Доклады Академии Наук СССР
1946. Том LIII, № 7

МЕХАНИКА

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 17 IV 1946)

1. Дифференциальное уравнение прямолинейного движения ракеты массы $m(t)$ при действии на нее силы $F(t, v, z)$ может быть получено из равенства

$$(m+dm)(v+dv)+(-dm)v_1=mv+F\,dt, \tag{1}$$

которое имеет место согласно теореме об изменении количества движения механической системы, состоящей, в данном случае, из ракеты и отбрасываемых назад за время dt частиц взрывчатого вещества. Здесь: m — масса ракеты в момент времени t, v — ее абсолютная скорость, v_1 — абсолютная скорость отбрасываемых назад частиц и $(-dm)$ — их масса.

После очевидных упрощений равенство (1) приводится к виду

$$m\frac{dv}{dt}=-\frac{dm}{dt}(v-v_1)+F, \tag{2}$$

причем $dm/dt<0$ и разность $v-v_1=u$ представляет собой относительную скорость отбрасываемых частиц.

При решении задач принимается гипотеза о том, что скорость u постоянна.

Представляется более естественным вместо последней гипотезы принять гипотезу о том, что при отбрасывании частиц освобождается кинетическая энергия $A(-dm)$, пропорциональная их массе. Тогда, согласно теореме живых сил, следует равенство

$$\frac{(m+dm)(v+dv)^2}{2}+\frac{(-dm)v_1^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+F\,dz+A(-dm).$$

Так как здесь $dz=v\,dt$, то после упрощений будем иметь

$$mv\frac{dv}{dt}+\frac{1}{2}\frac{dm}{dt}(v^2-v_1^2)=Fv-A\frac{dm}{dt}. \tag{3}$$

Если из левой и правой частей равенства (3) вычесть, соответственно, левую и правую части равенства (2), предварительно умноженных на v, то получим

$$\frac{1}{2}\frac{dm}{dt}(v^2-v_1^2)=\frac{dm}{dt}(v^2-vv_1)-A\frac{dm}{dt},$$

откуда следует

$$(v-v_1)^2=2A \quad \text{или} \quad u=\sqrt{2A}=\text{const}. \tag{4}$$

Таким образом, обе высказанные гипотезы эквивалентны.

2. В теории движения ракет представляет интерес задача о том, как следует расходовать массу взрывчатого вещества ракеты, чтобы дальность ее прямолинейного полета s была наибольшей. Непосредственное использование уравнения (2) оказывается в этом случае затруднительным. Нетрудно видеть, что в случае, если

$$F = -[\varphi(v) + mg], \tag{5}$$

задача может быть сведена к задаче вариационного исчисления. Действительно, вводя в качестве независимой переменной скорость ракеты v и обозначая dv/dt через w, получим, согласно (2),

$$m(v)\,w = -\frac{dm}{dv}\,wu - \varphi(v) - m(v)\,g,$$

откуда

$$w = -\frac{\varphi(v) + m(v)\,g}{m(v) + \frac{dm}{dv}\,u}. \tag{6}$$

С другой стороны,

$$s = \int_0^{t_1} v\,dt = \int_{v_0}^{v_1} \frac{v\,dv}{w} \tag{7}$$

и, следовательно, дальность полета оказывается функционалом от функции $m(v)$.

Дальнейшие исследования этой задачи произвел Охоцимский, который за независимую переменную принял массу ракет m [1].

Интересный доклад А.А. Космодемьянского о механике переменной массы, прочитанный им зимой 1944 г. в Московском университете, послужил поводом к написанию вышеизложенного. Замечание 2 было высказано в прениях.

Поступило
17 IV 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Е. Охоцимский, Прикладн. матем. и мех., № 2 (1946).