Уч. зап. МГУ, 1940, в. 39, Механика с. 87

О РАВНОПРОЧНОМ СЕЧЕНИИ БАЛКИ

А. Ю. Ишлинский

Согласно элементарной теории сопротивления материалов в каждом нормальном сечении балки, подверженной изгибу, возникают нормальные касательные напряжения.

Нормальные напряжения представляются формулой

$$\sigma = \frac{Mx}{I} z,$$

где M—величина изгибающего момента, x—расстояние рассматриваемого места сечения от нейтрального слоя (проходящего через центр тяжести сечения и представляющего, в случае простого изгиба, плоскость перпендикулярную плоскости изгибающей пары M), I—момент инерции сечения относительно нейтральной линии (прямой пересечения нейтрального слоя с плоскостью сечения).

Касательная напряжения определяется по формуле $\tau = \frac{QS}{Ib}$, где Q—перерезывающаяся сила, развивающаяся в данном сечении, S—статический момент части площади сечения, ограниченной контуром сечения и прямой, параллельной нейтральной линии, проведенной через рассматриваемое место сечения, b—ширина отрезка только что упомянутой прямой, находящейся в пределах контура сечения.

Для осуществления условий прочности необходимо, чтобы в любом месте сечения выполнялось одно из неравенств приводимых ниже, в зависимости от выбранной теории прочности, а именно:

$$\frac{1}{2}|\sigma| + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant R_z \text{ (теория Галилея-Ренкина)},$$

$$\frac{1-\mu}{2}|\sigma| + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant R_z,$$

где μ — коэф. Пуассона (теория Сен-Венана),

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant R_z \text{ (теория Кулона)},$$

$$\frac{1-\Delta}{2}|\sigma| + \frac{1+\Delta}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant R_z,$$

где $\Delta = \frac{R_z}{R_d}$ (теория Мора),

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant R_z \text{ (теория Генки)}.$$

Здесь R_z—допускаемое напряжение при растяжении, R_d—допускаемое напряжение при сжатии.

Все приведенные выше неравенства могут быть изображены одной формулой:

$$\frac{1-\nu}{2}|\sigma| + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + m\tau^2} \leqslant R_z.$$

Действительно, давая величинам ν и m значение 0 и 4, получим неравенство Галилея-Ренкина. Значениям $\nu=\mu$ и $m=4$ соответствует неравенство Сен-Венана; $\nu=1$, $m=4$ — Кулона; $\nu=\Delta$, $m=4$ — Мора и, наконец, $\nu=1$, $m=3$ — Мизес-Генки. Возникает вопрос: нельзя ли сечению придать такое очертание, при котором неравенство прочности обратилось бы в равенство, т. е. сечение стало бы равнопрочным.

Для решения этого вопроса предположим, что такое сечение существует. Почти очевидно, что оно должно быть симметричным относительно нейтральной линии и прямой, перпендикулярной этой линии и проходящей через центр тяжести. Примем эти две прямые за оси декартовых координат x и y, причем за ось y примем нейтральную линию.

Тогда имеем:

$$S=2\int\limits_x^a y(\xi)\cdot\xi\cdot d\xi,\quad I=4\int\limits_0^a y(\xi)\cdot\xi^2\cdot d\xi \quad \text{и} \quad b=2y(x),$$

где a—половина высоты сечения (в направлении оси x), $y(x)$—половина ширины сечения в месте, находящемся на расстоянии x от нейтральной линии.

Задача заключается в нахождении y как функции x из условия

$$\frac{1-\nu}{2}|\sigma|+\frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2+m\tau^2}=R_z,$$

где

$$\sigma=\frac{M}{I}x=\frac{M}{4\int\limits_0^a y(\xi)\cdot\xi^2\cdot d\xi}x,\quad \tau=\frac{QS}{Ib}=\frac{Q}{2y(x)}\cdot\frac{2\int\limits_x^a y(\xi)\cdot\xi\cdot d\xi}{4\int\limits_0^a y(\xi)\cdot\xi^2\cdot d\xi}.$$

Подставляя значения σ и τ в условие равнопрочности и замечая, что можно считать $M>0$ и $x>0$, имеем:

$$\frac{1-\nu}{2}\frac{M}{I}x+\frac{1+\nu}{2}\frac{1}{I}\sqrt{M^2x^2+m\frac{Q^2}{y^2}\left\{\int\limits_x^a y(\xi)\cdot\xi\cdot d\xi\right\}^2}=R_z,$$

откуда

$$\sqrt{m}\,\frac{Q}{y(x)}\int\limits_x^a y(\xi)\cdot\xi\cdot d\xi=\sqrt{\left(R_zI-\frac{1-\nu}{2}M\cdot x\right)^2\frac{4}{(1+\nu)^2}-M^2x^2}$$

или

$$y(x)=\int\limits_x^a\frac{\sqrt{m}Q\cdot\xi}{\sqrt{\left(R_zI-\frac{1-\nu}{2}Mx\right)^2\frac{4}{(1+\nu)^2}-M^2x^2}}\,y(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом функция $y(x)$, дающая очертание сечения балки, удовлетворяет однородному интегральному уравнению первого рода Вольтерра с ядром:

$$K(x,\xi)=\frac{\sqrt{m}Q\cdot\xi}{\sqrt{\left(R_zI-\frac{1-\nu}{2}Mx\right)^2\frac{4}{(1+\nu)^2}-M^2x^2}}.$$

На прямой $x=a$ ядро обращается в бесконечность. Действительно, из условия прочности волокна, наиболее удаленного от нейтрального слоя ($x=a$), следует равенство:

$$\frac{M}{I}a=R_z.$$

или

$$R_z I = Ma$$

и, следовательно,

$$\left(R_z I - \frac{1-\nu}{2} Mx\right)^2 \frac{4}{(1+\nu)^2} - M^2 x^2 = \frac{M^2}{(1+\nu)^2}\{[2a-(1-\nu)x]^2 - (1+\nu)^2 x^2\} = \frac{4M^2}{(1+\nu)^2}(a-x)(a+\nu x),$$

после чего интегральное уравнение, полученное выше, принимает вид:

$$y(x) = \int_x^a \frac{\sqrt{m}(1+\nu)Q}{2M} \frac{\xi}{\sqrt{(a-x)(a+\nu x)}} y(\xi)\, d\xi.$$

Пользуясь общей теорией интегральных уравнений типа Вольтерра, можно было бы показать, что это уравнение, несмотря на особенность ядра при $x=a$, не имеет решений отличных от нуля.

Покажем это иным путем, ограничиваясь для простоты случаем теории прочности Кулона, т. е. примем:

$$m = 4, \quad \nu = 1.$$

В этом случае имеем:

$$y(x)\sqrt{a^2-x^2} = 2\frac{Q}{M}\int_x^a \xi y(\xi)\, d\xi.$$

Если решение $y(x)$ полученного уравнения существует, то функция $y(x)$, представляющая это решение, должна быть непрерывной и диференцируемой. Действительно, если бы функция была бы прерывной, то касательное напряжение

$$\tau = \frac{QS}{Ib} = \frac{Q}{I}\frac{1}{y(x)}\int_x^a \xi \cdot y(\xi) \cdot d\xi$$

претерпевало бы разрывы и условие равнопрочности не было бы осуществлено. Диференцируемость функции $y(x)$ следует из существования производной у интеграла от непрерывной функции $\xi \cdot y(\xi)$. Поэтому, диференцируя написанное выше равенство, получим:

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{a^2-x^2} - y\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{Q}{M}x \cdot y,$$

откуда

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{a^2-x^2} - \frac{Q}{M}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\ln y = -\frac{1}{2}\ln(a-x) - \frac{1}{2}\ln(a+x) + \frac{Q}{M}\sqrt{a^2-x^2} + \ln C$$

и

$$y = C\frac{e^{\frac{Q}{M}\sqrt{a^2-x^2}}}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Подставляя найденное решение в исходное уравнение, будем иметь:

$$Ce^{\frac{Q}{M}\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{Q}{M}\int_x^a C\frac{e^{\frac{Q}{M}\sqrt{a^2-\xi^2}}}{\sqrt{a^2-\xi^2}}\xi d\xi = -C\Big/_x^a e^{\frac{Q}{M}\sqrt{a^2-\xi^2}} = -C + Ce^{\frac{Q}{M}\sqrt{a^2-x^2}},$$

что немедленно приводит к равенству:

$$C = 0.$$

Следовательно, интегральное уравнение не имеет решений отличных от тождественного нуля.

Таким образом получается любопытный результат: не существует сечения балки, которое было бы равнопрочным во всех своих точках. Этот результат имеет существенное значение для отыскания наивыгоднейшего очертания сечения балки при заданном изгибающем моменте M и перерезывающей силе Q и заданном габарите сечения (например прямоугольника, за пределы которого не должно выходить сечение).

Сечение, обладающее минимумом площади при выполнении условий прочности и заданном габарите, не может быть равнопрочным во всех точках. Иначе говоря, в условии прочности:

$$\frac{1-\nu}{2}|\sigma|+\frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2+m\tau^2}\leqslant R_z$$

для множества точек сечения будет иметь место знак неравенства.

«Ученые записки МГУ—Механика, вып. XXXIX, 1940».