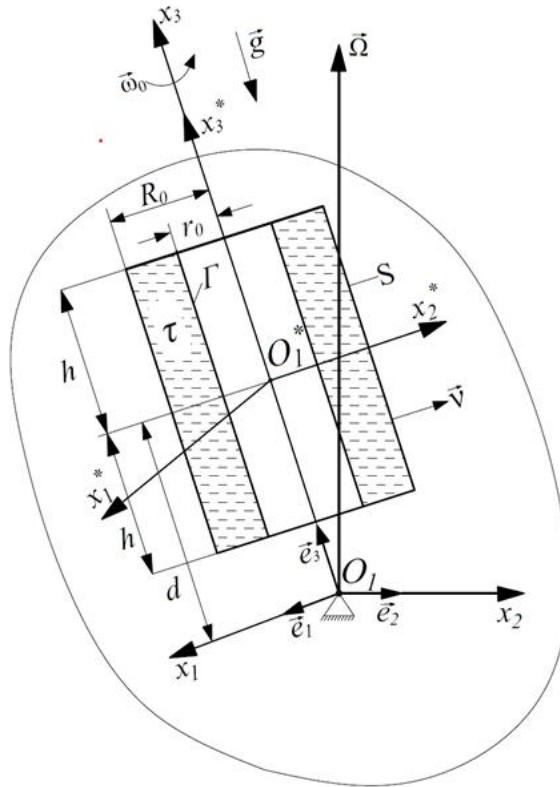


Рис. 5.10. Твёрдое тело с цилиндрической полостью, частично наполненной стратифицированной жидкостью при большой скорости вращения.

Применим двойное приближение Обербека-Буссинеска и предположим, что поле скорости \vec{u} , давление p и плотность жидкости ρ являются величинами первого порядка малости. Уравнения возмущённого движения вращающейся стратифицированной жидкости в системе $O_1x_1x_2x_3$ имеют вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} - \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p \quad \text{в } \tau, \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad (5.68)$$

с граничным условием

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{на } S, \quad (5.69)$$

Здесь \vec{u} – скорость жидкости в системе $O_1x_1x_2x_3$, \vec{r} – радиус-вектор, ρ – плотность жидкости, τ – область, занятая жидкостью, S – граница области τ , орт внешней нормали к смачиваемой поверхности и свободной поверхности жидкости, r_0 – радиус цилиндрической свободной поверхности жидкости, определяемой её количеством в полости (рис. 5.10).

Пусть в невозмущенном движении жидкости закон изменения плотности имеет вид $\rho_0(r) = \rho_0^* \left(1 + k_\rho \ln \frac{r}{r_0} \right)$, где k_ρ – число стратификации, т.е. постоянная, зависящая от соотношения плотностей жидкости.

В возмущенном движении угловая скорость тела $\vec{\Omega}$ является величиной первого порядка малости по сравнению с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ стационарного вращения и вектор малого поворота $\vec{\theta}(t)$, $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\theta}} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$.

Решение задачи о собственных колебаниях жидкости в полости вращающегося тела будем искать в виде гармонических колебаний. Пусть все переменные по времени изменяются пропорционально $e^{\lambda t}$,

$$\vec{u} = \vec{v} e^{\lambda t}, \quad p = \varphi e^{\lambda t}, \quad \rho = \psi e^{\lambda t},$$

где $\lambda = i\omega$ – комплексное число, ω – частота колебаний жидкости.

Введем цилиндрическую систему координат (r, η, x) ,

$$x_1 = r \cos \eta, \quad x_2 = r \sin \eta, \quad x_3 = x.$$

При $\vec{\Omega} \equiv 0$, уравнения возмущенного движения стратифицированной жидкости с граничным условием (5.67) – (5.69) в цилиндрической системе координат (r, η, x) , получаются в следующих видах:

$$\lambda \vec{v} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v} + \frac{N_{rr}^2}{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{e}_r = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla \varphi, \quad (5.70)$$

$$\psi = \frac{1}{\lambda} \rho_0^* \frac{k_\rho}{r} \vec{v} \cdot \vec{e}_r, \quad (5.71)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{на } S, \quad (5.72)$$

здесь $N^2(r) = N_{rr}^2 = \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho_0(r)}{\partial r} \frac{\partial \Pi_0}{\partial r} = k_\rho \omega_0^2$ – квадрат частоты плавучести или

квадрат частоты Брента-Вяйсяля по радиальному направлению при быстром вращении жидкости.

В результате компоненты скорости частиц жидкости могут быть выражены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
v_r &= \frac{1}{\rho_0^* 2\omega_0 [\chi^2(1+Fr^2)-1]} \left(-i \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \chi \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right), \\
v_x &= \frac{1}{\rho_0^* 2\omega_0 [\chi^2(1+Fr^2)-1]} \left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial r} - i(1-\chi^2 Fr^2) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right), \\
v_\eta &= \frac{1}{\rho_0^* 2\omega_0 [\chi^2(1+Fr^2)-1]} [\chi^2(1+Fr^2)-1] i \frac{\partial \varphi}{\partial x},
\end{aligned} \tag{5.73}$$

где $\chi = \frac{2\omega_0}{\omega}$, $Fr^2 = \frac{N_{rr}^2}{4\omega_0^2} = \frac{k_\rho}{4}$.

Краевая задача, соответствующая первому уравнению (5.72), получается в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + (1 - Fr^2 \chi^2) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + [1 - \chi^2(1 + Fr^2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \tag{5.74}$$

а граничное условие, соответствующее второму уравнению (5.73) при положении начало координат в неподвижной точке O_1 , имеет вид:

$$\begin{aligned}
r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = R_0, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(4\chi_3 \varphi - i\chi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad \text{при } x = d \pm h,
\end{aligned} \tag{5.75}$$

где $\chi_3 = \frac{1 - \chi^2(1 + Fr^2)}{\chi^2}$.

5.3.2. Краевая задача

(а) Решение краевой задачи для внутренних волн

Полагая функцию $\varphi(r, \eta, x) = R(r)H(\eta)Z(x)$, и используя метод разделения переменных, получим решение краевой задачи (5.74) для внутренних волн (при $\chi^2(1 + Fr^2) > 1$) с граничным условием (5.75) в виде:

$$\varphi_{imp} = \left[AJ_m(\xi_{imp} \bar{r}) + BY_m(\xi_{imp} \bar{r}) \right] e^{\frac{i m \eta}{\sqrt{1 - Fr^2 \chi^2}}} \sin k_l(x - d), \tag{5.76}$$

где

$$\bar{r} = \frac{r}{R_0}, \quad \xi = kR_0, \quad k = k_l \sqrt{\chi^2(1+Fr^2) - 1}, \quad k_l = \frac{(2l+1)\pi}{2h},$$

$$\chi^{\text{вну.}} = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 + \xi^2}{\bar{k}_l^2(1+Fr^2)}}, \quad \bar{k}_l = k_l R_0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

здесь $J_m(\xi_{lmp} \bar{r})$ и $Y_m(\xi_{lmp} \bar{r})$ – функции Бесселя 1-го и 2-го родов m -го порядка.

Функция $\varphi_{lmp}(r, \eta, x)$ из (5.78) удовлетворяет граничными условиями (5.75), и получим частотное уравнение для определения частотного спектра внутренних волн жидкости в виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{lmp} c \cdot J'_m(\xi_{lmp} c) + m \chi_2 J_m(\xi_{lmp} c) & \xi_{lmp} c \cdot Y'_m(\xi_{lmp} c) + m \chi_2 Y_m(\xi_{lmp} c) \\ \xi_{lmp} J'_m(\xi_{lmp}) + (4\chi_3 + m\chi_2) J_m(\xi_{lmp}) & \xi_{lmp} Y'_m(\xi_{lmp}) + (4\chi_3 + m\chi_2) Y_m(\xi_{lmp}) \end{vmatrix} = 0, \quad (5.77)$$

где

$$J'_m(\xi_{lmp}) = \frac{dJ_m(\xi_{lmp})}{d(\xi_{lmp})}, \quad Y'_m(\xi_{lmp}) = \frac{dY_m(\xi_{lmp})}{d(\xi_{lmp})}, \quad c = \frac{r_0}{R_0}, \quad \chi_2 = \frac{\chi}{\sqrt{1 - Fr^2 \chi^2}},$$

ξ_{lmp} – p -ый корень характеристического уравнения (5.77).

(б) Решение краевой задачи для поверхностных волн

Решение краевой задачи (5.74) для поверхностных волн (при $\chi^2(1+Fr^2) < 1$) с граничным условием (5.75) в виде:

$$\varphi_{lm} = [C I_m(\mu_{lm} \bar{r}) + D K_m(\mu_{lm} \bar{r})] e^{\frac{i m \eta}{\sqrt{1 - Fr^2 \chi^2}}} \cos \kappa_l x, \quad (5.78)$$

где

$$\bar{r} = \frac{r}{R_0}, \quad \mu = \kappa R_0, \quad \kappa = \kappa_l \sqrt{1 - \chi^2(1+Fr^2)}, \quad \kappa_l = \frac{l\pi}{H},$$

$$\chi = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 - \mu^2}{\bar{k}_l^2(1+Fr^2)}}, \quad \bar{k}_l = \kappa_l R_0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots,$$

здесь $I_m(\mu_{lm} \bar{r})$ и $K_m(\mu_{lm} \bar{r})$ – функции Бесселя мнимого аргумента (модифицированные функции Бесселя) m -го порядка.

Функция $\varphi_{lmp}(r, \eta, x)$ из (5.78) удовлетворяет граничными условиями (5.75), и получим частотное уравнение для определения частотного спектра поверхностных волн жидкости в виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_{lm} I'_m(\mu_{lm}) + m\chi_2 I_m(\mu_{lm}) & \mu_{lm} K'_m(\mu_{lm}) + m\chi_2 K_m(\mu_{lm}) \\ \mu_{lm} c I'_m(\mu_{lm} c) + (m\chi_2 + 4\chi_3) I_m(\mu_{lm} c) & \mu_{lm} K'_m(\mu_{lm} c) + (4\chi_3 + m\chi_2) K_m(\mu_{lm} c) \end{vmatrix} = 0, \quad (5.79)$$

где

$$I'_m(\mu_{lm} \bar{r}) = \frac{dI_m(\mu_{lm} \bar{r})}{d(\mu_{lm} \bar{r})}, \quad K'_m(\mu_{lm} \bar{r}) = \frac{dK_m(\mu_{lm} \bar{r})}{d(\mu_{lm} \bar{r})}, \quad c = \frac{r_0}{R_0},$$

μ_{lm} – корень характеристического уравнения (5.79).

Функции φ_{lmp} для внутренних волн и φ_{lm} для поверхностных волн будут представлены в виде произведения для случая $m = 1$,

$$\varphi_n = g_n(x, r) e^{\frac{im\eta}{\sqrt{1-Fr^2}\chi^2}}. \quad (5.80)$$

Функция $g_n(x, r)$ удовлетворяет к краевой задаче (5.74) и граничным условиям (5.75).

$$\frac{\partial^2 g_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g_n}{\partial r} - \frac{g_n}{r^2} + [1 - \chi_n^2(1 + Fr^2)] \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2} = 0, \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial r} + \chi_{2n} \frac{g_n}{r} = 0, \quad \text{при } r = R_0,$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial r} + (\chi_{2n} + 4\chi_{3n}) \frac{g_n}{r} = 0, \quad \text{при } r = r_0, \quad (5.82)$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = d \pm h,$$

где $\chi_{2n} = \frac{\chi_n}{\sqrt{1 - Fr^2 \chi_n^2}}, \quad \chi_{3n} = \frac{1 - \chi_n^2(1 + Fr^2)}{\chi_n^2}.$

Решения краевой задачи внутренних и поверхностных волн для случая $m = 1$ получим в следующих видах:

для внутренних волн,

$$g_n = g_{lp}(x, r) = [J_m(\xi_{lmp} \bar{r}) + Y_m(\xi_{lmp} \bar{r})] \sin k_l(x - d), \quad (5.83)$$

для поверхностных волн,

$$g_n = g_l(x, r) = [I_m(\mu_{lm} \bar{r}) + K_m(\mu_{lm} \bar{r})] \cos \kappa_l(x - d). \quad (5.84)$$

Скорость частиц жидкости может быть выражена в векторной форме,

$$\vec{v}_n = \frac{1}{\rho_0^* 2\omega_0} \frac{\chi_n}{\left[\chi_n^2(1+Fr^2)-1\right]} \left[\chi_n \vec{e}_x \times \nabla \varphi_n - i \nabla \varphi_n + i \chi_n^2 Fr^2 \vec{e}_\eta (\vec{e}_\eta \cdot \nabla \varphi_n) + \right. \\ \left. + i \chi_n^2 (1+Fr^2) \vec{e}_x (\vec{e}_x \cdot \nabla \varphi_n) \right], \quad (5.85)$$

и обладает свойством ортогональности в области τ

$$\int_{\tau} \vec{v}_n \cdot \vec{v}_n^* d\tau = 0, \quad \text{при } n \neq n^*. \quad (5.86)$$

Вектор скорости частиц жидкости через функцию g_n в системе координат (x_1, x_2, x_3) будет

$$\vec{v}_n = \frac{1}{\rho_0^* 2\omega_0} \frac{\chi_n}{\left[\chi_n^2(1+Fr^2)-1\right]} \left\{ \left[\frac{\partial g_n}{\partial r} (-\chi_n \sin \eta - i \cos \eta) + \frac{g_n}{r} \sqrt{1-Fr^2 \chi_n^2} \left(-\sin \eta - \frac{i \chi_n}{1-Fr^2 \chi_n^2} \cos \eta \right) \right] \vec{e}_1 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial g_n}{\partial r} (\chi_n \cos \eta - i \sin \eta) + \frac{g_n}{r} \sqrt{1-Fr^2 \chi_n^2} \left(\cos \eta - \frac{i \chi_n}{1-Fr^2 \chi_n^2} \sin \eta \right) \right] \vec{e}_2 + \right. \\ \left. + \left[\chi_n^2 (1+Fr^2) - 1 \right] i \frac{\partial g_n}{\partial x} \vec{e}_3 \right\}. \quad (5.89)$$

Здесь \vec{v}_n^* является функцией комплексно-сопряженной с \vec{v}_n .

Применяя метод Бубнова-Галёркина, представим вектор скорости в виде разложения

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_n(t) \vec{v}_n(x_1, x_2, x_3), \quad (5.90)$$

и получим из (5.70)

$$2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}_n = -\lambda_n \vec{v}_n - \frac{N_{rr}^2}{\lambda_n} \vec{v}_n \cdot \vec{e}_r - \frac{1}{\rho_0^*} \nabla \varphi, \quad (5.91)$$

Подставим разложение (5.90) в уравнение (5.67) и с учетом уравнения (5.91) сводит к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{s}_n \vec{v}_n + \dot{s}_n \left(-i \omega_n \vec{v}_n + \frac{i}{\omega_n} N_{rr}^2 \vec{v}_n \cdot \vec{e}_r - \frac{1}{\rho_0^*} \nabla p \right) + N_{rr}^2 s_n \vec{v}_n \cdot \vec{e}_r \right] + \ddot{\theta} \times \vec{r} + \frac{1}{\rho_0^*} \nabla p = 0. \quad (5.92)$$

Умножим уравнение (5.92) скалярно на \vec{v}_n^* и проинтегрируем по объёму τ . В силу свойства ортогональности (5.86) уравнение (5.92) сводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$N_n^2(\ddot{s}_n - i\omega_n \dot{s}_n) + N_m^2 \left(\frac{i}{\omega_n} \dot{s}_n + s_n \right) + \vec{a}_n^* \cdot \vec{\theta} = 0, \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (5.93)$$

Коэффициенты в уравнениях (5.93) выражаются через собственные функции \vec{v}_n и \vec{v}_n^*

$$N_n^2 = \int_{\tau} \rho_0 (\vec{v}_n \cdot \vec{v}_n^*) d\tau; \quad N_m^2 = N_{rr}^2 \int_{\tau} \rho_0 (v_m \cdot v_m^*) d\tau; \quad \vec{a}_n^* = \int_{\tau} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{v}_n^*) d\tau. \quad (5.94)$$

5.3.3. Собственные колебания быстровращающегося тела с жидкостью

Уравнения возмущенного движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью около стационарного вращения с большой скоростью имеют следующий вид:

$$J \cdot \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \times J \cdot \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_0 \times J \cdot \vec{\Omega} + \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \vec{u} d\tau + \int_{\tau} \rho_0 \vec{\omega}_0 \times (\vec{r} \times \vec{u}) d\tau + \int_{\tau} \dot{\rho} (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau + \int_{\tau} \rho (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau = \vec{M}, \quad (5.95)$$

здесь $J = J^0 + J'$, J^0 – тензор инерции твёрдого тела без жидкости, J' – тензор инерции затвердевшей жидкости, \vec{M} – момент внешних сил.

Уравнение (5.95) при учете разложения (5.90) будут иметь следующий вид:

$$J \cdot \vec{\theta} + \vec{\theta} \times J \cdot \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_0 \times J \cdot \vec{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{s}_n \vec{a}_n + \dot{s}_n (\vec{\omega}_0 \times \vec{a}_n - \vec{b}_n) - \vec{\omega}_0 \times s_n \vec{b}_n \right] = \vec{M}. \quad (5.96)$$

Представленные формы (5.93) и (5.96) дают систему уравнений для возмущенного движения тела.

Коэффициенты в уравнении (5.96) обозначим

$$\vec{a}_n = \int_{\tau} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{v}_n) d\tau, \quad \vec{b}_n = \int_{\tau} \nabla \rho_0 \vec{v}_n (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau. \quad (5.97)$$

Результаты вычисления интегралов показывают, что компоненты векторных величин коэффициентов \vec{a}_n и \vec{a}_n^* обладают следующими свойствами.

$$a_{1n} = a_{1n}^* = -ia_{2n} = ia_{2n}^*. \quad (5.98)$$

Коэффициенты из уравнений (5.94) и (5.97) через функцию g_n выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 N_n^2 &= \frac{\pi\chi_n^2}{2\rho_0^*\omega_0^2[\chi_n^2(1+Fr^2)-1]} \int_{-h}^h \int_0^{r_0} \left\{ \left[\chi_n^2(1+Fr^2)-1 \right]^2 \left(\frac{\partial g_n}{\partial x} \right)^2 + (1+\chi_n^2) \left(\frac{\partial g_n}{\partial r} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{1-Fr^2\chi_n^2} \left[(1-Fr^2\chi_n^2)^2 + \chi_n^2 \right] \left(\frac{g_n}{r} \right)^2 + \frac{2\chi_n}{\sqrt{1-Fr^2\chi_n^2}} (2-Fr^2\chi_n^2) \frac{\partial g_n}{\partial r} \frac{g_n}{r} \right\} r dr dx, \\
 a_n = a_{1n} &= -\frac{\pi\chi_n}{2\omega_0[\chi_n^2(1+Fr^2)-1]} \int_{-h}^h \int_0^{R_0} \left\{ \left[\chi_n^2(1+Fr^2)-1 \right] r \frac{\partial g_n}{\partial x} + \right. \\
 &\quad \left. + x \left[\frac{\partial g_n}{\partial r} (\chi_n+1) + \frac{g_n}{r} \sqrt{1-Fr^2\chi_n^2} \left(1 + \frac{\chi_n}{1-Fr^2\chi_n^2} \right) \right] \right\} r dr dx, \quad (5.99) \\
 b_n = ib_{1n} = b_{2n} &= -\frac{2\pi Fr^2 \chi_n}{\chi_n^2(1+Fr^2)-1} \int_{-h}^h \int_0^{r_0} x \left(\frac{\partial g_n}{\partial r} + \frac{g_n}{r} \frac{\chi_n}{\sqrt{1-Fr^2\chi_n^2}} \right) r dr dx, \quad N_m^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Компоненты векторного уравнения (5.96) для осесимметричного вращения ($J_{11} = J_{22}$) вокруг оси Ox_3 будут

$$\begin{aligned}
 M_1 &= J_{11} \ddot{\theta}_1 + (J_{33} - J_{11}) \dot{\theta}_2 \omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{s}_n a_{1n} + i \dot{s}_n (-\omega_0 a_{1n} + b_{2n}) + s_n b_{2n} \omega_0], \\
 M_2 &= J_{11} \ddot{\theta}_2 - (J_{33} - J_{11}) \dot{\theta}_1 \omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [i \ddot{s}_n a_{1n} + \dot{s}_n (\omega_0 a_{1n} - b_{2n}) - i s_n b_{2n} \omega_0], \quad (5.100) \\
 M_3 &= 0.
 \end{aligned}$$

Из первого уравнения (5.100) вычтем второе уравнение, умноженное на мнимую единицу, в результате получим

$$M_1 - iM_2 = J_{11} (\ddot{\theta}_1 - i\ddot{\theta}_2) + i\omega_0 (J_{33} - J_{11}) (\dot{\theta}_1 - i\dot{\theta}_2) + \sum_{n=1}^{\infty} 2 [\ddot{s}_n a_{1n} + i \dot{s}_n (b_{2n} - \omega_0 a_{1n})]. \quad (5.101)$$

Заменив $J_{11} = J_{22} = A$, $J_{33} = C$, $\theta_1 - i\theta_2 = \theta$, $M_1 - iM_2 = M$, $a_{1n} = a_{1n}^* = a_n$, $b_{2n} = b_n$, получим следующую систему уравнений, эквивалентную системам (5.93) и (5.101)

$$A\ddot{\theta} + i(C-A)\dot{\theta}\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2[\ddot{s}_n a_n + i \dot{s}_n (b_n - \omega_0 a_n)] = M, \quad (5.102)$$

$$N_n^2 (\ddot{s}_n - i\omega_n \dot{s}_n) + a_n \cdot \ddot{\theta} = 0, \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (5.103)$$

Здесь

$$A = A^0 + A' = J_{11}^0 + J_{11}', \quad C = C^0 + C' = J_{33}^0 + J_{33}'.$$

Пологая $\theta = \theta_0 e^{i\alpha t}$, $s_n = s_{n_0} e^{i\alpha t}$, после подстановки в уравнение (5.103), получим

$$s_{n_0} = \frac{a_n \alpha \theta_0}{N_n^2 (\omega_n - \alpha)}. \quad (5.104)$$

Когда момент внешних сил равняется нулю ($\vec{M} = 0$), уравнение (5.102), с учетом уравнения (5.104), приобретает следующий вид:

$$A\alpha + (C - A)\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n \alpha}{N_n^2 (\omega_n - \alpha)} [a_n (\alpha - \omega_0) + b_n] = 0. \quad (5.105)$$

Разделив на $\rho_0^* R_0^5 \omega_0$ и уравнение (5.105) можно записать в безразмерной форме:

$$\bar{A}\bar{\alpha} + (\bar{C} - \bar{A}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\bar{a}_n \bar{\alpha}}{\bar{N}_n^2 (\bar{\omega}_n - \bar{\alpha})} [\bar{a}_n (\bar{\alpha} - 1) + \bar{b}_n] = 0. \quad (5.106)$$

Безразмерные параметры следующие:

$$\bar{A} = \frac{A}{\rho_0^* R_0^5}, \quad \bar{C} = \frac{C}{\rho_0^* R_0^5}, \quad \bar{\omega}_n = \frac{\omega_n}{\omega_0}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\omega_0}, \quad \bar{a}_n = \frac{a_n}{\rho_0^* R_0^4}, \quad \bar{b}_n = \frac{b_n}{\rho_0^* R_0^4 \omega_0^2}.$$

Здесь $A = A^0 + A'$, $C = C^0 + C'$, A^0 и A' – моменты инерции твёрдого тела и затвердевшей жидкости относительно поперечной оси $O_1 x_1$. C^0 и C' – относительно перпендикулярной оси $O_1 x_3$.

5.3.4. Вращение твёрдого тела с жидкостью при наличии свободной поверхности с учетом внутренних волн

Выведем условия устойчивости быстрого стационарного вращения цилиндрической полости, содержащей стратифицированную жидкость. В первом приближении, когда в уравнении (5.106) один главный член ($n=1$), получим квадратное уравнение относительно α и его решение в виде

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2(2\bar{a}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2)} \left\{ \left[(\bar{C} - \bar{A})\bar{N}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2\delta_1 - 2\bar{a}_1(\bar{b}_1 - \bar{a}_1) \right] \pm \sqrt{\left[\bar{A}\bar{N}_1^2\delta_1 - (\bar{C} - \bar{A})\bar{N}_1^2 + 2\bar{a}_1(\bar{b}_1 - \bar{a}_1) \right]^2 - 4(2\bar{a}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2)(\bar{C} - \bar{A})\bar{N}_1^2\delta} \right\}. \quad (5.107)$$

Для устойчивости стационарного вращения (необходимое условие) все корни уравнения (5.107) должно быть действительными. Для этого должно быть

$$\left[\bar{A}\bar{N}_1^2\delta_1 - (\bar{C} - \bar{A})\bar{N}_1^2 + 2\bar{a}_1(\bar{b}_1 - \bar{a}_1) \right]^2 - 4(2\bar{a}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2)(\bar{C} - \bar{A})\bar{N}_1^2\delta > 0. \quad (5.108)$$

Из условия (5.108) получим уравнение границ области устойчивости в безразмерных параметрах

$$\Delta = \frac{1}{\bar{N}_1^2} \left\{ (4\delta_1 - 2)\bar{a}_1^2 + 2\bar{a}_1\bar{b}_1 - \bar{A}\bar{N}_1^2\delta_1 \pm 2\sqrt{2}\sqrt{(\bar{A}\bar{N}_1^2 - 2\bar{a}_1^2) - \bar{a}_1\delta_1[a_1(\delta_1 - 1) + b_1]} \right\}, \quad (5.109)$$

здесь $\Delta = \bar{C} - \bar{A}$, $\delta_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_0} = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{2}{\chi_1}$.

Предположим, что моменты инерции твёрдого тела произвольной осесимметричной формы и затвердевшей стратифицированной жидкости постоянны.

$$\begin{aligned} A' &= 2\pi\rho_0^*h \left\{ (R_0^2 - r_0^2) \left[\frac{1}{4}(R_0^2 + r_0^2) + \frac{1}{3}h^2 + d^2 \right] + \frac{1}{16}k_\rho \left[R_0^4 \left(4\ln \frac{R_0}{r_0} - 1 \right) + r_0^4 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}k_\rho \left[R_0^2 \left(2\ln \frac{R_0}{r_0} - 1 \right) + r_0^2 \right] \left(\frac{1}{3}h^2 + d^2 \right) \right\}, \\ C' &= \pi\rho_0^*h \left\{ (R_0^4 - r_0^4) + \frac{1}{4}k_\rho \left[R_0^4 \left(4\ln \frac{R_0}{r_0} - 1 \right) + r_0^4 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

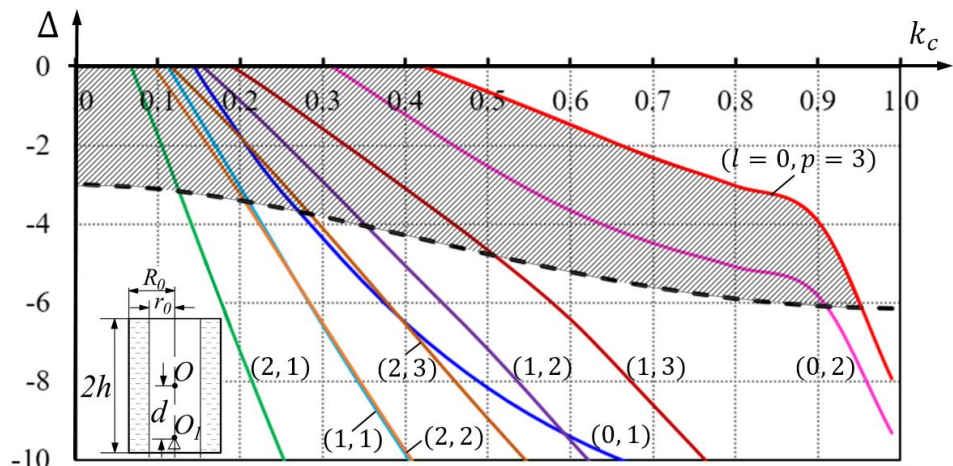
Моменты инерции A' и C' затвердевшей стратифицированной жидкости в безразмерных видах будут

$$\begin{aligned} \bar{A}' &= 2\pi\bar{h} \left\{ (1 - c^2) \left[\frac{1}{4}(1 + c^2) + \frac{1}{3}\bar{h}^2 + \bar{d}^2 \right] + \frac{1}{16}k_\rho \left(4\ln \frac{1}{c} - 1 + c^4 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}k_\rho \left(2\ln \frac{1}{c} - 1 + c^2 \right) \left(\frac{1}{3}\bar{h}^2 + \bar{d}^2 \right) \right\}, \\ \bar{C}' &= \pi\bar{h} \left\{ (1 - c^4) + \frac{1}{4}k_\rho \left(4\ln \frac{1}{c} - 1 + c^4 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.111)$$

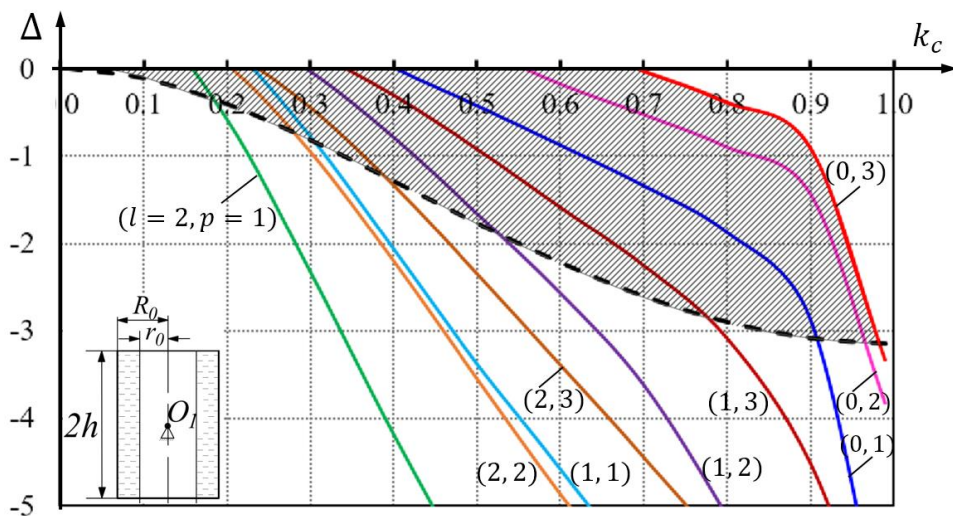
В выражениях (5.111) безразмерные параметры следующие:

$$\bar{A}' = \frac{A'}{\rho_0^*R_0^5}, \quad \bar{C}' = \frac{C'}{\rho_0^*R_0^5}, \quad c = \frac{r_0}{R_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{R_0}, \quad \bar{d} = \frac{d}{R_0}.$$

Используя уравнение (5.109), построим области неустойчивости твёрдого тела с жидкостью в безразмерных параметрах Δ и k_c , здесь $k_c = 1 - c$ – коэффициент заполнения полости. Области неустойчивости твёрдого тела с цилиндрической полостью, заполненной однородной жидкостью ($k_\rho = 0$) при различных значениях корней l и p ($l = 0 \div 2$; $p = 1 \div 3$) показаны на рис. 5.11. Области неустойчивости на рис. 5.11. (а) построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах $\bar{A}^0 = 10$, $d = h/2$, и на рис. 5.11. (б) для жидкости без твёрдого тела, т.е. при $\bar{A}^0 = 0$, $d = 0$. Здесь зоны неустойчивости заштрихованы. Пунктирная линия представляет собой границу на плоскости параметров Δ и \bar{h} физически возможных значений моментов инерции тела с жидкостью ($\bar{C} - \bar{A}$).



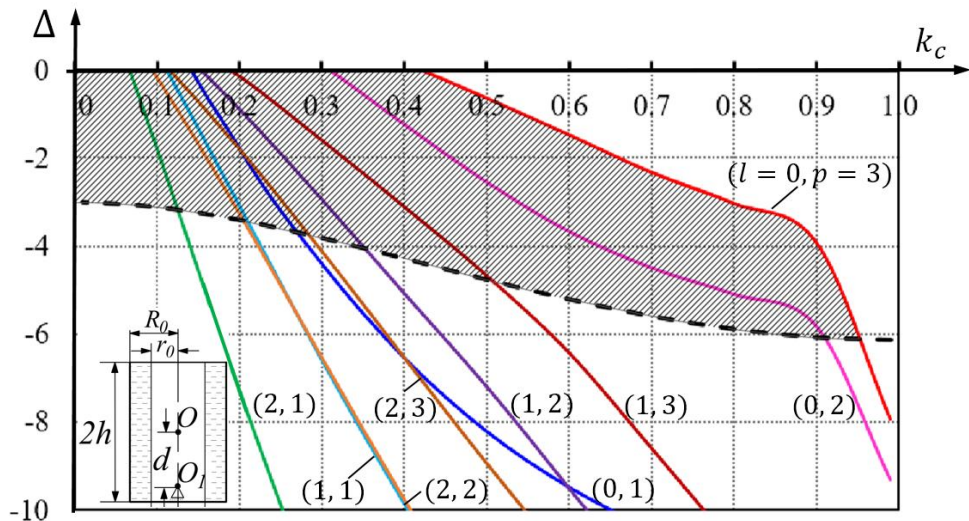
(а) $k_\rho = 0$, $\bar{A}^0 = 10$, $d = h/2$, $l = 0, 1, 2$; $p = 1, 2, 3$.



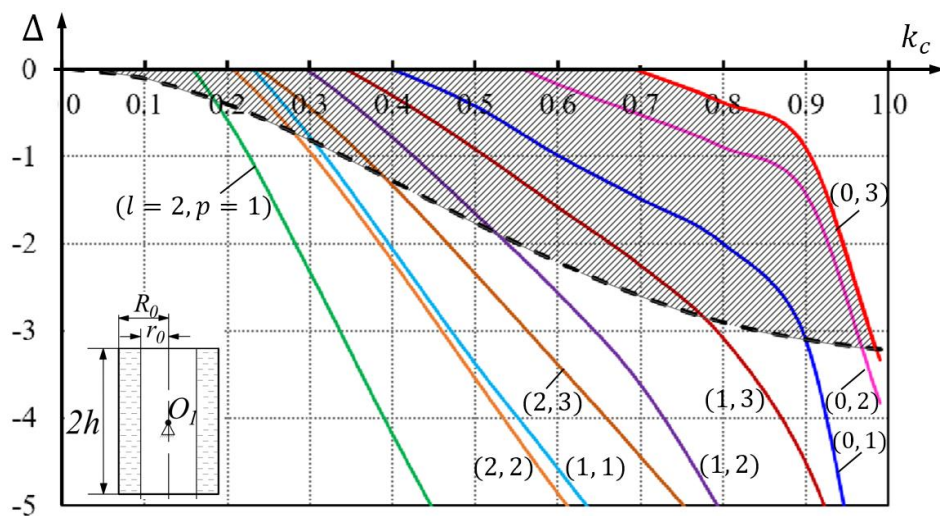
(б) $k_\rho = 0$, $\bar{A}^0 = 0$, $d = 0$, $l = 0, 1, 2$; $p = 1, 2, 3$.

Рис. 5.11. Области неустойчивости вращения твёрдого тела с однородной жидкостью с учетом внутренних волн.

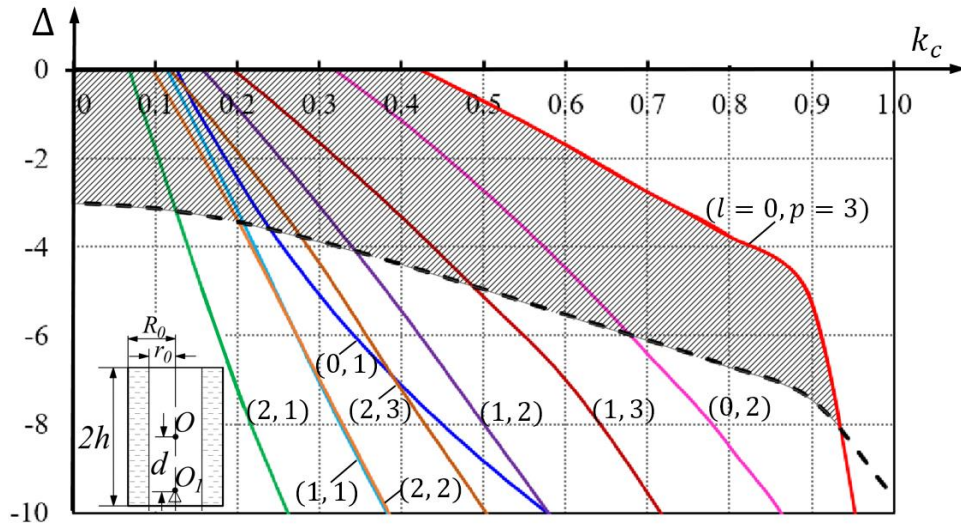
Далее построим области неустойчивости для стационарного быстрого вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью ($k_p \neq 0$). На рис. 5.12 показаны области неустойчивости твёрдого тела с цилиндрической полостью, заполненной стратифицированной жидкостью при различных значениях корней l и p ($l = 0 \div 2$; $p = 1 \div 3$). Области неустойчивости на рис. 5.12. (а) при $k_p = 0.01$ и (в) при $k_p = 0.1$, построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах $\bar{A}^0 = 10$, $d = h/2$; на рис. 5.12. (б) при $k_p = 0.01$ и (г) при $k_p = 0.1$ – для жидкости без твёрдого тела, т.е. при $\bar{A}^0 = 0$, $d = 0$ (зоны неустойчивости заштрихованы).



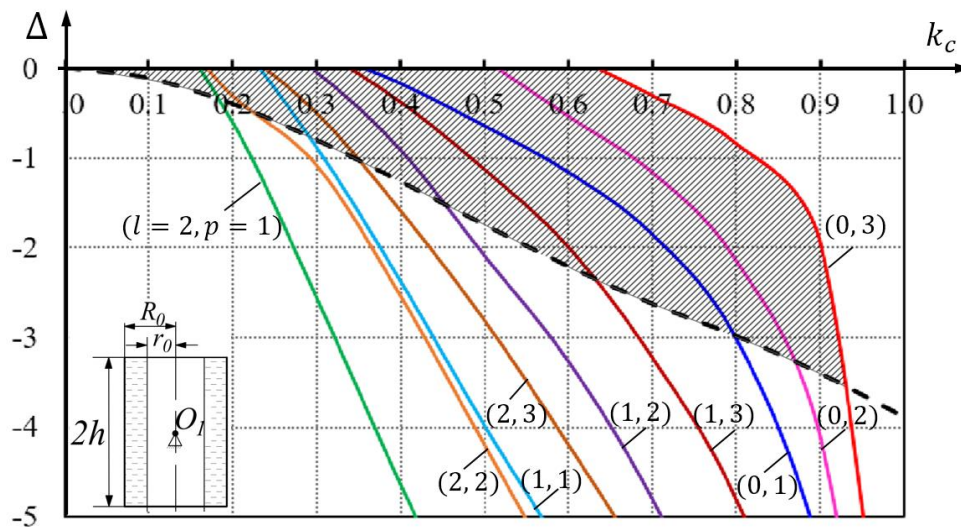
(а) $k_p = 0.01$, $\bar{A}^0 = 10$, $d = h/2$, $l = 0, 1, 2$; $p = 1, 2, 3$.



(б) $k_p = 0.01$, $\bar{A}^0 = 0$, $d = 0$, $l = 0, 1, 2$; $p = 1, 2, 3$.



(B) $k_p = 0.1, \bar{A}^0 = 10, d = h/2, l = 0, 1, 2; p = 1, 2, 3.$



(Г) $k_p = 0.1, \bar{A}^0 = 0, d = 0, l = 0, 1, 2; p = 1, 2, 3.$

Рис. 5.12. Области неустойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью с учетом внутренних волн.

Графические расчеты (рис. 5.11 – 5.12) показывают, что увеличение числа p для однородной ($k_p = 0$) и стратифицированной ($k_p \neq 0$) жидкостей приводит к появлению областей неустойчивости с большими числами k_c на плоскости переменных Δ и k_c , а увеличение числа l приводит к образованию областей неустойчивости с малыми числами k_c . Когда l и p увеличиваются одновременно, области неустойчивости возникают внутри областей неустойчивости с меньшими значениями l и p .

Затем сравним области неустойчивости в зависимости от числа стратификации (k_ρ). На рис. 5.13 показаны области неустойчивости для твёрдого тела со стратифицированной жидкостью в безразмерных переменных Δ и k_c при различных числах стратификации ($k_\rho = 0, 0.01, 0.1, 0.2$) с постоянными корнями $l = 0, p = 1$. Области неустойчивости, изображенные на рис. 5.13. (а) построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах $\bar{A}^0 = 10, d = h/2$; рис. 5.13. (б) – для жидкости без твёрдого тела, то есть при $\bar{A}^0 = 0, d = 0$ (зоны неустойчивости заштрихованы).

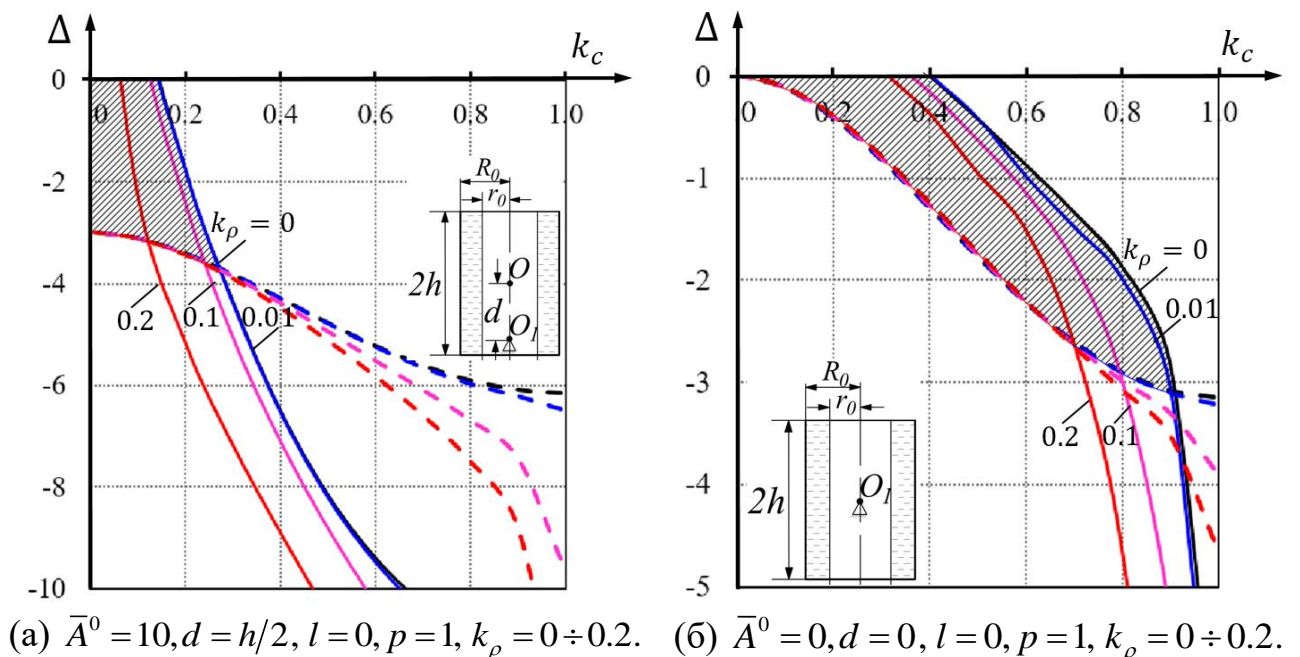


Рис. 5.13. Области неустойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью с учетом внутренних волн.

На рис. 5.13 видно, что увеличение числа стратификации (k_ρ) приводит к уменьшению областей неустойчивости на плоскости переменных Δ и k_c .

5.3.5. Вращение твёрдого тела с жидкостью при наличии свободной поверхности с учетом поверхностных волн

Рассмотрим условия устойчивости стационарного быстрого вращения твёрдого тела с жидкостью с учетом поверхностных волн. Процесс построения зон неустойчивости с учётом поверхностных волн такой же, как и при исследовании

неустойчивости с учётом внутренних волн. Используя уравнение (5.109), построим области неустойчивости твёрдого тела с жидкостью с учетом поверхностных волн в безразмерных параметрах Δ и k_c .

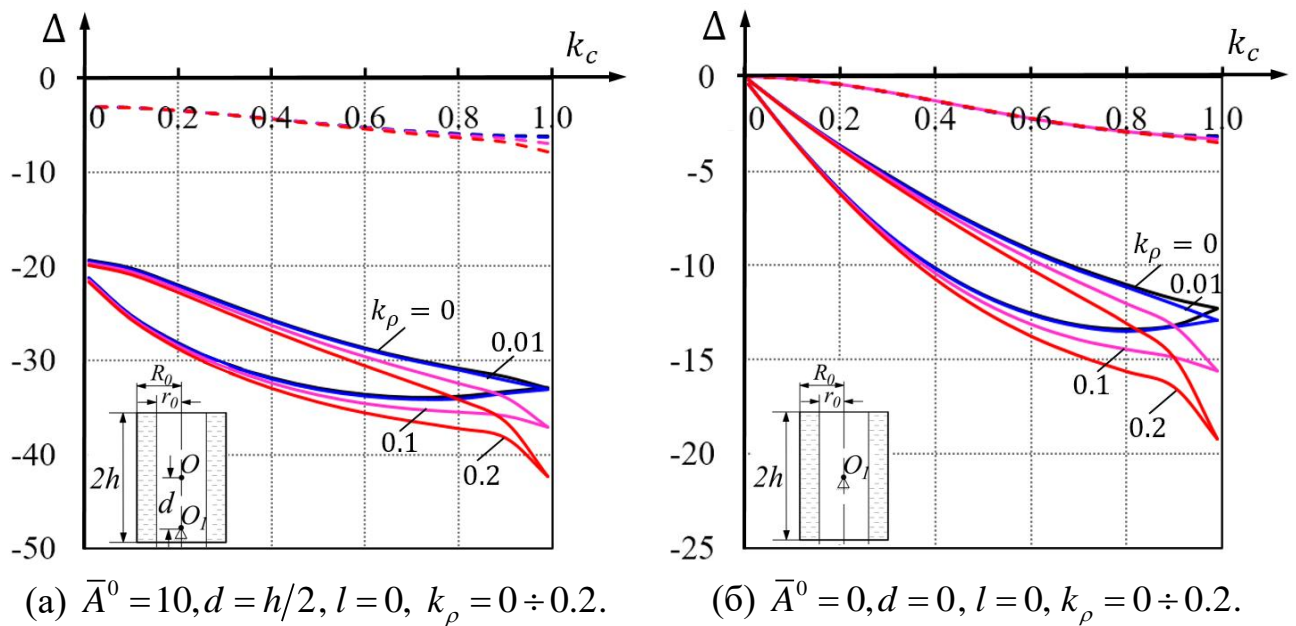


Рис. 5.14. Графическое исследование уравнения границ области устойчивости (5.109) с учетом поверхностных волн.

Графическое решение (рис. 5.14) показывает, что области неустойчивости отсутствуют, так как ветви границ областей для однородной ($k_\rho = 0$) и стратифицированной ($k_\rho \neq 0$) жидкостей с учетом поверхностных волн, затухающих в радиальном направлении, находятся под пунктирной линией и должны быть исключены из рассмотрения [1, 36]. В этом случае можно сделать вывод, что при быстром вращении жидкости поверхностные волны не влияют на устойчивость вращения твёрдого тела с жидкостью.

5.4. Вывод по главе 5

В данной главе представлены области неустойчивости стационарного вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью и частично наполненной стратифицированной жидкостью. Вращение происходит вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс рассматриваемой механической системы. Рассмотрены следующие случаи полного и частичного заполнения

полости: (а) случай вращения твёрдого тела в отсутствие жидкой массы, (б) случай вращения твёрдого тела с однородной жидкостью, когда момент инерции твёрдого тела равен нулю или не равен нулю, и (в) случай вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью, когда момент инерции твёрдого тела равен нулю или не равен нулю. Наличие устойчивой стратификации в жидкости приводит к уменьшению областей неустойчивости вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью или частично наполненной жидкостью. Проведенные результаты показывают, что при большой скорости вращения, поверхностные волны не влияют на устойчивость вращения тела с жидкостью. Предложенный метод может быть использован для исследования не только цилиндрических полостей, но и полостей других форм.

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена задача о свободных колебаниях вращающегося тела с полостью, полностью и частично наполненной стратифицированной жидкостью, относительно стационарного вращения.

На основе предложенного в работе метода изучен круг вопросов, связанных с выявлением свойств колебательного движения вращающейся жидкости и влиянием на устойчивость движения тела.

Основные выводы данной диссертации заключаются в следующем:

- Исследовано сферическое движение твёрдого тела с неоднородной несжимаемой жидкостью, полностью заполняющей эллипсоидальную полость.
- Получены достаточные условия устойчивости вращения твёрдого тела с неоднородной жидкостью вокруг вертикальной оси динамической симметрии.
- Выполнены численные результаты собственных частот свободных колебаний стратифицированных жидкостей для внутренних и поверхностных волн при малых и больших угловых скоростях.
- Результаты расчётов показывают, что наличие стратификации приводит к увеличению частот свободных колебаний жидкости как для внутренних, так и для поверхностных волн.
- Построены области неустойчивости вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью и частично наполненной стратифицированной жидкостью, при вращении вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс рассматриваемой механической системы.
- На устойчивость вращения твёрдого тела с вращающейся стратифицированной жидкостью существенно влияют трёхмерные (внутренние) волны.
- Расчёты областей неустойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью показывают, что устойчивая стратификация жидкости приводит к уменьшению областей неустойчивости вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью или частично наполненной жидкостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ай Мин Вин, Темнов А.Н. Вращение твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью // Труды МАИ. 2015. Вып. 79. С. 1–23.
2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Определение собственных частот внутренних волн в существенно неоднородной жидкости // Механика жидкости и газа. 1997. № 6. С. 112–119.
3. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Колебания непрерывно стратифицированной жидкости в движущемся сосуде и управление ими // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 585–592.
4. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Колебания твёрдого тела с полостью, содержащей тяжёлую неоднородную жидкость // Механика твёрдого тела. 1986. № 1. С. 27–36.
5. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Управление колебаниями неоднородной тяжёлой жидкости в подвижном сосуде // Механика твёрдого тела. 1985. № 3. С. 27–35.
6. Алексеев А.В. Движение систем твёрдых тел с полостями, заполненными жидкостью: учебное пособие. Самара: Изд-во Самар. ун-т, 2021. 60 с.
7. Алексеев А.В. Математическое моделирование движения твёрдых тел с жидким наполнением: учебное пособие. Самара: Изд-во Самар. ун-т, 2018. 108 с.
8. Алексеев А.В., Асланов В.С. Движение твёрдого тела с жидкостью малой вязкости // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7. Вып. 2. С. 44–48.
9. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 2017. 416 с.
10. Аскеров Н.К., Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения // функциональный анализ и его приложения. 1968. Т. 2. Вып. 2. С. 21–31.
11. Беляков В.П. Криогенная техника и технология. М.: Энерго-издат, 1982. 272 с.

12. Боталов А.Ю. Численное исследование движения тела с полостью, частично или полностью заполненной вязкой жидкостью: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тюмень. 2014. 135 с.
13. Бужинский В.А. Колебания тел с острыми кромками в несжимаемой маловязкой жидкости и некоторые задачи гидродинамики космических аппаратов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Королев. 2003. 280 с.
14. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика стратифицированных сред переменной глубины // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Естественные науки". 2015. № 3. С. 58–76.
15. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах переменной глубины // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2015. Т. 8. № 3. С. 22–29.
16. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика экспоненциально стратифицированных сред // Международный научно-исследовательский журнал. 2017. Ч. 1. № 04 (48). С. 77–80.
17. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние волны, возбуждаемые движущимся источником в среде переменной плавучести // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 5. С. 38–44.
18. Веселова Л.Е. О динамике тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью // Вестник МГУ. 1985. Сер. 1. Математика. Механика. № 2. С. 64-67.
19. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986. 288 с.
20. Габов С.А. Задачи, связанные с колебаниями вращающихся стратифицированных жидкостей, и некоторые математические методы их исследования: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва. 1982. 312 с.
21. Габов С.А., Симаков С.Т. К теории внутренних и поверхностных волн в стратифицированной жидкости // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 1989. Т. 29. № 2. С. 225–238.

22. Габов С.А., Свешников А.Г. О некоторых задачах, связанных с колебаниями стратифицированных жидкостей // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 7. С. 1150–1156.
23. Габов С.А., Симаков С.Т. К теории внутренних и поверхностных волн в стратифицированной жидкости // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 1989. Т. 29. № 2. С. 225–238.
24. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 368 с.
25. Глинский Н.Т. Внутренние волны в океанах и морях. М.: Наука, 1973. 127 с.
26. Гонткевич В.С. Собственные колебания стратифицированной жидкости в сосудах. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 147–152.
27. Гонткевич В.С. Собственные колебания вращающейся жидкости в сосудах // Гидромеханика: Респ. межвед. сб. науч. тр., Киев. 1972. Вып. 20. С. 52–58.
28. Гончаров В.П., Красильников В.А., Павлов В.И. К теории волновых взаимодействий в стратифицированных средах // Физика атмосферы и океана. 1976. Т. 12. № 11. С. 1143–1151.
29. Гончаров В.П. Исследование волновых взаимодействий в стратифицированных средах в рамках метода Гамильтоновского формализма: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. 1977. 120 с.
30. Григорьев А.И., Фёдоров М.С. Ширяева С.О. Волны в стратифицированной по плотности двухслойной жидкости конечной толщины с заряженной границей раздела // Электронная обработка материалов. 2013. Т. 49. № 2. С. 48–51.
31. Гурченков А.А. Начально-краевая задача для уравнений динамики вращающейся жидкости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 2(14). С. 1–11.
32. Давайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. 10-ое изд., СПб.: Лань. 2009. 228 с.
33. Дерендяев Н.В., Сандалов В.М. Устойчивость стационарного вращения ротора, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // Машиноведение. 1986. № 1. С. 19–26.

34. Дерендяев Н.В. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 5. С. 1073–1076.
35. Дерендяев Н.В. Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость: Монография. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2014. 154 с.
36. Докучаев Л.В., Рвалов Р.В. Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей жидкость // Механика твёрдого тела. 1973. № 2. С. 6–14.
37. Дьяченко М.И., Орлов В.В., Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических ёмкостях // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 11. С. 175–191.
38. Дьяченко М.И., Нгуен Зуй Хунг, Темнов А.Н. О движении несжимаемой жидкости в топливных баках с заборными устройствами // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2017. Т. 16. № 2, С. 23–35.
39. Жак С.В. Об устойчивости некоторых частных случаев движения симметричного гироскопа, содержащего жидкие массы // Прикладная математика и механика. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 245–249.
40. Жак С.В. О возможности квазитвёрдого вращения жидкости // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 569–570.
41. Жуковский Н.Е. О движении твёрдого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Репр-изд., М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2017. 137с.
42. Задорожный А.И. Исследование влияния вязкости на поверхностные и внутренние гравитационные волны в океане: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д. 1980. 160 с.
43. Зеленьяк Т.И. Об одной задаче С.Л. Соболева // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 5. С. 1017–1019.
44. Иванов М.И. Волновые движения жидкости в сложных областях с учетом вращения: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. 2008. 111 с.

45. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 65–75.
46. Казмерчук И.М., Самсонов В.А. О квазистационарных движениях волчка с жидким наполнением // Механика твердого тела. 1996. № 2. С. 32–26.
47. Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Линейная теория распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1998. Т. 39. № 5. С. 88–98.
48. Колесников К.С. Динамика ракет. 2-ое изд., испр. и доп. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
49. Колесников К.С., Дубинина В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики. 5-ое изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 580 с.
50. Копачевский Н.Д., Цветков Д.О. Колебания стратифицированных жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 29. С. 103–130.
51. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 1986. Т. 26. № 5. С.734–755.
52. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Свободные колебания идеальной стратифицированной жидкости в сосуде // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24. № 1. С.109–123.
53. Костандян Б.А. Влияние колебаний свободной поверхности на устойчивость вращательных движений волчка, содержащего жидкость // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 646–656.
54. Костандян Б.А. Об устойчивости вращательных движений волчка с полостью, неполностью наполненной жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 56–64.
55. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.

56. Краусс В. Внутренние волны. Методы и результаты теоретической океанографии. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 270 с.
57. Крейн С.Г., Лаптев Г.И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде // Функциональный анализ и его приложения. 1968. Т. 2. Вып. 1. С. 40–50.
58. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
59. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
60. Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.: Наука, 1965. 252 с.
61. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
62. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
63. Макаров С.А., Чашечкин Ю.Д. Присоединенные внутренние волны в жидкости с экспоненциальным распределением плотности // Прикладная механика и техническая физика. 1981. № 6. С. 47–54.
64. Малашенко С.В. Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел // Прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 205–211.
65. Малашенко С.В. Темченко М.Е. Об одном методе экспериментального исследования устойчивости движения волчка, внутри которого имеется полость, наполненная жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 76-80.
66. Мельхиор П. Земные приливы. М.: Мир, 1968. 482 с.
67. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. 3-ое изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1987. 304 с.
68. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твёрдого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
69. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 248 с.
70. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.

71. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 431 с.
72. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объёма жидкости. М.: ВЦ АН СССР. 1966. 269 с.
73. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
74. Монин А.С. Океанология. Геофизика океана. Т.2. Гидродинамика. М.: Наука, 1979. 420 с.
75. Нгуен З.Х. Собственные колебания жидкости в сферических ёмкостях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2015. № 2. С. 84–90.
76. Нестеров С.В. Собственные частоты внутренних волн в жидкости с произвольной частотой Брента–Вяйсяля // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 3. С. 570–573.
77. Орлов В.В., Темнов А.Н. Нормальные колебания жидкости, вытекающей из вращающегося бака // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. Вып. 8(92). С. 1–19.
78. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 3–20.
79. Перова Л.В. О колебаниях стратифицированной вращающейся жидкости при возбуждении ее свободной поверхности движущимися источниками // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 5. С. 903–922.
80. Рвалов Р.В. Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1973. № 4. С. 81–88.
81. Румянцев В.В. Методы Ляпунова в исследовании устойчивости движения твёрдых тел с полостями, наполненными жидкостью // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 119–140.

82. Румянцев В.В. Об устойчивости вращательных движений твёрдого тела с жидким наполнением // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23. Вып. 6. С. 1057–1065.
83. Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 20–55.
84. Соболев С.Л. Об одной новой задаче для систем уравнений в частных производных // Докл. СССР. 1951. Т. 81. № 6. С. 1007–1010.
85. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1954. Т. 18. Вып. 1. С. 3–50.
86. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
87. Сунь Цао. О волнах на поверхности жидкости под действием центробежной силы // Прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3, С. 90–96.
88. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат., 1946. 655 р.
89. Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объёме: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. 1984. 192 с.
90. Темнов А.Н. Об уравнениях сферического движения твёрдого тела с неоднородной жидкостью // Труды МВТУ им. Н. Э. Баумана. 1979. № 306. С. 31–40.
91. Темнов А.Н. Устойчивость равномерных вращений твёрдого тела с криогенной жидкостью // Труды первой международной авиакосмической конференции “человек-земля-космос”. 1995. С. 310–317.
92. Фастовский В.Г., Петровский Ю.В., Ровинский А.Е. Криогенная техника. 2-ое изд., перераб. и доп. 1974. М.: Энергия, 496 с.
93. Фридман А.А. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. Л.: ОНТИ ГТТИ, 1934. 368 с.
94. Харламов П.В. Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твёрдого тела, имеющего полости, заполненные жидкостью // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. № 4. С. 759–760.

95. Цветков Д.О. Малые движения идеальной стратифицированной жидкости // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Сер. Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. 2007. Т. 20 (59). № 1. С. 80–85.
96. Цветков Д.О. Малые движения идеальной стратифицированной жидкости в сосуде // Таврический вестник информатики и математики. 2002. № 1. С. 98–103.
97. Черников С.А., Сюэ Юнцзя. Динамическое демпфирование резонансных колебаний гироскопической системы жидкостным демпфером // Известия ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 5. С. 206–216.
98. Черноусько Ф.Л. Движение твёрдого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
99. **Ян Наинг У, Темнов А.Н.** Механический аналог движений неоднородной жидкости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2022. Вып. 7(127). С. 1–16.
100. **Ян Наинг У, Темнов А.Н.** Вращение вокруг неподвижной точки твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, полностью наполненной неоднородной жидкостью // Труды МАИ. 2023. № 128. С. 1–30.
101. **Ян Наинг У, Вин Ко Ко, Темнов А.Н.** Устойчивость сферического движения твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение // Инженерный журнал: наука и инновации. 2023. Вып. 1(133). С. 1–18.
102. **Ян Наинг У.** Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в цилиндрической полости // Труды МАИ. 2023. № 130. С. 1–28.
103. **Ян Наинг У, Темнов А.Н.** Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в поле центробежных сил инерции // Труды МАИ. 2023. № 132. С. 1–37.
104. **Ян Наинг У, Темнов А.Н.** Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей криогенную жидкость // Труды МАИ. 2023. № 133. С. 1–30.
105. **Ян Наинг У, Темнов А.Н., Шкапов П.М.** Свободные колебания криогенной вращающейся жидкости в цилиндрической полости // Труды МАИ. 2024. № 135. С. 1–33.

106. Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series. 55. Tenth Printing with corrections. USA. 1972. 1060 p.
107. Abramson H.N. The dynamic behavior of liquids in moving containers, with applications to space vehicle technology. Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, Washington D.C., NASA SP-106.1966. 467 p.
108. Agrawal B.N. Dynamic characteristics of liquid motion in partially filled tanks of a spinning spacecraft // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1993. V. 16. No. 4. P. 636–640.
109. Agrawal B.N. Stability of spinning spacecraft with partially liquid-filled tanks // J. Guidance. 1982. V. 5. No. 4, P. 344–350.
110. Batchelor G.K., Nitsche J.M. Instability of stationary unbounded stratified fluid // J. Fluid Mech. 1991. V. 227. P. 357–391.
111. Batchelor G.K., Nitsche J.M. Instability of stratified fluid in a vertical cylinder // J. Fluid Mech. 1993. V. 252. P. 419–448.
112. Carrier G.F., Miles J.W. On the annular damper for a freely precessing gyroscope // J. Appl. Mech. 1960. V. 27. Issue 2. P. 237–240.
113. Dodge F.T. The new “Dynamic behavior of liquids in moving containers”. San Antonio. Texas. Southwest Research Institute, 2000. 195 p.
114. Ehmann M., Siekmann J. Numerical study of the oscillation of axially excited liquid annuli with rotational symmetry enclosed in revolving circular cylindrical containers // J. Fluid Mech. 1995. V. 297. P. 215–230.
115. Giusy Mazzone. On the dynamics of a rigid body with cavities completely filled by a viscous liquid. Thesis for: PhD in Mechanical Engineering and Materials Science. University of Pittsburgh. 2016. 114 p.
116. Goldstein H., Poole C.P., Safko J.L. Classical Mechanics. Third edition. Addison-Wesley, 2002. 638 p.
117. Greenspan H.P. On the general theory of contained rotating fluid motions // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Part 3. P. 449–462.

118. Greenspan H.P. The theory of rotating fluids. Cambridge University Press. 1968. 327 p.
119. Hough S.S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A., 1895. V. 186. Part 1. P. 469-506.
120. Junho Park. Waves and instabilities on vortices in stratified and rotating fluids. Thesis for: PhD in Fluid Mechanics. Palaiseau. Ecole Polytechnique X, 2012. 119 p.
121. Lamb H. On atmospheric oscillations // Proc. Roy. Soc. London A, 1910. P. 551-572.
122. Love A.E.H. Wave motion in a heterogeneous heavy liquid // Proc. London Math. Soc., Oxford University Press. 1890. V. 22. Issue 1, P. 307–316.
123. Miles J.W. Free -surface oscillations in a slowly rotating liquid // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. Issue 2. P. 187–194.
124. Miles J.W. Free surface oscillations in a rotating liquid // The Physics of Fluids. 1959. V. 2. No. 3. P. 297–305.
125. Miles J.W. On the Annular Damper for a freely precising Gyroscope – II // J. Appl. Mech., 1963. V. 30. Issue 2. P. 189–192.
126. Miles J.W., Troesch B.A. Surface oscillations of a rotating liquid. // J. Appl. Mech., 1961. V. 28. Issue 4. P. 491–496.
127. Mowbray D.E., Rarity B.S.H. A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid // J. Fluid Mech. 1967. V. 28. Issue 1. P. 1–16.
128. Phillips O.M. Centrifugal waves // J. Fluid Mech. 1960. V. 7. Issue 3. P. 340–352.
129. Poincare H. Sur la precession des corps deformables // Bulletin astronomique, Serie I. 1910. V. 27. P. 321–356.
130. Rao V.S. Surface waves in rotating liquids // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1969. V. 65. P. 309–318.
131. Rayleigh L. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density Proc. London Math. Soc., 1882. V. 14. Issue 1. P. 170–177.

132. Ring E. Rocket propellant and pressurization systems. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., U.S.A, 1964. 310 p.
133. Sloudsky Th. De la rotation de la terre supposee fluide a son interieur // Bulletin de la Societe Imperiale des naturalistes de Moscou. 1895. Tome IX. P. 285–318.
134. Stewartson K., Roberts P.H. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body // J. Fluid Mech. 1963. V. 17. Issue 1. P. 1–20.
135. Stewartson K. On the stability of a spinning top containing liquid // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Issue 4. P. 577–592.
136. Stokes G. On the theory of oscillatory waves // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1847. V. 8. P. 197–229.
137. Turner J.S. Buoyancy Effects in Fluids. Cambridge. Cambridge University Press, 1973. 367 p.
138. Vanyo J.P. Rotating fluids in engineering and science. Dover Publications, Inc. New York. 2001. 547 p.
139. Win Ko Ko, Temnov A.N. Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. V. 468. P. 1–9.