Приборостроение, 1946, №1(9)
с. 15–22

К ТЕОРИИ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

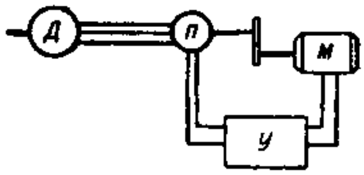
Д-р физ.-мат. наук
А. Ю. Ишлинский

В военной технике и особенно в приборах по управлению стрельбой широко распространены следящие системы. Поэтому важно построить математическую теорию, описывающую работу следящей системы и ее элементов.

Для того чтобы такая теория была достаточно простой и удобной при практических расчетах, приходится делать ряд упрощающих предположений о характере электрических и механических процессов, происходящих в следящей системе, и о закономерностях, которыми управляются такие процессы. На вопрос о том, насколько допустимы такие предположения, должно дать ответ экспериментальное исследование.

Настоящая статья, а также статьи, которые будут опубликованы в следующих номерах бюлл. „Приборостроение", имеют целью построение подобной теории. Материалом для них являются наброски исследований автора о работе конкретных следящих систем в СКБ НКСП при непосредственном участии инженера Е. К. Белякова и доцента Н. Е. Лысова.

Назначение следящей системы состоит в том, чтобы воспроизводить с достаточной для техники точностью угол поворота (или смещения), указываемый каким-либо прибором, без наложения на этот прибор усилий, заметно влияющих на его показания.



Фиг. 1.

На фиг. 1 представлена схема одной из простейших следящих систем. Прибор поворачивает на угол φ_1 ротор селсина *Д* (датчик). Селсин *Д* электрически связан с другим селсином *П* (принимающий), ротор которого поворачивается на угол θ_1 посредством мотора *М*. Селсин *П* подает на вход усилителя *У* напряжение u, зависящее от угла рассогласования системы $\varphi_1 - \theta_1$.

Напряжение v, которое получается на выходе усилителя *У*, подается на мотор *М* так, чтобы мотор вращался в сторону уменьшения угла рассогласования.

Для не слишком больших углов рассогласования можно принять, что

$$u = k_1(\varphi_1 - \theta_1), \tag{1}$$

т. е. напряжение на входе усилителя пропорционально углу рассогласования.

Так как угол поворота ротора мотора θ связан с углом θ_1 соотношением

$$\theta = j\theta_1, \tag{2}$$

где j — передаточное число, то выражение (1) может быть представлено в виде

$$u = k(\varphi - \theta). \tag{3}$$

Здесь $\varphi = j\varphi_1$ и $k_1 = jk$.

Если принять, что при включении на вход усилителя постоянного напряжения $u = u_1$ устанавливается постоянное напряжение $v = v_1 = \mu u_1$ на его выходе, причем переходный процесс происходит по экспотенциальному закону

$$v = v_1\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{4}$$

то

$$\tau\frac{dv}{dt}+v=\mu u_1.$$

Здесь μ — коэфициент усиления постоянного напряжения, τ — постоянная времени усилителя.

В соответствии с последним равенством можно принять, что и при переменном напряжении u работа усилителя подчиняется уравнению

$$\tau\frac{dv}{dt}+v=\mu u. \tag{5}$$

Если напряжение u меняется по закону

$$u=u_0\sin p\tau, \tag{6}$$

то в соответствии с уравнением усилителя (5) выходное напряжение v должно изменяться по закону

$$v=v_0\sin(p\tau-\varepsilon), \tag{7}$$

где

$$v_0=\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2t^2}}u_0,\quad \operatorname{tg}\varepsilon=p\tau. \tag{8}$$

Таким образом, напряжение v повторяет увеличенное в соответственное число раз напряжение u с запаздыванием по времени на величину

$$t_1=\frac{\varepsilon}{p}, \tag{9}$$

которая с увеличением частоты p уменьшается, причем сдвиг фаз ε стремится к значению $\frac{\pi}{2}$, а усиление — к нулю. При малом значении частоты p или, точнее, произведения $p\tau$, имеем

$$p\tau=\operatorname{tg}\varepsilon\approx\varepsilon$$

и, следовательно,

$$t_1\approx\tau,\quad v\approx v_0\sin p(t-\tau). \tag{10}$$

У реальных усилителей напряжения u и v связаны соотношениями, значительно более сложными, чем уравнение (5). Однако для частот p, расположенных в достаточно узких границах, уравнение (5) можно считать приближенным. При этом, зная из эксперимента величины $\frac{v_0}{u_0}$ и ε, можно определить величины μ и τ по формулам

$$\mu=\frac{v_0}{u_0\cos\varepsilon},\quad \tau=\frac{1}{p}\operatorname{tg}\varepsilon, \tag{11}$$

которые можно получить из соотношений (8).

Если мотор M постоянного тока с независимым возбуждением, то для электрической цепи его якоря, пренебрегая самоиндукцией, имеем уравнение

$$v=ri+c\frac{d\theta}{dt}, \tag{12}$$

где r — омическое сопротивление цепи,

c — коэфициент противоэлектродвижущей силы мотора,

θ — угол поворота якоря.

Так как вращающий момент мотора с независимым возбуждением пропорционален току якоря i, то, считая статор мотора неподвижным, имеем согласно уравнениям механики

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}=fi-N. \tag{13}$$

Здесь J — приведенный к оси мотора момент инерции всех вращающихся частей следящей системы,
f — постоянная, определяемая потоком возбуждения и конструкцией мотора,
N — момент сопротивления вращению ротора, состоящий из момента нагрузки и момента трения.

Момент сопротивления N обычно почти не зависит от величины угловой скорости ротора $\frac{d\theta}{dt}$ и определяется ее знаком. Поэтому, если, например, датчик $Д$ вращается в одну и ту же сторону с постоянной скоростью и, следовательно, при неслишком быстром изменении угла рассогласования принимающий $П$ вращается без перемены знака своей скорости, то можно считать

$$N = \text{const}. \tag{14}$$

При сделанных выше предположениях работа следящей системы описывается совокупностью следующих уравнений

$$u = k(\varphi - \theta), \tag{3}$$

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = \mu u, \tag{5}$$

$$v = ri + c\frac{d\theta}{dt}, \tag{12}$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = fi - N. \tag{13}$$

Исключая из первых двух уравнений напряжение u, а из двух последних силу тока i, получим

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = k\mu(\varphi - \theta), \tag{14}$$

$$rJ\frac{d^2\theta}{dt^2} + cf\frac{d\theta}{dt} = fv - rN. \tag{15}$$

Если датчик вращается равномерно, т. е.

$$\varphi = \omega t, \tag{16}$$

то, как было указано выше, при неслишком больших отклонениях принимающего от равномерного вращения по закону

$$\theta = \omega t + \theta_0 \tag{17}$$

можно принять $N = \text{const}$.

Полагая в этом случае

$$v = v_0 + v', \quad \theta = \omega t + \theta_0 + \theta', \tag{18}$$

где величины v_0 и θ_0 подчинены условиям

$$v_0 = k\mu\theta_0, \quad cf\omega = fv_0 - rN, \tag{19}$$

получим согласно уравнениям (14) и (15), учитывая (19), следующие равенства

$$\tau \frac{dv'}{dt} + v' = -k\mu\theta', \tag{20}$$

$$rJ\frac{d^2\theta'}{dt^2} + cf\frac{d\theta'}{dt} = fv', \tag{21}$$

представляющие собой совокупность уравнений, определяющих изменение во времени величин v' и θ', которые являются отклонениями величин v и θ от их стационарных значений

$$v = v_0 \text{ и } \theta = \omega t + \theta_0. \tag{17'}$$

Согласно равенству (19) имеем

$$v_0 = c\omega + \frac{rN}{f}, \quad \theta_0 = -\frac{1}{k\mu}\left(c\omega + \frac{rN}{f}\right). \tag{22}$$

Величина θ_0 представляет собой стационарную ошибку следящей системы. В данном случае она слагается из так называемой скоростной ошибки

$$\theta_1 = -\frac{c}{k\mu}\omega, \tag{23}$$

пропорциональной угловой скорости вращения датчика, и статической ошибки

$$\theta_2 = -\frac{r}{k\mu f}N, \tag{24}$$

обусловленной моментом сопротивления N.

Для успешной работы следящей системы необходимо, чтобы отклонения v' и θ' величин v и θ от их стационарных значений (17') при любых исходных данных стремились к нулю. В этом случае система называется **устойчивой**.

Таким образом, совокупность уравнений (20) и (21) должна иметь только такие решения, которые убывают с течением времени, для чего необходимо и достаточно выполнение неравенства Раусса-Гурвитца

$$a_1 a_2 > a_0 a_3, \tag{25}$$

где

$$a_0 = \tau rJ;\ a_1 = rJ + \tau cf;\ a_2 = cf;\ a_3 = k\mu f. \tag{26}$$

Коэфициенты характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \tau\lambda + 1 & -k\mu \\ f & rJ\lambda^2 + cf\lambda \end{vmatrix} = \tau rJ\lambda^3 + (rJ + \tau cf)\lambda^2 + cf\lambda + k\mu f = 0 \tag{27}$$

упомянутых выше диференциальных уравнений (20) и (21).

К тому же уравнению (27) можно притти, если исключить из диференциального уравнения (20) переменную v', выразив ее посредством уравнения (21) через $\frac{d\theta}{dt}$ и $\frac{d^2\theta}{dt^2}$. В результате такого исключения получим:

$$\tau rJ\frac{d^3\theta}{dt^3} + (rJ + \tau cf)\frac{d^2\theta}{dt^2} + cf\frac{d\theta}{dt} + k\mu f\theta = 0 \tag{28}$$

Подставив в условие Раусса-Гурвитца (25) значения коэфициентов согласно (26), получим

$$(rJ + \tau cf)cf > \tau rJk\mu f$$

или

$$\frac{1}{\tau} > \frac{k\mu}{c} - \frac{cf}{rJ}. \tag{29}$$

Если правая часть неравенства (29) отрицательна, т. е. если

$$c^2 f > k\mu rJ, \tag{30}$$

то система устойчива при любом значении постоянной времени τ.

Однако последнее неравенство едва ли достижимо. Действительно, согласно выражению (22) для обеспечения малости стационарной ошибки следящей системы θ_0 требуется одновременно, чтобы постоянная c была достаточно мала, а постоянная f достаточно велика, и, следовательно, мотор должен обладать при большом числе оборотов весьма большим вращающим моментом.

Мало того, на практике для выполнения неравенства (29) необходимо взять столь малое значение постоянной времени τ, какое без дополнительных цепей для усилителя (особенно магнитного) не всегда выполнимо. Дополнительные же цепи (так называемые **обратные связи**) могут явиться причиной неустойчивости работы самого усилителя и, как правило, требуют весьма тщательного регулирования.

Приведем числовой пример. Пусть $J=1$ *гсм · сек²*, $c = 0{,}25$ *в · сек* (мотор СЛ-361), $r=35\Omega$, $f=200$ *гсм/а*, $k\mu=16$ *в* (при угле рассогласования $\theta\varphi_1-\theta_1=0{,}002$ и передаточном числе $J=3600$ имеем $v_0=115$ *в*). При таких данных

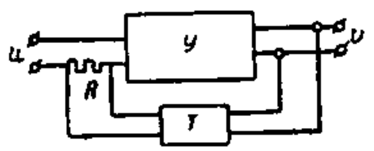
$$\frac{k\mu}{c}-\frac{cf}{rJ}=\frac{16}{0{,}25}-\frac{0{,}25\cdot 200}{35\cdot 1}=64-1{,}4=62{,}6 \text{ 1/сек.},$$

следовательно, для соблюдения условия устойчивости должно быть

$$\tau<\frac{1}{62{,}6}=0{,}016 \text{ сек.},$$

тогда как постоянная времени магнитного усилителя имеет порядок $0{,}1 \div 0{,}2$ сек.

Рассмотрим один из способов уменьшения постоянной времени усилителя, который состоит в том, что напряжение v с выхода усилителя подается на первичную обмотку трансформатора T, а напряжение со вторичной обмотки трансформатора — обратно на вход усилителя по схеме фиг. 2.



Фиг. 2.

Уравнения переходных процессов в первичной и вторичной обмотках трансформатора соответственно имеют вид

$$v=R_1 i_1+n_1\frac{d\Phi}{dt}, \tag{31}$$

$$0=R_2 i_2+n_2\frac{d\Phi}{dt}, \tag{32}$$

где

$$\Phi=M(n_1 i_1+n_2 i_2). \tag{33}$$

Здесь i_1 — ток в первичной обмотке;
n_1 — число ее витков;
R_1 — ее сопротивление (выходным сопротивлением усилителя можно пренебречь);
i_2 — ток во вторичной обмотке;
n_2 — число ее витков;
R_2 — сопротивление ее цепи (можно пренебречь также влиянием на вторичную обмотку напряжения u во входной цепи усилителя);
Φ — магнитный поток при наличии воздушного зазора в магнитной цепи трансформатора;
M — коэфициент взаимоиндукции.

При составлении уравнений (31) и (32) магнитные потоки рассеяния не учитывались.

Если исключить из уравнений (31) и (32) посредством (33) величину Ф, затем второе уравнение вычесть из первого, результат продиференцировать по времени и исключить из него посредством второго уравнения производную тока i_1 по времени, то получим

$$\sigma \frac{di_2}{dt} + i_2 = -m \frac{dv}{dt}, \tag{34}$$

где

$$\sigma = \frac{Mn_1^2}{R_1} + \frac{Mn_2^2}{R_2}, \quad m = \frac{Mn_1n_2}{R_1R_2}. \tag{35}$$

Пусть R — величина напряжения, являющегося нагрузкой для вторичной обмотки трансформатора. Тогда на вход усилителя будет подаваться напряжение

$$u = Ri_2,$$

если пренебречь токами входной цепи усилителя и соответственным образом включить концы вторичной обмотки трансформатора.

Теперь уравнение усилителя (5) заменится двумя: уравнением

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = \mu(u - Ri_2) \tag{36}$$

и уравнением (34), которые можно свести к одному, если из уравнения (36) исключить i_2 посредством выражения (34).

В результате уравнение работы усилителя будет иметь вид

$$\sigma\tau \frac{d^2v}{dt^2} + (\sigma + \tau + a) \frac{dv}{dt} + v = \mu\left(u + \sigma \frac{du}{dt}\right), \tag{37}$$

где

$$a = \mu Rm = \mu R \frac{Mn_1n_2}{R_1R_2}. \tag{38}$$

При $\sigma + \tau = a$ в усилителе возникнут незатухающие колебания с частотой

$$q = \frac{1}{\sqrt{\sigma\tau}}, \tag{39}$$

если только влияние правой части уравнения, связанной с напряжением v посредством уравнения принимающего (3) и уравнения мотора, (12) оказывается несущественным. На практике это, как правило, имеет место, так как частота q оказывается сравнительно большой и вращательные вибрации ротора мотора почти незаметны.

При $\sigma + \tau < a$ усилитель становится неустойчивым и, следовательно, условие его устойчивости принимает вид

$$\sigma + \tau - a > 0. \tag{40}$$

Если напряжение u меняется с частотой, значительно меньшей, чем q, то уравнение (37) может быть приближенно заменено уравнением

$$(\tau - a) \frac{dv}{dt} + v = \mu u \tag{41}$$

и, таким образом, постоянная времени усилителя может быть значительно уменьшена без ущерба для условия (40) его устойчивости.

Покажем, например, что при изменении напряжения u по закону

$$u = u_0 \sin pt \tag{6}$$

при соответствующем подборе параметра a можно получить изменение v по закону

$$v = v_0 \sin pt, \tag{7'}$$

т. е. без отставания по фазе от напряжения u.

Подставляя (6) и (7') в уравнение (37), получим

$$(\sigma + \tau - a) p v_0 \cos pt + (1 - p^2\sigma\tau) v_0 \sin pt = \mu\sigma p u \cos pt + \mu u_0 \sin pt$$

и, следовательно, должно быть

$$(\sigma + \tau - a) p v_0 = \mu\sigma p u_0,$$

$$(1 - p^2\sigma\tau) v_0 = \mu u_0.$$

Деля последние равенства друг на друга, получим

$$\sigma + \tau - a = (1 - p^2\sigma\tau)\sigma,$$

откуда

$$a = \tau(1 - p^2\sigma^2), \tag{42}$$

причем

$$\sigma + \tau - a > 0,$$

если только

$$p^2\sigma\tau < 1. \tag{43}$$

Таким образом, усилитель устойчив, если частота p достаточно мала.

Если усилитель имеет сравнительно большую постоянную времени τ, то для достижения устойчивости следящей системы в целом, т. е. для удовлетворения условия Раусса-Гурвитца (29), приходится брать параметр a весьма близким по своему значению к величине τ.

Так как значение σ бывает обычно небольшим, то малое изменение параметра a может повлечь за собой невыполнение условия (40) устойчивости работы усилителя. Таким образом, границы изменения параметра a оказываются довольно узкими.

Если параметр a меньше, чем нужно, то в системе возникают автоколебания с частотой ν, приблизительно равной

$$\nu = \sqrt{\frac{k\mu f}{rJ}}. \tag{44}$$

Действительно, при обращении неравенства Раусса-Гурвитца в равенство в следящей системе возможны незатухающие колебания, следовательно, уравнение (28) должно удовлетворяться, если в нем положить

$$\theta = \theta^*_p \sin pt.$$

При этом получим

$$(cf - \tau r J \nu^2)\nu \cos \nu t + [k\mu f - \nu^2(rJ + \tau c f)] \sin \nu t = 0,$$

вследствие чего должно быть

$$k\mu f = \nu^2(rJ + \tau c f), \tag{45}$$

$$cf = \nu^2\tau r J. \tag{46}$$

Равенство Раусса-Гурвитца получается из последних соотношений посредством исключения из них частоты ν. Если же посредством второго соотношения исключить из первого постоянную времени τ, то получим

$$k\mu f = \nu^2 rJ + \frac{c^2 f^2}{rJ}. \tag{47}$$

На практике второе слагаемое правой части этого равенства значительно меньше левой его части (см. приведенный выше числовой пример). Опуская это слагаемое, приходим к формуле (44).

Если, напротив, параметр a больше, чем нужно, то в системе возникают автоколебания с частотой q, приблизительно выражающейся формулой (39), причем $q > \nu$.

Автоколебания с частотой ν имеют сравнительно большую амплитуду, а автоколебания с частотой q на роторе мотора почти незаметны. Поэтому первый тип колебаний можно назвать механическим, а второй — электрическим. Оба типа легко обнаруживаются экспериментально при регулировании следящих систем. Значения частот этих колебаний на границе их срыва могут служить для определения отдельных параметров системы, а также для проверки правильности сделанных выше упрощающих предположений.

О НЕРАБОЧЕЙ ЗОНЕ ЗЕНИТНЫХ ОРУДИЙНЫХ СИСТЕМ

Инж. К. И. Куракин

Цель настоящей работы — выявить границы нерабочей зоны зенитных орудийных систем в связи с различными типами их привода. Зависимость между мощностью привода и ускорением приводит к новому понятию нерабочей зоны по угловому ускорению. В данной статье рассматривается случай горизонтального полета цели с постоянной по величине и направлению скоростью. Особенно подробно разбирается задача определения границ нерабочей зоны для угла горизонтальной наводки.

1. Характеристика движения орудийной системы

В общем случае характер движения орудийной системы может быть выражен следующим диференциальным уравнением

$$J_\beta \dot{\omega}_\beta - M_н + M_с = 0, \tag{1}$$

где $M_с$ — момент сопротивлений, независимых от скорости наводки, в *кгм*;

J_β — осевой момент инерции системы относительно оси наводки в *кгм · сек*^{2};

ω_β — угловая скорость относительно оси наводки в $сек^{-1}$;

$M_н$ — вращающий момент привода как функция угловой скорости в *кгм*.

При ручном приводе $M_н = M_р$, при автоматическом $M_н = M_м$ и при полуавтоматическом $M_н = M_р + M_м$; здесь $M_р$ — вращающий момент наводчика, а $M_м$ — вращающий момент мотора. Моментом сопротивления, пропорциональным скорости вращения (сопротивление воздуха и т. д.), пренебрегаем вследствие незначительности его влияния.

Решающими факторами при оценке целесообразности того или иного привода являются его максимальная мощность $N_{н\,max}$ и характеристика $N_н = f(\omega_{\beta 1})$, где $\omega_{\beta 1}$ — угловая скорость мотора или оси, к которой приложен вращающий момент наводчика.

Максимальная мощность ручного привода орудийных систем в зависимости от конструкции и диаметра маховика лежит в пределах $5 \div 15$ *кгм/сек*. Экспериментальные характеристики $N_р = f_1(\omega_{\beta 1})$ ручного привода, полученные путем тормозного испытания, весьма близ-