

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Академик М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ и А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ДИНАМИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ
УПРУГИХ СИСТЕМ

Критические значения нагрузки на упругую систему, при которых, наряду с ее основной формой равновесия, возможны близкие искривленные, образуют, как известно, некоторую возрастающую последовательность (спектр собственных значений). По мере увеличения нагрузки (силы, составляющие нагрузку, изменяются пропорционально друг к другу), увеличивается также и число возможных искривленных форм, соответствующих каждому критическому значению.

На примере сжатия стержня продольными силами показано⁽¹⁾, что устойчива лишь та искривленная форма равновесия, которая получается при превышении первой (наименьшей) критической силы.

Последнее обстоятельство дает, на первый взгляд, некоторое основание предполагать, что фактическое изменение формы системы при внезапном приложении нагрузок, превышающих критические, будет иметь один и тот же характер, независимо от величины этих нагрузок. Оказывается, что подобное предположение неверно.

При внезапном приложении к упругой системе нагрузки, превышающей первое критическое значение, возникает движение, в результате которого система уже не возвращается к исходному ее состоянию.

Начальная фаза этого движения, в течение которой перемещения элементов системы еще малы, может быть рассматриваема как совокупность так называемых нормальных движений. Под нормальным движением понимается такое, при котором перемещения всех элементов системы пропорциональны одной и той же функции времени.

Если эта функция гармоническая, то движение является нормальным колебанием. Неограниченно возрастающим функциям времени будет соответствовать потеря устойчивости системы. В состав каждой из таких функций входит сумма двух экспонент с показателями разных знаков, но одного модуля. При соблюдении особого условия — точного равенства внезапно приложенной нагрузки ее критическому значению — одна из упомянутых функций времени будет многочленом второй степени.

Конфигурации перемещений или, что то же, формы нормальных движений в некоторых случаях могут совпадать с соответствующими формами потери устойчивости в статической задаче, но в общем случае от них несколько отличаются.

Число форм динамической потери устойчивости также тем больше, чем больше величина внезапно приложенной нагрузки, причем новые формы появляются после превышения нагрузкой очередного критического значения статической задачи.

Наиболее быстро меняются те формы, которым соответствует наибольший коэффициент в показателе экспонент функции времени, относящейся к соответствующему движению. Начальные возмущения, соответствующие различным формам нормальных движений, предполагаются при этом имеющими один порядок малости.

Роль начальных отклонений могут также играть возможные неточности геометрической формы упругой системы, неоднородность материала, результат эксцентричности приложения нагрузки и т. д.

Замечательно, что наименьшая и наивысшая возможные для данной нагрузки формы нормальных движений потери устойчивости не являются наиболее энергично возрастающими. К последним относятся некоторые промежуточные формы. Номер их примерно равен $2/\eta$ номера наивысшей возможной формы динамической потери устойчивости для данной величины внезапно приложенной постоянной нагрузки. Для нагрузок аperiodического характера, изменяющихся с течением времени, анализ более сложен, но качественная картина явления должна остаться той же.

Пример 1. Рассмотрим внезапное сжатие продольными силами P стержня с шарнирно закрепленными концами (один из шарниров имеет свободу перемещения вдоль оси стержня). Дифференциальное уравнение малых движений при обычных в сопротивлении материалов обозначениях имеет вид:

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x),$$

где $f(x)$ — функция, определяемая начальным искривлением, поперечной нагрузкой и т. п.

Имея в виду граничные условия обращения в нуль перемещений и их вторых производных (изгибающих моментов) на концах стержня, положим

$$v = \sum_{m=1}^{m=\infty} q_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Для функции времени $q_m(t)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\rho F \frac{d^2 q_m}{dt^2} + \frac{\pi^4 EI}{l^4} m^2 (m^2 - \eta^2) q_m = f_m.$$

Здесь

$$\eta^2 = \frac{P}{P_e}, \quad P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad f_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx.$$

В этой задаче целая часть числа η определяет номер наивысшей возможной статической формы потери устойчивости. Номерам $m > \eta$ соответствуют колебания, номерам $m < \eta$ — потеря устойчивости с коэффициентом в экспоненте:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{\rho F l^4} m^2 (\eta^2 - m^2)}.$$

Наибольшего значения этот коэффициент достигает при $m = m^*$, равном одному из целых чисел, ближайших к количеству $\frac{1}{\sqrt{2}} \eta$.

Номера наиболее быстро возрастающих форм потери устойчивости для некоторых частных значений P/P_e приведены в табл. 1.

η
 P/P_e
 m^*

Част
Соответ
пени, с

При
равном
нем в

$\rho h a \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Де
полага
ние д

полу

Кл
деля

Н.

η	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P/P_1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
m^*	1	2	3	3 и 4	4	5	6	6	7	8	8	9	10	11

Частный случай $m = \eta$ также соответствует потере устойчивости. Соответствующая функция времени $q_m(t)$ есть полином второй степени, старший член которого $\frac{1}{2} \frac{f_m}{\rho F} t^2$.

Пример 2. Малые осесимметрические движения трубы, сжатой равномерной нагрузкой p , определяются дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\rho h a \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - v \right) + \frac{D}{a^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^1 v}{\partial \theta^1} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + p \left(\frac{\partial^1 v}{\partial \theta^1} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = f(\theta).$$

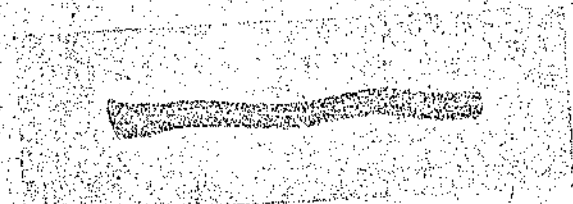


Рис. 1



Рис. 2

Деформация растяжения — сжатия срединной поверхности предполагается при этом отсутствующей. Аналогичный вид имеет уравнение движения сжатого кольца. Полагая

$$v = \sum q_m(t) \sin m\theta,$$

получим для функций $q_m(t)$ уравнение

$$\frac{d^2 q_m}{dt^2} + \frac{D}{\rho h a^3} \frac{m^2(m^2 - 1)(m^2 - \eta^2)}{m^2 + 1} q_m = \frac{f_m}{\rho h a(m^2 + 1)}, \quad \eta^2 = \frac{\rho a^3}{D} + 1.$$

Критические нагрузки соответствующей статической задачи определяются формулой:

$$P_{кр} = \frac{D}{a^3} (k^2 - 1), \quad k = 2, 3, \dots$$

Наименьшая из них есть $P_e = \frac{3D}{a^3}$.

Таким образом, коэффициент, характеризующий быстроту потери устойчивости по динамической форме с номером m , определяется выражением

$$\alpha = \sqrt{\frac{D}{\rho h \alpha^2} \frac{m^2(m^2-1)}{m^2+1} \left(3 \frac{p}{p_0} + 1\right) - m^2}$$

Пусть динамические нагрузки равны последовательным критическим нагрузкам статической задачи (т. е. $\eta = k$), тогда наибольшие значения коэффициента α будут при номере $m = m^*$, определяемом из табл. 2.

Таблица 2

$\eta=k$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p/p_1	2,67	5	8	11,67	16	21	26,27	33	40	47,7	56	65	24,7
m^*	2	3	4	4	5	6	4	7	8	9	9	10	11

Образование высших форм потери устойчивости стержня в трубе при действии внезапно приложенных сил было обнаружено экспериментально. Стержень сжимался посредством взрыва толуоловой шашки, отделенной от концевой сечения стержня стальной прокладкой (рис. 1). Труба обжималась давлением воды при подводном взрыве. Части трубы, расположенные ближе к месту взрыва, имели соответственно более высокие формы потери устойчивости (рис. 2).

Поступило
24 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- А. Ляв, Математическая теория упругости, М.—Л., 1935, стр. 429.

ДВУХМ
СЛО:

Пре
того сл
действи
вой сис
упруги
в прос
метода
позволя
предста
I. E
торых
в виде

то вань
че преу
ными у
Нет
быть п

функц.

где $\sigma >$
3 дан.