

6.3

## ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПЛАСТИЧНОСТИ И ПРОБА БРИНЕЛЛЯ

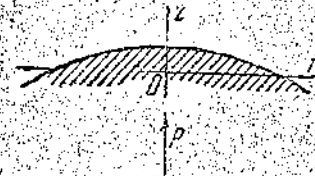
А. Ю. ИЛИНСКИЙ

(Москва)

Решение осесимметрической задачи пластичности имеет большое значение для построения теории испытания материалов на твердость. Весьма часто о твердости материала судят по размерам отпечатка от давления какого-либо штампа, например, стального шарика (метод Бриелля) или конического острия (метод Роквелла) на плоскую границу материала. Экспериментальные данные показали, что так называемые числа твердости по Бриеллю и по Роквеллу связаны определенным образом с величиной временного сопротивления материала и с величиной его предела текучести. Теоретическим рассмотрением явлений, наблюдающихся при проникновении штампа в идеальную пластическую среду, занимались Хенки<sup>[1]</sup>, Прандтль<sup>[2]</sup> и Соколовский<sup>[3]</sup>. Последний решил задачу для случая плоской пластической деформации при весьма общих предположениях об очертаниях границы среды и штампа и о характере сил трения между ними. Ниже рассматривается задача для случая осевой симметрии на примере давления шара или плоского штампа на идеальную пластическую среду с плоской границей.

Мы будем пренебрегать небольшим искривлением поверхности вокруг штампа, которое происходит при пластическом деформировании, и будем считать границу пластической среды вне контакта со штампом плоской. Строго говоря, свободная граница среды может считаться плоской лишь в том случае, если предварительно сделана выемка материала по форме штампа и сила давления на штамп не больше предельного значения, при превышении которого штамп начнет погружаться в среду. При достижении этого предельного значения все элементы среды вблизи штампа окажутся в пластическом состоянии.

Поместим начало цилиндрической системы координат  $r, \varphi, z$  на плоскости свободной границы среды, а ось  $z$  направим по оси симметрии внутрь среды (фиг. 1). Обозначим через  $u_r, u_\varphi$  и  $u_z$  малые перемещения частиц среды при незначительном изменении силы давления на штамп в сторону увеличения от предельного значения.



Фиг. 1

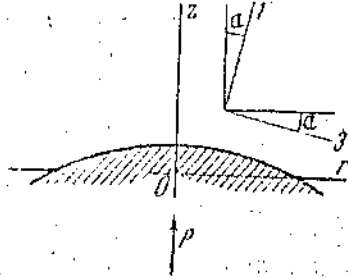
3 Прикладная математика и механика, вып. 3

В рассматриваемой задаче перемещение  $u_z$  равно нулю.  
Для точек среды, расположенных вблизи оси  $z$ , величины перемещений  $u_r$  и  $u_z$  представим в виде разложений

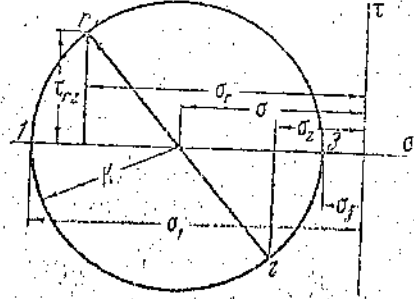
$$u_r = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots, \quad u_z = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + \dots$$

где  $a_0, a_1, a_2, \dots$  и  $b_0, b_1, b_2, \dots$  — функции координаты  $z$ .

На оси  $z$  перемещение  $u_r$  обращается в нуль и, следовательно,  $a_0 = 0$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Предполагая среду несжимаемой, имеем условие

$$\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial (ru_z)}{\partial z} = 0$$

из которого заключаем, что

$$2a_1 + \frac{db_0}{dz} = 0$$

Вместо этого предположить, что на оси  $z$  справедливо неравенство

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} < 0$$

т. е. линейные элементы, имеющие ориентацию оси  $z$ , укорачиваются. Таким образом

$$2a_1 = -\frac{db_0}{dz} = -\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)_{r=0} > 0$$

и, следовательно, вблизи  $z$  величины деформаций

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = a_1 + 2a_2 r + \dots, \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = a_1 + a_2 r + \dots$$

будут положительны.

В силу симметрии направления  $r$  и  $z$  являются главными направлениями деформации для точек оси  $z$  и близки к главным направлениям для точек, близких к оси  $z$ . Направление  $\phi$  является по той же причине главным для всех точек среды.

Обозначим через  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  главные напряжения в точках среды, причем пусть второе главное направление совпадает с направлением  $\phi$ , а первое и третье направления выбраны так, что они приближаются к направлениям  $z$  и  $r$  при приближении к оси  $z$ . Так как вблизи оси

$$\epsilon_1 < 0, \quad \epsilon_2 > 0, \quad \epsilon_3 > 0$$

то, следуя гипотезе пластичности Хаара-Кармана<sup>1</sup>, положим

$$\sigma_1 = \sigma_2 - 2K, \quad \sigma_2 = \sigma_3$$

где  $K$  — пластическая постоянная среды.

Если обозначить через  $\alpha$  (фиг. 2) угол между первым главным направлением и направлением  $r$ , то, как нетрудно усмотреть на соответствующем круге Мора (фиг. 3), будут справедливы соотношения

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \cos 2\alpha, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \cos 2\alpha$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\alpha$$

Для точек оси  $z$  угол  $\alpha$  равен нулю и  $\sigma_z = \sigma_1$ . Для точек свободной границы среды  $\sigma_z = 0$ , а  $\sigma_r < 0$ . Так как направления  $r$  и  $z$  являются для точек свободной границы главными и  $\sigma_1 < \sigma_2$ , то для этих точек

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_r = \sigma_1, \quad \alpha = \frac{1}{2}\pi$$

Таким образом, можно считать, что при последовательном переходе от точек оси  $z$  к точкам свободной поверхности среды угол  $\alpha$  увеличивается от значения 0 до значения  $\frac{1}{2}\pi$ .

Будем предполагать отсутствующим трение между поверхностью среды и поверхностью штампа. В этом случае нормаль к поверхности контакта среды и штампа будет являться первым главным направлением для тех элементов среды, которые расположены у этой поверхности. Для элементов среды, расположенных у раздела свободной границы среды и поверхности контакта, первое главное направление неопределенно и зависит от пути, по которому совершается приближение к точкам раздела. Если, например, приближаться к этим точкам, перемещаясь по свободной границе, то первым главным направлением будет оставаться направление  $r$ ; если же перемещаться по поверхности контакта, то, как было только что указано, — направление нормали к этой поверхности. Напряженное состояние в точках раздела является, таким образом, особым; оно будет изучено позднее.

Обозначим через  $\theta$  угол между направлением  $r$  и биссектрисой прямого угла, образованного первым и третьим главным направлениями. Упомянутая биссектриса совпадает с направлением одного из наибольших касательных напряжений для данной точки среды. Очевидно (фиг. 4), что

$$\theta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$$

Замечая далее, что  $\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) = K$ , получим, что

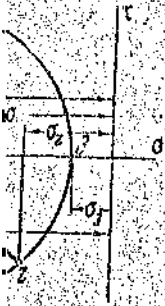
$$\sigma_r = \sigma + K \sin 2\theta, \quad \sigma_z = \sigma - K \sin 2\theta, \quad \tau_{rz} = -K \cos 2\theta$$

где  $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ .

<sup>1</sup> Соотношения Хаара-Кармана [4] могут быть получены как предельные из уравнений пространственного деформирования вязкопластической среды при коэффициенте вязкости, равном нулю (см. А. Ю. Ишлинский [5]).

мы перемещенной

льню,  $\sigma_z = 0$ .

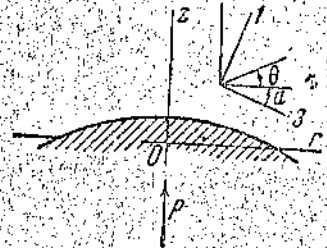


венство

наются. Таким

направлениями  
для точек,  
главным для

среды, причем  
 $\psi$ , а первое  
направлениям



Фиг. 4

Так как  $\sigma_3 = \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) = \sigma + K$ , то

$$\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma + K$$

Подставив выражения для напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_{rz}$ ,  $\sigma_\theta$  в уравнения равновесия среды

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$$

получим два уравнения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2K \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} + 2K \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{r} (K - K \sin 2\theta) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + 2K \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} - 2K \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{r} K \cos 2\theta = 0$$

для двух неизвестных функций  $\sigma$  и  $\theta$  переменных  $r$  и  $z$ .

Эти уравнения относятся к классу гиперболических уравнений математической физики. Характеристики их ортогональны между собой и касательные к ним образуют с направлением  $r$  углы  $\theta$  и  $\frac{1}{2}\pi + \theta$  в каждой точке среды, кроме отмеченных выше особых точек. Действительно, умножая первое уравнение на  $\cos \theta$ , второе на  $\sin \theta$  и складывая их, получим

$$\cos \theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2K \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \sin \theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial z} + 2K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \frac{K}{r} (\cos \theta - \sin \theta)$$

Умножая первое уравнение на  $-\sin \theta$ , второе на  $\cos \theta$  и вновь складывая, получим

$$-\sin \theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} - 2K \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \cos \theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial z} - 2K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \frac{K}{r} (\cos \theta - \sin \theta)$$

Вводя новые переменные

$$\xi = \frac{1}{K} (\sigma + 2K\theta), \quad \eta = \frac{1}{K} (\sigma - 2K\theta)$$

приходим к системе двух уравнений

$$\cos \theta \frac{\partial \xi}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{r} (\cos \theta - \sin \theta)$$

$$-\sin \theta \frac{\partial \eta}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{r} (\cos \theta - \sin \theta)$$

которые можно представить в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{1}{r} (\cos \theta - \sin \theta), \quad \frac{\partial \eta}{\partial s'} = \frac{1}{r} (\cos \theta - \sin \theta) \quad \left( \theta = \frac{1}{4} (\xi - \eta) \right)$$

где  $\partial / \partial s$  и  $\partial / \partial s'$  — производные по направлениям, образующим углы  $\theta$  и  $\frac{1}{2}\pi + \theta$  с направлением  $r$ , т. е. по направлению наибольших касательных напряжений для данной точки среды.

Два ортогональных между собой семейства кривых в плоскости  $rz$ , касательные к которым образуют углы  $\theta$  и  $\frac{1}{2}\pi + \theta$  с направлением  $r$ , назовем, следуя общепринятому, семействами линий скольжения (характеристик).

Полученные для функций  $\xi$  и  $\eta$  уравнения показывают закон изменения этих функций вдоль линий скольжения. Поэтому, если известны значения функций  $\xi$  и  $\eta$  в двух близких точках, то можно приближенно найти зна-

Пу  
касате  
на по  
углами

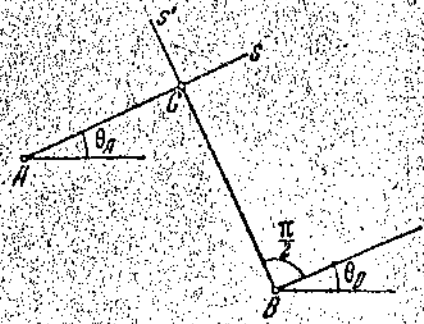
Бол  
заменя  
Име  
приводи  
пересече  
слепи  
зовале  
зом, тыс  
задачи  
после э  
величин  
метра.

Проя  
измеряли

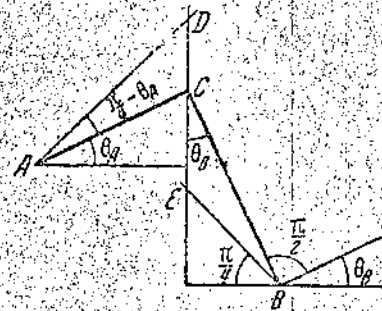
ления тех же функций в точке пересечения двух линий скольжения разных семейств, проведенных через эти точки.

Действительно, пусть  $\xi_A, \eta_A$  и  $\xi_B, \eta_B$  — значения функций  $\xi$  и  $\eta$  в точках  $A$  и  $B$  (фиг. 5). По ним могут быть найдены значения  $\theta_A$  и  $\theta_B$  и, следовательно, построены касательные в точках  $A$  и  $B$  к линиям скольжения.

Обозначим через  $C$  точку пересечения двух касательных к линиям скольжения двух разных семейств, проведенных через точки  $A$  и  $B$ . Так как по предположению точки  $A$  и  $B$  близки друг к другу, то точка  $C$  приближенно определит точку пересечения самих линий.



Фиг. 5



Фиг. 6

Пусть  $AC$  — касательная к линии скольжения первого семейства и  $BC$  — касательная к линии скольжения второго семейства. Если точка  $C$  лежит на положительных направлениях этих касательных, т. е. полупрямых, образующих углы  $\theta_A$  и  $\theta_B + \frac{1}{2}\pi$  с направлением  $r$ , то будем иметь

$$\xi_C \approx \xi_A + \left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)_A \Delta s = \xi_A + \frac{\cos \theta_A - \sin \theta_A}{r_A} AC$$

$$\eta_C \approx \eta_B + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s'}\right)_B \Delta s' = \eta_B + \frac{\cos \theta_B - \sin \theta_B}{r_B} BC$$

Более точные выражения для значений  $\xi$  и  $\eta$  в точке  $C$  можно получить, заменив величины  $r_A$  и  $r_B$  соответственно величинами  $\frac{1}{2}(r_A + r_C)$  и  $\frac{1}{2}(r_B + r_C)$ .

Именно таким образом производились действия при решении примеров, приводимых ниже. При этом положение точки  $C$  определялось графически, пересечением прямых  $AC$  и  $BC$ . Углы наклона прямых определялись вычислением с точностью до тысячной доли радиана. При построении их использовался транспортир с делением через каждые пять тысячных. Таким образом, тысячные доли радиан откладывались на глаз. Выбранные при решении задачи линейные размеры построений обеспечивали точность в третьем значении после запятой для разностей значений величин  $\xi$  и  $\eta$ , так как измеренные величины  $\frac{1}{2}(r_A + r_C)$  и  $\frac{1}{2}(r_B + r_C)$  прощупывались с точностью до миллиметра.

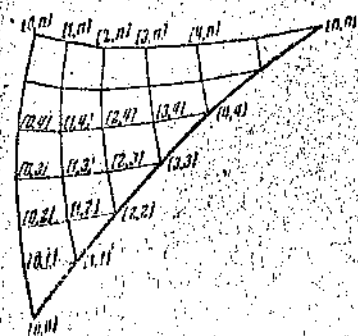
Произведения  $(\cos \theta_A - \sin \theta_A) AC = CD$  и  $(\cos \theta_B - \sin \theta_B) BC = CE$  также измерялись на чертеже. Построение их можно видеть на фиг. 6. Измерение

производилось с точностью до десятой доли миллиметра, что с избытком обеспечивало точность в третьем знаке после запятой для отношений

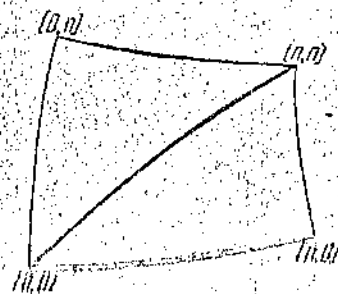
$$\frac{(\cos \theta_A - \sin \theta_A) AC}{\frac{1}{2}(r_A + r)} \quad \text{и} \quad \frac{(\cos \theta_B - \sin \theta_B) BC}{\frac{1}{2}(r_B + r_C)}$$

которые подсчитывались посредством логарифмической линейки<sup>1</sup>.

Если известны значения функций  $\xi$  и  $\eta$  вдоль некоторой дуги, то можно построить приближенное решение уравнений для этих функций в некоторой треугольной области, одной из криволинейных сторон которой является данная дуга. Для этого возьмем на данной дуге (фиг. 7) последовательность достаточно близко расположенных точек  $[0, 0]$ ,  $[1, 1]$ ,  $[2, 2]$ ,  $[3, 3]$ , ...,  $[n, n]$  и построим, отправляясь от каждой пары соседних точек, новые точки  $[0, 1]$ ;  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$ ,  $[3, 4]$ , ... по одну сторону кривой, пользуясь только что описанным способом.



Фиг. 7



Фиг. 8

Найдя значения величин  $\xi$  и  $\eta$  и, следовательно, и значение  $\theta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$ , можно продолжить построение дальше и найти значения  $\xi$  и  $\eta$  в точках  $[0, 2]$ ,  $[1, 3]$ ,  $[2, 4]$ , ... Затем можно построить точки  $[0, 3]$ ,  $[1, 4]$ , ... и т. д., пока не придем к построению последней точки  $[0, n]$ .

Ломаные  $\{[0, 0], [0, 1], [0, 2], [0, 3], \dots\}$ ,  $\{[1, 2], [1, 3], [1, 4], \dots\}$ , ... представляют собой приближение к линиям скольжения одного семейства, а ломаные  $\{[1, 1], [0, 1]\}$ ,  $\{[2, 2], [1, 2], [0, 2]\}$ ,  $\{[3, 3], [2, 3], [1, 3], [0, 3]\}$ , ... — к линиям другого семейства.

Надлежит находить функции  $\xi$  и  $\eta$  по известным значениям их на некоторой гладкой дуге известной длины. Если даны уравнения гиперболического типа. Функции  $\xi$  и  $\eta$  могут быть при этом, вообще говоря, найдены в области двух криволинейных треугольников, для которых данная дуга является общей стороной, а другими сторонами служат линии скольжения обоих семейств, проходящие через крайние точки дуги (фиг. 8).

Если известны значения функций  $\xi$  и  $\eta$  на двух дугах линий скольжения разных семейств, исходящих из одной точки, то можно найти значения  $\xi$  и  $\eta$  и построить линии скольжения в области криволинейного четырех-

<sup>1</sup> Порядок записи измерений и вычислений показан ниже на примере.

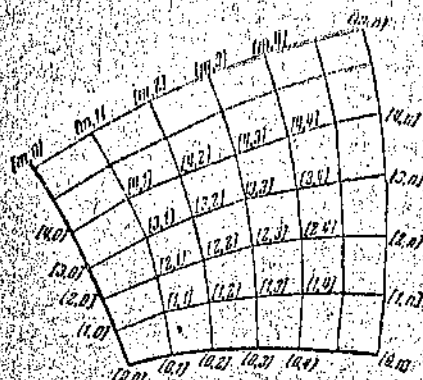
угольника, ограниченного двумя данными дугами и двумя линиями скольжения разных семейств, проходящими через их крайние точки (фиг. 9).

Приближенное решение этой задачи, являющейся задачей Гурса для уравнений гиперболического типа, может быть построено теми же приемами, как и решение задачи Коши.

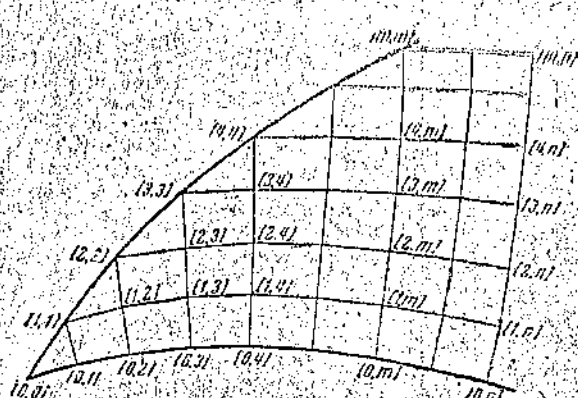
Выберем на каждой дуге последовательность достаточно близко расположенных точек  $[0, 0], [0, 1], [0, 2], \dots, [0, n]$  и  $[0, 0], [1, 0], \dots, [m, 0]$ .

По данным значениям  $\xi$  и  $\eta$  в точках  $[0, 1]$  и  $[1, 0]$  строим точку  $[1, 1]$  и находим значения  $\xi$  и  $\eta$  в этой точке.

По данным в точках  $[0, 2]$  и  $[1, 1]$  строим точку  $[1, 2]$ . Затем последовательно строим точки  $[1, 3], [1, 4]$  и т. д.



Фиг. 9



Фиг. 10

Ломаная  $\{[1, 0], [1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], \dots\}$  представляет собой приближение к линии скольжения, проходящей через точку  $[1, 0]$ .

Далее, по данным значениям  $\xi$  и  $\eta$  в точках  $[1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], \dots$ , строим точки  $[2, 1], [2, 2], [2, 3], [2, 4], \dots$ , определяющие приближенно новую линию скольжения.

Очевидно, что подобные построения точек и вычисление значений в них функций  $\xi$  и  $\eta$  можно продолжать до тех пор, пока не будет приближенно построена последняя линия скольжения, проходящая через крайнюю точку дуги данной линии скольжения  $\{[0, 0], [1, 0], [2, 0], \dots, [m, 0]\}$ .

Последовательности точек  $\{[0, 1], [1, 1], [2, 1], [3, 1], \dots, [m, 1]\}$ ,  $\{[0, 2], [1, 2], [2, 2], \dots, [m, 2]\}$ ,  $\{[0, 3], [1, 3], [2, 3], \dots, [m, 3]\}, \dots$  приближенно определяют второе семейство линий скольжения.

Если известны значения функций  $\xi$  и  $\eta$  на дуге линии скольжения, а на другой дуге, являющейся линией скольжения, дано соотношение между  $\xi$  и  $\eta$ , например,  $\eta = a\xi + b$ , то значения  $\xi$  и  $\eta$  могут быть найдены в области, которая ограничена этими дугами и двумя линиями скольжения, проходящими через крайние точки этих дуг (фиг. 10).

Для приближенного решения этой третьей задачи, которая является смешанной задачей уравнений гиперболического типа, возьмем последовательность близко друг к другу расположенных точек  $[0, 0], [0, 1], [0, 2], [0, 3], \dots, [0, n]$  на данной линии скольжения. В точке  $[0, 1]$  по-

строим к ней нормаль и отметим точку  $[1, 1]$  приближенного пересечения данной дуги с линией скольжения, проходящей через точку  $[0, 1]$ .

В зависимости от принадлежности линии скольжения  $[0, 1]$ ,  $[0, 1]$  к первому или ко второму семейству линий скольжения можно найти, отталкиваясь от точки  $[0, 1]$ , приближенное значение функции  $\xi$  или функции  $\eta$  в точке  $[1, 1]$ . Вследствие данного соотношения между  $\xi$  и  $\eta$  на второй дуге этого достаточно для определения обеих функций  $\xi$  и  $\eta$  в точке  $[1, 1]$ .

Далее строим точно так же, как и в двух предыдущих задачах, точки  $[1, 2]$ ,  $[1, 3]$ , ...,  $[1, n]$ .

Знание величин  $\xi$  и  $\eta$  в точке  $[1, 2]$  позволяет построить точку  $[2, 2]$ , которая приближенно лежит на пересечении второй данной дуги с касательной к линии скольжения, проходящей через точку  $[0, 2]$ .

Затем строим точки  $[2, 3]$ ,  $[2, 4]$ , ...,  $[2, n]$ ;  $[3, 3]$ , ...,  $[3, n]$  и, наконец, точки  $[m, m]$ ,  $[m, m+1]$ , ...,  $[m, n]$ , определяющие приближенно положение той линии скольжения, которая проходит через крайнюю точку  $[m, m]$  второй дуги.

Точки  $\{[0, n], [1, n], [2, n], \dots, [m, n]\}$  определяют при этом линию скольжения другого семейства, которая проходит через крайнюю точку первой дуги, расположенной на линии скольжения первого семейства.

Если линии скольжения одного и того же семейства пересекаются в одной точке, то в непосредственной близости к этой точке второе семейство линий скольжения вследствие ортогональности к первому должно иметь вид дуг концентрических окружностей. Длины дуг этих окружностей, заключенные между крайними линиями скольжения первого семейства, стремятся к нулю по мере приближения к точке их пересечения. Поэтому одна из функций  $\xi$  или  $\eta$  должна стремиться к некоторому предельному значению по мере приближения к упомянутой точке.

Действительно, так как функции  $\xi$  и  $\eta$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{1}{r} (\cos \theta - \sin \theta), \quad \frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{1}{r} (\cos \theta + \sin \theta)$$

то при перемещении по дугам второго семейства (ближайших по форме к дугам окружностей) имеем на основании известной теоремы Лагранжа

$$\text{либо } \xi_2 - \xi_1 = \frac{N}{r} \Delta s, \quad \text{либо } \eta_2 - \eta_1 = \frac{N}{r} \Delta s$$

где  $\Delta s$  — длина какой-либо дуги,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  или  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — значения функции  $\xi$  или  $\eta$  на ее концах и  $N$  — значение выражения  $(\cos \theta - \sin \theta)/r$  в некоторой средней точке дуги. По мере приближения к точке пересечения линий скольжения величина  $\Delta s$  стремится к нулю, а величина  $N$  остается ограниченной. Следовательно, если касательная к дуге образует угол  $\theta$  с направлением  $r$ , то значения  $\xi_2$  и  $\xi_1$  стремятся друг к другу; если же она образует угол  $\theta + \frac{1}{2}\pi$ , то стремятся друг к другу значения  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .

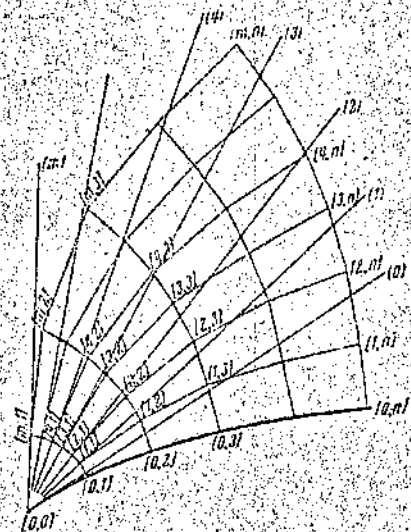
С другой стороны, в непосредственной близости к упомянутой точке остается справедливым соотношение  $\theta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$ .

Поэтому другая из величин  $\xi$  и  $\eta$  по мере приближений первого семейства (непересекающихся в точке) стремится к разным пределам, зависящим от угла наклона касательной к этим линиям в точке их пересечения. Вслед-



стве этого будем называть пересечение линий скольжения точкой разрыва.  
 Пусть известны значения функций  $\xi$  и  $\eta$  вдоль дуги одной из линий скольжения, проходящей через точку разрыва. Тогда можно построить дуги других линий скольжения, проходящих через точку разрыва, и найти на них значения  $\xi$  и  $\eta$ .

Решение этой задачи, которую мы будем называть задачей Соколовского<sup>(1)</sup>, аналогично решению задачи Гурса. Возьмем (фиг. 11) последовательность близко расположенных точек  $\{[0,0], [0,1], [0,2], \dots, [0, n]\}$  на данной дуге и проведем через точку разрыва ряд прямых (0), (1), (2), (3), ..., (m), образующих малые углы друг с другом, причем прямая (0) является касательной к данной линии скольжения. Остальные прямые можно рассматривать как касательные к другим линиям скольжения. Положение последней прямой (m) определяется обычно условиями задачи.



Фиг. 11

Предельное значение одной из величин  $\xi$  или  $\eta$  в точке разрыва является общим для всех этих касательных, а значение другой определяется углом наклона касательной к направлению  $r$ . Если, например, данная линия скольжения такова, что касательная к ней образует угол  $\theta$  с направлением  $r$ , то значение  $\eta$  в точке разрыва будет общим для всех проходящих через нее линий скольжения. Для предельных значений  $\xi$  имеем

$$\xi = \xi_0 + \eta$$

где  $\theta$  — угол наклона касательной к линиям скольжения в точке разрыва.

Итак, можно считать известными предельные значения функций  $\xi$  и  $\eta$  для линий скольжения, касательными к которым являются прямые (1), ..., (m).

Построим в точке  $[0, 1]$  касательную к линии скольжения второго семейства. Пересечение ее с прямой (1) приблизительно определит точку пересечения соответствующих линий скольжения, после чего можно найти приближенные значения  $\xi$  и  $\eta$  в этой точке по данным значениям их в точке  $[0, 1]$  и предельным значениям в точке разрыва.

Затем строим точку  $[2, 1]$  пересечения прямой (2) с касательной к линии скольжения второго семейства, проходящей через точку  $[1, 1]$ , находим приближенные значения  $\xi$  и  $\eta$  в этой точке. Далее, подобным же образом строим точки  $[3, 1], [4, 1], \dots, [m, 1]$ , которые вместе с точками  $[0, 1], [1, 1]$  и  $[2, 1]$  приблизительно определяют положение линии скольжения, проходящей через точку  $[0, 1]$ . После этого задача сводится к задаче Гурса о нахождении функций  $\xi$  и  $\eta$  по данным значениям этих функций на двух линиях скольжения  $\{[0, 1], [0, 2], \dots, [0, n]\}$  и  $\{[1, 0], [1, 1], [2, 1], \dots, [m, 1]\}$ .

<sup>1</sup> В. В. Соколовский<sup>(1)</sup> называет эту точку осевой.

Таким образом, задача оказывается приближенно решенной в области, которая ограничена двумя линиями скольжения, исходящими из точки разрыва, и пересекающей их третьей линией скольжения. Положение последней линии определяется условиями задачи. Точку разрыва можно также рассматривать как дугу линии скольжения, стянувшуюся в точку.

Некоторое представление о характере напряженного состояния вблизи точки разрыва можно получить, пользуясь средствами анализа.

Будем считать напряжения вблизи точки разрыва равномерно ограниченными, т. е. меньшими по абсолютной величине некоторой константы, общей для окрестности точки разрыва.

Кроме того, допустим, что вблизи точки разрыва функции  $\xi$  и  $\eta$  могут быть представлены разложениями Пуансо

$$\xi = a_0 + \rho^\alpha (a_1 + a_2 \rho + a_3 \rho^2 + \dots) \quad (\alpha > 0)$$

$$\eta = b_0 + \rho^\beta (b_1 + b_2 \rho + b_3 \rho^2 + \dots) \quad (\beta > 0)$$

где  $\rho$  — расстояние от точки разрыва;  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  и  $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$  — функции угла  $\varphi$  между направлениями  $r$  и прямой, идущей к этой точке.

Замечая, что (фиг. 12)

$$z = \rho \sin \varphi, \quad r = l + \rho \cos \varphi$$

где  $l$  — расстояние между точкой разрыва и осью  $z$ , получаем

$$\rho \frac{\partial}{\partial r} = \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} = \rho \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

после чего имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial \xi}{\partial z} \sin \theta &= \cos(\theta - \varphi) \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \sin(\theta - \varphi) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{l + \rho \cos \varphi} \left( \theta = \frac{1}{4}(\xi - \eta) \right) \\ - \frac{\partial \eta}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cos \theta &= -\sin(\theta - \varphi) \frac{\partial \eta}{\partial \rho} + \cos(\theta - \varphi) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{l + \rho \cos \varphi} \end{aligned}$$

Правые и левые части полученных уравнений можно разложить по степеням  $\rho$ . Коэффициенты при  $\rho^{-1}$  в разложениях левых частей уравнений соответственно равны

$$\sin \left( \frac{a_0 - b_0}{4} - \varphi \right) a_0 \quad \text{и} \quad \cos \left( \frac{a_0 - b_0}{4} - \varphi \right) b_0$$

Разложения правых частей уравнений начинаются с положительных степеней  $\rho$  ( $l \neq 0$ ), и, следовательно, написанные коэффициенты должны обращаться в нуль. Это имеет место в трех случаях:

- 1)  $a_0 = 0, \quad b_0 = 0$
- 2)  $a_0 = 0, \quad \frac{a_0 - b_0}{4} - \varphi = \frac{\pi}{2} + m\pi$
- 3)  $b_0 = 0, \quad \frac{a_0 - b_0}{4} - \varphi = m\pi$

В первом случае величины  $a_0, b_0$  постоянны и значения  $\xi$  и  $\eta$  в точке  $\rho=0$  однозначны. Точка  $\rho=0$  при этом не является точкой разрыва.

Во втором случае величина  $a_0$  постоянна и, следовательно, значение  $\xi$  однозначно в точке  $\rho=0$ . Для величины  $b_0$  имеем выражение

$$b_0 = a_0 - (2\pi + 4m\pi) - 4\varphi$$

Таким образом, предельное значение функции  $\eta$  при приближении к точке разрыва зависит от полярного угла  $\varphi$ .

В третьем случае, напротив, значение функции  $\eta$  не зависит от пути приближения к особой точке, так как величина  $b_0$  не зависит от угла  $\varphi$ , а значение главного члена разложения функции  $\xi$  вблизи точки разрыва определяется выражением

$$a_0 = b_0 + 4m\pi + 4\varphi$$

и, следовательно, в точке разрыва не однозначно.

В обоих последних случаях значение угла наклона касательной к линии скольжения одного из семейств стремится по мере приближения к точке разрыва к значению полярного угла  $\varphi$ . Таким образом, в точке разрыва линии одного из семейств пересекаются. Можно показать, что вблизи точки разрыва линии другого семейства мало отличаются от окружностей с центром в особой точке.

Наконец, можно последовательно определить выражения для коэффициентов  $a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots$  и подсчитать значения показателей  $\alpha$  и  $\beta$ .

Перейдем теперь к решению задачи о давлении абсолютно жесткого штампа на идеально пластическую среду.

Примем, что сила давления на штамп имеет предельное значение, после превышения которого штамп начнет погружаться в среду и деформации ее станут значительными. Следовательно, в области среды, окружающей штамп, надлежит положить, как указывалось выше,

$$\sigma_r = \sigma + K \sin 2\theta, \quad \sigma_\theta = \sigma - K \sin 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = K \cos 2\theta$$

Так как  $\theta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$  и для точек свободной границы среды  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ , то для этих точек имеем  $\theta = -\frac{1}{2}\pi$  и, следовательно,

$$0 = \sigma + K$$

так как на свободной границе  $\sigma_r = 0$ .

Таким образом для точек свободной границы среды

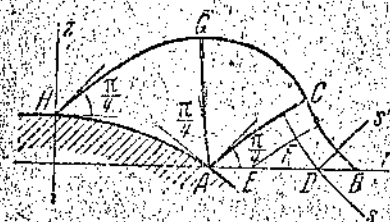
$$\sigma = \frac{1}{2}K(\xi + \eta) = -K, \quad \theta = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = -\frac{1}{2}\pi$$

откуда

$$\xi = -(\frac{1}{2}\pi + 1), \quad \eta = \frac{1}{2}\pi - 1$$

Зная значения функций  $\xi$  и  $\eta$  на границе среды  $AB$  (Фиг. 13), можно, решая задачу Коши, построить линии скольжения  $\xi$  и  $\eta$  в треугольной области  $ABC$ , примыкающей к свободной границе.

Не трудно видеть, что угол  $\theta$  уменьшается при перемещении по линиям скольжения в глубь среды.



Фиг. 13

Чтобы это доказать, рассмотрим точку  $F$ , находящуюся на пересечении линии скольжения первого семейства  $FD$  и линии скольжения второго семейства  $EF$ .

Вдоль линии  $FD$  справедливо соотношение

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{r}, \quad \text{откуда} \quad d\xi = \frac{1}{r} (dv - dz)$$

При перемещении из точки  $F$  в точку  $D$  координата  $r$  возрастает, а  $z$  уменьшается. Таким образом  $dr > 0$ ,  $dz < 0$ , и следовательно,  $d\xi > 0$ . Поэтому значение  $\xi$  в точке  $F$  меньше значения той же функции в точке  $D$ .

Вдоль линии скольжения  $EF$  справедливо соотношение

$$\frac{\partial \eta}{\partial s'} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{r}, \quad \text{откуда} \quad d\eta = \frac{1}{r} (dr' + dz')$$

При перемещении от точки  $F$  к точке  $E$  координаты  $r$  и  $z$  уменьшаются, следовательно,  $d\eta < 0$  и значение функции  $\eta$  в точке  $F$  больше значения той же функции в точке  $E$  или, что то же, в точке  $D$ , так как функции  $\xi$  и  $\eta$  на свободной границе среды постоянны.

Таким образом, значение разности  $\xi - \eta$  в точке  $F$  меньше, чем ее значение в точках  $D$  и  $E$ , а следовательно, и угол  $\theta$  меньше в точке  $F$ , чем в точках  $D$  и  $E$ , где он равен  $-\frac{1}{2}\pi$ .

Если штамп абсолютно гладок, то линии скольжения будут подходить под углом  $\frac{1}{4}\pi$  к его поверхности. Одна из таких линий пройдет через точку  $A$ , которая расположена на краю контактной поверхности. Через эту же точку проходит другая линия скольжения  $AC$ , которая образует угол  $\frac{1}{4}\pi$  со свободной

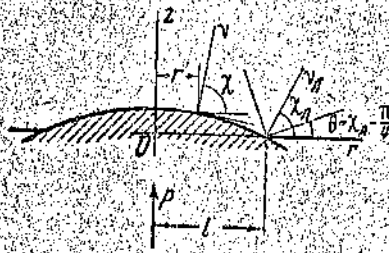
границей среды. Таким образом, как уже отмечалось выше, эта точка является точкой разрыва напряженного состояния и через нее проходит поток линий скольжения.

Так как  $AC$  является линией скольжения второго семейства (вдоль нее известен закон изменения функции  $\eta$ ), то и все остальные линии, проходящие через эту точку, также будут принадлежать ко второму семейству. Следовательно, предельное значение функции  $\eta$  в точке  $A$  зависит от пути, по которому идет приближение к этой точке. Значение функции  $\xi$  в точке разрыва является однозначным и равно  $-(1 + \frac{1}{2}\pi)$ .

Считая линию скольжения  $AC$  построением задачи Коши по данным  $\xi$  и  $\eta$  на участке границы  $AB$  и зная значения функций  $\xi$  и  $\eta$  на этой линии, можно, решая задачу типа Гурса, построить линии скольжения и определить значения  $\xi$  и  $\eta$  в области  $CAG$ .

При этом окажется построенной линия скольжения  $AG$  второго семейства, подходящая под углом  $\frac{1}{4}\pi$  к поверхности штампа у точки  $A$ . Предельное значение функции  $\eta$  на этой линии при приближении к точке  $A$  может быть найдено непосредственно.

Обозначим через  $\lambda_A$  угол между нормалью к поверхности штампа и направлением  $r$ . Тогда угол наклона линии скольжения первого семейства,



Фиг. 14

ортогонального к линии  $AG$ , при приближении (фиг. 14) к точке  $A$  будет стремиться к значению  $\chi_A = \frac{1}{2}\pi$ .

Таким образом, для линий  $AC$  и  $AG$  имеем соответственно предельные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\xi_{AC} - \eta_{AC}) &= -\frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2}(\xi_{AG} - \eta_{AG}) &= \chi_A = \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

Так как предельные значения  $\xi$  на обеих линиях равны между собой, то

$$\eta_{AG} = \eta_{AC} = 4\chi_A = \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi - 1 - 4\chi_A$$

Далее имеем

$$\sigma_{AG} = \frac{1}{2}K(\xi + \eta) = \frac{1}{2}K\left(-\left(\frac{1}{2}\pi + 1\right) + \frac{1}{2}\pi - 1 - 4\chi_A\right) = -K(1 + 2\chi_A)$$

и, следовательно, нормальное давление среды на штамп в окрестности точки  $A$  будет

$$-q = \sigma_1 = \sigma_{AG} = -K = -(2 + 2\chi_A)K$$

Наибольшее по абсолютной величине давление имеет место для плоского штампа.

Как будет показано далее вычислениями, давление на штамп несколько увеличивается при перемещении по его поверхности к оси симметрии. Для определения закона распределения нормального давления следует решить смешанную задачу в области  $HAG$  (фиг. 13).

На границе штампа  $HA$  имеем

$$\theta = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = \chi - \frac{1}{2}\pi, \quad \text{т. е.} \quad \eta = \xi + \pi - 4\chi$$

Здесь  $\chi$  — угол наклона к направлению  $r$  нормали к поверхности штампа.

Значения функций  $\xi$  и  $\eta$  на линии скольжения  $AG$  известны в результате решения предыдущей задачи. Таким образом, решая задачу смешанного типа, можно построить линии скольжения и определить значения функций  $\xi$  и  $\eta$  в треугольной области  $HAG$  и, в частности, найти их значения на линии  $HA$ .

Так как величины главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  определяются формулами

$$\sigma_1 = \sigma - K \quad \text{и} \quad \sigma_3 = \sigma + K$$

и, кроме того,

$$\sigma = \frac{1}{2}K(\xi + \eta)$$

то можно найти значения этих величин на линии  $HA$ .

Нормальное давление  $q$  среды на штамп равно главному напряжению  $\sigma_3$ .

Таким образом задача оказывается решенной.

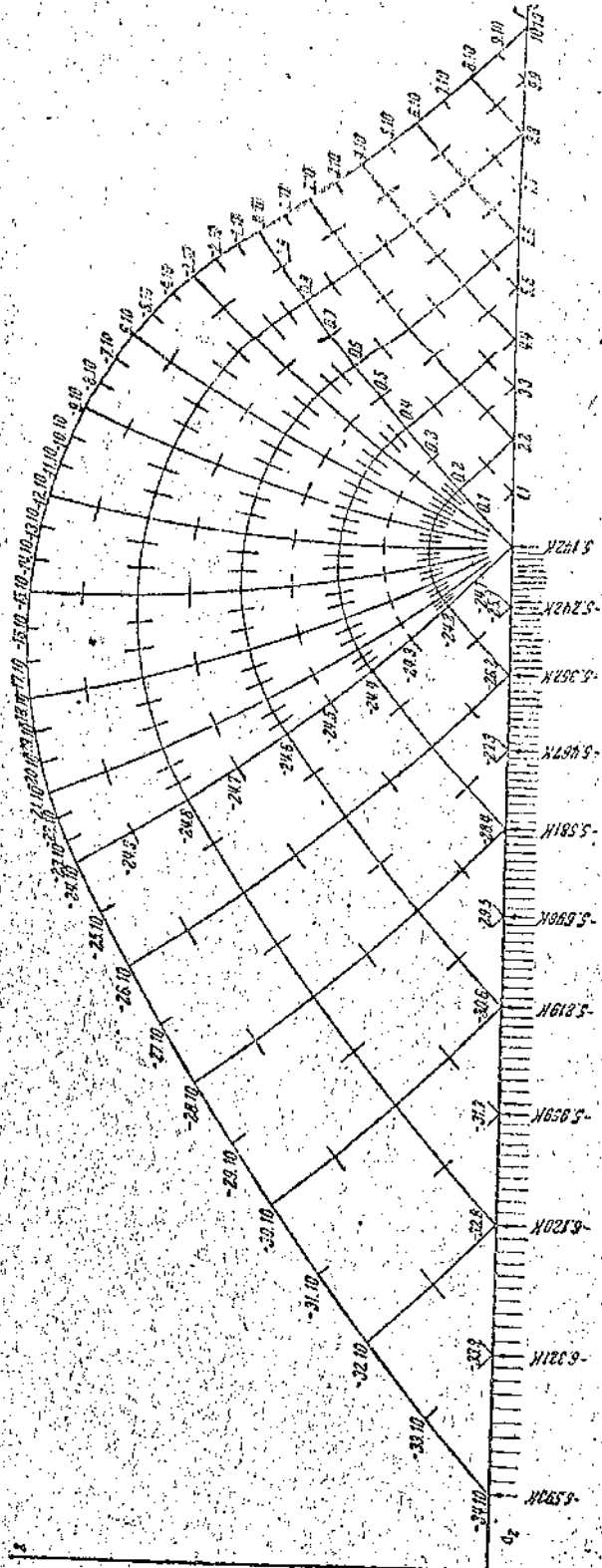
Общее усилие давления штампа на среду выражается при этом криволинейным интегралом

$$P = \int_{AH} 2\pi r q \sin \chi ds = 2\pi \int_{AH} r q ds$$

а твердость материала среды по Бригеллю — отношением

$$H_B = \frac{P}{F}$$

где  $F$  — площадь контактной поверхности.



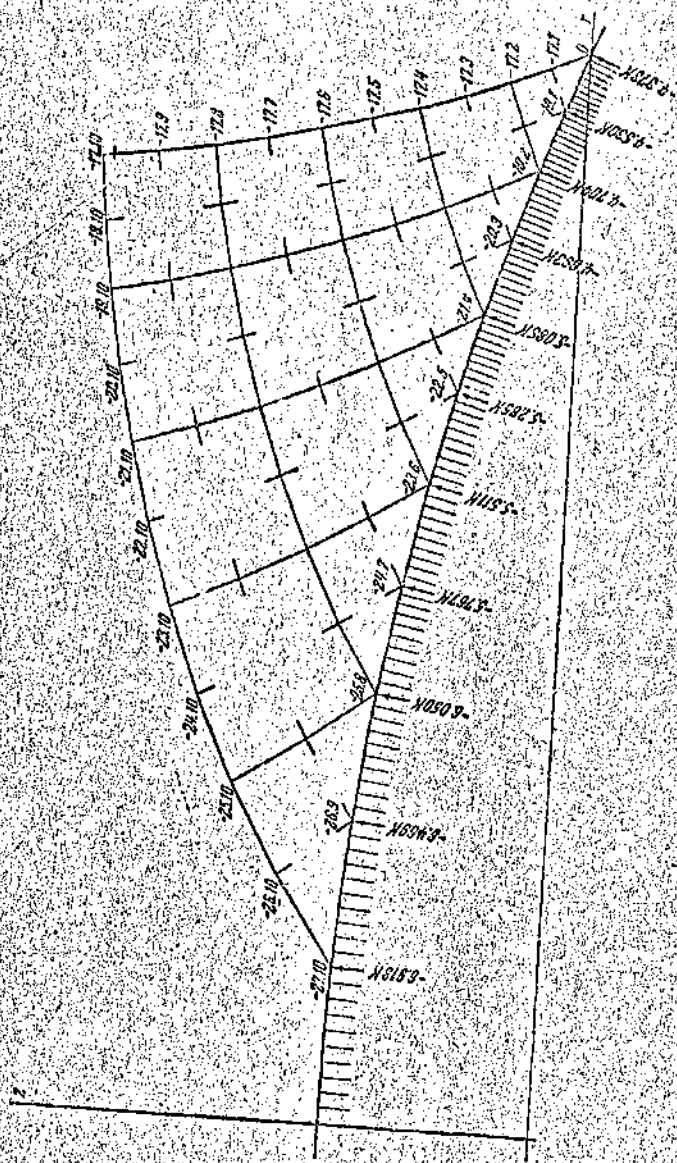
Фиг. 15

На  
дены. Он

Фактическое построение линий скольжения и графическое определение вспомогательных величин для подсчета разностей значений  $\xi$  и  $\eta$  приведено на фиг. 15 и 16.<sup>1</sup>

Радиус  $l$  границы контактной поверхности был принят равным 400 мм.

Для построения линий скольжения в области ABC (Фиг. 13 и 16) на свободной границе были взяты точки (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), ..., (10, 10) на расстоянии 20 мм друг от друга.

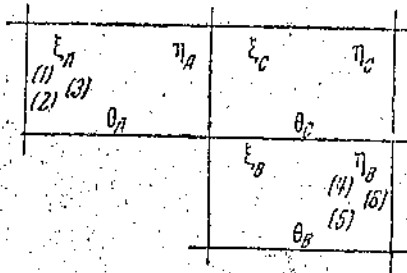


Фиг. 16

<sup>1</sup> На чертежах этих фигур вспомогательные построения типа фиг. 6 не воспроизведены. Опущены также и некоторые из промежуточных линий скольжения.

Затем в соответствии с изложенным выше строимся группы точек  $\{[0, 1], [1, 2], [2, 3], \dots, [9, 10]\}, \{[0, 2], [1, 3], [2, 4], \dots, [8, 10]\}$  и т. д.

Результаты вычислений значений функций  $\xi$  и  $\eta$  приведены в табл. 1. Порядок вычислений этих значений<sup>1</sup> поясняется схемой, представленной на



Фиг. 17

		34	32	30	28	26	24	21	18	15	12
10	$\xi$	-4.002	-3.923	-3.827	-3.748	-3.673	-3.618	-3.567	-3.483	-3.376	-3.269
	$\eta$	-7.164	-6.674	-6.338	-6.075	-5.823	-5.594	4.956	-4.129	3.202	-2.310
	$\theta$	0.785	0.688	0.628	0.582	0.538	0.494	0.347	+0.162	-0.043	-3.240
8	$\xi$		-3.549	-3.523	-3.485	-3.443	-3.401	-3.371	-3.316	-3.239	-3.158
	$\eta$		-6.691	-6.382	-6.126	-5.877	-5.651	-5.033	-4.225	-3.308	-2.419
	$\theta$		0.785	0.715	0.660	0.609	0.563	0.416	0.227	0.017	-0.185
6	$\xi$			-3.248	-3.237	-3.215	-3.189	-3.173	-3.139	-3.089	-3.033
	$\eta$			-6.390	-6.148	-5.907	-5.685	-5.090	-4.304	-3.403	-2.521
	$\theta$			0.785	0.728	0.673	0.624	0.479	0.291	0.079	-0.128
4	$\xi$				-3.010	-3.001	-2.986	-2.978	-2.962	-2.931	-2.896
	$\eta$				-6.152	-5.921	-5.704	-5.129	-4.866	-2.486	-2.616
	$\theta$				0.785	0.730	0.680	0.538	0.351	0.139	-0.070
2	$\xi$					-2.781	-2.776	-2.774	-2.767	-2.757	-2.741
	$\eta$					-5.923	-5.714	-5.167	-4.416	-3.567	-2.701
	$\theta$					0.785	0.735	0.690	0.415	0.200	-0.010
0	$\xi$						-2.571	-2.571	-2.571	-2.571	-2.571
	$\eta$						-5.715	-5.178	-4.453	-3.613	-2.773
	$\theta$						0.785	0.650	0.470	0.260	0.050

<sup>1</sup> В табл. 1 и далее в табл. 3 в целях экономии места приведены значения  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\theta$  только для точек пересечения тех характеристик, которые воспроизведены на фиг. 15 и 16.

0.921,  
мыка  
прохо  
Пр



Фиг. 17, клетки которой соответствуют клеткам табл. 1 и в которой

$$(1) = (\cos \theta_A - \sin \theta_A) \overline{AC} \quad (4) = (\cos \theta_B - \sin \theta_C) \overline{BC}$$

$$(2) = \frac{1}{2}(r_A + r_C) \quad (5) = \frac{1}{2}(r_B + r_C)$$

$$(3) = (1) : (2) \quad (6) = (4) : (5)$$

$$\xi_C = \xi_A + (3), \quad \eta_C = \eta_B + (6), \quad \theta_C = \frac{1}{2}(\xi_C - \eta_C)$$

Существенными для дальнейшего построения являются точки  $[0, 1]$ ,  $[0, 2]$ ,  $[0, 3]$ , ...,  $[0, 10]$ , которые лежат на линии скольжения  $AC$ . Для построения линий скольжения в области  $CAG$  через точку  $A$  были проведены прямые с углами наклона к направлению  $r$  соответственно равными  $0,786$ ,  $0,851$ ,

Таблица 1

9	6	3	0	-2	-4	-6	-8	-10		
-3.164	-3.066	-2.974	-2.892	-2.834	-2.771	-2.706	-2.639	-2.571	$\xi$	10
-1.432	-0.592	-0.238	1.041	0.923	0.814	0.723	6.641	0.571	$\eta$	
-0.433	-0.619	-0.803	-0.983	-0.939	-0.896	-0.857	-0.820	-0.786	0	
-3.075	-2.996	-2.919	-2.850	-2.783	-2.714	-2.643	-2.571		$\xi$	8
-1.540	-0.694	0.142	0.954	0.838	0.775	0.647	-0.571		$\eta$	
-0.284	-0.576	-0.765	-0.951	0.905	-0.862	-0.823	-0.786		0	
-2.973	-2.913	-2.855	-2.801	-2.726	-2.649	-2.571			$\xi$	6
-1.642	-0.796	0.044	0.863	0.751	0.653	0.571			$\eta$	
-0.333	-0.529	-0.725	-0.916	-0.869	-0.826	-0.786			0	
-2.857	-2.817	-2.777	-2.738	-2.655	-2.571				$\xi$	4
-1.742	-0.898	-0.655	0.768	0.661	0.571				$\eta$	
-0.279	-0.480	-0.681	-0.876	-0.829	-0.786				0	
-2.723	-2.703	-2.682	-2.682	-2.671					$\xi$	2
-1.846	-0.997	-0.735	0.670	0.571					$\eta$	
-0.219	-0.427	-0.632	-0.833	-0.786					0	
-2.571	-2.571	-2.571	-2.571						$\xi$	0
-1.933	-1.093	-0.853	0.571						$\eta$	
-0.169	0.370	-0.580	-0.786						0	

0,921, 0,991, ..., 2,221, 2,271, 2,316, 2,356. Участки построенных прямых, принадлежащие к точке  $A$ , принимались за начальные участки линий скольжения, проходящих через точку  $A$ .

\* Прикладная математика и механика, вып. 3

группы точек  
и т. д.  
ны в табл. 1  
дставленной на

15	12
3.376	-3.269
3.202	-2.310
0.043	-3.240
3.239	-3.158
3.308	-2.419
0.017	-0.185
3.089	-3.033
3.403	-2.521
0.079	-0.128
2.931	-2.896
1.486	-2.616
0.189	-0.070
2.757	-2.741
1.567	-2.701
0.200	-0.010
2.571	-2.571
1.613	-2.773
0.269	0.050

значения  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\theta$   
на фиг. 15 и 16.

Предельные значения угла  $\theta$  на этих линиях (при приближении к особой точке  $A$ ) равны соответственно  $-0.786$ ,  $-0.720$ ,  $-0.650$ ,  $-0.580$ , ...,  $0.650$ ,  $0.700$ ,  $0.745$ ,  $0.785$ .

Построение точек в области  $CAG$  производилось последовательными группами  $\{-1, 1\}$ ,  $\{-1, 2\}$ ,  $\{-1, 3\}$ , ...,  $\{-1, 10\}$ ,  $\{-2, 1\}$ ,  $\{2, 2\}$ , ...,  $\{-2, 10\}$  и т. д., причем значения функций  $\xi$  и  $\eta$  в этих точках, вычисленные по схеме фиг. 17, сводились в табл. 1.

Для случая плоского штампа последней линией скольжения области  $CAG$  является линия  $\{-24, 1\}$ ,  $\{-24, 2\}$ ,  $\{-24, 3\}$ , ...,  $\{-24, 10\}$ .

Для других случаев последняя линия выбирается по углу  $\chi_A$ , который образует с направлением  $l$  нормаль к поверхности штампа в точке  $A$ . Так, для сферического штампа, рассмотренного нами в качестве примера (фиг. 16), значение  $\chi_A$  взято равным  $1.185 \approx 67^\circ 55'$ . При этом предельное значение угла  $\theta$  на линии скольжения  $CAG$  равно  $0.400$  и последней линией скольжения области  $CAG$  в проведенном построении является линия  $\{-17, 1\}$ ,  $\{-17, 2\}$ ,  $\{-17, 3\}$ , ...,  $\{-17, 10\}$ .

Таким образом построение линии скольжения области  $CAG$  для случая плоского штампа может быть использовано и для других случаев.

С этой целью линии скольжения  $\{-18, 1\}$ ,  $\{-18, 2\}$ , ...,  $\{-18, 10\}$ ,  $\{-19, 1\}$ ,  $\{-19, 2\}$ , ...,  $\{-19, 10\}$  и т. д. построены с малыми интервалами предельных значений угла  $\theta$  в точке  $A$ .

Построение точек в области  $HAG$  производилось для случая плоского штампа последовательными группами  $\{-25, 1\}$ ,  $\{-25, 2\}$ , ...,  $\{-25, 10\}$ ,  $\{-26, 2\}$ ,  $\{-26, 3\}$ , ...,  $\{-26, 10\}$  и т. д. вплоть до точки  $\{-34, 10\}$ , завершающей все построение.

При подсчете значений функций  $\xi$  и  $\eta$  учитывалось, что в точках контактной поверхности  $\{-25, 1\}$ ,  $\{-26, 2\}$ , ...,  $\{-34, 10\}$  имеет место соотношение

$$\frac{1}{2}(\xi - \eta) = \frac{1}{2}\pi \quad \text{или} \quad \eta = \xi - 3.142$$

Далее подсчитывались значения функции  $\sigma$  и напряжения  $\sigma_x$  в упомянутых точках контактной поверхности по формулам

$$\sigma = \frac{1}{2}K(\xi + \eta) = K\left(\xi + \frac{1}{2}\pi\right), \quad \sigma_x = \sigma - K = K\left(\xi + \frac{1}{2}\pi - 1\right)$$

и определялись по чертежу расстояния (в миллиметрах) этих точек от оси  $x$ . Интеграл

$$P = 2\pi \int_{HA} r q dx \quad (q = |\sigma_x| = |\sigma_z|)$$

представляющий собой полное усилие давления штампа на пластическую среду, подсчитывался приближенно по формуле трапеций.

Значение  $q$  в точке  $H$  при подсчете принято приближенно равным значению той же функции в точке  $\{-34, 10\}$ .

Для более точного определения этого значения следовало построить такую линию скольжения, которая, имея начало на свободной поверхности среды, точно прошла бы через точку  $H$  (центр поверхности контакта).

Построения, не указанные на чертежах, показали, что начало такой линии отстоит от точки  $[10, 10]$  на расстоянии, которое меньше 20 мм.

Так как значение функции  $q$  в точке  $H$  оказывает малое влияние на величину  $P$ , то мы указанное построение опустили.

Вычисления для определения величин  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $P$  приведены в табл. 2, в которой

$$r_A = l; \quad \eta = \xi - \pi, \quad \sigma = \frac{K}{2} (\xi + \eta), \quad \bar{q} = |\sigma - K|, \quad qr = \frac{1}{2K} (q_{l-r} + q_{r-l})$$

По данным этой таблицы

$$P = \int_0^l 2\pi qr \, dr \approx 2\pi K \sum \bar{q} r \Delta r = 2\pi 454113K, \quad \sigma_1 = 2K = 0.3523H_B$$

Отношение

$$\frac{P}{F} = H_B$$

(где  $F = \pi l^2 = 160\,000 \pi$  — площадь контактной поверхности), — теоретическое значение твердости по Бринеллю, для случая плоского штампа оказалось равным 5.68  $K$ .

Построения и вычисления для случая сферического штампа ведутся аналогичным образом.

Выбранному значению угла  $\chi_A = 1.185$  (в точке  $A$ ) соответствует радиус сферы, равный 1063 мм, и погружение штампа в среду на 78.0 мм, что составляет 0.195 внешнего радиуса контактной поверхности (радиуса отпечатка).

Диаметр границы контактной поверхности составляет, таким образом, 0.376 диаметра сферы штампа.

Линии скольжения в областях  $BAC$  и  $CAG$  полностью совпадают с соответствующими линиями предыдущей задачи, и построение их на фиг. 16 опущено.

При этом линией скольжения  $AG$  на фиг. 16 теперь будет являться линия  $\{[-17, 0], [-17, 1], [-17, 2], [-17, 3], \dots, [-17, 10]\}$ , которая, таким образом, подбирается по ходу построения линий скольжения  $\{[-18, 1], [-18, 2], \dots, [-18, 10]\}$ ,  $\{[-19, 2], [-19, 3], \dots, [-19, 10]\}$  и т. д. в области  $HAG$ .

Вычисленные значения функций  $\xi$  и  $\eta$  в точках области  $HAG$  приведены в табл. 3. При подсчете функций  $\xi$  и  $\eta$  в точках контактной поверхности  $[-18, 1], [-19, 2], \dots, [-27, 10]$  использовалось соотношение  $\eta = \xi - \pi + 4\chi$ , которое приводилось уже выше. Значение  $\chi$  находилось из формулы

$$\cos \chi = \frac{r}{l} \cos \chi_A$$

Таблица 2

	H	-24.10	-83.9	-32.8	-31.7	-20.6	-29.5	-28.4	-27.3	-26.2	-25.1	A
$\Gamma$	0	51.8	103.3	150.5	190.9	229.8	263.1	295.0	324.6	352.4	377.4	400.0
$\xi$		-3.022	-3.750	-3.549	-3.588	-3.248	-3.125	-3.010	-2.896	-2.781	-2.671	-2.571
$\eta$		-7.164	-6.892	-6.691	-6.502	-6.390	-6.267	-6.152	-6.038	-5.923	-5.813	-5.715
$\varphi/K$		-5.593	-5.321	-5.120	-4.952	-4.819	-4.696	-4.581	-4.467	-4.352	-4.242	-4.142
$q/K$	6.600	6.593	6.321	6.120	5.952	5.819	5.696	5.581	5.467	5.352	5.242	5.142
$qr/K$		341.5	653.0	921.1	1137.6	1337.2	1498.6	1646.4	1774.6	1886.0	1973.3	2036.8
$qr$		170.8	497.2	787.0	1029.3	1257.4	1417.9	1572.5	1710.4	1830.3	1912.2	2017.6
$\Delta r$		51.3	51.5	47.2	40.4	33.9	33.3	31.9	29.6	27.8	25.0	22.6
$qr \Delta r$		8845	25608	37147	41585	43135	47216	50163	50631	50882	48004	45897

Таблица 3

		-27	-25	-23	-21	-19	-17
10	$\xi$	-4.447	-4.176	-2.940	-3.749	-3.582	-3.447
	$\eta$	-7.590	-6.205	-5.440	-4.808	-4.269	-3.816
	$\theta$	0.730	0.507	0.370	0.265	0.172	0.092
8	$\xi$		-3.782	-3.661	-3.529	-3.402	-3.292
	$\eta$		-6.318	-5.550	-4.929	-4.379	-3.907
	$\theta$		0.634	0.472	0.350	0.244	0.150
6	$\xi$			-3.393	-3.307	-3.212	-3.123
	$\eta$			-5.629	-5.018	-4.467	-4.001
	$\theta$			0.550	0.428	0.314	0.210
4	$\xi$				-3.091	-3.052	-2.952
	$\eta$				-5.079	-4.536	-4.071
	$\theta$				0.407	0.370	0.280
2	$\xi$					-2.818	-2.764
	$\eta$					-4.590	-4.129
	$\theta$					0.443	0.341
•	$\xi$						-2.571
	$\eta$						-4.173
	$\theta$						0.460

где  $r$  — расстояние упомянутых точек контактной поверхности до оси  $z$ , а  $l=400$  — расстояние до оси  $z$  точки  $A$ .

Вычисления удельных давлений  $q$  среды на поверхность штампа для подсчета общего усилия  $P$ , которым штамп давит на среду, в табл. 4, где

$$r_A = l, \quad \theta = \chi - \frac{1}{2}\pi, \quad \eta = \xi - 4\theta, \quad q = |\sigma - K|$$

$$\cos \chi = \frac{r}{l} \cos \chi_A, \quad \sigma = \frac{K}{2} (\xi + \eta), \quad qr = \frac{1}{2K} (q_{j-1} r_{j-1} + q_j r_j)$$

По данным этой таблицы

$$P = 2\pi \int_0^l qr dr \approx 2\pi K \sum qr \Delta r = 2\pi \cdot 425147 K,$$

$$\sigma_s = 2K = 0.3764 H_M = 0.3835 H_B$$

Отношение

$$\frac{P}{F} = H_B$$

где  $F$  подсчитывалось по формуле

$$F = \frac{\pi l^2}{\cos^2(\frac{1}{2}\pi - \chi_A)} \quad \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\chi_A}{2} = 0.193, \quad \cos 0.193 = 0.9814 \right)$$

для рассматриваемого случая сферического штампа оказалось равным 5.22.

Если же брать вместо площади  $F$  контактной поверхности величину ее проекции  $f = \pi l^2$  на плоскость, то отношение силы  $P$  к величине этой проекции (твердость по Мейеру) оказывается равным  $H_M = 5.31K$ .

Таблица 4

	H	-27.10	-26.9	-25.8	-24	-23.6	-22.5	-21.4	-20.3	-19.2	-18.1	A
$\gamma$	0	58.3	112.6	160.2	200.3	237.8	271.8	301.4	329.5	355.6	378.6	400.0
$\cos \gamma$	0	0.0568	0.1058	0.1505	0.1882	0.2234	0.2554	0.2842	0.3095	0.3341	0.3557	0.3758
0	0	0.730	0.679	0.634	0.595	0.559	0.527	0.497	0.470	0.443	0.421	0.400
5	0	-4.447	-4.051	-3.782	-3.525	-3.293	-3.201	-3.091	-2.953	-2.818	-2.688	-2.571
7	0	-7.190	-6.767	-6.318	-5.959	-5.629	-5.339	-5.079	-4.833	-4.590	-4.372	-4.171
$\sigma/K$	0	-5.9.8	-5.409	-5.050	-4.757	-4.511	-4.285	-4.087	-3.892	-3.704	-3.536	-3.373
$q/K$	7.000	6.9.8	6.409	6.050	5.767	5.511	5.285	5.087	4.892	4.704	4.536	4.373
$q^*/K$	0	403.3	721.7	969.2	1155.1	1310.5	1436.3	1522.6	1582.7	1622.7	1717.3	1749.2
$q^*$	201.7	562.5	845.4	1062.2	1252.8	1373.5	1481.5	1577	1662.7	1695.0	1733.3	
$\Delta r$	58.3	54.3	47.6	40.1	32.5	34.0	29.5	22.2	26.0	23.0	21.4	
$\Delta r^*$	1175.7	3054.3	4074.3	4359.4	4521	4669.9	4292.2	4272.1	4272.1	3899.6	3709.2	

Для упругопластических тел без упрочнения следует считать справедливым соотношение  $\sigma_s = 2K$ , где  $\sigma_s$  — предел текучести при простом растяжении. В случае плоского штампа имеем  $\sigma_s = 0.352 H_B$ , а для сферического штампа  $\sigma_s = 0.383 H_B$ .

Отношение диаметра контактной поверхности для сферического штампа к диаметру сферы было равно 0.376. Для плоского штампа это отношение следует считать равным нулю, если рассматривать задачу о плоском штампе как предельную задачу о сферическом штампе с возрастающим диаметром.

Таким образом, отношение числа твердости по Бринеллю  $H_B$  к пределам текучести  $\sigma_s$  для упругопластических тел без упрочнения должно мало зависеть от диаметра отпечатка. Это обстоятельство, а также числовые значения отношения находятся в соответствии с некоторыми экспериментами<sup>[7]</sup>, по данным которых  $\sigma_s = 0.34 - 0.36 H_B$ .

Поступила в редакцию  
27 I 1944

A. J. ISHLINSKY. — THE PROBLEM OF PLASTICITY WITH THE AXIAL SYMMETRY AND BRINELL'S TEST

Let the first and second principal stresses for a deformed ideal plastic medium be equal and the third principal stress different from the first by a constant value  $\sigma_3 = 2k$ .

Then the problem in question is statically determined and can be reduced to the solution of a partial differential system of the hyperbolic type

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{1}{r} (\cos \theta - \sin \theta), \quad \frac{\partial \eta}{\partial s'} = \frac{1}{r} (\cos \theta - \sin \theta) \quad (1)$$

where  $\theta$  is the angle between the direction  $r$  and the bisectrix of the right angle between the principal stresses in the meridian plane; the functions  $\xi$  and  $\eta$  are determined by formulae

$$\xi = \frac{1}{K} (\sigma + 2k\theta), \quad \eta = \frac{1}{K} (\sigma - 2K\theta) \quad \left( \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right) \quad (2)$$

The derivatives  $\partial / \partial s$ ,  $\partial / \partial s'$  are taken along the directions forming the angles  $\theta$  and  $\pi/2 + \theta$  with  $r$ , i. e. along the directions of the principal shearing stresses in the meridian plane.

The author uses the approximate method of characteristics suggested by S. A. Christianovitch and developed for this problem by W. W. Sokolowsky<sup>[8]</sup>.

For the given values of functions  $\xi$  and  $\eta$  at the points  $A$  and  $B$  (fig. 5) the value of  $\theta$  is also known and the point  $C$  can be found as an intersection of two straight lines  $AC$  and  $BC$  determined by angles  $\theta_A$  and  $\theta_B + \pi/2$  correspondingly with direction  $r$ .

The straight lines  $AC$  and  $BC$  are taken approximately as parts of the corresponding characteristics (the slip lines).

The values of functions  $\xi$  and  $\eta$  at the point  $C$  are given approximately on page 205.

By using this procedure the families of characteristics can be approximately plotted and the approximate values of functions  $\xi$  and  $\eta$  determined for different cases, namely:

- 1) when the values of functions  $\xi$  and  $\eta$  are given along a curve which is not a characteristic (the Cauchy problem, fig. 8);
- 2) when the values  $\xi$  and  $\eta$  are given along two characteristics of different families starting from the same point (the Goursat problem, fig. 10);
- 3) when the values  $\xi$  and  $\eta$  are known along a characteristic and along an arbitrary curve not a characteristic; a relationship between the functions  $\xi$  and  $\eta$  is given (mixed problem, fig. 11).

The same procedure can be used for a more special case of two characteristics of the same family intersecting at one point (the problem considered by W. W. Sokolowsky<sup>[3]</sup>, fig. 12). In this case the characteristics can be plotted providing that the values  $\xi$  and  $\eta$  are given along a range of one of the characteristic, but starting from the point of their intersection.

The determination of pressure of a plastic medium on a spherical punch is reduced to the consequent solutions of the above mentioned boundary problems.

On the free surface which is assumed to be approximately plane,

$$\xi = -\left(\frac{\pi}{2} + 1\right), \quad \eta = \frac{\pi}{2} - 1$$

and for the domain  $ACB$  (fig. 14) the afore-mentioned Cauchy problem arises.

In the domain  $ACG$  we have that type of boundary problem which has been considered by W. W. Sokolowsky. The characteristic  $AC$  is plotted, the values of  $\xi$  and  $\eta$  along this characteristic are calculated and then the characteristic  $AG$  can be constructed.

The characteristics  $AC$  and  $AG$ , forming angle equal to  $\pi/4$  with the free surface and with the surface of punch correspondingly, pass through the same point  $t$ .

Further, by using the values  $\xi$  and  $\eta$  along  $AG$  and the relationship  $\eta = \xi + \pi - 4\chi$  given on the surface of punch  $AH$  the values  $\xi$  and  $\eta$  in the domain  $AHG$  may be computed. The  $\chi$  denotes an angle between the normal to the surface of punch and the direction  $r$ .

The pressure  $q$  on the punch of the plastic medium is normal to the surface of punch and may be calculated by formula  $q = \frac{1}{2} K (\xi + \eta - 2)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hencky. Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. Zeitschr. für angew. Math. u. Mech. 1923. H. 4.
2. L. Prandtl. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht. Zeitschr. für angew. Math. u. Mech. 1923. H. 6.
3. Соколовский В. В. О давлении пластической среды на жесткий штамп. Прикладная математика и механика. 1940. Т. IV. Вып. 5-6. [Стр. 19].
4. А. Наар и Т. Кármán. Göttinger Nachr. math.-phys. Klasse. 1909. (S. 204-218).
5. Ишлинский А. Ю. Устойчивость вязкопластического течения полосы и крупного прута. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII. [Стр. 117].
6. Соколовский В. В. Плоская задача давления земли. ДАН СССР. 1939. XXII. № 4. XXIII. № 1.