ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК 1945, № 3 CLASSE DES SCIENCES TECHNIQUES

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НЕ ВПОЛНЕ УПРУГИХ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Представлено академиком Н. Е. Кочиным

Переход от законов одномерного деформирования тел к пространственным законам в достаточной мере сложен и требует введения некоторых дополнительных гипотез.

Мы покажем этот переход для тел, законы одномерного деформирования которых были ранее нами рассмотрены в предыдущей статье [1]. Примем, что в естественном состоянии наши тела изотропны, а при деформировании из естественного состояния тензор деформаций остается коаксиальным тензору напряжения. При этом предполагается, что оси последнего для данной точки тела не меняют своей ориентации в процессе деформирования. Последнее замечание несущественно для непластических тел (например, для идеально упругих и для тел с линейной наследственностью).

Рассмотрим какой-либо элемент тела в форме прямоугольного параллелепипеда, грани которого ориентированы по главным осям тензора напряжений. Пусть σ_1, σ_2 и σ_3 суть главные напряжения и ε_1, ε_2 и ε_3 — главные деформации элемента. Введем в рассмотрение величины относительного формоизменения элемента s_1, s_2, s_3, связанные с главными деформациями ε_1, ε_2, ε_3 соотношениями

$$s_1 = \varepsilon_1 - \frac{1}{3}\theta = \frac{2}{3}\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\varepsilon_3,$$

$$s_2 = \varepsilon_2 - \frac{1}{3}\theta = \frac{2}{3}\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\varepsilon_3 - \frac{1}{3}\varepsilon_1,$$

$$s_3 = \varepsilon_3 - \frac{1}{3}\theta = \frac{2}{3}\varepsilon_3 - \frac{1}{3}\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\varepsilon_2,$$

где $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ представляет собой величину относительного изменения объема элемента.

Знание величин s_1, s_2, s_3 и θ вполне определяет деформированное состояние элемента.

Пусть величины, имеющие размерность напряжения S_1, S_2, S_3 и Θ, представляют собой обобщенные силы, отнесенные соответственно к обобщенным перемещениям s_1, s_2, s_3 и θ. По принципу возможных перемещений имеем равенство

$$\sigma_1\delta\varepsilon_1 + \sigma_2\delta\varepsilon_2 + \sigma_3\delta\varepsilon_3 = S_1\delta s_1 + S_2\delta s_2 + S_3\delta s_3 + \Theta\delta\theta.$$

Заменяя в этом равенстве вариации δs_1, δs_2, δs_3 и $\delta\theta$ их выражениями через вариации $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$ и сравнивая коэффициенты при последних вариациях в правой и левой частях равенства, получаем соотношения

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} S_1 - \frac{1}{3} S_2 - \frac{1}{3} S_3 + \Theta,$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{3} S_2 - \frac{1}{3} S_3 - \frac{1}{3} S_1 + \Theta,$$

$$\sigma_3 = \frac{2}{3} S_3 - \frac{1}{3} S_1 - \frac{1}{3} S_2 + \Theta.$$

Таким образом знание обобщенных сил S_1, S_2, S_3 и Θ вполне определяет напряженное состояние элемента. Складывая написанные выше соотношения, получаем $3\Theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, и, следовательно, обобщенная сила Θ представляет собой среднеарифметическое главных напряжений или первый инвариант тензора напряжений.

Если ввести обозначение $3\Gamma = S_1 + S_2 + S_3$ для суммы величин S_1, S_2, S_3, то на основании тех же соотношений получим

$$S_1 = \sigma_1 - \Theta + \Gamma,$$

$$S_2 = \sigma_2 - \Theta + \Gamma,$$

$$S_3 = \sigma_3 - \Theta + \Gamma.$$

При этом, величина Γ не может быть определена посредством законов статики и, следовательно, задача определения обобщенных сил S_1, S_2 и S_3 по данным σ_1, σ_2 и σ_3 неопределенна. Это обстоятельство является следствием наличия соотношения $s_1 + s_2 + s_3 = 0$, в силу которого вариации δs_1, δs_2 и δs_3 не независимы между собой.

Примем, что величины S_1, S_2 и S_3 связаны однотипным образом соответственно с величинами s_1, s_2 и s_3, например, посредством соотношений, описанных нами ранее [1], между величинами σ и ε. Если, кроме того, установить связь между величинами Θ и θ, то механические свойства тела при пространственном деформировании будут вполне определены.

Приведем ряд примеров построения законов пространственного деформирования тел.

Пусть величины S_1, S_2 и S_3, которые будем называть напряжениями формоизменения, пропорциональны величинам s_1, s_2 и s_3, т. е. $S_1 = bs_1$, $S_2 = bs_2$ и $S_3 = bs_3$. Кроме того, пусть имеет место соотношение $\Theta = \varkappa\theta$ (b и $\varkappa$ — константы). Замечая, что

$$3\Gamma = S_1 + S_2 + S_3 = b(s_1 + s_2 + s_3) = 0,$$

получаем

$$\sigma_1 = S_1 + \Theta - \Gamma = bs_1 + \varkappa\theta = \left(\varkappa - \frac{1}{3} b\right)\theta + b\varepsilon_1$$

и аналогичные выражения для напряжений σ_2 и σ_3.

Вводя обозначения $\lambda = \varkappa - \frac{1}{3} b$ и $2\mu = b$, приходим к известным соотношениям закона Гука в форме Ляме для упругого изотропного тела.

Пусть $\theta = 0$, а величина S и s связаны соотношениями типа

$$S = 2\mu\dot{s},$$

где μ — константа (коэффициент вязкости). В этом случае получаем соотношения

$$\sigma_i = -p + 2\mu\dot{\varepsilon}_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $-p = \Theta$ — характерные для несжимаемой вязкой жидкости.

Заметим, что для достаточно малых деформаций можно не делать различия между производной какого-либо компонента деформации по времени от соответствующего компонента скорости деформирования.

Пусть имеют место соотношения

$$S_i(t) = bs_i(t) - \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(t-\tau)\, s_i(\tau)\, d\tau \qquad (i=1, 2, 3)$$

и, кроме того,

$$\Theta(t) = \varkappa\theta(t) - \int\limits_{-\infty}^{t} \psi(t-\tau)\, \theta(\tau)\, d\tau.$$

Здесь $\varphi(t-\tau)$ и $\psi(t-\tau)$ — функции наследственности.

Как было показано [1], закон линейного последействия, который в данном случае имеет вид

$$\dot{S}_i + rS_i = b\dot{s}_i + bns_i,$$
$$\dot{\Theta} + r'\Theta = \varkappa\dot{\theta} + \varkappa n'\theta,$$

является частным случаем написанных выше соотношений.

Так как $s_1 + s_2 + s_3 = 0$, то $3\Gamma = S_1 + S_2 + S_3 = 0$ и, следовательно,

$$\sigma_i = S_i + \Theta - \Gamma = b\left(\varepsilon_i - \frac{\theta}{3}\right) + \varkappa\theta - \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(t-\tau)\left[\varepsilon_i(\tau) - \frac{1}{3}\theta(\tau)\right] d\tau -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{t} \psi(t-\tau)\, \theta(\tau)\, d\tau$$

или окончательно

$$\sigma_i = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_i - \int\limits_{-\infty}^{t} \left[\psi(t-\tau) - \frac{1}{3}\varphi(t-\tau)\right] \theta(\tau)\, d\tau - \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(t-\tau)\, \varepsilon_i(\tau)\, d\tau,$$

что представляет собой выражение закона пространственного деформирования изотропного тела с наследственностью.

При переходе от главных осей тензора напряжений к произвольным осям получим точно такие же формулы для нормальных напряжений. Для касательных же напряжений соответствующие формулы имеют вид

$$\tau(t) = \mu\gamma(t) - \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}\varphi(t-\tau)\, \gamma(\tau)\, d\tau,$$

где τ — касательное напряжение, а γ — соответствующий угол сдвига.

Рассмотрим далее закон пространственного деформирования вязкопластического тела [2]. В этом случае принимаем, что

$$S_i = \pm K + 2\mu\dot{s}_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

где K — характерная для данного материала пластическая константа, μ — коэффициент вязкости. Знак у константы K совпадает со знаком скорости формоизменения $\dot{s}_i$. Так как всегда имеет место

$$\dot{s}_1 + \dot{s}_2 + \dot{s}_3 = 0,$$

то знак наибольшей по своему значению скорости $\dot{s}$ противоположен знаку двух других скоростей, если ни одна из них не равна нулю. Пусть s_1 — наибольшая из величин s_i. Примем для определенности, что $s_1 > 0$. Тогда будем иметь

$$S_1 = K + 2\mu\dot{s}_1,$$
$$S_2 = -K + 2\mu\dot{s}_2,$$
$$S_3 = -K + 2\mu\dot{s}_3$$

и, следовательно,

$$3\Gamma = S_1 + S_2 + S_3 = -K.$$

Считая материал несжимаемым, получим для главных напряжений выражения

$$\sigma_1 = S_1 + \Theta - \Gamma = -p + \frac{4}{3}K + 2\mu\dot{\varepsilon}_1,$$

$$\sigma_2 = S_2 + \Theta - \Gamma = -p - \frac{2}{3}K + 2\mu\dot{\varepsilon}_2,$$

$$\sigma_3 = S_3 + \Theta - \Gamma = -p - \frac{2}{3}K + 2\mu\dot{\varepsilon}_3.$$

В случае $s_1 < 0$ в этих выражениях следует всюду изменить знак у константы K на обратный.

Остановимся более подробно на законах пространственного деформирования упругопластического тела с упрочнением.

При деформировании этого тела из естественного состояния примем [1], что

$$S_i = bs_i \qquad \text{пока } |S_i| < K^1 \text{ или } |s_i| < \frac{1}{b}K;$$

$$S_i = +K^1 + hs_i \qquad \text{при } s_i > \frac{1}{b}K,$$

$$S_i = -K^1 + hs_i \qquad \text{при } s_i < -\frac{1}{b}K,$$

где b, K и h — физические константы тела, а

$$K^1 = \frac{b-h}{b}K.$$

Будем считать, что изменение объема тела подчиняется закону

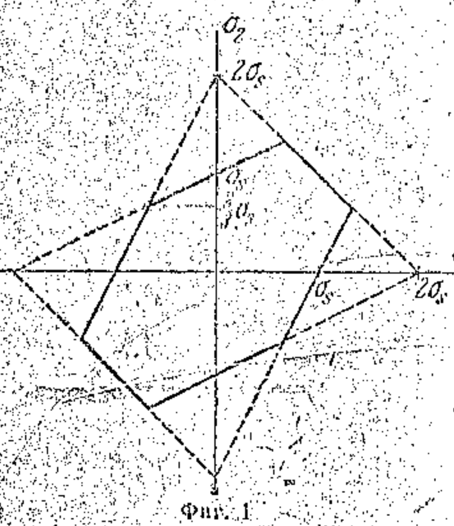
$$\Theta = \varkappa\theta,$$

где $\varkappa$ — модуль объемной упругости.

Модули упругости b и $\varkappa$ у реальных тел имеют сравнительно большие значения. Вследствие этого деформация тела будет незначительной, пока одна или несколько из величин напряжений S не достигнут значения пластической постоянной K. Могут представиться при этом три случая:

1. Только одно из напряжений S_i достигает в процессе деформирования тела значения K и затем превышает это значение; два других напряжения остаются при этом меньшими, чем пластическая постоянная K.

Пусть s_1 — величина формоизменения, соответствующая первому напряжению. Так как $s_1 = -s_2 - s_3$, то s_1 не будет велико, ибо величины s_2 и s_3 остаются в пределах упругих деформаций. Вследствие малости объемной деформации θ можно утверждать, что в рассматриваемом случае деформация тела будет незначительной, несмотря на то, что предел упругости тела оказывается превзойденным. Достижение одним из напряжений S значения пластической постоянной может быть принято за начало образования пластического состояния тела. Построенная таким образом новая теория прочности приводит в случае плоского напряженного состояния к диаграмме фиг. 1. Точкам, находящимся внутри шестиугольника, соответствуют напряженные состояния без наличия пластичности и обратно.



Фиг. 1

При чистом сдвиге по этой теории прочности пластическое состояние элемента достигается при касательном напряжении τ_s, равном двум третям напряжения σ_s, соответствующего началу пластического состояния при простом растяжении.

2. Два напряжения, например, S_1 и S_2, достигают значения пластической постоянной $\pm K$ и переходят через него, а третье напряжение по абсолютной величине остается меньшим K.

Пусть для определенности $s_1 > 0$, тогда непременно будет иметь место

$$S_1 = K' + hs_1, \quad S_2 = -K' + hs_2, \quad S_3 = bs_3$$

и, следовательно,

$$3\Gamma = (b - h)\, s_3.$$

Таким образом

$$\sigma_1 = \Theta + K' + hs_1 - \frac{b-h}{3} s_3,$$

$$\sigma_2 = \Theta - K' + hs_2 - \frac{b-h}{3} s_3,$$

$$\sigma_3 = \Theta + bs_3 - \frac{b-h}{3} s_3.$$

Из первых двух соотношений получаем равенство

$$\Theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{b-h}{3} s_3 - h(s_1 + s_2),$$

используя которое, приводим третье соотношение к виду

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + (b + h) s_3.$$

Так как

$$s_3 = \varepsilon_3 - \frac{1}{3}\theta = \varepsilon_3 - \frac{1}{9\varkappa}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

то имеем

$$\sigma_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{b+h}{9\varkappa}\right)(\sigma_1 + \sigma_2) + (b + h)\varepsilon_3 - \frac{b+h}{9\varkappa}\sigma_3,$$

откуда

$$\sigma_3 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{b+h}{9\varkappa}}{1 + \frac{b+h}{9\varkappa}}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{b+h}{1 + \frac{b+h}{9\varkappa}}\varepsilon_3.$$

При плоской деформации, т. е. при $\varepsilon_3 = 0$, получаем

$$\sigma_3 \approx \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

причем равенство становится точным для несжимаемого материала ($\varkappa = \infty$). Последнее соотношение принимается во многих системах уравнений пластичности.

3. Все три напряжения S превышают по абсолютной величине значение пластической постоянной K. В этом случае, принимая для определенности $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ и $s_3 < 0$, имеем

$$S_1 = K' + hs_1, \qquad S_2 = K' + hs_2, \qquad S_3 = -K' + hs_3$$

и, так как

$$3\Gamma = -K',$$

то получаем

$$\sigma_1 = \Theta + \frac{2}{3}K' + h\left(\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\theta\right),$$

$$\sigma_2 = \Theta + \frac{2}{3}K' + h\left(\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\theta\right),$$

$$\sigma_3 = \Theta - \frac{4}{3}K' + h\left(\varepsilon_3 - \frac{1}{3}\theta\right),$$

откуда

$$\sigma_1 = \frac{2}{3}K' + \left(\varkappa - \frac{h}{3}\right)\theta + h\varepsilon_1,$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{3}K' + \left(\varkappa - \frac{h}{3}\theta\right) + h\varepsilon_2,$$

$$\sigma_3 = -\frac{4}{3}K' + \left(\varkappa - \frac{h}{3}\theta\right) + h\varepsilon_3,$$

причем все три главные деформации ε_1, ε_2 и ε_3 будут, вообще говоря, значительными по сравнению с их величинами при упругой деформации тела.

Заметим, что если за предел текучести принимать такое напряжение, после достижения которого деформация тела начинает интенсивно увеличиваться, то соотношение между пределами текучести при чистом сдвиге τ_s и при простом растяжении σ_s будет отличаться от вышеприведенного соотношения между τ_e и σ_e. При чистом сдвиге имеем

$$\sigma_1 = -\sigma_2, \qquad \sigma_3 = 0, \qquad \Theta = 0;$$

поэтому две из величин S_i одновременно достигают значения пластической постоянной $\pm K$, после чего деформации ε_1 и ε_2 могут стать значительными, в то время как деформация ε_3 будет равна нулю, что легко усмотреть из формулы для σ_3, приведенной выше для второго случая упругопластической деформации. Так как в пределах упругой деформации

$$3\Gamma = S_1 + S_2 + S_3 = 0,$$

то предел текучести имеет место при напряжениях

$$\sigma_1 = S_1 + \Theta - \Gamma = K = -\sigma_2$$

и, следовательно, при значении максимального касательного напряжения, равного

$$\max \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = K.$$

10*

При простом растяжении имеем

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \Theta = \frac{\sigma}{3}$$

и, следовательно, в пределах упругой деформации

$$S_1 = \sigma_1 - \Theta = \frac{2}{3}\sigma, \quad S_2 = \sigma_2 - \Theta = -\frac{1}{3}\sigma, \quad S_3 = \sigma_3 - \Theta = -\frac{1}{3}\sigma.$$

При увеличении напряжения σ первым достигает значения пластической постоянной K напряжение S_1 и, таким образом,

$$\sigma_e = \frac{3}{2}K,$$

откуда и следует, что $\tau_s = \frac{2}{3}\sigma_e$.

При дальнейшем увеличении напряжения σ напряжения S_2 и S_3 достигнут одновременно значения $-k$.

Имеем при этом соотношения

$$S_1 = K' + hs_1, \quad S_2 = S_3 = bs_2 = -K.$$

Далее получаем

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma = S_1 - S_2 = K' + hs_1 + K = \frac{b-h}{b}K + 2\frac{h}{b}K + K,$$

так как $s_1 = -2s_2 = \frac{2}{b}K$. Таким образом

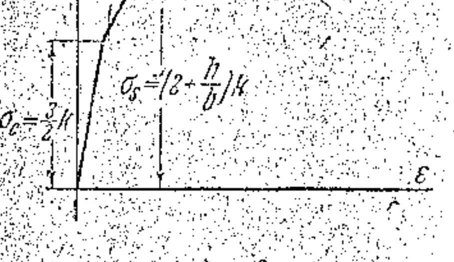
$$\sigma_s = \left(2 + \frac{h}{b}\right)K$$

и, следовательно, $\tau_s = \dfrac{\sigma_s}{2 + \frac{h}{b}}$.

Для упругопластических тел без упрочнения получим

$$\tau_s = 0{,}5\,\sigma_s$$

результат, совпадающий с известным соотношением теории прочности Кулона.



Фиг. 2

Диаграмма простого растяжения упругопластического тела с упрочнением имеет вид ломаной (фиг. 2).

Угловой коэффициент первого участка ломаной $\left(0 < \sigma < \sigma_e = \frac{3}{2}K\right)$ выражается через константы b и $\varkappa$ формулой

$$E = \frac{9\varkappa b}{6\varkappa + b}.$$

Угловой коэффициент второго участка $\sigma_e < \sigma < \sigma_s = \left(2 + \frac{h}{b}\right)K$ выражается соответственно формулой

$$E' = \frac{9\varkappa(b + 2h)}{18\varkappa + b + 2h}.$$

Если $\varkappa = \infty$ и $h = 0$, то $E' = \frac{1}{3}E$.

Угловой коэффициент третьего участка равен

$$\frac{9\varkappa h}{6\varkappa + h}.$$

Для упругопластических тел без упрочнения ($h = 0$) этот участок параллелен оси ε.

Коэффициент Пуассона, т. е. отношение $-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, остается постоянным и равным

$$\nu = \frac{3\varkappa - b}{6\varkappa + b}$$

на первом участке диаграммы, затем возрастает на протяжении второго участка до значения

$$\nu' = \frac{9\varkappa b - 2b^2 - bh}{18\varkappa b + 2b^2 + bh}.$$

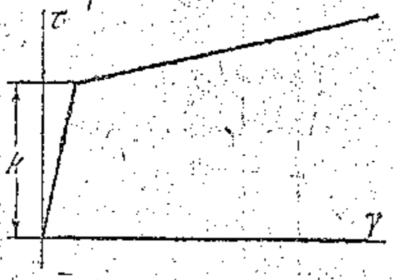
На третьем участке коэффициент Пуассона также зависит от величины напряжения σ и выражается формулой

$$\nu = \frac{(3\varkappa - h)\sigma - 6\varkappa K'}{(6\varkappa + h)\sigma - 12\varkappa K'},$$

причем с возрастанием напряжения σ коэффициент ν возрастает.

Диаграмма чистого сдвига имеет вид ломаной фиг. 3. Зависимость между максимальным касательным напряжением τ и углом сдвига γ на первом участке диаграммы ($0 < \tau < K$) имеет вид

$$\tau = \frac{b}{2}\gamma,$$



Фиг. 3

так как $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(S_1 - S_2) = \frac{1}{2}b(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. Следовательно, модуль сдвига $G = \mu$ связан с константой b соотношением

$$G = \frac{1}{2}b.$$

На втором участке диаграммы ($\tau < K$) имеем

$$\tau = K' + \frac{h}{2}\gamma.$$

Аналогичный вид имеет диаграмма растяжения несжимаемого тела при плоской деформации ($\varepsilon_3 = 0$).

Диаграммы медленного деформирования тела, рассмотренного в предыдущей статье [1], также имеют вид фиг. 3. Они относятся, таким образом, строго говоря, не к простому растяжению (фиг. 2), а к чистому сдвигу, либо к растяжению несжимаемого тела при условии плоской деформации.

В случае простого растяжения — сжатия упругопластического тела с упрочнением помимо эффекта Баушингера (понижение предела упругости при изменении знака деформации) имеет место, как можно показать, изменение предела упругости при деформировании в перпендикулярном направлении. Именно, если, например, сжать материал за предел упругости (или текучести) и затем сжимать вновь по перпендикулярному направлению, то новый предел упругости (или текучести) оказывается меньшим первоначального. Для растяжения в перпендикулярном направлении, напротив, предел упругости оказывается несколько повышенным. Это обстоятельство является следствием наличия остаточных пластических деформаций и связанных с ними остаточных значений напряжений формоизменения после разгрузки тела.

Законы деформирования идеально пластического тела можно рассматривать как предельные законы деформирования упругопластического тела, считая последнее несжимаемым ($\varkappa = \infty$), лишенным упрочнения ($h = 0$) и обладающим исчезающе малыми упругими деформациями ($b \to \infty$). В этом случае для плоской деформации будем иметь

$$\varepsilon_1 = s_1 = -\varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = s_3 = 0$$

и, следовательно,

$$S_1 = K, \quad S_2 = -K, \quad -K \leqslant S_3 \leqslant K,$$

где для определенности принято, что $S_1 = K$.

Так как

$$\sigma_1 - \sigma_2 = S_1 - S_2 = 2K,$$

то для плоской задачи пластичности получаем известное соотношение Кулона—Сен-Венана

$$\max \tau = K = \text{const}.$$

Значение третьего напряжения остается неопределенным; однако, как нетрудно показать, оно отличается от полусуммы первых двух напряжений меньше чем на величину пластической постоянной K, т. е.

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - K < \sigma_3 < \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + K.$$

При пространственном деформировании примем для определенности, что $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$, $\varepsilon_3 < 0$; тогда имеем

$$S_1 = K, \quad S_2 = -K, \quad S_3 = -K, \quad 3\Gamma = -K$$

и, следовательно,

$$\sigma_1 = \frac{4}{3}K + \Theta, \quad \sigma_2 = -\frac{2}{3}K + \Theta, \quad \sigma_3 = -\frac{2}{3}K + \Theta,$$

откуда

$$\sigma_1 = \sigma_2 + 2K, \quad \sigma_1 = \sigma_3 + 2K \quad \text{или} \quad \sigma_2 = \sigma_3.$$

Таким образом, для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между напряжениями. Этим наша теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение[1].

Для построения полной системы уравнений обоим упомянутым авторам приходится вводить излишне большие ограничения на величины пластических деформаций (или скоростей деформирования, если рассматривается течение пластической среды). Именно, принимаются справедливыми четыре соотношения:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\dfrac{\partial v_x}{\partial x} - \dfrac{\partial v_y}{\partial y}} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\dfrac{\partial v_x}{\partial x} - \dfrac{\partial v_z}{\partial z}} = \frac{2\tau_{xy}}{\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial y}} = \frac{2\tau_{yz}}{\dfrac{\partial v_z}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial z}} = \frac{2\tau_{zx}}{\dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial x}},$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты скорости (или перемещения) какой-либо частицы пластической среды. Эти соотношения содержат не только требование коаксиальности тензора напряжения и тензора скоростей деформирования, но также и требование пропорциональности касательного напряжения на произвольно ориентированной площадке к соответствующей скорости деформации сдвига (причем коэффи-

[1] Ср. A. Haar u. Th. Karman, Göttinger Nachr. math.-phys. Klasse, 1909, S. 204—218, где для «полного» пластического состояния приняты аналогичные соотношения.

циент пропорциональности может меняться при переходе от одной точки тела к другой). В частности, если, например, имеет место напряженное состояние

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 + 2K,$$

то из вышеупомянутых теорий следует, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Согласно же нашей теории должно быть только

$$\varepsilon_1 > 0, \qquad \varepsilon_2 > 0,$$

а соотношение между ними может быть произвольным.

Решение пространственной задачи пластичности сводится при этом к решению системы следующих девяти уравнений с девятью неизвестными функциями $u, v, w, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z},$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z},$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\sigma_x \frac{1}{2} e_{yx} + \tau_{xy} e_{vv} + \tau_{xz} \frac{1}{2} e_{yz} = \tau_{yx} e_{xx} + \sigma_y \frac{1}{2} e_{xy} + \tau_{yz} \frac{1}{2} e_{xz},$$

$$\tau_{yx} \frac{1}{2} e_{zx} + \sigma_y \frac{1}{2} e_{zy} + \tau_{yz} e_{zz} = \tau_{zx} \frac{1}{2} e_{yx} + \tau_{zy} e_{yy} + \sigma_z \frac{1}{2} e_{yz},$$

$$\tau_{zx} e_{xx} + \tau_{zv} \frac{1}{2} e_{xy} + \sigma_z \frac{1}{2} e_{xz} = \sigma_x \frac{1}{2} e_{zx} + \tau_{xy} \frac{1}{2} e_{zy} + \tau_{xz} e_{zz},$$

$$2(\Theta - 2K)^2 + 6K(\Theta - 2K) - 9\Phi = 0,$$

$$(\Theta - 2K)^3 + 6K(\Theta - 2K)^2 - 27\Psi = 0.$$

Первые три уравнения являются известными уравнениями движения механики непрерывной среды, причем u, v и w представляют собой компоненты скорости частицы.

Четвертое уравнение выражает условие несжимаемости среды, а следующие три уравнения — условие совпадения главных осей тензора напряжений и тензора скоростей деформирования. Наконец, последние два уравнения выражают условия пластичности через инварианты тензора напряжений:

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$\Phi = \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2,$$

$$\Psi = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Вывод их аналогичен выводу уравнения пластичности Леви, исходящего из условия пластичности Кулона, т. е. условия типа

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2K.$$

В отличие от теории Леви задача о пластическом равновесии среды при наличии осевой симметрии может быть решена без привлечения обстоятельств ее деформирования [4].

Если рассматривается задача о малой пластической деформации, то в написанных девяти уравнениях величины u, v и w следует трактовать как компоненты перемещения частиц тела. Левые части первых трех уравнений должны быть при этом соответственно изменены.

Поступила в редакцию
17 марта 1944 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Уравнения деформирования не вполне упругих и вязко-пластических тел. Известия ОТН, № 1—2, 1945.
2. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластического тела. Ученые записки МГУ, вып. 39, 1940.
3. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута. Прикладная математика и механика, т. VII, 1943, стр. 109; Об устойчивости вязкопластического течения круглой плиты. Прикладная математика и механика, т. VII, 1943, стр. 405.
4. Ишлинский А. Ю. Гипотеза прочности формоизменения. Ученые записки МГУ, Механика, вып. XLVI, 1940, стр. 117—124.
5. Ишлинский А. Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля. Прикладная математика и механика, т. VIII, вып. 2, 1944.