Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Действительный член АН УССР А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

В настоящей заметке дается строгое доказательство одному несколько неожиданному обстоятельству в теории устойчивости прямоугольных пластин, замеченному нами еще в 1945 г.

Рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 1), два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других свободны. Расстояние между шарнирно опертыми краями обозначим через l, расстояние между свободными краями — через $2b$.

Пусть к шарнирным краям пластинки приложены равномерно распределенные сжимающие усилия. Критическое значение этих усилий, при достижении которого пластинка теряет устойчивость, может быть найдено обычными методами. Для этой цели следует найти минимальное значение параметра p, при котором дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{p}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} w(0, y) = w(l, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(l, y)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 w(x, \pm b)}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w(x, \pm b)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w(x, \pm b)}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w(x, \pm b)}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

имеет решение, отличное от тождественного нуля.

Здесь w — прогиб пластинки, D — ее цилиндрическая жесткость, ν — коэффициент Пуассона. Два последних граничных условия означают обращение в нуль изгибающих моментов и перерезывающей силы на свободных границах пластинки.

После обычного в задачах этого рода представления функции w в виде

$$w = f(\eta)\sin\frac{\pi x}{l}, \quad \eta = \frac{\pi y}{l} \tag{3}$$

приходим к отысканию наименьшего собственного значения краевой задачи:

$$\begin{gathered} f^{IV}(\eta) - 2f''(\eta) + (1-\mu)f(\eta) = 0, \\ f'''(\beta) - (2-\nu)f'(\beta) = 0, \\ f''(\beta) - \nu f(\beta) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\mu = \frac{pl^2}{\pi D}, \quad \beta = \frac{\pi b}{l}. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что μ является корнем трансцендентного уравнения

$$(\sqrt{\mu}+\nu-1)^2 r\,\mathrm{sh}\,r\beta\,\mathrm{ch}\,s\beta-(\sqrt{\mu}-\nu+1)^2 s\,\mathrm{ch}\,r\beta\,\mathrm{sh}\,s\beta=0, \qquad (6)$$

в котором

$$r=\sqrt{1+\sqrt{\mu}}, \quad s=\sqrt{1-\sqrt{\mu}}. \qquad (7)$$

Очевидно, что величина μ существенно зависит от значения параметра β или, что то же, от отношения ширины пластинки l к ее длине $2b$. Следовательно, в соответствии с формулами (5), можно представить выражение для критического усилия в виде

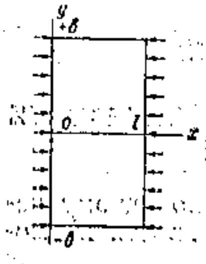

Рис. 1

$$p_{\text{кр}}=\frac{\pi^2 D}{l^2}\mu(\beta). \qquad (8)$$

Можно показать, что при $\beta\to 0$, т. е. для очень узкой пластинки, $\mu(\beta)$ стремится к значению $1-\nu^2$. Критическая сила для такой пластинки $p_{\text{кр}}2b$ стремится к значению эйлеровой силы для стержня

$$P_e=\frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad I=2b\frac{h^3}{12}. \qquad (9)$$

Для очень длинной пластинки, т. е. при $\beta\to\infty$, на первый взгляд следует ожидать, что $\mu\to 1$. Действительно, предполагая, что форма потери устойчивости бесконечно длинной пластинки есть цилиндр,

$$w=C\sin\frac{\pi x}{l}, \qquad (10)$$

согласно уравнению (1) немедленно получим

$$p^*_{\text{кр}}=\frac{\pi^2 D}{l^2}. \qquad (11)$$

Таким образом, если при $\beta\to\infty$ $p_{\text{кр}}\to p^*_{\text{кр}}$, то $\mu(\beta)\to 1$.

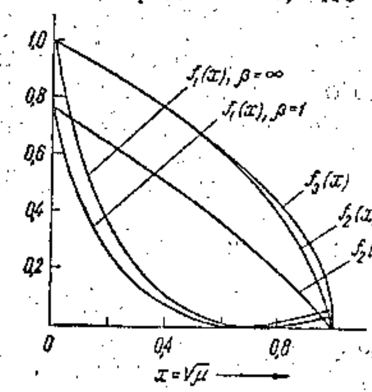

Рис. 2

Однако, против ожидания, предельное значение параметра μ при $\beta\to\infty$ меньше единицы, хотя и незначительно. Таким образом, предельное значение критического усилия для весьма длинной пластинки меньше критического усилия $p^*_{\text{кр}}$, соответствующего цилиндрической форме потери устойчивости.

Для строгого обоснования этого несколько неожиданного результата заметим, что в соответствии с уравнением (6) при заданном значении параметра β величину μ можно определить как абсциссу точки пересечения двух кривых

$$f_1(x)=\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2\sqrt{1+x}\,\mathrm{th}\,(\beta\sqrt{1+x}), \qquad (12)$$

$$f_2(x)=\sqrt{1-x}\,\mathrm{th}\,(\beta\sqrt{1-x}), \qquad (13)$$

где

$$x=\sqrt{\mu}, \quad a=1-\nu. \qquad (14)$$

Вид этих кривых в интервале $0\leqslant\mu\leqslant 1$ при $\nu=0{,}3$ и разных значениях β показан на рис. 2.

По мере увеличения параметра β первая кривая не претерпевает существенных изменений, в частности при любом β $f_1(a) = 0$ и уже при $\beta > 3$

$$f_1(1) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 \sqrt{2}\, \mathrm{th}\, \beta \sqrt{2} \simeq 0{,}0440 \quad (a = 0{,}7). \tag{15}$$

Что же касается второй кривой, то при возрастании β ее ординаты увеличиваются, оставаясь, однако, меньшими соответствующих ординат кривой

$$f_3(x) = \sqrt{1-x}. \tag{16}$$

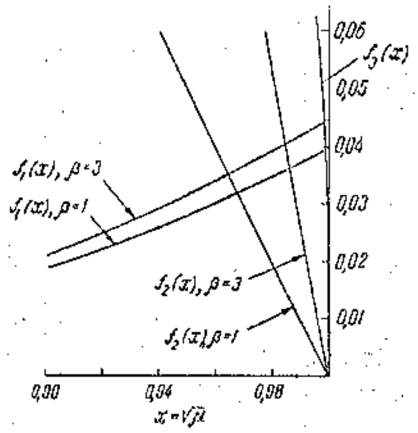

Рис. 3

Отсюда следует, что точка пересечения кривых (12) и (13) лежит левее точки пересечения кривых (12) и (16) (см. рис. 3). Абсцисса же последней точки при любом значении β заведомо меньше единицы.

Фактическое отыскание предельного значения параметра μ при $\beta \to \infty$ приводит к решению алгебраического уравнения

$$\mu^2 + 2(1-\nu)(1-3\nu)\mu - (3+\nu)(1-\nu)^3 = 0. \tag{17}$$

В частности, если $\nu = 0{,}3$, то $\mu = 0{,}9962$.

Объяснение всему вышеизложенному следует искать в том факте, что принцип Сен-Венана в некотором смысле неприложим к телам типа пластинок, вытянутых в одном каком-либо направлении. Отличие напряженного состояния такой пластинки со свободными короткими сторонами от напряженного состояния другой пластинки с теми же, но шарнирно опертыми сторонами, не исчезает столь быстро при увеличении шарнирно опертых длинных сторон, как это предполагается в принципе Сен-Венана. Впервые на подобные нарушения принципа Сен-Венана обратил внимание В. З. Власов ([1]). То, что здесь изложено, имеет место и при потере устойчивости пластинок за пределом упругости ([2]).

Поступило
3 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, М.—Л., 1946, стр. 476.
[2] И. П. Кунце, Прикл. матем. и мех., в. 5 (1947).