

ПРОХОДИМОСТЬ ГРУНТОВЫХ ДОРОГ И ЦЕЛИНЫ АВТОТРАНСПОРТОМ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ и А. С. КОНДРАТЬЕВА

О КАЧЕНИИ ЖЕСТКИХ И ПНЕВМАТИЧЕСКИХ КОЛЕС ПО ДЕФОРМИРУЕМОМУ ГРУНТУ

Введение

В статье делается попытка разработать теорию образования колес при качении жестких и пневматических колес по деформируемому грунту, а также объяснить процесс укатывания дороги в процессе скорости движения на перекатывание. Попутно определяется величина момента трения качения при разных условиях качения.

Математическое описание упомянутых вопросов возможно лишь в случае принятия далеко идущих упрощающих предположений. Эти предположения касаются, с одной стороны, законов, управляющих деформацией грунта, и, с другой стороны, геометрии колеса и законов деформирования пневматика. Предполагается, что распределение давления в любом нормальном к оси колеса сечении поверхности соприкосновения обода с грунтом одинаково. Таким образом задача о перекатывании приобретает плоский характер. Обод колеса в процессе деформации остается цилиндрическим (в случае пневматика уже не круглым). В принципе возможна и более общая постановка исследования, при которой поверхность соприкосновения, равно как и самый обод колеса, предполагаются нецилиндрическими. Однако в настоящей работе это уточнение не рассматривается, хотя его несомненная важность и очевидна.

Данная работа является продолжением исследований, проводившихся ранее одним из авторов этой статьи в области решения задач о перекатывании колеса с жестким ободом по деформируемому грунту [1,2]. Поскольку авторы не располагали экспериментальными данными, относящимися к рассматриваемым вопросам, они могли основываться лишь на качественных соображениях о деформации грунта и пневматиков. Поэтому настоящая статья имеет теоретический характер: она может послужить основанием для построения программы соответствующих экспериментальных работ.

§ 1. О механических свойствах грунта

Закон деформирования грунта

Вопрос о колееобразовании тесно связан с механическими свойствами грунта. Несмотря на то, что механике грунтов посвящено большое число исследований, мы не имеем до настоящего времени достаточно простых и удовлетворительных законов, управляющих

деформацией грунта при действии на него поверхностных сил.

Так, например: закон Герстнера

$$p = cx, \quad (1)$$

закон Праудтля

$$p = K = \text{const} \quad (2)$$

(здесь p — удельное давление на грунт; x — осадки грунта и c — коэффициент пропорциональности), хотя и являются весьма простыми, но не описывают деформации грунта во времени.

Известно, что если штамп давит с некоторой силой на грунт, то деформация грунта изменяется с течением времени. При этом погружение штампа в грунт происходит тем более интенсивно, чем больше давление на грунт. Если давление постоянно и не слишком велико, то осадка грунта под штампом с течением времени стремится обычно к некоторому пределу. Мы примем в дальнейшем, что предельные значения осадок пропорциональны соответствующей силе давления, т. е., что закон Герстнера справедлив для предельных осадок, если только они не превышают некоторого критического значения δ . Примем при этом, что давление p и осадка x связаны между собой дифференциальной зависимостью:

$$p = cx + \mu x \frac{dx}{dt}, \quad (3)$$

где c — постоянная Герстнера;

μ — коэффициент, характеризующий вязкость грунта.

Мы будем считать, что указанная дифференциальная зависимость справедлива, пока в процессе изменения p и x скорость изменения осадки $\frac{dx}{dt}$ остается положительной, а сама осадка меньше некоторой характерной для грунта постоянной δ .

Если $x < \delta$, но p становится в процессе изменения меньше произведения cx , то деформация грунта прекращается и зависимость (3) заменяется условием постоянства осадки:

$$x = x_1 \quad (p < cx, \quad x < \delta), \quad (4)$$

где x_1 — осадка, соответствующая моменту перемены знака разности $p - cx$, т. е. моменту обращения $\frac{dx}{dt}$ в нуль (максимальная осадка).

После повторного изменения знака разности $p - cx$ (т. е. при $p > cx$) вновь оказывается справедливой дифференциальная зависимость (3) с начальным значением $x = x_1$.

Если $x > \delta$, т. е. при достаточно больших деформациях грунта, зависимость (3) заменяется следующей:

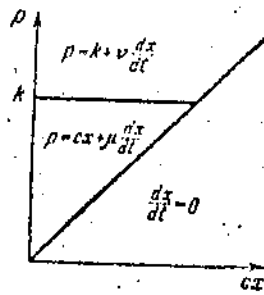
$$p = K + \nu \frac{dx}{dt}, \quad K = c\delta, \quad \nu = \mu\delta. \quad (5)$$

Здесь предполагается, что $p > K$. Если в процессе изменения давление p становится меньше K , то деформирование грунта прекращается и таким образом

$$x = \text{const} \quad \text{при} \quad p < K, \quad x > \delta. \quad (6)$$

Можно построить наглядную механическую модель, деформация которой следует указанным выше закономерностям.

На фиг. 1 представлено распределение областей значений p и x , соответствующих закономерностям (3), (4—6).



Фиг. 1. Области значений p и x , соответствующие закономерностям (3, 4, 5 и 6)

Рассмотрим теперь в качестве примера деформацию грунта под действием постоянной нагрузки $p = p_0$. Если $p_0 < K$, то, обращаясь к дифференциальному соотношению (3), получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_0 - cx}{\mu x}, \quad (7)$$

откуда после разделения переменных и интегрирования

$$\frac{ct}{\mu} = \frac{p_0}{c} \ln \frac{p_0}{p_0 - cx} - x. \quad (8)$$

Постоянная интегрирования определена из условия, что $x = 0$, при $t = 0$.

При $t \rightarrow \infty$ нетрудно получить из соотношения (8)

$$p_0 = cx.$$

Таким образом, для предельных нагрузок оказывается справедливым закон Герстнера.

При весьма малых значениях t и, следовательно, малых x , т. е. в начале процесса, имеем:

$$\frac{ct}{\mu} = -\frac{p_0}{c} \ln \left(1 - \frac{cx}{p_0} \right) - x \approx -\frac{p_0}{c} \left(-\frac{cx}{p_0} + \frac{c^2 x^2}{p_0^2} \right) - x = \frac{cx^2}{2p_0}. \quad (9)$$

Откуда

$$x \approx \sqrt{\frac{2p_0 t}{\mu}}. \quad (10)$$

Характерно, что выражение для осадки грунта x не зависит в этом случае от коэффициента c . Это обстоятельство можно объяснить, если непосредственно обратиться к соотношению (3); очевидно, что при малых x должна быть велика скорость изменения осадки $\frac{dx}{dt}$ [см. также (7)] и, следовательно, второй член соотношения (3) должен быть больше первого. Таким образом, при малых x

$$p \approx \mu x \frac{dx}{dt}, \quad (11)$$

что и дает после интегрирования формулу (10).

Если ввести безразмерные переменные

$$t' = \frac{c^2}{\mu p_0} t \quad \text{и} \quad x' = \frac{cx}{p_0}, \quad (12)$$

то соотношение (8) примет вид:

$$t' = -\ln(1 - x') - x'. \quad (13)$$

График зависимости x' от t' изображен на фиг. 2. При $t' \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \frac{p_0}{c}$.

Если окажется, что $\frac{p_0}{c} > \delta$, то выражения, полученные ранее, будут справедливы только до момента времени:

$$t^* = \frac{\mu p_0}{c^2} \ln \frac{p_0}{p_0 - c\delta} - \frac{\mu}{c} \delta. \quad (14)$$

Тогда

Тогда

когда

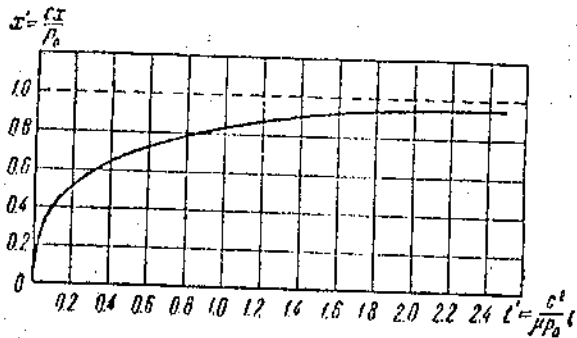
затем

где t^* —

кривая

Так как при $x > \delta$ дифференциальное соотношение (3) должно быть заменено соотношением (5), из которого при $\rho = \rho_0 = \text{const}$, следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\rho_0 - K}{v} = \text{const} \quad (v = v_0, K = c\delta), \quad (15)$$

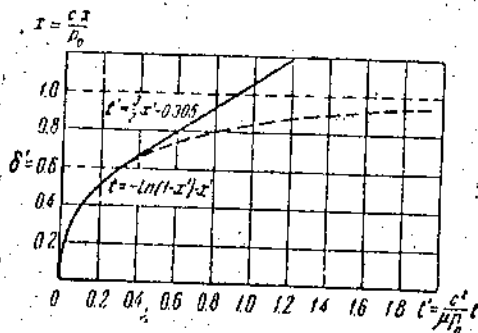


Фиг. 2. Кривые зависимости, выражаемой ур. (13)

$$t' = -\ln(1-x) - x'$$

т. е. после достижения осадкой x характерного значения δ , дальнейшее погружение штампа будет происходить равномерно. Таким образом, при $x < \delta$ и, соответственно, $x' \leq \frac{c\delta}{\rho_0}$ можно пользоваться для определения закона изменения осадки во времени графиком фиг. 2, а в дальнейшем заменить его прямой, касающейся графика в точке с абсциссой

$$t' = \frac{c^2}{v\rho_0} t^*$$



Фиг. 3. Замена кривой, выражаемой ур. (13) для значений

$$x' = \frac{cx}{\rho_0} > \delta, \text{ прямой линией}$$

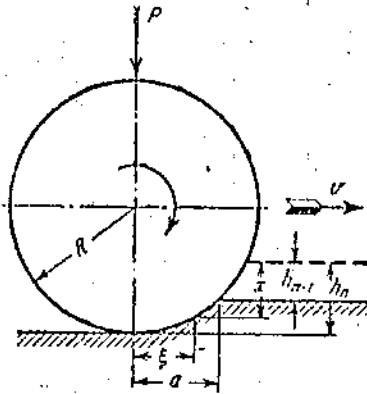
где t^* определяется по формуле (15). На фиг. 3 изображена подобная кривая для случая, когда уравнение упомянутой прямой имеет вид

$$t' = \frac{3}{2} x' - 0.306.$$

§ 2. Теория колесобразования

Случай колеса с жестким ободом

В этом разделе мы рассмотрим вопрос об образовании и развитии колес при движении по грунту колеса с жестким ободом. При этом будем предполагать, что обод колеса представляет собой цилиндрическую поверхность и при повторных проходах колесо движется по той же самой колее. Будем считать, что деформирование грунта происходит по законам, изложенным в § 1.



Фиг. 4. Схема образования колес при качении колеса с жестким ободом

Итак, рассмотрим колесо радиуса R , нагруженное силой P . Пусть ось колеса перемещается со скоростью v слева направо (фиг. 4). Обозначим через h_n глубину колеи после n -го прохода. Так как грунт предполагается лишенным свойств упругости, то при движении колеса по грунту соприкосновение последнего с колесом прекращается в наименее точке колеса.

Длина проекции на горизонтальную плоскость области соприкосновения колеса с грунтом определяется с достаточной точностью по формуле

$$a = \sqrt{2R(h_n - h_{n-1})}. \quad (16)$$

Обозначим через ξ расстояние от какой-либо точки поверхности соприкосновения колеса с грунтом до вертикальной плоскости, проходящей через ось колеса. Тогда (фиг. 4) осадка грунта, соответствующая этой точке, может быть представлена в виде

$$x = h_n - \frac{\xi^2}{2R}. \quad (17)$$

Чтобы найти скорость изменения осадки грунта $\frac{dx}{dt}$, следует продифференцировать выражение (17) и учесть, что расстояние ξ уменьшается со скоростью движения колеса.

Таким образом:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2\xi}{2R} \cdot \frac{d\xi}{dt} = \frac{\xi}{R} v. \quad (18)$$

Так же, как ранее, будем различать два случая: $x < \delta$ и $x > \delta$. В первом случае, согласно соотношению (3), § 1 получим

$$p = cx + \mu x \frac{dx}{dt} = c \left(h_n - \frac{\xi^2}{2R} \right) + \mu \left(h_n - \frac{\xi^2}{2R} \right) \frac{\xi}{R} v. \quad (19)$$

Далее имеем

$$P = \int_0^a p b d\xi, \quad (20)$$

где b — ширина обода колеса.

Подставляя сюда выражение для p из (19) и производя интегрирование, получим

$$\frac{1}{b} P = ch_n a - c \frac{a^3}{5R} + \mu h_n. \quad (21)$$

Из формулы (16) следует, что

$$h_n = h_{n-1} + \frac{a^2}{2R}. \quad (22)$$

Используя это соотношение, можно преобразовать формулу (21) в виде

$$\frac{1}{b} P = ch_{n-1} a + \frac{1}{3} c \frac{a^3}{R} + \mu \left(h_{n-1} \frac{a^2}{2R} + \frac{a^4}{8R^2} \right). \quad (23)$$

Последнее равенство может служить уравнением для определения величины a при заданных величинах c, μ, v, R , а также при заданной глубине колёс h_{n-1} перед очередным проходом колеса. После определения величины a можно по формуле (22) найти глубину колёс после прохода колеса.

Принимая $h_0 = 0$, можно последовательными решениями уравнения (23) проследить рост глубины колёс в зависимости от числа проходов, а именно:

$$h_1 = \frac{a_1^2}{2R}, \quad h_2 = h_1 + \frac{a_2^2}{2R}, \quad h_3 = h_2 + \frac{a_3^2}{2R}, \quad (24)$$

где a_1, a_2, a_3 и т. д. — соответствующие длины проекций на горизонтальную плоскость поверхности контакта колеса с грунтом.

Рассмотрим частный случай $\mu = 0$. Тогда уравнение (23) примет вид:

$$\frac{1}{b} P = ch_{n-1} a + \frac{1}{3} c \frac{a^3}{2R}. \quad (25)$$

Подставляя сюда величину a из формулы (16) и вводя обозначения

$$\Delta h_n = h_n - h_{n-1}, \quad (26)$$

получим

$$\frac{1}{b} P = c \sqrt{2R \Delta h_n} \left(h_{n-1} + \frac{2}{3} \Delta h_n \right). \quad (27)$$

Введем безразмерные переменные u_n и δ_n ; полагая

$$\Delta h_n = \gamma u_n, \quad (28)$$

$$h_{n-1} = \gamma \delta_{n-1}, \quad (29)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{P^2}{2b^2 c^2 R}}; \quad \delta_n = \delta_{n-1} + u_n. \quad (30)$$

При новых переменных уравнение (27) примет вид

$$\sqrt{u_n} \left(\delta_{n-1} + \frac{2}{3} u_n \right) = 1. \quad (31)$$

Полагая $n = 1$ и замечая, что $\delta_0 = 0$, имеем

$$\frac{2}{3} u_1^{\frac{3}{2}} = 1, \quad (32)$$

откуда

$$u_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.31. \quad (33)$$

Следовательно,

$$h_1 = \Delta h_1 = \gamma u_1 = \sqrt{\frac{9l^2}{8b^2 c^2 R}}. \quad (34)$$

Для определения u_2 получаем уравнение

$$\sqrt{u_2} \left(1.31 + \frac{2}{3} u_2\right) = 1, \quad (35)$$

ибо $\delta_1 = u_1 = 1.31$. Корень этого уравнения $u_2 = 0.40$.Далее для определения u_3 имеем уравнение

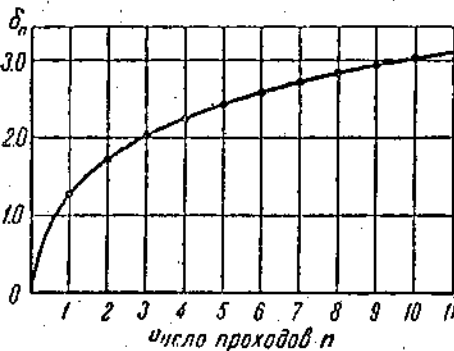
$$\sqrt{u_3} \left(1.71 + \frac{2}{3} u_3\right) = 1, \quad (36)$$

так как

$$\delta_2 = u_1 + u_2 = 1.31 + 0.40 = 1.71.$$

Корень этого уравнения $u_3 = 0.28$.

На фиг. 5 приведен график изменения δ_n в зависимости от числа прохода колеса. Согласно формуле (29), глубина колеи h_n пропорциональна переменной δ_n .

Фиг. 5. Зависимость δ_n от числа проходов колес

Чтобы судить о характере изменения глубины колеи в результате большого числа проходов колеса, заметим, что с возрастанием числа проходов n величины δ_{n-1} возрастают, а u_n убывают. Поэтому, согласно (31), приближенно имеем:

$$\delta_{n-1} \sqrt{u_n} = 1, \quad (37)$$

откуда

$$u_n = \Delta \delta_n = \frac{1}{\delta_{n-1}^2}. \quad (38)$$

Выражение (38) может быть записано в виде уравнения в конечных разностях

$$\frac{\Delta \delta_n}{\Delta n} = \frac{1}{\delta_{n-1}^2}, \quad (39)$$

где $\Delta n = 1$.

Этому уравнению можно поставить в соответствие дифференциальное уравнение

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{1}{\delta^2}. \quad (40)$$

Разд.

где δ —
значение
значения
ИмеетЭта
но не
состав
(4.5),
красн
с анал
с оказ
том же
ния ну
диаграмЗаме
дси, со
исогр
мере ук
дств. Та
ся, раз
у грунт
не возр
 $a = 0$),
Дорога,
(см. § 3
Нер
и учиты

Под

Пос
коснов
измен
лучше
ного пр
чина а
ни кол
В э

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\frac{r^3}{3} = n + c, \quad (41)$$

где c — постоянная интегрирования, которую можно определить, задаваясь каким-либо достаточно большим значением n и соответствующим значением δ_n , определяемым из уравнения (31).

Из соотношения (41) получим

$$\delta = \sqrt[3]{3(n + c)}. \quad (42)$$

Эта формула позволяет судить о характере изменения глубины колеи при большом числе проходов. На фиг. 6 изображена кривая, соответствующая зависимости

(42), причем при построении кривой взята начальная точка с абсциссой $n = 5$. При этом c оказалось равным 0.4. На том же графике для сравнения пунктиром воспроизведена диаграмма фиг. 5.

Заметим, что глубина колеи, согласно формуле (42), неограниченно возрастает по мере увеличения числа проходов. Такой результат является,

разумеется, следствием допущения отсутствия свойств упругости как у грунта, так и у самого колеса. Действительно, согласно (16), колея не возрастает лишь при контакте колеса с грунтом по линии (т. е. при $\alpha = 0$), что соответствует бесконечно большим удельным давлениям. Дорога, таким образом, не укатывается, как в случае пневматика (см. § 3).

Перейдем теперь ко второму случаю: $x > \delta$. Согласно уравнению (5) и учитывая уравнение (18), имеем для этого случая

$$p = K + \mu \delta \frac{dx}{dt} = K + \mu \delta. \quad (43)$$

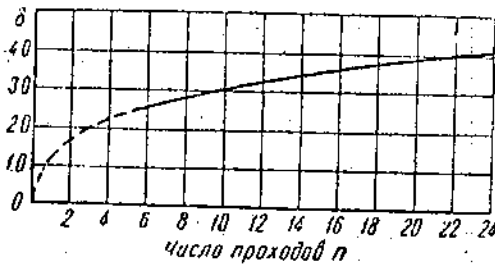
Подставляя это выражение в (20), получим

$$\frac{1}{b} P = \int_0^a p d\xi = Ka + \mu \delta v \frac{a^2}{2R}. \quad (44)$$

Последнее соотношение определяет a , т. е. длину поверхности соприкосновения колеса с грунтом. Далее, по формуле (22) можно найти изменение глубины колеи после прохода колеса. В отличие от предыдущего случая, это изменение не зависит от глубины колеи до очередного прохода колеса. Из (44) следует, что наибольшее значение величины a принимает при $v = 0$ или практически при весьма малом движении колеса.

В этом случае

$$a = \frac{P}{bK} \quad (45)$$



Фиг. 6. График зависимости, выражаемой ур. (6)

и, следовательно,

$$\Delta h = \frac{a^2}{2R} = \frac{P^2}{2b^2 K^2 R}, \quad (46)$$

в согласии с теорией колесобразования Н. П. Иванова [3].

При больших скоростях движения колеса в формуле (44) можно опустить первый член и соответственно получить приближенно

$$\frac{1}{b} P = \mu \delta v \frac{a^2}{2R} = \mu \delta v \Delta h, \quad (47)$$

откуда имеем

$$\Delta h = \frac{P}{b \mu \delta v}. \quad (48)$$

Таким образом, изменение глубины колес уменьшается с увеличением скорости, чем можно объяснить лучшую проходимость грунта при повышенных скоростях движения.

В общем случае уравнение (44) может быть приведено к виду

$$\frac{1}{b} P = K \sqrt{2R \Delta h} + \mu \delta v \Delta h. \quad (49)$$

Если ввести безразмерные переменные $\Delta \eta$ и u , связанные с величинами v и Δh соотношениями

$$\Delta h = \frac{P^2}{2b^2 K^2 R} \Delta \eta, \quad (50)$$

$$v = \frac{2bK^2 R}{\mu \delta P} u, \quad (51)$$

то уравнение (49) примет в новых переменных вид

$$\sqrt{\Delta \eta} + u \Delta \eta = 1, \quad (52)$$

откуда

$$\Delta \eta = \frac{1 + 2u - \sqrt{1 + 4u}}{2u^2}. \quad (53)$$

При $u = 0$ имеем

$$\Delta \eta = 1 \quad (54)$$

следовательно:

$$\Delta h = \frac{P^2}{2bKR},$$

в соответствии с формулой (46).

Если значение u велико, то из (52) имеем приближенно

$$\Delta \eta = \frac{1}{u}. \quad (55)$$

Заменяя в (55) $\Delta \eta$ и u их выражениями через Δh и v , без труда приходим к формуле (48).

Заметим, что если глубина колес до прохода колеса была меньше характерной константы δ , а после прохода оказалась больше δ , то поверхность соприкосновения колеса следует разделить на две области.

В первой области, до прохода колеса, справедливо уравнение (46). Для второй области справедливо уравнение (48).

Расстояние от начала координат до центра колеса из уравнения (48) равно

Соотношение (48) можно переписать в виде

причем в первом члене следует использовать формулу (48). Имеем:

$$\frac{1}{b} P = K \sqrt{2R \Delta h} + \mu \delta v \Delta h$$

Произведем

$$\frac{1}{b} P = K \sqrt{2R \Delta h} + \mu \delta v \Delta h$$

содержащееся в формуле (53) совместимое уравнение для

В частности, для малых значений u

где

Далее, для решения задачи вхо-

Изложим решение сопряженного уравнения (48) в виде

В первой области $a > l > \xi$ (фиг. 7), осадка точек грунта $x < \delta$ и, следовательно, для подсчета давления p надлежит применять формулу (19). Для второй области $l > \xi > 0$, напротив $x > \delta$ и следует пользоваться формулой (43).

Расстояние l границы, разделяющей эти области от вертикальной плоскости, проходящей через ось колеса, может быть определено из уравнения

$$\delta = h_n - \frac{P}{2R} \quad (56)$$

Соотношение (20) представится теперь в виде

$$\frac{1}{b} P = \int_0^l p d\xi + \int_l^a p d\xi, \quad (57)$$

причем выражение для p в первом интеграле следует брать согласно формуле (43), а для второго интеграла — согласно (19). Имеем:

$$\frac{1}{b} P = \int_0^l \left(K + \mu \delta v \frac{\xi}{R} \right) d\xi + \int_l^a \left[c \left(h_n - \frac{\xi^2}{2R} \right) + \mu v \left(h_n - \frac{\xi^2}{2R} \right) \frac{\xi}{R} \right] d\xi. \quad (58)$$

Проведя интегрирование, получим уравнение

$$\frac{1}{b} P = Kl + \mu \delta v \frac{h_n^2}{2R} + c \left(h_n a - \frac{a^3}{6R} \right) + \mu v \left(\frac{h_n}{2} - \frac{a^2}{8R} \right) \frac{a^2}{R} - c \left(h_n l - \frac{l^3}{6R} \right) + \mu v \left(\frac{h_n}{2} - \frac{l^2}{8R} \right) \frac{l^2}{R}, \quad (59)$$

содержащее три неизвестных: a, l, h_n .

Совместно с уравнениями (56) и (22) получаем систему трех уравнений для определения этих неизвестных по данным:

$$h_{n-1}, R, b, P, K, \mu, \delta, v.$$

В частном случае $h_{n-1} = 0, v = 0$ (т. е. скорость движения колеса весьма мала) имеем:

$$\frac{1}{b} P = Kl + \left(h_1 a - \frac{a^3}{6R} \right) - c \left(h_1 l - \frac{l^3}{6R} \right), \quad (60)$$

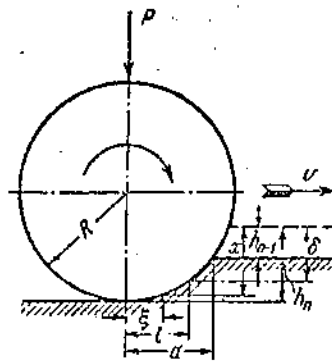
где

$$l = \sqrt{2R(h_1 - \delta)} \quad \text{и} \quad a = \sqrt{2Rh_1}. \quad (61)$$

Дальнейшее исследование этого уравнения требует уже численного задания входящих в него величин p, b, R, c, δ и K .

Изложенные выше рассуждения могут быть применены для определения сопротивления качения колеса по грунту. Величина этого сопротивления характеризуется моментом M , который определяется по формуле:

$$M = b \int_0^a \xi p d\xi. \quad (62)$$



Фиг. 7. Области на поверхности соприкосновения колеса с грунтом, в пределах которых следует принимать разные зависимости сопротивления грунта от глубины погружения

Если $x < \delta$, то получим

$$\frac{1}{b} M = \int_0^a \xi \left[c \left(h_n - \frac{\xi^2}{2R} \right) + \mu v \frac{\xi}{R} \left(h_n - \frac{\xi}{2R} \right) \right] d\xi. \quad (63)$$

После интегрирования и использования формулы (22) получим

$$\frac{1}{b} M = c \left(h_{n-1} \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{8R} \right) + \mu v \frac{a^3}{R} \left(\frac{h_{n-1}}{3} + \frac{a^2}{15R} \right). \quad (64)$$

Величина a , входящая в состав этой формулы, определяется из уравнения (23):

$$\frac{1}{b} P = c h_{n-1} a + \frac{1}{3} c \frac{a^3}{R} + \mu v \left(h_{n-1} \frac{a^2}{2R} + \frac{a^2}{8R^2} \right). \quad (65)$$

Нетрудно видеть, что при h_{n-1} и $\mu = 0$ получим из второго уравнения

$$a = \sqrt[3]{\frac{3PR}{cb}}, \quad (66)$$

после чего, подставляя его в (64), имеем

$$M = \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{81}{cb} P^4 R}, \quad (67)$$

а так как сила трения выражается формулой $F = \frac{M}{R}$, то

$$F = \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{81}{cb} \frac{P^4}{R^3}}. \quad (68)$$

Эта формула совпадает с формулой Гранвуане. При очень больших скоростях движения получим, считая, что $h_{n-1} = 0$:

$$\frac{1}{b} M = \mu v \frac{a^3}{15R^2}; \quad (69)$$

$$\frac{1}{b} P = \mu v \frac{a^4}{8R^2}. \quad (70)$$

Исключая отсюда величину a , придем к формуле

$$M = \frac{8}{15} \sqrt[4]{\frac{8}{b\mu v} P^{\frac{5}{4}} R^{\frac{1}{2}}}; \quad (71)$$

следовательно,

$$F = \frac{M}{R} = \frac{8}{15} \sqrt[4]{\frac{8}{b\mu v} \frac{P^{\frac{5}{4}}}{R^{\frac{1}{2}}}}. \quad (72)$$

С увеличением скорости сопротивление качению уменьшается. В случае $x > \delta$, соответственно, будет иметь место:

$$M = b \int_{\delta}^a \xi \left(K + \mu v \frac{\xi}{R} \right) d\xi, \quad (73)$$

или, после интегрирования:

$$(63) \quad \frac{1}{b} M = K \frac{a^2}{2} + \mu \delta v \frac{a^3}{3R}. \quad (74)$$

Величина a должна быть при этом найдена из соотношения (44)

$$(64) \quad \frac{1}{b} P = K a + \mu \delta v \frac{a^2}{2R}. \quad (75)$$

При $\mu = 0$, аналогично предыдущему, получим

$$(65) \quad M = \frac{P^2}{2Kb} \quad \text{и} \quad F = \frac{P^2}{2KbR}. \quad (76)$$

Напротив, при $\mu \neq 0$ и при больших значениях v будем приближенно иметь:

$$(66) \quad \frac{1}{b} M = \mu \delta v \frac{a^3}{3R}; \quad (77)$$

$$(67) \quad \frac{1}{b} P = \mu \delta v \frac{a^2}{2R}. \quad (78)$$

Исключая из последних соотношений a , получим

$$(68) \quad M = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{P^{\frac{3}{2}} R^{\frac{1}{2}}}{(\mu \delta v b)^{\frac{1}{2}}}, \quad (79)$$

следовательно, сила трения качения

$$(69) \quad F = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{P^{\frac{3}{2}}}{(\mu \delta v b R)^{\frac{1}{2}}}. \quad (80)$$

Она убывает с возрастанием скорости.

Нетрудно в последнем случае ($x > \delta$) исследовать влияние скорости движения центра колеса v на силу трения качения и в общем виде.

Если ввести безразмерные величины α , ψ , m и u , связанные с величинами a , p , t и v соотношениями

$$(70) \quad a = R\alpha, \quad P = KbR\psi, \quad M = KbR^2 m, \quad v = \frac{K}{\mu \delta} u, \quad (81)$$

то формулы (74) и (75) примут вид:

$$(71) \quad m = \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{3} u \alpha^3; \quad (82)$$

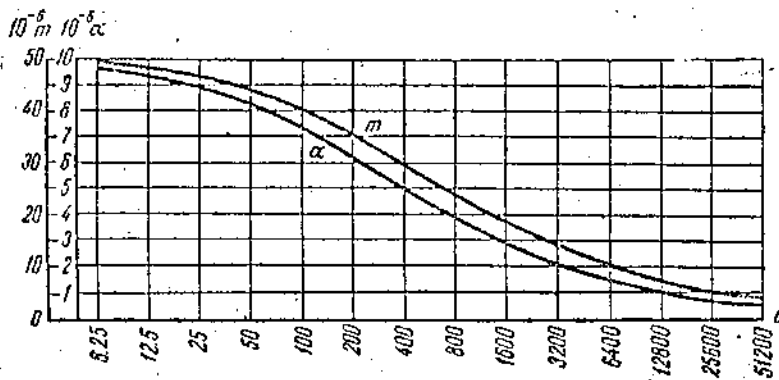
$$(72) \quad \psi = \alpha + \frac{1}{2} u \alpha^2. \quad (83)$$

Последнее соотношение представляет собой квадратное уравнение для величины α . Решая его, получим

$$(73) \quad \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2u\psi}}{u}. \quad (84)$$

Подставляя это выражение в (82), получим зависимость m от u , что и будет характеризовать влияние скорости движения колеса на силу трения.

На фиг. 8 изображен график зависимости m от u , построенный при значении $\psi = 0.01$.



Фиг. 8. График зависимости m от u

$$\alpha = \psi - \frac{1}{2} \psi^2 u \approx \psi - \frac{1}{2} \alpha^2 u. \quad (85)$$

Подставляя это выражение в (82) и пренебрегая степенями u выше первой, получим

$$m' = \frac{1}{2} \psi^2 - \frac{1}{6} \psi^3 u. \quad (86)$$

При больших значениях m приходим к формуле (79). В безразмерных величинах (81) эта формула имеет вид:

$$m'' = \frac{2\sqrt{2} \psi^{\frac{3}{2}}}{3u^2}. \quad (87)$$

§ 3. Теория колесобразования в случае пневматических шин

При построении теории качения по грунту колеса с пневматической шиной необходимо учитывать деформацию самого пневматика. Вследствие этого задача о колесобразовании становится несравненно более сложной, чем в случае жесткого колеса. Задача остается достаточно сложной даже после введения упрощающих предположений.

Принятые нами упрощающие предположения сводятся к следующим: 1) деформирование грунта подчиняется законам, изложенным в § 1; 2) деформация пневматика в каждой точке принимается пропорциональной давлению пневматика на грунт; 3) поверхность пневматика принимается цилиндрической.

Геометрические соотношения, связывающие осадку x какой-либо точки поверхности грунта в зависимости от ее расстояния ξ от вертикальной плоскости, проходящей через ось колеса, будут теперь следующими (фиг. 9):

$$x + y + \frac{\xi^2}{2R} = h_{n-1} + \frac{a^2}{2R}. \quad (88)$$

Здесь y — деформация пневматика; h_{n-1} — глубина колеи, образовавшейся до очередного (n -го) прохода колеса; a — расстояние наиболее

удаленной
том от
В отли
тика с гру
кости на
Поэтому
колеи
ния (фиг.

h_n

Для абсо
Г стру
наде же
пове
ка с абс
случае a'

где α
Сила
конс дефр

где β
связи, в
Для
жизн h_n

Подст
ная, форм

откуда

В резу
величину

Диагра
близки к э
Кoeffи
обработки
6 Зак. 22

удаленных передних точек поверхности соприкосновения колеса с грунтом от той же вертикальной плоскости.

В отличие от абсолютно жесткого колеса, соприкосновение пневматика с грунтом будет прекращаться позади этой вертикальной плоскости на некотором расстоянии a' от нее. Поэтому глубина колес после прохода колеса может быть найдена из соотношения (фиг. 10).

$$h_n + \frac{a'^2}{2R} = h_{n-1} + \frac{a^2}{2R}. \quad (89)$$

Для абсолютно жесткого колеса $a' = 0$.

Нетрудно получить формулы, связывающие нагрузку на колеса, с размерами поверхности соприкосновения пневматика с абсолютно жестким грунтом. В этом случае $a' = a$ и, следовательно:

$$P = \int_{-a}^{+a} b p d\xi, \quad (90)$$

где b — ширина пневматика.

Согласно принятому допущению о законе деформирования пневматика, в (90)

$$p = \beta y, \quad (91)$$

где β — характерная для данного пневматика упругая константа, зависящая, в частности, от давления в камере пневматика.

Для абсолютно жесткого грунта в соотношении (88) следует положить $h_n = 0$, $x = 0$; таким образом

$$y = \frac{a^2}{2R} - \frac{\xi^2}{2R}. \quad (92)$$

Подставляя (92) в (91) и затем в (90), получим, после интегрирования, формулу

$$P = \frac{2b\beta}{3R} a^3; \quad (93)$$

откуда

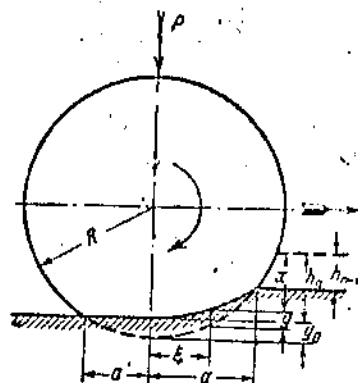
$$a = \sqrt[3]{\frac{3RP}{2\beta b}}. \quad (94)$$

В результате деформации пневматика ось колеса опустится на величину

$$y = \frac{a^2}{2R} = \sqrt[3]{\frac{9}{32}} \frac{P^{\frac{2}{3}}}{\beta^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} R^{\frac{1}{3}}}. \quad (95)$$

Диаграммы, изображающие характер этих зависимостей (93) и (95), близки к экспериментально наблюдавшимся А. К. Бируля [4].

Коэффициент β может быть получен в результате соответствующей обработки экспериментальных данных.



Фиг. 9. Схема образования колес при качении пневматического колеса

Рассмотрим наиболее простой случай качения пневматика с очень малой скоростью в предположении, что грунт уже имеет деформацию $x > \delta$ (т. е. дорога была предварительно укатана). Очевидно, что деформация грунта (фиг. 10) начнется лишь на расстоянии $l < a$ от вертикальной плоскости, причем в этом месте

$$p = \beta y = K, \quad (96)$$

т. е. давление пневматика на грунт достигает характерной для грунта константы K .

Не уменьшая общности исследования для данного случая, можно положить в формуле (88) $h_{n-1} = 0$. Таким образом

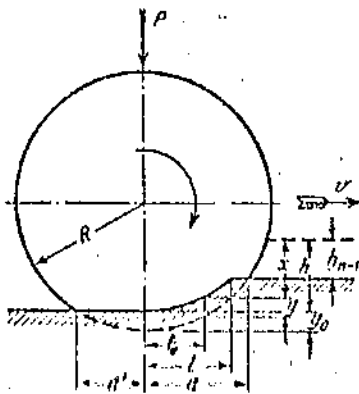
$$y + x = \frac{a^2}{2R} - \frac{\xi^2}{2R}. \quad (97)$$

Подставляя сюда

$$\xi = l, \quad y = \frac{K}{\beta}, \quad x = 0,$$

получим

$$\frac{K}{\beta} = \frac{a^2}{2R} - \frac{l^2}{2R}, \quad (98)$$



Фиг. 10. Образование колеи при повторных проходах пневматического колеса.

откуда

$$l = \sqrt{a^2 - \frac{2RK}{\beta}}. \quad (99)$$

Заметим, что при

$$a^2 = \frac{2RK}{\beta} \quad (100)$$

$l = 0$ и, следовательно, при

$$a^2 < \frac{2RK}{\beta} \quad (101)$$

колея не образуется. Так как в этом случае $a' = a$, то на основании формулы (93), подставляя в нее (101), получим неравенство

$$P = \frac{\sqrt{32} b R^{\frac{1}{2}} K^{\frac{3}{2}}}{3 \beta^{\frac{1}{2}}}, \quad (102)$$

которое можно рассматривать как условие прохода пневматика по предварительно укатанной дороге без образования колеи.

Если условие (102) не выполняется, то на участке поверхности соприкосновения $a > \xi > l$ давление пневматика на грунт меняется от нуля до величины постоянной K соответственно изменению деформации пневматика. Грунт при этом не деформируется.

На участке $l > \xi > 0$ грунт деформируется, а так как при этом, согласно закону грунта (см. § 1), давление на грунт остается равным постоянной K , то деформация пневматика остается постоянной. Наконец, на задней части контактной поверхности, где деформация пневматика начнет уменьшаться, соответственно начнет уменьшаться и давление на грунт; что же касается деформации грунта h , то она остается

постоянной, равной осадке грунта в точке $\xi = 0$. Чтобы найти осадку в этой точке, следует в формуле (97) положить: $y = \frac{K}{\beta}$ и $\xi = 0$, откуда получим

$$h = \frac{a^2}{2R} - \frac{K}{\beta}. \quad (103)$$

Используя (98), можно эту формулу привести к виду (117), и l найти из (116).

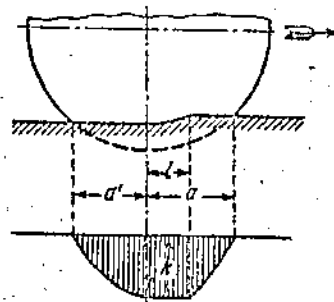
На фиг. 11 изображен график распределения давления p под пневматиком.

Аналитическая зависимость, выражающая это распределение, имеет следующий вид:

$$a > \xi > l; \quad p = \beta \left(\frac{a^2 - \xi^2}{2R} \right); \quad (104)$$

$$l > \xi > 0; \quad p = K; \quad (105)$$

$$0 > \xi > -a'; \quad p = \beta \frac{a'^2 - \xi^2}{2R}. \quad (106)$$



Фиг. 11. График распределения давления под пневматиком

Полная нагрузка на колесо выражается очевидной формулой

$$\frac{1}{b} P = \int_{-a'}^0 p d\xi + \int_0^l p d\xi + \int_l^a p d\xi; \quad (107)$$

Далее имеем:

$$\int_0^l p d\xi = \int_0^l \beta \left(\frac{a'^2}{2R} - \frac{\xi^2}{2R} \right) d\xi = \frac{\beta a'^3}{3R}; \quad (108)$$

$$\int_0^l p d\xi = \int_0^l K d\xi = Kl; \quad (109)$$

$$\int_l^a p d\xi = \int_l^a \beta \left(\frac{a^2}{2R} - \frac{\xi^2}{2R} \right) d\xi = \beta \left(\frac{a^3}{3R} - \frac{a^2 l}{2R} + \frac{l^3}{6R} \right). \quad (110)$$

Таким образом, собирая результаты интегрирования, получаем

$$\frac{1}{b} P = Kl + \frac{\beta}{3R} \left(a'^3 + a^3 - \frac{3}{2} a^2 l + \frac{1}{2} l^3 \right). \quad (111)$$

Так как осадка пневматика при $\xi = 0$ равна

$$y_0 = \frac{a'^2}{2R} \quad (112)$$

и, с другой стороны, в этом месте давление на грунт равно постоянной K , то

$$\beta = \frac{a'^2}{2R} = K, \quad (113)$$

откуда

$$a' = \sqrt{\frac{2KR}{\beta}}. \quad (114)$$

Из формулы (98) имеем

$$a^2 = \frac{2KR}{\beta} + l^2. \quad (115)$$

Таким образом, из соотношения (114) можно, учитывая (114) и (115), получить уравнение для определения величины l . После приведения подобных членов, получаем:

$$\frac{1}{\beta} P = \frac{\beta}{3R} \left[\left(\frac{2KR}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{2KR}{\beta} + l^2 \right)^{\frac{3}{2}} - l^3 \right]. \quad (116)$$

Зная l , нетрудно найти глубину образующейся колес по формуле

$$h = \frac{l^2}{2R}, \quad (117)$$

которую легко усмотреть из фиг. 11, а также из (103) и (115).

Произведем упрощение уравнения (116) в предположении, что l — малая величина по сравнению с a и, следовательно [см. (115)], по сравнению с

$$\sqrt{\frac{2KR}{\beta}}.$$

Пренебрегая в (116) степенями l выше второй, получим приближенно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} P &= \frac{\beta}{3R} \left(\frac{2KR}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \right. \\ &+ \left. \left(1 + \frac{\beta l^2}{2KR} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\beta l^2}{2KR} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \approx \frac{2K}{3} \sqrt{\frac{2KR}{\beta}} \left(2 + \frac{3\beta l^2}{4KR} \right), \end{aligned} \quad (118)$$

откуда

$$l^2 = \sqrt{\frac{2R}{K\beta}} \left(\frac{P}{b} - \frac{4K}{3} \sqrt{\frac{2KR}{\beta}} \right); \quad (119)$$

следовательно, глубина колес, согласно (117), после каждого прохода колеса возрастает на величину

$$h = \frac{l^2}{2R} = \frac{1}{\sqrt{2RK\beta}} \left(\frac{P}{b} - \frac{4K}{3} \sqrt{\frac{2KR}{\beta}} \right). \quad (120)$$

Эта формула справедлива лишь в том случае, если выражение, стоящее в скобках, положительно. Если же

$$P < \frac{4Kb}{3} \sqrt{\frac{2KR}{\beta}},$$

то, в соответствии с условием (102), колес образовываться не будет, т. е. $h = 0$.

В рассмотренном примере мы приняли скорость движения колеса весьма малой и пренебрегли в выражении (5)

$$p = K + \mu \delta v$$

членом, содержащим v . При учете этого члена исследование становится более сложным и, как можно показать, кривая деформирования грунта

под пневматиком не будет иметь точек излома при $\xi = l$. Кроме того, деформация грунта будет продолжаться и позади вертикальной плоскости, проходящей через ось колеса, т. е. при $0 > \xi > -l'$ ($l' < a'$). Однако глубина образующейся колес будет тем меньше, чем больше значение скорости движения колеса.

Рассмотрим другой частный случай, соответствующий закону Герстнера $p = cx$. Этот закон получается (см. § 1) как частный случай закона (3):

$$p = cx + \mu x \frac{dx}{dt},$$

если вновь принять, что скорость движения колеса очень мала. Пусть колесо совершает свой первый проход по грунту $h_{n-1} = 0$, тогда соотношение (88) для этого случая запишется в виде (97)

$$x + y = \frac{a^2}{2R} - \frac{\xi^2}{2R}. \quad (97)$$

Деформация грунта начнется сразу же с момента соприкосновения колеса с грунтом, т. е. при $\xi = a$ и закончится при $\xi = 0$ (фиг. 12).

Используя соотношения, справедливые для точек пневматика и точек грунта при $a > \xi > 0$

$$\begin{aligned} p &= cx, \\ p &= \beta y, \end{aligned} \quad (121)$$

исключим x и y из равенства (97). Получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\beta}\right)p &= \frac{a^2}{2R} - \\ - \frac{\xi^2}{2R}; \quad (a > \xi > 0). \end{aligned} \quad (122)$$

Деформация пневматика в точке $\xi = 0$ имеет величину

$$y_0 = \frac{1}{\beta} p_0 = \frac{c}{c + \beta} \cdot \frac{a^2}{2R}. \quad (123)$$

При этом, согласно (97),

$$h + y_0 = \frac{a^2}{2R}. \quad (124)$$

С другой стороны, согласно (97) и учитывая, что $\xi = -a'$, $x = h$, $y = 0$, имеем

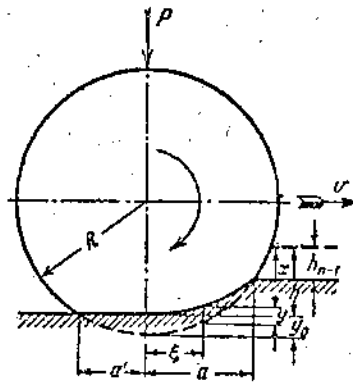
$$h = \frac{a^2}{2R} - \frac{a'^2}{2R}, \quad (125)$$

следовательно, исключая из (124), согласно (125), осадку грунта h , получим

$$y_0 = \frac{a'^2}{2R}. \quad (126)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (97) в пределах $-a' < \xi < 0$ принимает вид:

$$h + y = \frac{a^2}{2R} - \frac{\xi^2}{2R}. \quad (127)$$



Фиг. 12. Образование колес при деформации грунта, подчиняющейся закону Герстнера

Непопулярно (125), исключая h (см. также фиг. 12), получим

$$y = \frac{a'^2}{2R} - \frac{\xi^2}{2R}. \quad (128)$$

Отсюда получим для давления на этом участке поверхности соприкосновения колес с грунтом формулу

$$p = \beta \left(\frac{a'^2}{2R} - \frac{\xi^2}{2R} \right) \quad (-a' < \xi < 0), \quad (129)$$

где a' определяется соотношением (123) и (126)

$$a' = a \sqrt{\frac{c}{c + \beta}}. \quad (130)$$

Для силы P давления колеса на грунт получим выражение

$$\frac{1}{l} P = \int_{-a'}^0 p d\xi + \int_0^a p d\xi. \quad (131)$$

Подставляя в первый интеграл выражение p из (129), а во второй из (122) и произведя интегрирование, имеем:

$$\frac{1}{b} P = \beta \frac{a'^2}{3R} + \frac{c\beta}{c + \beta} \cdot \frac{a^3}{3R}. \quad (132)$$

Заменив a' через a , согласно формуле (130), получим

$$\frac{1}{b} P = \frac{a^3}{3R} \frac{c\beta}{c + \beta} \left(1 + \sqrt{\frac{c}{c + \beta}} \right). \quad (133)$$

Согласно соотношению (125) и учитывая (130), получим

$$h = \frac{a^2}{2R} - \frac{a_1^2}{2R} = \frac{\beta}{c + \beta} \frac{a^2}{2R}. \quad (134)$$

Подставляя сюда a , определяемое соотношением (133), имеем окончательно:

$$h = \frac{\beta}{2R(c + \beta)} \left[\frac{P^2 3R(c + \beta)}{bc\beta} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{c}{c + \beta}}} \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (135)$$

При следующем проходе колеса деформация грунта будет начинаться не в точке $\xi = a$, а несколько ближе к вертикальной плоскости, проходящей через ось колеса в той точке, где давление на грунт со стороны пневматика достигает значения ch , как это следует из механических свойств грунта, описанных в § 1.

Таким образом, схема деформирования пневматика и грунта будет иметь в этом случае, примерно, тот же характер, что и в разобранным выше примере для случая $x > \delta$. При последующих проходах колеса начало деформации грунта под пневматиком будет все более и более приближаться к упомянутой вертикальной плоскости, пока, наконец, деформация грунта не прекратится. В этом случае можно говорить, что грунтовая дорога «укатана».

Если движение колеса происходит по одной и той же колее, то трудно получить выражение для предельной глубины колес. Так как

в пред...

Для...

§

Для в граж...

Преи...

уменьш...

колеса...

оказы...

целесо...

Сов...

точно...

ставля...

при из...

напрот...

в площ...

Меж...

б. скоп...

При...

грузка...

ней за...

вастан...

лишь п...

середн...

с жестк...

если бы...

если, на...

счета д...

ль или §

Бла...

Хотя и...

перемен...

ками. Т...

теком, т...

лась ин...

точно, с...

вительн...

точек Г...

колеса,

которого

в пределе грунт не деформируется, то, согласно формулам (95) и (91), максимальное давление пневматика на грунт составляет величину

$$p_0 = \beta y_0 = \beta \sqrt[3]{\frac{9}{32} \frac{P}{\frac{2}{3} \frac{2}{b^3} \frac{1}{R^3}}} = ch. \quad (136)$$

Для этого выражение на коэффициент пропорциональности c , получим для искомой глубины колеи формулу

$$h = \frac{\beta}{c} \sqrt[3]{\frac{9}{32} \frac{P^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} R^{\frac{1}{3}}}}. \quad (137)$$

§ 4. Некоторые замечания о деформировании грунта гусеницей

Для повышения проходимости механического транспорта в военной и гражданской технике нашло большое применение специальное устройство, именующееся гусеничным ходом.

Преимущество гусеничного хода заключается в том, что вес движущихся частей передается на большую площадь грунта, и, следовательно, удельное давление на грунт уменьшается сравнительно с движением на колесах. Вследствие уменьшения удельного давления деформация грунта оказывается меньше и, таким образом, проходимость транспорта улучшается.

Современные гусеницы состоят из большого числа звеньев сравнительно малой длины. Поэтому в последующем анализе мы будем представлять гусеницу в виде некоторой тонкой ленты, жесткость которой при изгибе вокруг оси, параллельной движению, бесконечно велика, и, напротив, жесткость вокруг оси, перпендикулярной первой и лежащей в плоскости ленты, бесконечно мала.

Механической моделью такой ленты является гусеница со звеньями бесконечно малой длины.

При таком представлении гусеницы можно считать, что любая нагрузка, распределенная вдоль ленты симметрично относительно ее средней линии, передается на грунт таким образом, что давление оказывается постоянным в направлении звеньев гусеницы и меняющимся лишь при переходе от одного звена к другому. Следовательно, если по середине гусеничной ленты, которая лежит в грунте, движутся колеса с жестким ободом, то деформация грунта будет происходить так, как если бы ширина обода колеса равнялась ширине ленты. Таким образом, если, например, катки гусеничного хода имеют жесткий обод, то для подсчета деформации грунта под гусеницей можно воспользоваться формулами § 2, считая размер b равным ширине гусеничной ленты.

Благодаря наличию пружинной связи между катками гусеничного хода и основным корпусом, можно приближенно считать, что вес всей перемежающейся конструкции распределяется равномерно между катками. Точно так же, если по гусеничной ленте катится колесо с пневматиком, то дело происходит так, как если бы ширина пневматика равнялась ширине ленты. При этом исходные гипотезы удовлетворяются более точно, чем при движении пневматика непосредственно по грунту. Действительно, гусеничная лента полностью обеспечивает равенство осадок точек грунта, расположенных на прямых, перпендикулярных движению колеса, т. е. на образующих эквивалентного пневматика, ширина обода которого равна ширине ленты.

