

На правах рукописи

Гандилян Давид Ваганович

**ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ УПРУГОЙ ЗАДЕЛКИ В ЗАДАЧАХ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Научный руководитель: **Устинов Константин Борисович**
д.ф.-м.н., доцент, вед. научный сотрудник
лаборатории геомеханики ИПМех РАН

Официальные оппоненты: **Келлер Илья Эрнстович**
д.ф.-м.н., доцент, зав. лаб. нелинейной
механики деформируемого твердого тела
ФГБУН «Институт механики сплошных
сред Уральского отделения Российской
академии наук» (ИМСС УрО РАН)

**Волков–Богородский Дмитрий
Борисович**
к.ф.-м.н., в.н.с. отдела механики
структурированной и гетерогенной среды
ФГБУН «Институт прикладной механики
Российской академии наук» (ИПРИМ
РАН)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки «Институт проблем
машиноведения Российской академии
наук» (ИПМаш РАН)

Защита состоится 5 июня 2025 г. в 15 часов на заседании диссертационного
совета 24.1.098.01 на базе ИПМех РАН по адресу: просп. Вернадского 101,
корп. 1, Москва.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН
<https://ipmnet.ru/diss/diss2/>

Автореферат разослан « ___ » _____ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.098.01
к.ф.-м.н.

Е.Я. Сысоева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. С приходом новых технологий, вопросы, связанные с исследованиями в области механики деформируемого твердого тела, в частности с деформацией и разрушением тонкостенных конструкций, включая отслоение тонких пленок и покрытий, вызывают все больший интерес в научных исследованиях и промышленности. В настоящее время тонкие и сверхтонкие пленки/покрытия играют одну из ключевых ролей в современной высокотехнологичной промышленности, находя применение в различных областях, таких как авиакосмическая промышленность, машиностроение, энергетика, медицинская, химическая промышленность и др., а также служат одним из основных элементов различных приборов и устройств в микро- и нанoeлектронике, солнечной энергетике, оптоэлектронике и т.д. В частности, они используются в качестве элементов конструкций при создании масок рентгеновской нанолитографии, применение которой позволит перейти к созданию наноструктур с минимальными топологическими размерами на уровне от 10 нм и меньше. Несмотря на то, что существуют различные типы пленок, большинство из них можно разделить на два типа: органические и неорганические. Органические пленки, как правило, состоят из материалов на основе углерода. Они часто используются в таких приложениях, как органическая электроника, фотохимия и электрохимия. Эти пленки могут быть гибкими и легкими, что делает их пригодными для различных применений, в том числе для производства органических светодиодов (OLED – organic light-emitting diode) и органических солнечных элементов. Неорганические пленки изготавливаются из материалов, которые обычно состоят из металлов, оксидов металлов или соединений на основе кремния. Сверхтонкие пленки также важны для создания защитных покрытий, которые помогают обеспечить повышение твердости, износостойкости, устойчивости к коррозии и температурным изменениям эксплуатируемых приборов и устройств. Например, в авиадвигателях и турбинах электростанций используются покрытия для защиты металлических компонентов, подвергающихся воздействию достаточно высоких температур, представляющие собой пористые керамические слои с низкой теплопроводностью, причем они являются многофункциональными, поскольку также служат в качестве окислительного барьера.

В процессе эксплуатации, особенно в сложных термомеханических условиях покрытия могут сталкиваться с образованием дефектов. Механические напряжения, возникающие в покрытиях во время эксплуатации деталей, оказывают существенное влияние на их долговечность и надежность. В частности, растягивающие или сжимающие напряжения могут способствовать повреждению поверхностных защитных покрытий путем их растрескивания, краевому отслоению и скалыванию, либо приводить к их короблению (выгибанию) или гофрированию (образованию

волнообразных складок или рифлений). Данные явления наблюдаются для широкого круга конструкций, представляющие собой систему «покрытие-основание» («покрытие-подложка»), которые используются во многих областях промышленности, в частности в микро- и нанoeлектронике; в качестве примеров использования таких систем являются оксидные слои (Al_2O_3 на сплавах Ni-Cr-Al и Fe-Cr-Al) в термоизоляторах, пленка $\text{SiO}_2/\text{Si}_3\text{N}_4$ /пленка металла/поликремния для фотолитографии, в солнечных панелях, где часто используются защитные покрытия на основе прозрачных оксидов, которые наносятся на подложки из кремния и выполняющие несколько важных функций: данные покрытия защищают элементы солнечных панелей от внешних воздействий, а также увеличивают их эффективность за счет улучшения светопропускания и снижения отражательных потерь.

Также, помимо исследования процессов отслоения покрытий от основания, важно исследовать процессы деформирования тонкостенных пластин, сопряженных по контуру с основанием (подложкой), поскольку такие системы, включая литографические маски для печатных плат (PCB — printed circuit board), критически важны для развития новых технологий рентгеновской литографии, что требует корректного анализа форм деформирования тонкостенных элементов литографических масок при их эксплуатации.

Поэтому для обеспечения гарантии стабильной работы таких структур важно корректно и с достаточной степенью точности исследовать процессы деформирования покрытия/пленки/пластины, с учетом влияния основания и условий эксплуатации, что становится особенно актуальным при уменьшении размеров используемых приборов (например, МЭМС — Микроэлектромеханические системы).

В настоящее время тонкостенные элементы конструкций, сопряженные с массивными телами, чаще всего моделируются в рамках различных двумерных или одномерных моделей: балок, пластин, оболочек. Для анализа поведения тонкостенных элементов применяются методы из теории тонких оболочек и пластин, основной вклад в который внесли как отечественные (В.З. Власов, Х.М. Муштари, С.П. Тимошенко, В.В. Новожилов, А.С. Вольмир, Я.М. Григоренко, С.А. Амбарцумян, А.Л. Гольденвейзер и др.) так и зарубежные (А.О. Фёпль, Т. фон Карман, Л.Г. Доннелл, Ф. Сьярле, С. Войновский-Кригер и др.) ученые. Вопросам исследования и моделирования напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций типа пленки/покрытия/пластины с учетом влияния основания (подложки) посвящено большое количество работ. Теоретическому изучению вопросов, связанных с деформированием покрытий вследствие потери устойчивости с отслоением и без занимались такие исследователи, как Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик, В.Е. Панин, В. Audoly, А. Boudaoud и другие.

Однако с развитием науки и техники для более точного анализа помимо использования основных соотношений необходимо также учитывать специфику граничных условий, учитывающих влияние основания. В качестве граничных условий обычно используются условия жесткого защемления, оправдывая это «массивностью» тел, с которыми рассматриваемые тонкостенные элементы сопрягаются. Однако, более детальное рассмотрение показывает, что условие жесткого защемления выполняется лишь приближенно. В последнее время особое внимание уделяется граничным условиям обобщенной упругой заделки, когда кинематические параметры — компоненты смещения срединной поверхности и углы поворота, связываются с силовыми параметрами — продольными и поперечными усилиями и изгибающими моментами посредством матрицы податливости, которые позволяют более точно моделировать взаимодействие пленок/покрытий/пластин и подложек, учитывая различные механические характеристики подложки. В частности, подобные задачи возникают при идентификации экспериментально определяемых параметров ультратонких элементов МЭМС, используемых, в частности, в проекционных литографических системах. Результаты отечественных и зарубежных исследований в данной области отражены в работах Р.Л. Салганика, Р.В. Гольдштейна, К.Б. Устинова, J.W. Hutchinson, D.S. Balint, M.D. Thouless, Z. Chen, В. Cotterell, S. Faulhaber, A. Andrews, L. Barbieri, R. Massabo и других. В частности, в работах К.Б. Устинова рассматривается общая постановка плоской задачи о полубесконечной трещине, расположенной на границе между полуплоскостью и полосой другого материала. С использованием соотношений теории упругости была установлена взаимосвязь между нормальными и касательными напряжениями на поверхности контакта материалов и производными от скачков смещения. С помощью полученных соотношений были получены значения коэффициентов матрицы податливости 3×3 . Полученные результаты использовались для решения ряда задач в данной работе.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния граничных условий упругой заделки на параметры отслоения пологих цилиндрических покрытий от подложки и деформирования круглых пластин, сопряженных по контуру с основанием.

Цели и задачи. Цель диссертации — аналитическое, численное исследование рассматриваемых задач механики оболочек, с учетом влияния основания (подложки), а именно, исследование недостаточно изученного

эффекта влияния основания на напряженно-деформированное состояние тонких пластин и пологих оболочек; развитие положений этого раздела механики деформируемого твердого тела; уточнение уже известных решений и получение новых научных результатов на основе достаточно известных математических моделей, а также определение области применимости полученных решений.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

— Выбор наиболее подходящих математических моделей для описания напряженно-деформированного состояния пластин и пологих оболочек;

— Разработка аналитических и численных методов решения задач об отслоении тонких покрытий и деформирования пластин, сопряженных по контуру с основанием. Сведение задачи к задачам, учитывающим изгиб пластин и пологих оболочек, с учетом влияния основания (подложки);

— Разработка алгоритма на ЭВМ. Вычисление параметров деформации покрытия и пластины;

— Исследование влияния основания и других факторов на напряженно-деформированное состояние покрытия и пластины;

— Выявление основных закономерностей формирования отслоений и потери устойчивости отслоившихся покрытий, и деформирования пластин;

— По результатам диссертации дать рекомендации по использованию разработанных подходов решения.

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

— Получены решения задач об отслоении тонких пологих цилиндрических покрытий от основания (подложки), заключающиеся в исследовании отслоившегося участка покрытия, используя математические модели нелинейной теории оболочек, где в качестве граничных условий используются граничные условия типа обобщенно-упругой заделки, которая учитывает свойства основания.

— Выявлены закономерности механического поведения отслоений: для пологих цилиндрических покрытий исследованы зависимости скорости высвобождения энергии, моды I коэффициента интенсивности напряжений, угла поворота в точке заделки, а также компонент смещения покрытия от относительной податливости подложки и ее кривизны;

— Выполнен численный расчет и анализ влияния некоторых факторов на напряженно-деформированное состояние отслоившегося участка покрытия, в частности влияния кривизны и податливости основания;

— Предложены аналитические (основанные на модели Софи Жермен, мембранной модели), полуаналитические (посредством применения функции Бесселя, разложения в степенные ряды), а также численный метод, аналогичный «методу стрельбы» решения задачи деформирования круговой пластины, сопряженной по контуру с основанием.

Теоретическая и практическая значимость работы. Представлены методы, позволяющие смоделировать механическое поведение тонких

покрытий с учетом влияния основания (подложки). Определены закономерности деформирования, роста и потери устойчивости отслоений при механическом воздействии, а также влиянии различных факторов, результаты которых могут быть использованы при создании систем с покрытиями в различных областях промышленности, в частности в микро- и нанoeлектронике.

Получены решения задач об отслоении покрытия от пологого цилиндрического основания, а также задач деформирования круговой пластины. Данные решения находят применение не только для расчетов параметров отслоения покрытия, но и в других областях, таких как анализ поведения металлических, оксидных и полупроводниковых покрытий в области авиационной промышленности, машиностроения, в строительной механике и др. Также получены аналитические и численное решение задачи о деформировании круговой пластины, сопряженной по контуру с основанием. Полученные решения особенно важны для производства и эксплуатации микроэлектроники, поскольку в процессе фотолитографии данные элементы часто применяются для создания различных микро- и наносхем, а также в производстве полупроводниковых устройств.

Методология и методы исследования. В рамках диссертации для решения поставленных задач были использованы методы механики деформируемых твердых тел. При исследовании вопросов, связанных с отслоением и деформированием покрытий, использовалась нелинейная теория оболочек и пластин, где в качестве граничных условий использовались граничные условия типа обобщенной упругой заделки, которые учитывают влияние основания, описывающиеся с помощью матрицы коэффициентов упругости.

При решении задач использовались аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений и их систем, а также систем нелинейных уравнений. Численные расчеты проводились с помощью методов компьютерного программирования.

Положения, выносимые на защиту:

1). Математические модели, позволяющие рассчитывать параметры напряженно-деформированного состояния отслоившегося, а также деформированного участка покрытия с учетом влияния основания (подложки) с помощью теории нелинейных пологих оболочек и пластин.

2). Алгоритмы решения поставленных задач с помощью аналитических и численных методов.

3). Влияние различных факторов, таких как кривизна и податливость основания на отслоение покрытия.

4). Закономерности напряженно-деформированного состояния и потери устойчивости отслоений при механическом нагружении.

5). Сравнение с известными решениями, не учитывающими влияние податливости основания с полученными решениями.

6). Области применимости полученных методов решения задач.

Достоверность результатов диссертации обусловлена математической обоснованностью вывода основных соотношений, описывающих напряженно-деформированное состояние покрытий, с использованием нелинейной теории тонких оболочек и пластин, строгостью постановки задач, построением ряда точных аналитических решений в рамках предложенных моделей, сравнением с известными частными случаями, полученными как автором диссертации, так и другими авторами, корректностью использования численных методов, а так же соответствием качественных результатов физической картине исследуемых процессов.

Апробация результатов исследования. Основные результаты исследований представлены на:

— XLVII Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», г. Москва, Россия, 12-23 апреля 2021 (секционный доклад);

— Актуальные проблемы механики сплошной среды. Материалы VIII международной конференции, Цахкадзор, Армения, 1-5 октября 2023 (стендовый доклад);

— XVIII Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций», Екатеринбург, Россия, 27-31 мая 2024 (секционный доклад);

— XIII Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» с международным участием, посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова, пос. Джанхот, Россия, 2-8 сентября 2024 (стендовый доклад).

Работы по теме диссертации отмечены наградой:

Диплом с присуждением III премии за научную работу в конкурсе на лучшие научные работы среди молодых ученых и студентов ИПМех РАН за 2024 год.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ [1–10], в том числе 5 статей опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ (из которых 3 — в изданиях, входящих в базу цитирования Scopus, 1 — в издании, входящем в базу цитирования Web of Science).

Личный вклад соискателя. Соискателем предложены решения задач нелинейной теории упругости в областях теории оболочек. Соискателем проведены теоретические исследования параметров деформирования оболочек, определены влияние параметров модели на механическое поведение деформации тела, в том числе влияние основания (подложки).

В работах [1–10] автору принадлежат: уточнение моделей деформирования и разработка алгоритма определения параметров деформации с учетом влияние податливости основания. В работах [1-3, 6, 7] исследована модель цилиндрической оболочки с малой начальной кривизной с учетом влияния основания. Проанализированы зависимость кривизны оболочки, податливости основания на параметры деформации оболочки. В работах [4, 5, 8-10] исследованы некоторые модели решения задач круглой

пластины, сопряженной по контуру с основанием, также предложены полуаналитический и численный метод решения задачи.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 126 страницы, в том числе 116 страниц основного текста, включая 41 рисунков и 10 таблиц. Список литературы содержит 138 наименований на 10 страницах.

Соответствие паспорту научной специальности. По теме и содержанию материалов исследования диссертационная работа соответствует актуальному паспорту специальности 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела, в части п. 1 «Законы деформирования, повреждения и разрушения материалов, в том числе природных, искусственных и вновь создаваемых», п. 2. «Теория определяющих соотношений деформируемых тел с простой и сложной структурой», п. 3. «Задачи теории упругости, теории пластичности, теории вязкоупругости» и п. 12 «Вычислительная механика деформируемого твердого тела».

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** отражены актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, научная новизна, основные положения, значимость работы, представлена структура диссертации.

В **первой главе** сделан обзор и анализ материалов, посвященных исследованию напряженно-деформированного состояния покрытий, сопряженных с основанием (подложкой). Намечены основные проблемы, выбраны основные направления исследований. Представлен общий подход к решению задач об отслоении и деформировании покрытий, основанный на теории тонких оболочек и граничных условиях типа обобщенно упругой заделки, учитывающих влияние подложки.

Вторая глава посвящена обозначению математической модели исследования напряженно-деформированного состояния тонких оболочек.

В разделе 2.1 представлены основные положения теории оболочек. В теории тонких оболочек обычно применяется криволинейная ортогональная система координат, где одно направление совпадает с нормалью к срединной поверхности. Для анализа напряженно-деформированного состояния тонких оболочек используется гипотеза Кирхгофа – Лява, которая позволяет свести трехмерную задачу к двумерной, основываясь на предположениях о поведении нормальных сегментов и малости нормальных напряжений на параллельных срединной поверхности площадках. Математически гипотеза Кирхгофа – Лява имеет вид:

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0, \quad \sigma_{33} = 0. \quad (1)$$

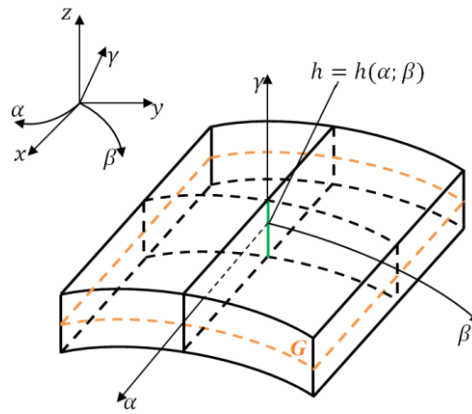


Рис. 1. Геометрическая модель оболочки, G – срединная поверхность

При относительной простоте, эта теория не всегда дает точные результаты для неоднородных материалов или в условиях действия сосредоточенных сил, однако для изотропных материалов она предоставляет достаточно точные результаты, которые близки к экспериментальным данным. Данная работа сосредоточена на изучении вопросов, которые соответствуют области применимости гипотез Кирхгофа – Лява.

В разделе 2.2 рассматриваются уравнения, описывающие деформации и перемещения точек в тонкой оболочке, на основе гипотезы Кирхгофа – Лява. Согласно этой гипотезе, перемещения точек оболочки линейно распределяются по толщине, что выражается через перемещения точки на срединной поверхности и углы поворота нормали к рассматриваемой точке в направлениях соответствующих координат (α, β, γ) . Деформированное состояние тела описывается шестью компонентами тензора деформации Коши – Грина, связанными с параметрами Ламе (масштабными коэффициентами). Если координатные линии совпадают с линиями главных кривизн, параметры Ламе можно выразить через главные радиусы кривизны (R_α, R_β) и коэффициенты первой квадратичной формы A, B

$$H_1 = A(1 + \gamma / R_\alpha), \quad H_2 = B(1 + \gamma / R_\beta), \quad H_3 = 1. \quad (2)$$

В рамках концепции тонких оболочек, отбросив величины более высокого порядка малости, получим соответствующие компоненты деформаций:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \gamma K_1, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \gamma K_2, \quad \varepsilon_{12} = \omega + \gamma K_{12}, \quad (3)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ являются нормальными деформациями срединной поверхности оболочки в направлениях α, β , ω – сдвиговая составляющая деформации срединной поверхности, K_1, K_2 отвечают за изменения кривизны (искривление), K_{12} – отвечает за кручение срединной поверхности оболочки, т.е. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ – компоненты тангенциальной деформации, K_1, K_2, K_{12} – компоненты изгибной деформации.

В разделе 2.3 через обобщенный закон Гука приведены уравнения компонент тензора напряжений для однородного изотропного упругого тела в рамках теории тонких оболочек (с учетом гипотезы Кирхгофа – Лява).

В разделе 2.4 приведены интегральные характеристики, применяемые в теории оболочек, такие как «усилие» и «погонный момент», вместо традиционных понятий «сила» и «момент» из общей физики. Приводятся соотношения упругости, устанавливающие связь между статическими и геометрическими параметрами, а именно внутренними усилиями, моментами, а также компонентами деформаций:

$$\begin{aligned} N_1 &= D_N(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad N_2 = D_N(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \quad D_N = \bar{E}h, \quad \bar{E} = E / (1 - \nu^2), \\ N_{12} &= D_N \frac{(1-\nu)}{2} \left(\omega + K_{12} \frac{h^2}{6R_\beta} \right), \quad N_{21} = D_N \frac{(1-\nu)}{2} \left(\omega + K_{21} \frac{h^2}{6R_\alpha} \right), \\ M_1 &= D_M(K_1 - \nu K_2), \quad M_2 = D_M(K_2 - \nu K_1), \quad D_M = \bar{E}h^3 / 12, \\ M_{12} &= D_M(1-\nu)K_{12} / 2, \quad M_{21} = D_M(1-\nu)K_{21} / 2, \end{aligned} \quad (4)$$

где D_N , D_M — тангенциальная и изгибная (цилиндрическая) жесткости.

В разделе 2.5 представлены основные соотношения для потенциальной энергии деформации. В рамках теории оболочек, в соответствии с гипотезой Кирхгофа – Лява, из основной формулы потенциальной энергии для упругого тела с учетом (1) и (3) получим

$$U = \frac{1}{2} \iint_G \left(\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \cdot \varepsilon_{12}) \left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right) \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right) d\gamma \right) AB d\alpha d\beta, \quad (5)$$

где G — область срединной поверхности (рис. 1).

В разделе 2.6 определены граничные условия, необходимые для решения задач. В общем случае на каждом контуре оболочки требуется задать четыре граничных условия. Часто в задачах, связанных с системами «покрытие-подложка», применяются условия жесткой заделки, описываемые через компоненты смещений и угол поворота следующим образом

$$\begin{aligned} \text{на контуре } \alpha = const: \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \theta_1 = 0, \\ \text{на контуре } \beta = const: \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \theta_2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

Для учета влияния податливости подложки используются граничные условия типа обобщенно упругой заделки

$$\begin{aligned} \text{на контуре } \alpha = const: \quad & \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{33} \\ M_{11} \end{pmatrix}, \\ \text{на контуре } \beta = const: \quad & \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{33} \\ M_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

где a_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3, 4$) — коэффициенты упругой заделки (коэффициенты матрицы податливости), причем $a_{ij} = a_{ji}$. Для цилиндрической оболочки при

симметричной нагрузке размерность матрицы упругой заделки уменьшается до 3×3 из-за обнуления одной из тангенциальных компонент смещения.

Третья глава посвящена формулированию и решению задачи об отслоении от пологого цилиндрического основания (подложки) участка тонкой пленки, возникающего за счет наличия сжимающих напряжений, где отслоение расположено в осевом направлении.

В разделе 3.1 описана общая постановка задачи об отслоении покрытия от цилиндрического основания, представляющую собой тонкую пологую цилиндрическую оболочку радиуса R и толщины h . Для решения задачи используется ортогональная криволинейная система координат, где α – осевая координата, β – окружная координата, γ – нормальная координата; смещение в срединной поверхности оболочки имеет тангенциальные и нормальную компоненты: $v(\alpha, \beta)$, $u(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$.

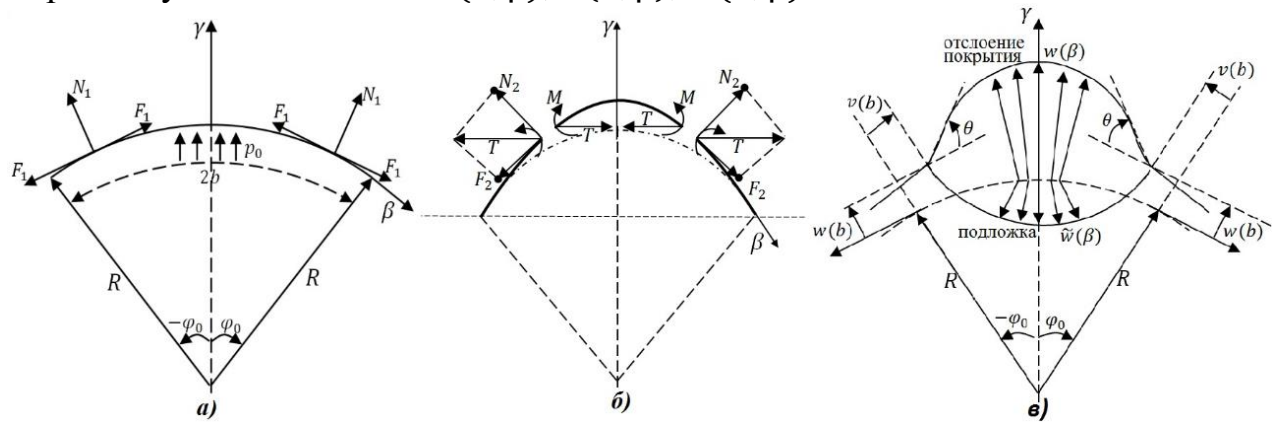


Рис. 2. Распределение усилий: (а) – до отслоения покрытия, (б) – после отслоения покрытия, (в) – конфигурация отслоения покрытия

Для сечений, расположенных вдали от краев отслоения, напряженное состояние может быть описано в приближении плоской деформации, из чего следует, что одна из тангенциальных компонент смещений будет отсутствовать, т.е. $u(\alpha, \beta) \equiv 0$, а остальные компоненты будут зависеть только от одной переменной: $v = v(\beta)$, $w = w(\beta)$. В качестве основных уравнений используются уравнения Муштари – Доннелла – Власова:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{F_2}{R} w = 0, \quad D = D_M = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta} = 0. \quad (9)$$

где E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона покрытия. Из данных дифференциальных уравнений получается аналитическое представление решения, где неизвестными будут изгибающий момент M , смещение в точке заделки $w_b = w(\beta = b)$, усилие T . С помощью начальных условий (условий симметрии), а также граничных условий типа обобщенно упругой заделки

$$\frac{\partial w}{\partial \beta}(\beta = 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3}(\beta = 0) = 0,$$

$$\bar{E} \begin{pmatrix} v(b) \\ h\theta \\ w(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ h^{-1}M \\ N \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = \frac{E}{(1-v^2)}, \quad (10)$$

$$F = F_2 - F_1 = T \cos \varphi_0 - \sigma h, \quad N = N_2 - N_1 = T \sin \varphi_0 - 0 = T \sin \varphi_0,$$

кроме того, используя связь между компонентами деформаций и смещений в рамках теории пологих оболочек, получим систему из трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными M , w_b , T , которая решается с помощью численных (итерационных) методов. Соответственно находятся распределения смещений отслоившегося участка покрытия.

В разделе 3.2 проводится вычисление скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы отслоения. Скорость высвобождения энергии G_{ss} для криволинейного фронта определяется как упругая энергия, высвобождающаяся из отслоившегося участка, делённая на его ширину $2b$. Эта энергия состоит из энергии, высвободившейся из изгибаемого участка покрытия ΔU_1 , неотслоившегося участка покрытия ΔU_2 и энергии, высвободившейся из основания (подложки) ΔU_3 :

$$G_{ss} = \Delta U / (2b) = (\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3) / (2b). \quad (11)$$

Для расчета ΔU_1 используется разница между упругой энергией до и после отслоения, вычисляемые с помощью соотношения (5). Энергия ΔU_2 определяется через работу сил, действующих на не отслоившиеся участки покрытия. Третье слагаемое ΔU_3 , учитывающее влияние подложки определяется через выражение, полученное А.В. Дыскиным и Р.Л. Салгаником через величину площади раскрытия трещины.

Скорость высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль прямолинейного фронта (обозначим как G) определяется через непосредственное вычисление изменения упругой энергии при увеличении длины отслоения

$$\frac{G}{G_0} = \frac{d}{db} \left(\frac{\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3}{2G_0} \right) = \frac{d}{db} \left(b \frac{G_{ss}}{G_0} \right), \quad G_0 = \frac{(1-v^2)\sigma^2 h}{2E} = \frac{\sigma^2 h}{2\bar{E}},$$

где G_0 — удельная упругая энергия покрытия до отслоения.

В разделе 3.3 рассматривается раскрытие отслоения (трещины). Описывается эффект «туннелирования», который может возникать из-за различий в скорости высвобождения энергии при распространении отслоения и возможного смыкания граней отслоившегося покрытия и подложки. Для определения смыкания используются два способа: вычисление коэффициента интенсивности напряжений K_I , характеризующий нормальный отрыв, для которого условие смыкания соответствует значению $K_I = 0$, а также угла поворота θ из (10), при положительных значениях соответствующего раскрытию, а при отрицательных соответствует физически бессмысленному перекрытию берегов. Несмотря на то, что оба критерия могут не давать в точности одинаковую оценку критической ширины отслоения, они оба полезны для определения этого параметра на разных масштабных уровнях.

В разделе 3.4 приводятся выражения, определяющие значения коэффициентов упругой заделки a_{ij} , которые представляются в виде соотношений, в которых присутствуют отношения модулей Юнга и коэффициентов Пуассона покрытия и подложки.

В разделе 3.5 представлены результаты численных расчетов, демонстрирующие поведение скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы, коэффициента интенсивности напряжений, угла поворота и смещения в центре отслоения в зависимости от ширины отслоения (относительно критической полуширины, соответствующей потере устойчивости отслоения от прямолинейной границы в предположении граничных условий типа жесткой заделки – b_0) для различных отношений модулей упругости покрытия и основания, а также для различных кривизн. Результаты показывают, что графики скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы должны пересекаться в максимуме первого (рис. 3а), т.е. отслоению становится энергетически выгоднее развиваться в осевом направлении, а для больших значений кривизны и деформации график скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы монотонно возрастает, т.е. отсутствует максимум (рис. 3б), и чем податливее подложка, тем быстрее возрастает данный параметр, вследствие чего не происходит пересечения кривых. Наличие положительной кривизны делает возможным формирование отслоений при напряжениях ниже уровня потери устойчивости. Наличие податливости у подложки только усиливает этот процесс. Расхождение между результатами, полученными в данной работе при учете влияния поперечных сил и перемещений ($a_{i3} \neq 0$), и упрощенной моделью ($a_{i3} = 0$), становится заметным для кривизн $|b_0/R| > 0.1 \dots 0.2$.

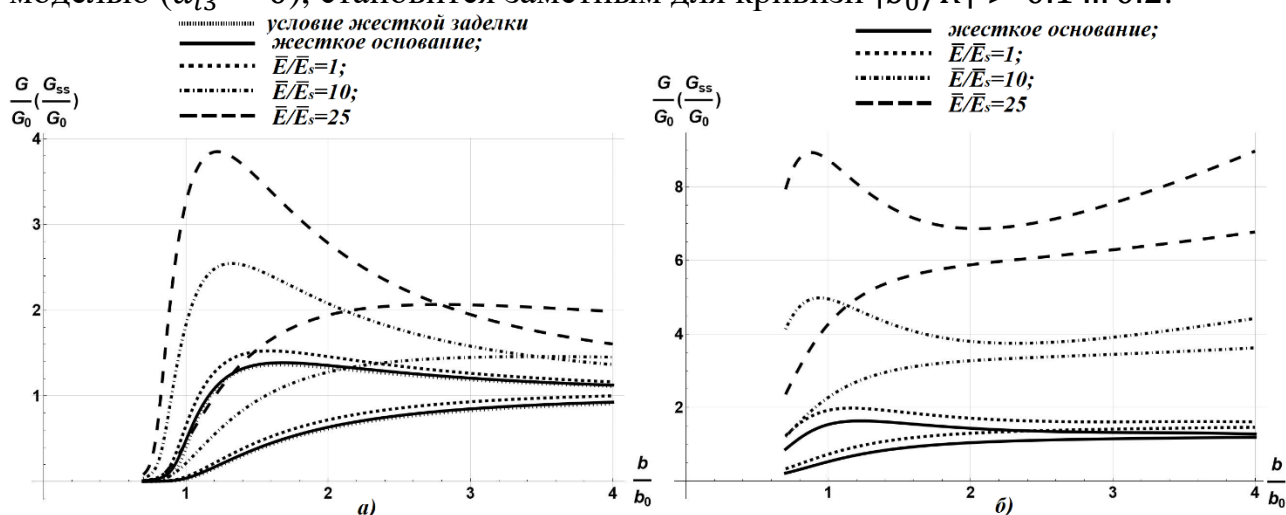


Рис. 3. Зависимость скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы (монотонные ветви) и вдоль прямолинейной границы (ветви с максимумами) от b/b_0 при (а) – $\sigma/\bar{E} = 0.01$ и $b_0/R = 0.01$, (б) – $\sigma/\bar{E} = 0.05$ и $b_0/R = 0.3$

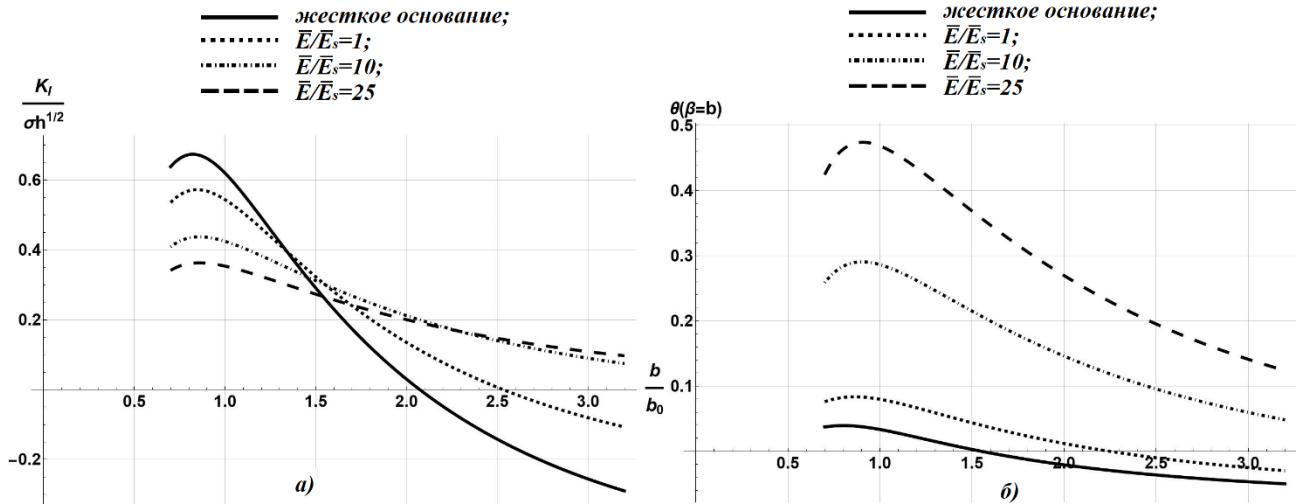


Рис. 4. Зависимость (а) – коэффициента интенсивности напряжений и (б) – угла поворота θ от b/b_0 при $b_0/R = 0.3$

Выявлено несколько причин, по которым отслоение прекращает развиваться вдоль ее прямолинейной границы (за счет расширения) и возникает эффект «туннелирования». На основе анализа результатов для угла поворота в точке заделки, а также отрывной моды коэффициента интенсивности напряжений следует, что причиной наблюдаемого эффекта «туннелирования» может быть не только различие скоростей высвобождения энергии при распространении отслоения за счет расширения и удлинения (туннелирования), но и запрет на перекрытие граней покрытия и подложки.

В четвертой главе рассмотрена задача об отслоении тонкой пленки от цилиндрического основания (подложки), расположенном в окружном направлении.

В разделе 4.1 сформулирована постановка задачи и представлен общий ход ее решения. Аналогично для достаточно протяженного отслоения сечения, расположенные вдали от концов, могут быть рассмотрены в приближении плоской деформации, при $v(\alpha, \beta) = 0$, а остальные компоненты смещения зависят только от одной переменной: $u = u(\alpha)$, $w = w(\alpha)$.

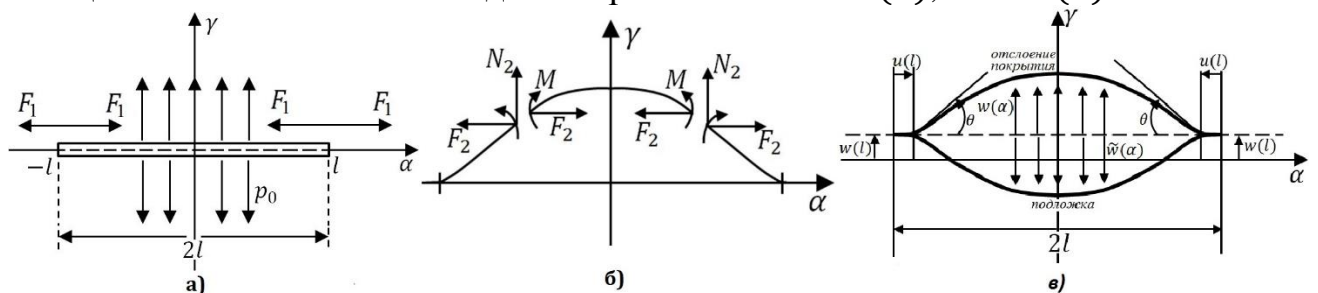


Рис. 5. Распределение силовых параметров: (а) – до отслоения покрытия, (б) – после, (в) – геометрия отслоения покрытия

В качестве уравнений равновесия также использовались уравнения Муштари-Доннелла-Власова

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\nu}{R} F_2 + (\nu - 1) \frac{\sigma h}{R} + Eh \left(\frac{w}{R^2} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dF_2}{d\alpha} = 0. \quad (13)$$

с аналогичными начальными и граничными условиями. Алгоритм нахождения неизвестных M , T , $w_l = w(\alpha = l)$ аналогичен алгоритму, сформулированному в разделе 3.1: решая дифференциальное уравнение (12), с учетом (13), получим аналитическое представление нормальной компоненты смещения w , а с помощью закона Гука получим представление компоненты смещения u , далее используя граничные условия упругой заделки получим систему из трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными, которая решается с помощью численных методов.

В разделе 4.2 таким же образом вычисляются скорости высвобождения энергии при распространении отслоения покрытий вдоль криволинейной (G_{SS}) и прямолинейной границы отслоения (G).

В разделе 4.3 представлены результаты численных расчетов. Также построены графики, демонстрирующие зависимости скорости высвобождения энергии, а также угла поворота в точке заделки от ширины отслоения.

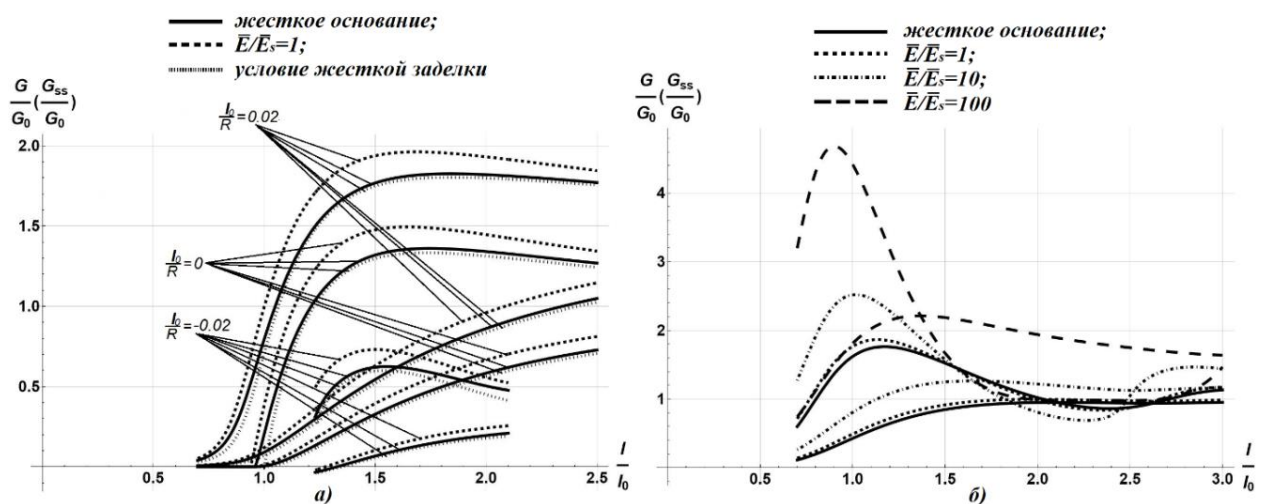


Рис. 6. Зависимость скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы от l/l_0 при при (а) – $\sigma/\bar{E} = 0.01$ и $l_0/R = 0,02, -0,02$, (б) – $\sigma/\bar{E} = 0.01$ и $l_0/R = 0.1$

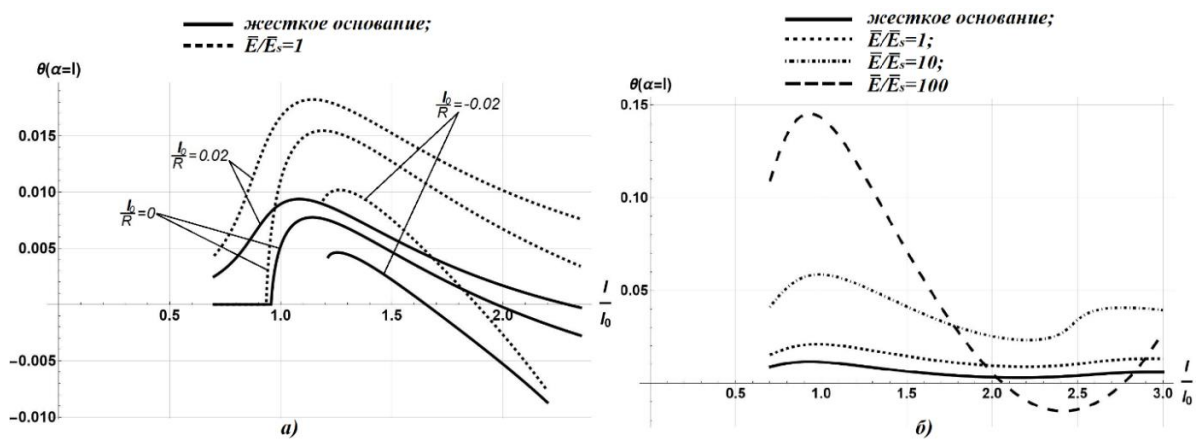


Рис. 7. Зависимость угла поворота θ от l/l_0 при (а) – $l_0/R = 0,02, -0,02$, (б) – $l_0/R = 0.1$

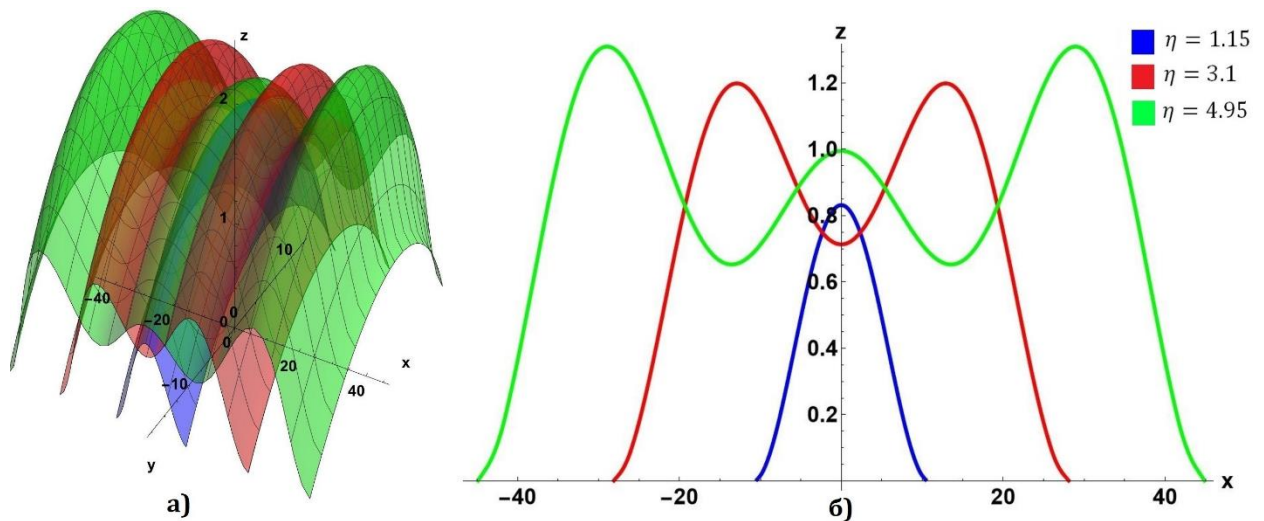


Рис. 8. Профиль отслоения покрытия в зависимости от разных значений $\eta = l/l_0$ при $l_0/R = 0.1$, $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$: (а) — в трехмерном пространстве, (б) — в проекции на двумерное пространство

Показано, что при увеличении податливости основания, а также (положительной) кривизны, значения скорости высвобождения энергии и величины нормальной компоненты смещения покрытия существенно возрастают. Также замечено, что начиная с определенного отрицательного значения кривизны, а именно $l_0/R < -0.02$ отслоения покрытия не происходит, ввиду того, что в этом случае данный процесс энергетически невыгоден. Установлено, что при больших значениях кривизны основания в профиле отслоившегося участка покрытия наблюдается эффект гофрирования. Это, в свою очередь, приводит к возникновению локальных экстремумов в графике зависимости скорости высвобождения энергии от длины отслоения. Данного эффекта не наблюдалось при исследовании отслоения, расположенном в продольном направлении (в главе 3). Также рассмотрено условие существования критической ширины отслоения с помощью угла поворота θ в точке заделки, соответствующей перекрытию поверхностей покрытия и основания при значении угла равного нулю.

В **пятой главе** решена задача о деформировании под действием равномерной поперечной нагрузки круговой пластины, сопряженной по контуру с массивным основанием.

В разделе 5.1 сформулирована постановка задачи. Рассматривается слой толщины h , сцепленный с массивным основанием, имеющим цилиндрическое отверстие радиуса R , со стороны которого на слой прикладывается давление p . Используется цилиндрическая система координат (r, α, z) с осью z , расположенной по центру отверстия (рис. 9).

Деформация слоя описывается в приближении теории пластин, где в силу осевой симметрии, одна из компонент смещений $v(r, \alpha) = 0$ отсутствует, а остальные зависят только от одной переменной: $u = u(r)$, $w = w(r)$.

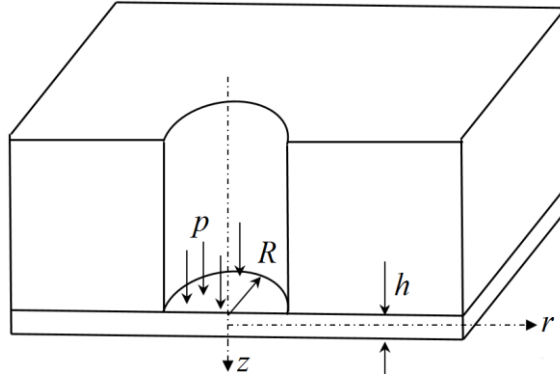


Рис. 9. Тонкий упругий слой, сцепленный с массивным основанием, имеющим цилиндрическое отверстие

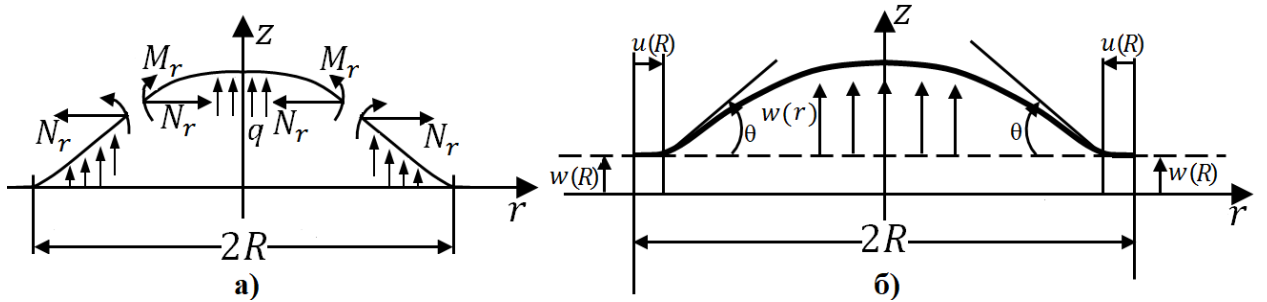


Рис. 10. Конфигурация деформирования круговой пластины: (а) – распределение усилий и момента, (б) – распределение компонент смещений

Для исследования деформирования тонких пластин в качестве основной модели используется модель Фешля – фон Кармана, позволяющая учитывать достаточно большие прогибы. Предполагается, что к пластине со стороны отверстия в основании приложена поперечная нагрузка с постоянной интенсивностью $q = const$. Согласно данной модели для рассматриваемого случая осевой симметрии используем уравнения, разрешающие задачу относительно прогиба w , окружной и радиальной компонент усилий N_t , N_r :

$$D\Delta^2 w - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{dw}{dr} \cdot N_r \cdot r \right] = q, \quad \Delta^2 w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) \right],$$

$$\frac{d}{dr} (rN_r) - N_t = 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{\bar{E}h^3}{12} \quad (14)$$

$$r \frac{d}{dr} (N_r + N_t) + \frac{hE}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0.$$

где первые два выражения являются уравнениями равновесия, а третье соотношение следует из условия совместности деформаций. Граничные условия типа обобщенно упругой заделки для данной задачи в используемых обозначениях можно записать в виде

$$\bar{E} \begin{pmatrix} u(R) \\ -hw'(R) \\ w(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N_r \\ h^{-1}M_r \\ Q_{rz} \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (15)$$

Здесь Q_{rz} — перерезывающее (поперечное) усилие, действующие в сечении. С помощью метода конечных элементов проводится оценка коэффициентов матрицы упругой заделки a_{ij} . Для пластины и основания были взяты модули Юнга и коэффициента Пуассона для алюминия ($E = 70$ ГПа, $\nu = 0.35$) и кремния ($E = 109$ ГПа, $\nu = 0.27$), соответственно получаем $a_{11} = 10$, $a_{12} = a_{21} = 1.7$, $a_{22} = 12$, $a_{i3} \approx 0$. В дальнейшем для решения задачи используются безразмерные величины:

$$\rho = r/R, \quad \text{при } r=0 \Rightarrow \rho=0, \quad \text{при } r=R \Rightarrow \rho=1$$

$$\tilde{u}(\rho) = u(r)/R, \quad \tilde{w}(\rho) = w(r)/R, \quad \tilde{N}_r = N_r/\bar{E}h, \quad \tilde{N}_t = N_t/\bar{E}h, \quad p = q/\bar{E}. \quad (16)$$

С помощью введенных безразмерных величин можно получить более информативные результаты для анализа поведения круговой пластины, в частности прогиб относительно радиуса основания (% «выпучивания»).

В разделе 5.2 представлены упрощенные модели, допускающие аналитическое решение задачи. Рассмотрена модель Софи Жермен, которая не учитывает влияние продольных сил, что сводит систему уравнений (14) до одного уравнения. С учетом граничных условий упругой заделки, получаем аналитическое решение задачи.

Также рассмотрена мембранная модель, в которой преобладает именно продольные (мембранные) усилия. При этом обычно предполагается постоянство усилий $N_r(r) = const$. Из данного предположения и второго уравнения равновесия из (14) также следует равенство мембранных усилий в различных направлениях $N_r = N_t = N$. Предположение постоянства мембранных усилий не позволяет удовлетворить точно уравнениям совместности, однако данная модель используется в приближенных расчетах. Уравнение для прогиба получается из первого уравнения из (14) отбрасыванием первого члена, связанного с изгибом, решение которого получается аналитически.

Также изучена модель Фешля – фон Кармана, которая в отличие от основной модели Фешля – фон Кармана предполагается постоянство продольных усилий $N_r(r) = N = const$, с помощью которого можно получить аналитическое представление решения, в котором используются такие математические функции, как модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда), гипергеометрическая функция, а из граничных условий с помощью численного метода решения системы нелинейных уравнений находятся необходимые неизвестные величины.

В разделе 5.3 представлена модель, с помощью которой можно получить полуаналитическое решение задачи (решение с помощью рядов).

В силу допущения равномерности поперечной нагрузки (т.е. $q = const$), а также симметрии относительно оси z , можно считать, что компонента

продольного усилия \tilde{N}_r является симметричной функцией, а $d\tilde{w}/d\rho$ — антисимметричной функцией от ρ . Следовательно, можно представить данные функции в виде следующих степенных рядов:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_r &= \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12\rho} (B_1\rho + B_3\rho^3 + B_5\rho^5 + B_7\rho^7 + \dots), \\ \frac{d\tilde{w}}{d\rho} &= -\left(\frac{h}{R}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} (C_1\rho + C_3\rho^3 + C_5\rho^5 + C_7\rho^7 + \dots).\end{aligned}\quad (17)$$

где C_i, B_i — постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Подстановка (17) в уравнения (14) дает систему уравнений, в которой, сгруппировав слагаемые с одинаковыми степенями по ρ дает рекуррентные соотношения, где коэффициенты B_k, C_k $k=3,5,7,\dots$ выражаются через неизвестные B_1, C_1 , которые определяются через граничные условия.

В разделе 5.4 приводится численный метод решения задачи. Сведем уравнения (14) модели Феппля — фон Кармана в безразмерных величинах к системе дифференциальных уравнений с двумя неизвестными (безразмерными компонентами смещений $\tilde{u}(\rho)$, $\tilde{w}(\rho)$):

$$\begin{aligned}\frac{d^3\tilde{w}}{d\rho^3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} + \frac{12p\rho}{2} \left(\frac{R}{h}\right)^3 + 12\left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \left(\frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \nu \frac{\tilde{u}}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho}\right)^2 \right), \\ \frac{d^2\tilde{u}}{d\rho^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{\tilde{u}}{\rho^2} - \frac{(1-\nu)}{2\rho} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho}\right)^2 - \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2}.\end{aligned}\quad (18)$$

Данную систему можно решить либо с помощью процедуры численного интегрирования, начиная от центра пластины и «двигаясь» малыми приращениями в радиальном направлении к границе пластины, либо с помощью приведения к системе дифференциальных уравнений первого порядка, где, далее применяя известные численные методы (например, метод Рунге-Кутты 4-го порядка) получим решение задачи. Полученное численное решение будет считаться корректным, если оно достаточно точно соответствует первому и второму граничному условию (15), в противном случае, берем другие начальные условия и повторяем те же процедуры. В качестве критерия точности возьмем евклидовую норму, т.е. наилучшим решением численного метода будет то, которое удовлетворяет условию

$$\min \left[\sqrt{\left(\tilde{u}(\rho=1) - (h/R) \left[-a_{11}\tilde{N}_r + a_{12}\tilde{M}_r + a_{13}\tilde{Q}_{rz} \right] \right)^2 + \left(\left. \frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=1} - a_{21}\tilde{N}_r + a_{22}\tilde{M}_r + a_{23}\tilde{Q}_{rz} \right)^2} \right] \rightarrow 0. \quad (19)$$

Для получения достаточно точного решения можно применить следующий алгоритм: в качестве начальных условий возьмем значения, полученные с помощью решения в рядах и, выполняя алгоритм численного метода в указанной окрестности начальных условий, получим решение

задачи, с достаточной степенью точности удовлетворяющее условию (19). Данный алгоритм относится к алгоритмам типа «предиктор-корректор» (предсказание-исправление).

В разделе 5.5 представлены результаты расчетов. Численные результаты получены для пластины из алюминия на кремниевом основании. Отношение толщины пластины к радиусу в расчетах принято $h/R = 1/100$.

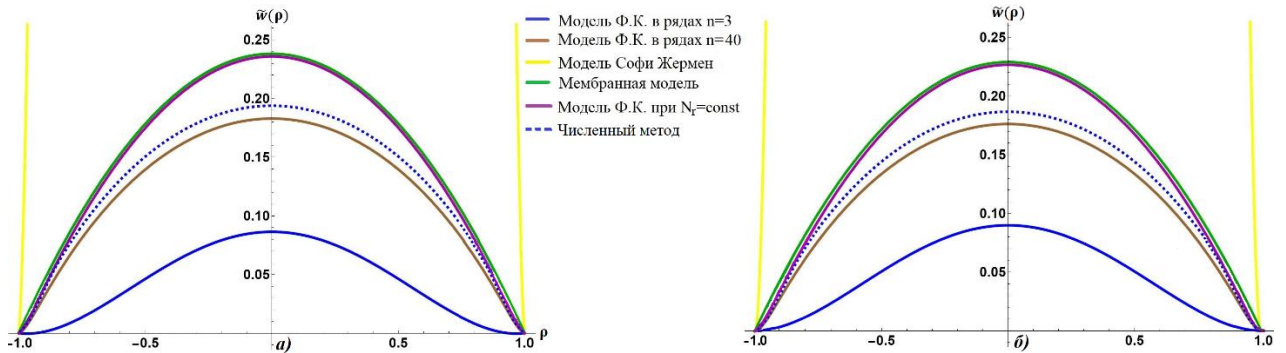


Рис 11. Графики компоненты смещения $\tilde{w}(\rho)$ с учетом (а) и без (б) коэффициентов податливости a_{ij} при $p = 2 \cdot 10^{-4}$

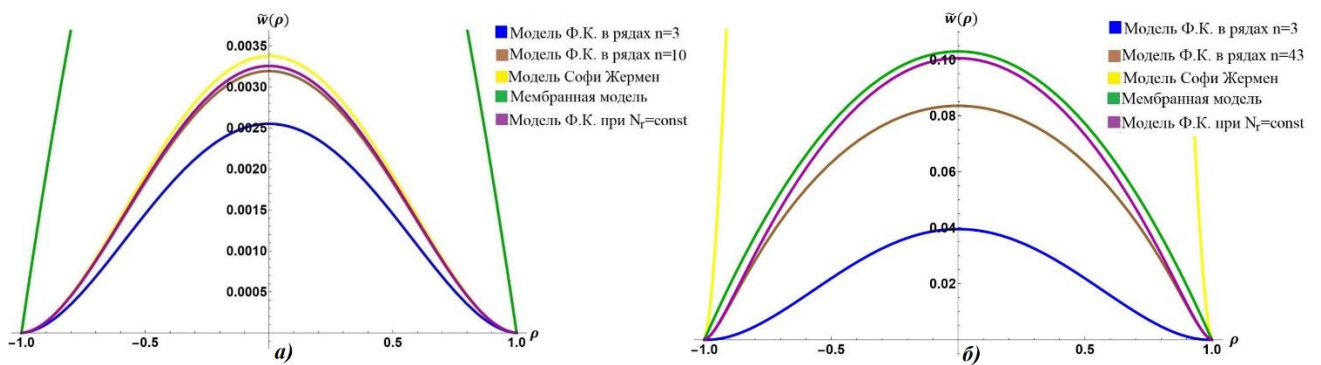


Рис 12. Графики значений компоненты смещения $\tilde{w}(\rho)$ с учетом коэффициентов податливости a_{ij} при (а) – $p = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$, (б) – $p = 10^{-5} \cdot \sqrt{3}$

Таблица 1. Величины продольного усилия на краю пластины \tilde{N}_r при учете и без учета податливости для используемых моделей

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	\tilde{N}_r^{S-Z}	$\tilde{N}_r^{Membran}$	\tilde{N}_r^{Karman}	\tilde{N}_r^{Series}	\tilde{N}_r^{Num}	$\delta_{Karman}^{\tilde{N}_r}$	$\delta_{Series}^{\tilde{N}_r}$
$p_0 = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$	$a_{ij} = 0$	-	4.390e-5	4.060e-6	4.309e-6	4.309e-6	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	-	4.205e-5	4.230e-6	4.491e-6	4.491e-6	4.02%	4.06%
$10p_0$	$a_{ij} = 0$	-	2.036e-4	1.140e-4	1.052e-4	1.052e-4	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	-	1.952e-4	1.108e-4	1.019e-4	1.018e-4	-2.89%	-3.24%
$1000p_0$	$a_{ij} = 0$	-	4.386e-3	4.079e-3	4.042e-3	3.940e-3	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	-	4.205e-3	3.959e-3	3.915e-3	3.879e-3	-3.04%	-3.25%

Таблица 2. Величины изгибающего момента на краю пластины \tilde{M}_r при учете и без учета податливости для используемых моделей

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	\tilde{M}_r^{S-Z}	$\tilde{M}_r^{Membran}$	\tilde{M}_r^{Karman}	\tilde{M}_r^{Series}	\tilde{M}_r^{Num}	$\delta_{Karman}^{\tilde{M}_r}$	$\delta_{Series}^{\tilde{M}_r}$
$p_0 = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$	$a_{ij} = 0$	2.17e-5	-	2.12e-5	2.11e-5	2.11e-5	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	2.136e-5	-	2.09e-5	2.073e-5	2.073e-5	-1.44%	-1.93%
$10p_0$	$a_{ij} = 0$	2.165e-4	-	1.486e-4	1.438e-4	1.440e-4	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	2.136e-4	-	1.449e-4	1.398e-4	1.400e-4	-2.55%	-2.86%
$1000p_0$	$a_{ij} = 0$	2.165e-2	-	3.652e-3	3.576e-3	3.628e-3	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	2.136e-2	-	3.144e-3	3.085e-3	3.099e-3	-16.17%	-15.91%

Из полученных результатов (в табл. 1, 2) $\delta_{Method}^x = \frac{(X_{Method} - X_{Method}^0)}{X_{Method}} \cdot 100\%$

— относительная разность решений, полученных с помощью указанного метода с учетом и без учета податливости основания) следует, что для достаточно малых значений интенсивности поперечной нагрузки $p = q / \bar{E}$ модели Софи Жермен, Феппля — фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$, а также модель Феппля — фон Кармана в рядах хорошо согласуются в отличие от мембранной модели. При сравнении методов решений задачи отметим, что при увеличении значения интенсивности поперечной нагрузки p решения методом Феппля — фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$, Феппля — фон Кармана в рядах, а также мембранной модели качественно близки, в отличие от метода Софи Жермен, где при $p > 10^{-7}$ данное приближение уже неприменимо. Однако также стоит подчеркнуть, что при увеличении p решение в рамках модели Феппля — фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$ и полученное в рядах для $\tilde{N}_r \neq const$ отличаются, причем при $p = 10^{-5} \cdot \sqrt{3}$ разница значения прогиба в центре ($\tilde{w}(r=0)$) уже достигает порядка 20%, из чего можно сделать вывод, что уже в данном случае влияние непостоянства продольных сил существенно. Недостатком решения задачи с помощью модели Феппля — фон Кармана в рядах является увеличение необходимого числа членов ряда, а следовательно, увеличение времени расчета и накапливание ошибок с ростом p . При $p > 10^{-5}$, что соответствует прогибу $\sim 8...10\%$ от радиуса пластины, необходимое число слагаемых составляет $n > 40$. Учет влияния

коэффициентов податливости приводит к увеличению значений нормальной компоненты смещения, и уменьшению изгибающего момента и продольных усилий на краю пластины вне зависимости от используемой модели. Для прогибов $>3\%$ от радиуса пластины можно заметить, что значения изгибающего момента на краю пластины с учетом и без учета податливости основания отличаются более чем на 10% . Также можно заметить, что результаты, полученные с помощью модели Феппля — фон Кармана в рядах, начинают отличаться от результатов, полученных с помощью численной модели, при поперечных нагрузках, соответствующих прогибам $\sim 7\ldots 8\%$ от радиуса пластины, что показывает о необходимости большего числа слагаемых для модели Феппля — фон Кармана в рядах для получения более точного результата.

Также были проведены расчеты тех же параметров: $\tilde{w}(\rho=0)$, \tilde{N}_r , \tilde{M}_r при разном отношении толщины круговой пластины к ее радиусу основания: $h/R = 1/100, 1/500, 1/1000$, а также при разных значениях p , используя модель Феппля — фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$ с граничными условиями типа обобщенной упругой заделки, а также жесткой заделки ($a_{ij} = 0$). Из полученных результатов можно заключить, что при уменьшении значения отношения толщины круговой пластины к его радиусу основания следует уменьшение значений прогиба в центре пластины $\tilde{w}(\rho=0)$, продольного усилия \tilde{N}_r , однако значение изгибающего момента \tilde{M}_r растет, причем чем больше нагрузка, тем чувствительнее разница с решением при жесткой заделке, особенно для \tilde{M}_r . Кроме того, были проведены расчеты тех же параметров при значении $p = 10^{-6} \cdot \sqrt{3}$, с учетом влияния каждого из коэффициентов податливости. На основании полученных данных можно сделать вывод, что коэффициент a_{11} больше всего влияет на значение прогиба в центре пластины $\tilde{w}(\rho=0)$, продольного усилия \tilde{N}_r , однако на изгибающий момент \tilde{M}_r практически не влияет, причем, чем тоньше покрытие, тем меньше влияние на данные характеристики. Коэффициент a_{12} менее всего из всех коэффициентов влияет на все три значения $\tilde{w}(\rho=0)$, \tilde{N}_r , \tilde{M}_r . Вместе с тем, чем тоньше покрытие, тем больше данный коэффициент влияет на значение изгибающего момента \tilde{M}_r . Коэффициент a_{22} менее всего воздействует на значения $\tilde{w}(\rho=0)$, \tilde{N}_r , однако больше всего на \tilde{M}_r , вдобавок чем тоньше покрытие, тем меньше коэффициент a_{22} влияет на $\tilde{w}(\rho=0)$, \tilde{N}_r , но увеличивается влияние на \tilde{M}_r , причем существенное.

В заключительной части, в результате анализа аналитических, численных данных сформулированы теоретические положения и практические выводы, вытекающие из полученных в настоящей работе научных результатов.

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Развита методика решения задач об отслоении покрытий от подложки, заключающийся в изучении отслоившегося участка покрытия, где в качестве основных уравнений используются уравнения теории пологих оболочек, а в качестве граничных условий используются граничные условия типа обобщенно упругой заделки, которая учитывает свойства основания (подложки).

2. Исследованы задачи об отслоении тонкого покрытия от цилиндрической подложки под действием сжимающих напряжений в рамках сформулированного подхода. Для решения данных задач использовались уравнения Муштари – Доннелла – Власова. Были определены компоненты смещения и скорости высвобождения энергии как вдоль прямолинейных, так и криволинейных границ. Также были исследованы зависимости между скоростью высвобождения энергии, коэффициентом интенсивности напряжений моды I, углом поворота в точке заделки и компонентами смещения покрытия относительно податливости подложки и ее кривизны. Проведено сравнение полученных решений с решениями, полученными для условия жесткой заделки.

3. Показано, что при увеличении податливости основания, а также (положительной) кривизны, значения скорости высвобождения энергии и величины нормальной компоненты смещения покрытия существенно возрастают. Показано, что для достаточно податливых оснований существует критическая ширина отслоения, при достижении которой становится более выгодным с энергетической точки зрения развитие в осевом направлении, т.е. возникает эффект «туннелирования». Наличие положительной кривизны и возрастание податливости подложки уменьшают данную критическую ширину. На основе анализа результатов для угла поворота в точке заделки, а также отрывной моды (моды I) коэффициента интенсивности напряжений следует, что причиной наблюдаемого эффекта «туннелирования» может быть не только различие скоростей высвобождения энергии при распространении отслоения за счет расширения и удлинения (туннелирования), но и запрет на перекрытие граней покрытия и подложки.

4. Для задачи об отслоении покрытия от цилиндрической подложки, где отслоение расположено в окружном направлении было обнаружено, что при достаточно больших значениях кривизны основания, в профиле отслоившегося участка покрытия возникает эффект гофрирования, что приводит к появлению локальных экстремумов в графике зависимости

скорости высвобождения энергии от протяженности отслоения. Данного эффекта не наблюдалось при исследовании отслоения, расположенном в продольном направлении.

5. Получено решение задачи о деформировании круговой пластины под действием постоянной поперечной нагрузки, сопряженной по контуру с основанием, с помощью различных моделей, таких как модель Софи Жермен, мембранная модель, модель Феппля — фон Кармана в предположении постоянства продольных усилий, общая модель Феппля — фон Кармана. Решения были получены с помощью аналитических, полуаналитических (с помощью разложения в ряд нормальной компоненты смещения и продольной компоненты усилия) и численных методов (в частности метод, аналогичный «методу стрельбы»).

6. Выявлена роль, вносимая податливостью подложки в изменение формы профиля круговой пластины, действующих продольных усилий и изгибающих моментов, в частности исследовано влияние каждого коэффициента матрицы податливости на данные характеристики. Исследовано влияние отношения толщины покрытия к радиусу основания на его параметры деформирования.

7. Проведено сравнение между полученными решениями. Выявлены недостатки, а также ограничения для каждого метода решения задачи. Из полученных результатов следует, что при малых нагрузках, соответствующих малым прогибам, модели Софи Жермен, Феппля — фон Кармана в предположении постоянства продольных усилий, а также модель Феппля — фон Кармана в рядах хорошо согласуются в отличие от мембранной модели. А при увеличении нагрузки решения методом Феппля — фон Кармана при постоянстве продольных усилий, Феппля — фон Кармана в рядах, а также мембранной модели качественно близки, в отличие от метода Софи Жермен. Тем не менее, при дальнейшем увеличении нагрузки модели Феппля — фон Кармана при постоянстве продольных усилий и в рядах существенно отличаются, однако вместе с тем значительно увеличивается и вычислительная нагрузка для модели в рядах.

СПИСОК РАБОТ ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- 1. Ustinov K.B., Gandilyan D.V. On combined influence of substrate curvature and compliance on parameters of coating delamination from a cylindrical base // Mech. Solids. 2023. V. 58 (2). P. 622-640. DOI: 10.3103/S0025654423600174**
- 2. Устинов К.Б., Гандилян Д.В. Деформирование тонкой пленки после утери контакта с цилиндрическим основанием; отслоение, расположенное в осевом направлении // Вестник Пермского**

- национального исследовательского политехнического университета. *Механика*. 2023. № 5. С. 159–172. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.11
3. Гандилян Д.В. Деформирование тонкой пленки после утери контакта с цилиндрическим основанием с учетом влияния его кривизны, податливости и действия поперечных сил; отслоение, расположенное в окружном направлении // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2024. № 2. С. 42–52. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.05
 4. Устинов К.Б., Гандилян Д.В. О граничных условиях для тонкой круглой пластины, сопряженной с массивным телом // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2024. Т. 30, № 1. С. 50-63. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63>
 5. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Деформирование тонкой круговой пластины, сопряженной по контуру с основанием // *Прикладная математика и механика*. 2025. Т. 89, № 1. С. 106-127.
 6. Гандилян Д.В. Об отслоении покрытия от цилиндрического основания // в сборнике XLVII Гагаринские чтения: Сборник трудов Международной молодежной научной конференции. Секция "Механика и моделирование материалов и технологий", место издания Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук Москва. 2021. С. 40-41
 7. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Задача об отслоении покрытия от цилиндрической подложки с учетом влияния ее кривизны, податливости а также действий поперечных сил // в сборнике *Актуальные проблемы механики сплошной среды. Материалы VIII международной конференции. 01-05 октября 2023, Цахкадзор, Армения*, место издания Гитутюн Ереван, 2023. С. 82-86
 8. Устинов К.Б., Гандилян Д.В. О граничных условиях в задачах о деформировании тонких пластин // *Материалы XII Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (17–19 сентября 2024 г., Самара, Россия)*, место издания Самарский государственный технический университет, Самара, 2024. Т. 2. С. 163-165.
 9. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Некоторые методы решения задачи отслоения круговой пластины от подложки // в сборнике *XVIII Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» : сб. материалов (Екатеринбург, 27–31 мая 2024 г.)*, место издания Екатеринбург : ИМАШ УрО РАН, 2024. С. 29-29
 10. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Модель Фепля фон Кармана для моделирования деформации круговой пластины // *Тезисы докладов XII Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» с элементами школы молодых ученых, посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (Джанхот, 2-8 сентября 2024 г.)*, Екатеринбург: УрО РАН, 2024. С. 12-12.

ГАНДИЛЯН ДАВИД ВАГАНОВИЧ

**ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ УПРУГОЙ ЗАДЕЛКИ В ЗАДАЧАХ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать ____ . ____ . 2025 г. Заказ № _____
Формат 60x90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография НИЯУ МИФИ
115409, Москва, Каширское ш., 31.