

На бл. Трение и износ в машинах
 Все конформация по трению и износу
 в машинах. Т. II. Докл. вступительная
 резолюция. М.-Л.: АН СССР, 1940.

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ТЕОРИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПЕРЕКАТЫВАНИЮ
 (ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ) И СМЕЖНЫХ ЯВЛЕНИЙ

(ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ АН СССР)

1. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Первый, кто исследовал силу сопротивления, которое оказывает каток при перекатывании его по горизонтальной поверхности, был, повидимому, Кулон (Coulomb) (1). Именно он в своем знаменитом сочинении о простых машинах дал формулу для определения этой силы:

$$F = \lambda \frac{P}{R},$$

где P — нагрузка на каток, R — его радиус и λ — коэффициент, именуемый обычно плечом трения второго рода. Силу F также называют силой трения второго рода, хотя это и не совсем верно.

Формулу Кулона, перешедшую ныне на страницы всех учебников механики, экспериментально проверил Морен (Morin) (2), вступивший в полемику с Деюи (Deput) (3), предлагавшим формулу

$$F = \frac{P}{\sqrt{cR}}$$

и проводившим данные экспериментов, противоречащих формуле Кулона и экспериментальным данным Морена.

В 1876 г. Грандвуане (Grandvoinet) получил для силы качения формулу:

$$T = k \sqrt[3]{\frac{P^4}{R^2}},$$

считая ее справедливой для качения катка по песку (4). Совсем недавно акад. Горячкин (5) в своем курсе земледельческой механики указал, что формула Грандвуане весьма близка к данным эксперимента и заслуживает внимания. Проф. Н. П. Раевский провел ряд интересных исследований по деформированию песка и качению по нему катков разных диаметров при разных скоростях и свел результаты этих исследований в таблицы (6). Одновременно с ним проф. В. А. Желиговский объяснил колебания силы трения качения при движении катка последовательными накоплениями и разрежениями, вследствие разрушения, напряженных состояний песчаного основания, вызываемого силой воздействия катка (7).

Первым, исследовавшим природу трения качения упругих катков по упругим основаниям, был Осборн Рейнольдс (Reynolds), изучивший качение резиновых и стальных катков по резиновым и стальным плоским основаниям (8). Рейнольдс усмотрел причину возникновения трения качения во взаимном частичном проскальзывании поверхностей катка и основания, т. е. в проявлении сил трения скольжения по поверхности их контакта.

Томлинсон (Tomlinson), развивший, как известно, молекулярную теорию трения скольжения, дал теорию возникновения силы трения качения за счет сил молекулярного сцепления катка и основания (9). Результат, получающийся по его теории для силы трения качения, имеет тот же порядок, что и данные эксперимента. Нам представляется, что теория Томлинсона охватывает лишь одну из сторон явления трения качения, оставляя в стороне все остальные. Прежде чем приводить результаты некоторых теоретических исследований, отметим, что подсчет силы трения качения представляет вопрос большой сложности и трудности. Задачу приходится отдельно решать для абсолютно упругого основания, основания сыпучего, упруговязкого, релаксирующего и т. п., ибо законы, которыми управляется поведение оснований, могут быть весьма различными. С точки зрения механики задача является, вообще говоря, задачей неустановившегося движения среды, на поверхности которой перемещается каток; существенное значение приобретает поэтому скорость движения катка.

С другой стороны, задача является контактной и в нее переносятся тем самым все трудности контактных задач механики, осложняющиеся еще необходимостью учета касательных усилий, действующих по поверхности контакта, которые подчас становятся сравнимыми с проекциями на направление вертикали нормальных усилий, действующих по плоскости контакта, вследствие чего теория бесконечно малых деформаций оказывается, вообще говоря, неприменимой. Кроме того, контактные задачи решались лишь для абсолютно упругих тел, а для большинства неупругих тел самые законы их поведения недостаточно выяснены. Естественно поэтому, что для получения каких-либо теоретических результатов приходится при изучении трения качения делать подчас ряд далеко идущих предположений, не всегда точно оправдывающихся в действительности.

В исследованиях, о которых будет идти речь ниже, будет, например, предполагаться равномерное распределение вдоль образующей катка. Сам каток нередко предполагается абсолютно жестким или, наоборот, деформирующимся, но катящимся по абсолютно жесткому основанию. Поверхность основания до ее деформирования катком всегда предполагается горизонтальной и однородной. Часто, вместо действительного основания, рассматривается упрощенная механическая модель его, передающая главные особенности поведения основания. Движение катка предполагается обычно плоскопараллельным и преимущественно равномерным.

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Силы, действующие на каток, состоят из сил реактивных, действующих по поверхности контакта, и сил активных, приложенных извне. Последние приводятся (рис. 1) к силе T , действующей на ось катка, и к паре с моментом L , направленным в сторону вращения, если каток ведущий и в обратном направлении при ведомом или заторможенном катке. Реактивные силы приводятся к удельным нормальным (по отношению к недеформированной поверхности основания) давлениям p и касательным усилиям τ , которые считаются постоянными вдоль образующих катка. В случае равномерного движения ведомого катка имеют место уравнения

$$T = \int_{\xi_1}^{\xi_2} 2l\tau(\xi) d\xi$$

$$P = \int_{\xi_1}^{\xi_2} 2lp(\xi) d\xi$$

$$TR = \int_{\xi_1}^{\xi_2} 2\xi p(\xi) d\xi + L,$$

где $2l$ — ширина катка, R — его радиус, ξ_1 и ξ_2 — величины, определяющие границы области контакта (10).

Из последнего уравнения следует, что сила P расходуется на преодоление деформации тормозящей пары L и момента нормальных усилий

$$M = \int_{\xi_1}^{\xi_2} 2\xi p(\xi) d\xi,$$

называемого моментом трения качения. Величину

$$F = \frac{M}{R}$$

будем называть силой трения качения.

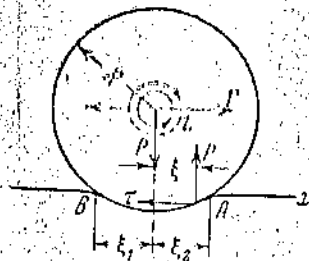


Рис. 1.

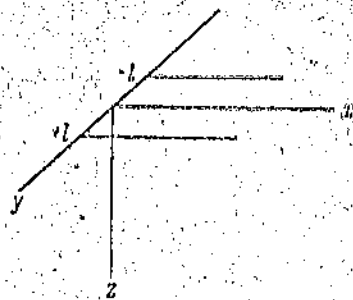


Рис. 2.

Возьмем неподвижную систему координат xuz (рис. 2) с началом на недеформированной поверхности основания, осью x , лежащей в средней плоскости движущегося катка, и осью z , направленной вниз по вертикали. Перемещения u и w точек основания в направлениях этих осей являются функциями времени t и координат xuz начального расположения этих точек. В области контакта ($-l \leq y \leq l$) принимаем перемещение v , в поперечном направлении отсутствующим, а перемещения u и w , зависящими лишь от абсциссы точек x и времени t . Если каток движется с постоянной скоростью c , то точка основания с абсциссой $x + ct$ будет иметь в момент времени $t + \tau$ такие же перемещения, как и точка с абсциссой в момент времени t . Поэтому

$$u(x + ct, t + \tau) = u(x, t),$$

откуда, дифференцируя по τ и полагая затем $\tau = 0$, имеем

$$c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

и точно так же

$$c \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Эти соотношения показывают, что u и w являются функциями одной величины $\xi = x - ct$, являющейся расстоянием точек основания до вертикальной плоскости, проходящей через ось катка, если последняя в момент времени $t = 0$ лежала в координатной плоскости yz (17). Этот результат

следует также из обстоятельства стационарности движения среды основной относительно поступательно перемещающейся системы координат с началом в геометрическом центре катка.

Область контакта в случае абсолютно жесткого катка следует считать малой частью цилиндра и поэтому с точностью до малых высших порядков

$$w(\xi) = w_0 - \frac{1}{2R} \xi^2, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2,$$

где w_0 — вертикальное перемещение центра катка. Имеем соотношения:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{d\xi} = -\frac{1}{R} \xi = -\frac{1}{c} \frac{dw}{dt}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{c}{R} \xi,$$

дающие связь между скоростью движения центра катка с вертикальной составляющей скоростью $\frac{dw}{dt}$ точек основания. Следуя Осборну Рейнольдсу, можно разделить поверхность контакта катка и основания на две области: область G , где имеет место относительное проскальзывание соприкасающихся поверхностей, и область H — отсутствия проскальзывания. В области G , если справедлив закон Кулона для трения скольжения, имеет место

$$\tau(\xi) = \mu p(\xi),$$

где μ — коэффициент трения; искривлением поверхности контакта пренебрегается. Возможно, конечно, применение и иного закона трения. В области H точки основания имеют ту же скорость, что и соприкасающиеся с ними точки катка. Вследствие этого для горизонтальной скорости точек основания имеет место:

$$\frac{du}{dt} = c - \omega R,$$

где ω — угловая скорость вращения катка. Далее имеем

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{c} \frac{du}{dt} = \frac{c - \omega R}{c} = s,$$

т. е. относительное удлинение материала основания ϵ_{xx} в области H постоянно. Константа s имеет простой кинематический смысл. Пусть T время одного оборота катка, тогда

$$s = \frac{c - \omega R}{c} = \frac{cT - 2\pi R}{cT},$$

и, таким образом, s представляет собой относительную разность между расстоянием, на которое переместится каток за один оборот, и длиной его обхода, т. е. так называемое кажущееся скольжение катка.

Можно элементарно исследовать возникновение областей G и H , если сделать упрощающее предположение о строении основания, по которому катится каток. Будем считать его состоящим из элементарных стержней, перемещения верхних сечений которых подчиняются закону

$$u = \alpha \tau \cdot u \quad w = \beta p,$$

где α и β — упругие константы основания (рис. 3). Если принять справедливым закон Кулона-Амонтона, т. е. считать, что на всей поверхности контакта должно быть

$$|\tau| \leq \mu p,$$

то область отсутствия проскальзывания H начинается, в случае ведомого катка, заторможенного моментом L , у переднего края контактной поверхности и затем на некоторой образующей катка переходит в область проскальзывания G . Удельное давление p зависит от абсциссы x по закону параболы.

$$p = p_0 \frac{a^2 - x^2}{a^2},$$

где $p_0 = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{9}{2} \frac{P^2}{\mu^2 \beta R}}$ и $2a$ — длина поверхности контакта.

Касательное усилие τ изменяется по закону, изображенному на рис. 4. В области G $\tau = \mu p$ и, следовательно, изменяется по параболическому закону. В области H касательное усилие τ изменяется по закону прямой.



Рис. 3.

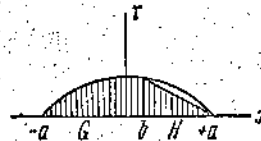


Рис. 4.

Граница областей определяется абсциссой, которая находится решением уравнения

$$\frac{1}{8} \mu P R (1 + \zeta) (7 - 4\zeta + \zeta^2) = L + \frac{1}{320} \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \alpha \mu \sqrt{\frac{P^5}{\mu^2 \beta R}} (1 + \zeta) \times \\ \times (67 - 32\zeta + 2\zeta^2 - 4\zeta^3 + 3\zeta^4),$$

где $\zeta = \frac{b}{a}$, после чего величина кажущегося скольжения определяется по формуле:

$$s = \frac{\alpha \mu}{2} \sqrt[3]{\frac{3P}{4\beta^2 R^2}} (1 + \zeta),$$

При большом моменте торможения L сила T , с которой надо тянуть каток, определяемая по формуле

$$T = \frac{1}{8} \mu P (1 + \zeta) (7 - 4\zeta + \zeta^2),$$

стремится к значению μP и область H при этом сокращается до точки.

Напротив при малых значениях момента L область G весьма мала. Сила T находится в этом случае с большой точностью по формуле

$$T = \frac{3}{R} + \frac{1}{5} \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \alpha \mu \sqrt{\frac{P^5}{\beta^2 R^4}}.$$

Второй член правой части формулы представляет собой силу трения качения. При $L = 0$ получается $T = 0$ с точностью до малых второго порядка. Это обстоятельство составляет слабую сторону приведенного элементарного исследования.

Фромм (H. Fromm) исследовал вопрос об областях H и G при контакте двух дисков фрикционной передачи, рассматривая эти диски как упругие тела (11). Решение задачи получается в результате весьма сложных исследований интегральных уравнений с сингулярными ядрами.

Результаты Фромма указывают на существование двух областей проскальзывания G , разделяемых областью отсутствия проскальзывания H . Однако при достаточно большом моменте, передаваемом дисками, одна из областей G стягивается в точку и качественно распределение их получается таким же, как было описано выше в элементарной теории.

Уместно здесь отметить, что при наличии касательных напряжений в плоскости контакта упругого катка и упругого основания делается необоснованным применение формул Гертца для распределения нормальных напряжений по поверхности контакта по закону

$$p = p_0 \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2},$$

где $2a$ — длина контактной поверхности и x — расстояние рассматриваемой точки от середины этой поверхности.

В. М. Абрамов (12), точно решая задачу о контакте упругого круга и полуплоскости при отсутствии проскальзывания, получил многократную

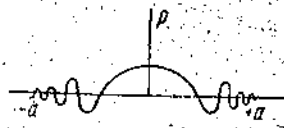


Рис. 5.

перемену знака напряжения p в пределах контактной поверхности (рис. 5). Сравнительно не трудно показать как для плоского, так и для пространственного случая контакта жесткого катка с упругим основанием, что наличие трения в плоскости контакта неизбежно влечет возникновение бесконечно больших напряжений в контактной поверхности или по меньшей

мере изменение напряжений по законам, не разлагающимся в ряд Фурье. Это обстоятельство ставит под некоторое сомнение результаты Фромма и вместе с тем указывает, повидимому, на неизбежность износа фрикционных упругих поверхностей вследствие превышения напряжений в отдельных точках контактной поверхности предела упругости материала.

Лорентцом (Lorentz) была построена теория трения качения катка по упругому рельсу (13). Фромм указал на ошибочность теории Лорентца, принимавшего во всех точках контактной поверхности справедливым соотношение

$$\tau = \mu p,$$

а для p гертцевский закон изменения.

Представляет большой интерес учет динамических явлений при качении катка по упругому основанию. Этот учет можно провести без большого труда для случая движения абсолютно жесткого катка со скоростью, превышающей скорость распространения упругих волн в основании (задача рассматривается как плоская). Однако такое решение вряд ли представляет практический интерес. В. М. Абрамов вчерне решил динамическую задачу о движении катка по упругому основанию и для дозвуковых скоростей. К сожалению, эта работа вследствие смерти В. М. осталась неоконченной.

3. ОБЪЯСНЕНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СИЛЫ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ РЕЛАКСАЦИЕЙ И ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ ОСНОВАНИЯ И КАТКА

На возможность объяснения возникновения силы трения качения не совершенной упругостью материала катка и основания указывал еще Осборн Рейнольдс. Можно провести до конца исследование этого вопроса, если принять какую-либо конкретную гипотезу, характеризующую вполне упругие свойства катка и основания.

Если считать каток жестким, а основание таким, что вертикальное перемещение его точек подчиняется закону элементарного последействия

$$p = kw + \mu \frac{dw}{dt}$$

где k и μ — физические константы (23), то при малых скоростях движения катка имеет место приближенная формула для силы трения качения:

$$F = \frac{\mu c}{k} \frac{P}{R}$$

а для больших скоростей

$$F = \frac{4}{3\sqrt{2}} \frac{P^{3/2} h}{\sqrt{\mu c 2lR}}$$

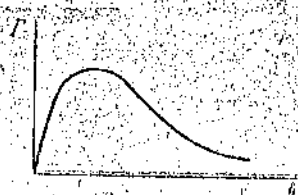


Рис. 6.



Рис. 7.

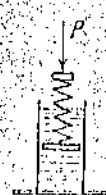


Рис. 8.



Рис. 9.

Первая формула близка по своей структуре к формуле Морена, вторая напоминает формулу Денон. На рис. 6 изображен примерный график зависимости силы трения качения от скоростей катка. Можно построить механическую модель основания, подчиняющегося элементарному закону последействия. Эта модель состоит из множества элементарных столбиков, которые сопротивляются сжатию благодаря наличию в каждом из них цилиндра, пружины жесткости k и поршня, движущегося в вязкой жидкости, наполняющей цилиндр (рис. 7). Если взять иную конструкцию элементарного столбика (рис. 8), именно пружину присоединить вне поршня, то закон деформирования модели кажется уже иным, именно:

$$\nu p + \frac{1}{k} \frac{dp}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

Это известный закон Максвелла (Maxwell) упруго вязкого тела (14). Сила трения качения для основания, подчиняющегося этому закону, выражается асимптотической формулой:

$$F = \frac{1}{5} \sqrt[3]{18} \frac{\nu}{c} \frac{Q^{2/3}}{\sqrt[3]{(2l)^2 kR}}$$

при достаточно больших значениях скорости c .

Представляется интересным получить подобного рода формулы для основания, подчиняющегося закону

$$\dot{p} + rp = b\dot{w} + b_1 w, \quad r = \frac{b+c}{\mu}, \quad n = \frac{c}{\mu},$$

которому соответствует механическая модель из столбиков, сконструированных из поршня и двух пружин (рис. 9) жесткости b и c (17). Этот закон может быть записан также и в интегральной форме:

$$p = bw - b(r-n) \int_{-\infty}^t e^{-r(t-\tau)} w(\tau) d\tau$$

принимающей вид закона наследственности Вольтерра с ядром

$$-b(r-n)(t-\tau)^{-n} \text{ и резольвентой } -\frac{r-n}{b}(t-\tau)^{-n-1},$$

Эксперименты, произведенные А. А. Ильюшиным, показывают, что закон Вольтерра хорошо описывает деформирование резины, если принять в качестве ядра функцию

$$k(t-\tau) = \frac{\sigma}{\delta} \frac{e^{-\left(\frac{t-\tau}{T}\right)^{1/2}}}{\left(\frac{t-\tau}{T}\right)^{1/2}},$$

где σ и T — физические константы

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_t - \sigma}{\sigma_0}$$

при постоянной деформации (рис. 10).

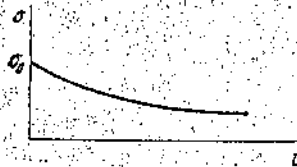


Рис. 10.

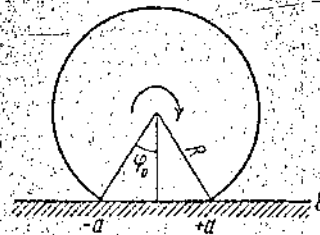


Рис. 11.

А. А. Ильюшин и А. П. Бронский (16) решили задачу о подсчете силы поршня качения резинового катка по жесткому основанию, сделав ряд упрощающих предположений о характере деформации катка. Подсчет, сделанный ими для двух конкретных случаев большого и малого значения характерной для процесса величины

$$x_0 = \frac{\varphi_0}{2\pi NT} \text{ (рис. 11),}$$

где T — время реакции, N — число оборотов в секунду, дал примерно одинаковую несимметричную картину распределения усилий p в плоскостях контакта (рис. 12). Более строгая постановка задачи о подсчете сил трения качения, при которой учитывается влияние усилия p , действующего в данной точке на деформирование соседних точек основания, приводит уже для случая качения жесткого катка по деформирующемуся основанию к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода:

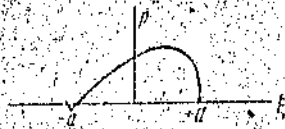


Рис. 12.

$$w_0 = \frac{1}{2R} x^2 = \int_{z_1}^{z_2} w(x, \zeta) p(\zeta) d\zeta,$$

для определения функции $\zeta_1, p\zeta$, причем ζ_1 и ζ_2 определяются из условия

$$P = \int_{z_1}^{z_2} 2lp(\zeta) d\zeta,$$

где P — вес катка.

Решение этих уравнений крайне затруднительно из-за сложного выражения ядра $w(x, \zeta)$. Например, в случае основания, подчиняющегося элементарному закону последействия:

$$p(x, \zeta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1 + \beta eT} e^{-\beta(\alpha - \zeta)} & x > \zeta \\ \alpha \left(\frac{1}{1 + \beta eT} - \frac{1}{1 - \beta eT} \right) e^{-\frac{\alpha - \zeta}{eT}} + \frac{1}{1 + \beta eT} e^{-\alpha - \zeta} & x < \zeta \end{cases}$$

4. ЗАДАЧИ СМЕЖНЫЕ С ТЕОРИЕЙ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Явление проскальзывания двух соприкасающихся поверхностей можно наблюдать и в других задачах механики. Так, проф. Н. Е. Жуковский показал неизбежность проскальзывания упругого ремня по поверхности шкива (18). Если шкив — ведущий (рис. 13), то область проскальзываний начинается у ведомой ветви ремня и затем переходит в область отсутствия проскальзываний. У ведомого шкива имеет место обратная картина. Большой интерес представляет учет при этом исследовании явлений последействия, всегда имеющего место в ремнях.

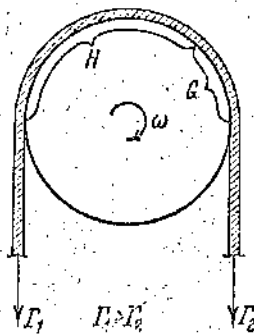


Рис. 13.

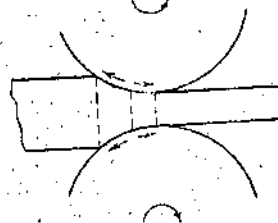


Рис. 14.

Проф. Карман (Karman) решил при некоторых упрощающих предположениях задачу о прокатке листового материала (рис. 14) (19). При постановке задачи, данной Карманом, имеются две области проскальзываний прокатываемого места и валцов с относительными скоростями скольжения разных знаков. Область отсутствия проскальзывания обращается в точку, разграничивающую эти области.

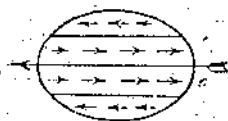


Рис. 15.

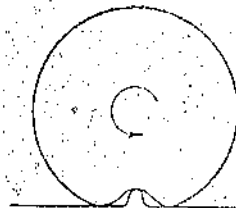


Рис. 16.

Сравнительно недавно проф. Надаи (Nádaí) продолжил исследования проф. Кармана, принимая ту же кинематическую схему явления (20). Акад. Е. А. Чудаков дал теорию, объясняющую, почему во время качения шины резко уменьшается сопротивление колеса боковому скольжению, по сравнению с сопротивлением неподвижного колеса (2). Е. А. Чудаков нашел объяснение этому факту в проскальзываниях, имеющих место на

... что ...

... те силы ... как ряд ... подсчет, ... го зна-

... примерно ... в пла- ... газ по- ... значены, ... злия: p, ... рование ... же для ... зирую- ... внению

... условия

поверхности контакта шины и дороги (рис. 15), изменяющих направление сил трения и зависящих от эластичности материала, из которого изготовлена шина. Наконец, повидимому, волнистые неровности, образующиеся на поверхности асфальта, также могут быть объяснены явлениями, происходящими в контактной поверхности шины и дороги. Действительно, наезжая на небольшую неровность сравнительно размягченной дороги, шина имеет скольжение в контактной поверхности по направлению к этой неровности (см. рис. 16), в результате чего эта неровность увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Coulomb. Théorie des machines simples. Paris, 1821.
2. A. Morin. Leçons de mécanique pratique. Paris, 1846.
3. Depoit. a) Essais et expériences sur le tirage de voitures et sur le frottement de second espèce. Paris, 1867. b) Comptes rendus d'Académie de France, 1842.
4. Grandvoinet. Essais dynamométrique des divers instruments du sol. Paris, 1876.
5. В. П. Горячкин. Земледельческая механика. Москва, 1937.
6. П. П. Раевский. Отчет лаборатории деталей машин ВИСХОМ за 1938 и 1939 гг.
7. Желитовский. Бюллетень № 8 лаборатории с.-х. машин Ин-та механизации сельского хозяйства.
8. O. Reynolds. On Rolling Friction: Phil. Trans. of the Royal Soc. of L. V. 166 (1876), p. 155.
9. Thomson. A molecular theory of Friction. Philos. Mag., June 1929.
10. А. Ю. Ишлинский. Трение качения. Сб. прикл. мат. и мех. 1938.
11. H. Fromm. Berechnung des Schlupfes. Ztschr. f. ang. M. u. M.
12. В. М. Абрамов. Задача о контакте диска. ДАН СССР, № 5, 1937.
13. Lorentz. VDI, 1928.
14. I. S. Maxwell. Philos. trans. London, 157, 1867.
15. А. Ю. Ишлинский. Линейные законы деформирования неупругих тел. ДАН СССР, XXVI, № 1, 1940.
16. А. А. Ильюшин и А. П. Бронский. Отчет лаборатории сопротивл. материалов МГУ по теме «релаксация резины».
17. А. Ишлинский. Трение качения (диссертация, хран. в библи. МГУ).
18. Н. Е. Жуковский. О скольжении ремня на шкивах. Собр. соч., т. VIII.
19. Karman. Beitrag zur Theorie des Walzenvorganges.
20. Nadai. Apl. Mécanics, 2, 1939.
21. Е. А. Чудаков. О боковом скольжении шины. Изв. тех. отд. АН СССР, № 5, 1938.
22. Tompson. Philos. trans., № 3, 1932.