

Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости *

А. Ю. Ишлинский

Принято считать, что рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел возможно лишь в рамках уравнений так называемой прикладной теории упругости или сопротивления материалов.

В упомянутых дисциплинах посредством ряда, подчас далеко идущих, предположений (гипотез) о характере деформированного или напряженного состояния приближенно решаются задачи статики упругих тел посредством сведения их к изучению форм равновесия упругой линии, упругой поверхности и их модификаций. Примером тому могут служить задачи о равновесии и, в частности, об устойчивости стержней, арок, колец, пластин, оболочек, тонкостенных конструкций и многие другие.

Во многих случаях точность решения задач сопротивления материалов и прикладной теории упругости может быть оценена сравнением с решениями тех же задач методами математической теории упругости. Исключения в этом отношении составляют как раз задачи об устойчивости равновесия упругих тел, конкретное исследование которых с точки зрения уравнений математической теории упругости, насколько нам известно, не производилось.

Отрицательную роль здесь, по видимому, сыграла известная теорема Кирхгоффа об единственности решений уравнений теории упругости, в силу которой вопросы устойчивости упругих тел в рамках математической теории упругости не разрешимы.

Следует, однако, иметь в виду, что доказательство теоремы Кирхгоффа существенно опирается на использование граничных условий задачи о равновесии упругого тела без учета деформации граничной поверхности и, следовательно, не может считаться достаточно обоснованным.

Как будет показано ниже, именно учет деформации граничной поверхности позволяет рассматривать и успешно разрешать задачи устойчивости упругих тел методами математической теории упругости и, в частности, сопоставить их решения с результатами теории сопротивления материалов и прикладной теории упругости **.

Мы остановимся на рассмотрении задачи об устойчивости сжатия бесконечно длинной полосы в условиях плоской деформации.

* Поводом к постановке вопросов, затронутых в настоящей статье, послужили беседы автора с его глубокоуважаемым учителем академиком М. А. Лаврентьевым об устойчивости несоблюдяемых упругих тел, подверженных гидростатическому сжатию.

** Следует отметить, что В. В. Новожилов в своей прекрасной монографии «Основы нелинейной теории упругости» (М.—Л., 1948) ставит общую задачу об устойчивости упругого тела в рамках построенных им уравнений нелинейной теории упругости, не развивая, однако, решений конкретных задач. С точки зрения уравнений В. В. Новожилова мы пренебрегаем компонентами вращения в уравнениях равновесия, сохраняя их, вместе с тем, в граничных условиях задачи.

Рас
круглог
к аналог
Ита.
бесконеч

будем с
определя

$$\sigma_2^2 = -\gamma$$

Им соот

и'

v'

Напр
назовем с

Иссл
полосы, и
либо друг
которым г
непрямой

Полож.

риалов на

в качестве

мы равнов

Обозн
нения точ

состоянии
приближен.

Связь
направляетс

где

Перемещен
векции

Рассмотрение других задач, например, об устойчивости сжатия круглого прута, пластинки, трубы, сферической оболочки и др., приводит к аналогичным, но более сложным выкладкам.

Итак, пусть полоса шириной $2h$ (рис. 1) сжата в направлении своего бесконечного протяжения усилием p . Края полосы

$$y = \pm h \quad (1)$$

будем считать свободными от усилий. Напряженное состояние полосы определяется в этом случае напряжениями

$$\sigma_x^0 = -p, \quad \sigma_y^0 = 0, \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (2)$$

Им соответствуют перемещения

$$u^0 = -\frac{1-\nu^2}{E} p x,$$

$$v^0 = \frac{\nu(1+\nu)}{E} p y. \quad (3)$$

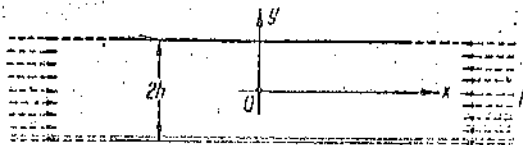


Рис. 1.

Напряжения и перемещения, определяемые формулами (1) и (2), назовем основными.

Исследуем, возможно ли, наряду с основным состоянием равновесия полосы, при котором границы полосы остаются прямолинейными, какое-либо другое состояние равновесия, бесконечно близкое к основному, при котором границы полосы также свободны от усилий, но уже могут быть изогнутыми.

Положительное решение подобного вопроса в сопротивлении материалов или прикладной теории упругости принимается, как известно, в качестве необходимого условия неустойчивого состояния основной формы равновесия упругого тела или системы тел.

Обозначим через u и v бесконечно малые дополнительные перемещения точек полосы от их положения в исходном деформированном состоянии и через σ_x , σ_y и τ_{xy} соответствующие этим перемещениям напряжения.

Связь между перемещениями u и v и напряжениями σ_x , σ_y и τ_{xy} устанавливается соотношениями закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (5)$$

Перемещения u и v должны удовлетворять известным уравнениям равновесия

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = 0. \quad (6)$$

В свою очередь напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} должны удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} (\sigma_x^0 + \sigma_x) \cos \alpha + (\tau_{xy}^0 + \tau_{xy}) \sin \alpha &= 0, \\ (\tau_{xy}^0 + \tau_{xy}) \cos \alpha + (\sigma_y^0 + \sigma_y) \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

на искривленных границах полосы. Учитывая равенства (2), условия (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= (-p + \sigma_x) \operatorname{tg} \alpha \\ \sigma_y &= \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned} \quad (8)$$

где α (рис. 2) — угол наклона к оси x касательной к деформированной границе полосы.

Сохраняя в условиях (8) лишь малые первого порядка, получим, что на искривленной границе должны соблюдаться равенства

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -p, \\ \sigma_y &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

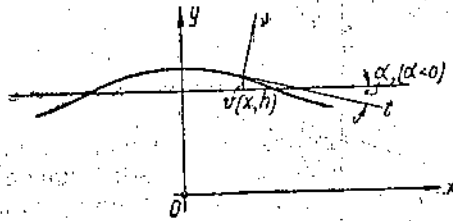


Рис. 2.

Обозначим буквами x_1 и y_1 координаты точки (x, y) после деформации. Очевидно, что

$$x_1 = x - \frac{1-\nu^2}{E} px + u(x, y), \quad (10)$$

$$y_1 = y + \frac{\nu(1+\nu)}{E} py + v(x, y).$$

Согласно (10) при $y = \pm h$ имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{\partial v(x, \pm h)}{\partial x}}{1 - \frac{1-\nu^2}{E} p + \frac{\partial u(x, \pm h)}{\partial x}} \quad (11)$$

Вновь ограничиваясь малыми первого порядка, получим

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (y = \pm h). \quad (12)$$

Используя формулу (12) в граничных условиях (9), приведем их к окончательному виду

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -p \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \sigma_y &= 0, \quad (y = \pm h). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, задача об отыскании функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ сводится к решению системы дифференциальных уравнений (6) с граничными условиями (13). Учитывая, что область, где эти функции определены, является полоса, будем искать их в виде

$$\begin{aligned} u &= f(ay) \sin ax, \\ v &= g(ay) \cos ax. \end{aligned} \quad (14)$$

Параметр a определяет длину волны «возмущения» прямолинейной границы полосы; очевидно, что

$$a = \frac{\pi}{l}, \quad (15)$$

где l — длина полуплоскости «возмущения» границы. Подставляя выражения (14) и формулу (5), получим

$$\theta = [f(\eta) + g'(\eta)] a \cos ax, \quad (16)$$

где для удобства введена безразмерная переменная

$$\eta = ay. \quad (17)$$

Имеем, далее, согласно формулам (14) и (4)

$$\begin{aligned} \sigma_y &= [\lambda(f + g') + 2\mu g'] a \cos ax, \\ \tau_{xy} &= \mu(f' - g) a \sin ax. \end{aligned} \quad (18)$$

Для определения функций $f(\eta)$ и $g(\eta)$ следует воспользоваться дифференциальными уравнениями (6), которые после использования выражений (14) и упрощений приводятся к следующей системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \mu f'' - (\lambda + 2\mu)f - (\lambda + \mu)g' &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)g'' - \mu g + (\lambda + \mu)f' &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Характеристический определитель этой системы имеет кратные корни ± 1 . Следовательно, функции $f(\eta)$ и $g(\eta)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} f(\eta) &= A_1 \operatorname{ch} \eta + B_1 \operatorname{sh} \eta + C_1 \eta \operatorname{ch} \eta + D_1 \eta \operatorname{sh} \eta, \\ g(\eta) &= A \operatorname{ch} \eta + B \operatorname{sh} \eta + C \eta \operatorname{ch} \eta + D \eta \operatorname{sh} \eta, \end{aligned} \quad (20)$$

где $A_1, B_1, C_1, D_1, A, B, C$ и D — постоянные, связанные в силу уравнений (19) четырьмя соотношениями.

В интересующем нас случае, потери устойчивости сжатой полосы, функция $g(\eta)$ должна быть четной, т. е. в выражениях (20) следует положить

$$B = C = 0. \quad (21)$$

Подставим выражения (20) для $f(\eta)$ и $g(\eta)$ в одно из уравнений (19), например во второе, учитывая при этом равенства (21). Приравняв порознь нулю коэффициенты при линейно-независимых функциях $\operatorname{ch} \eta, \operatorname{sh} \eta, \eta \operatorname{ch} \eta$ и $\eta \operatorname{sh} \eta$, получим

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, & B_1 &= -A - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} D, \\ C_1 &= -D, & D_1 &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, функции $f(\eta)$ и $g(\eta)$ приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} f(\eta) &= -A \operatorname{sh} \eta - D \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{sh} \eta + \eta \operatorname{ch} \eta \right), \\ g(\eta) &= A \operatorname{ch} \eta + D \eta \operatorname{sh} \eta. \end{aligned} \quad (23)$$

Согласно формулам (23) и (18) имеем теперь для напряжений σ_y и τ_{xy} следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 2\mu \left[A \operatorname{sh} \eta + D \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{sh} \eta + \eta \operatorname{ch} \eta \right) \right] a \cos ax, \\ \tau_{xy} &= -2\mu \left[A \operatorname{ch} \eta + D \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{ch} \eta - \eta \operatorname{sh} \eta \right) \right] a \sin ax. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее, в соответствии с выражениями (14) и формулами (23), имеем

$$v = (A \operatorname{ch} \eta + D \eta \operatorname{sh} \eta) \cos ax \quad (25)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -(A \operatorname{ch} \eta + D \eta \operatorname{sh} \eta) a \sin ax. \quad (26)$$

Воспользуемся, наконец, граничными условиями в форме (13) и подставим в них выражения для σ_y , τ_{xy} и $\frac{\partial v}{\partial x}$ согласно формулам (24) и (26); после очевидных сокращений получим равенства

$$A \operatorname{ch} \beta + D \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{ch} \beta - \beta \operatorname{sh} \beta \right) = -\frac{P}{2\mu} (A \operatorname{ch} \beta + D \beta \operatorname{sh} \beta), \quad (27)$$

$$A \operatorname{sh} \beta + D \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{sh} \beta + \beta \operatorname{ch} \beta \right) = 0,$$

в которых буква β — значение переменной η на невозмущенной границе полосы, т. е. при $y = h$.

Учитывая формулы (17) и (15), имеем

$$\beta = \alpha h = \frac{\pi h}{l}. \quad (28)$$

Равенства (27) можно рассматривать как систему однородных линейных уравнений относительно неизвестных A и D . Нетрудно убедиться совершенно элементарными приемами, что решения этой системы, отличные от нуля, возможны лишь при следующем значении сжимающего усилия P :

$$P_i = 2\mu \frac{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \beta}{\frac{\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta}. \quad (29)$$

Правая часть равенства (29) положительна при любом значении β и, как нетрудно обнаружить, представляет собой монотонно возрастающую функцию этой переменной.

Таким образом, неустойчивое состояние полосы возможно лишь при ее продольном сжатии, причем каждой длине волны возможного «возмущения» соответствует своя критическая нагрузка P_i .

Заметим, что согласно формулам (14) перемещение $v(x, y)$ (боковое смещение элементов полосы) равно нулю при $x = \pm \frac{l}{2}$. В связи с этим можно сопоставить формулу (29) с формулой Эйлера

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (30)$$

для продольного изгиба стержня длиной l с шарнирно закрепленными концами. В данном случае, в условиях плоской деформации ($\epsilon_z = 0$), в формуле Эйлера следует заменить жесткость изгиба EI цилиндрической жесткостью

$$D = \frac{E(2h)^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (31)$$

а критическое усилие P_e усилием $2\rho_e h$, отнесенным к единице длины. В результате получим формулу прикладной теории упругости

$$P_e = \frac{E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{\pi h}{l} \right)^2, \quad (32)$$

которая определяет критическую нагрузку при потере устойчивости сжатой прямоугольной пластинки (случай цилиндрической формы потери устойчивости).

Учитывая соотношение (28), а также известные соотношения

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (33)$$

можно привести формулу (32) к виду:

$$p_c = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \beta^2. \quad (34)$$

Правая часть последнего равенства является первым членом разложения по степеням параметра β правой части формулы (29). Упомянутое разложение имеет вид

$$p_i = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \beta^2 \left[1 + \frac{3\lambda - 4\mu}{15(\lambda + 2\mu)} \beta^2 + \frac{2(3\lambda^2 - 30\lambda\mu - 2\mu^2)}{315(\lambda + 2\mu)^2} \beta^4 + \dots \right]. \quad (35)$$

Таким образом, формула (34), полученная методами сопротивления материалов, является предельной при $\beta \rightarrow 0$ для «точной» формулы (29), выведенной на основании общих уравнений математической теории упругости.

Подобному сопоставлению может быть подвергнут и ряд других формул сопротивления материалов и прикладной теории упругости для так называемых критических нагрузок при потере устойчивости равновесия упругих тел.

Числовой пример. Пусть $\beta = 0,05$, чему согласно формуле (28) соответствует отношение $l : 2h = 31,42$. Согласно формуле (29) имеем

$$p_i = 2\mu \frac{\text{ch } \beta \text{ sh } \beta - \beta}{\frac{\mu}{\lambda + \mu} \text{ ch } \beta \text{ sh } \beta + \beta} = 1904,807 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

если принять $\lambda = 1\,200\,000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, $\mu = 800\,000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, чему соответствуют значения $E = 2\,080\,000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ и $\nu = 0,3$.

Формула (34) сопротивления материалов дает

$$p_c = \frac{4}{3} \mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \beta^2 = 1904,762 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \frac{p_i}{p_c} = 1,000024.$$

Разница в значениях критических напряжений, полученных по формулам (29) и (34), имеет порядок тысячных долей процента.

В случае $\beta = 0,1$ имеем соответственно

$$\frac{p_i}{p_c} = 1,000093 \quad \left(p_c = 7619,05 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right).$$

При больших значениях β , напротив, $p_i < p_c$, однако этим значениям β соответствуют напряжения, далеко выходящие за предел упругости всех известных материалов.

В заключение рассмотрим, возможна ли потеря устойчивости полосы при наличии всестороннего сжатия, чему соответствует исходное напряженное состояние

$$\sigma_x^0 = -p, \quad \sigma_y^0 = -p, \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (36)$$

Решение этого вопроса может быть произведено аналогично предыдущему.

Выражения для «возмущений» напряженного состояния, найденные выше в виде формул (24), справедливы и для данного случая, однако граничные условия (7) должны быть видоизменены, так как на боковых сторонах полосы имеется распределенное нормальное усилие p .

Имеем теперь

$$\begin{aligned} (\sigma_x^0 + \sigma_x) \cos \lambda x + (\tau_{xy}^0 + \tau_{xy}) \cos \mu y &= -p \cos \lambda x, \\ (\tau_{xy}^0 + \tau_{xy}) \cos \lambda x + (\sigma_y^0 + \sigma_y) \cos \mu y &= -p \cos \mu y. \end{aligned} \tag{37}$$

Учитывая в последних соотношениях значения σ_x^0 , σ_y^0 и τ_{xy}^0 согласно формулам (36) и сохраняя члены порядка не выше первого, получим граничные условия

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0 \\ \sigma_y &= 0 \end{aligned} \quad (y = \pm h). \tag{38}$$

Подставляя в этих условиях выражения для напряжений, согласно формулам (24), получим для определения постоянных A и D уравнения

$$\begin{aligned} A \operatorname{ch} \beta + D \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{ch} \beta - \beta \operatorname{sh} \beta \right) &= 0, \\ A \operatorname{sh} \beta + D \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{sh} \beta + \beta \operatorname{ch} \beta \right) &= 0, \end{aligned} \tag{39}$$

которые имеют единственное решение $A = D = 0$, так как определитель этой системы

$$\Delta = \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \beta$$

при любом значении параметра $\beta > 0$ отличен от нуля.

Таким образом, при действии всестороннего сжатия в условиях плоской задачи потеря устойчивости полосы не имеет места. Распространение этого почти очевидного факта на некоторые аналогичные случаи, например случаи гидростатического сжатия цилиндра, тора и тел иной формы, может встретить лишь чисто вычислительные затруднения.

Поступила 11 февраля 1954 г.
Киев.

об-
уд-
тор

ура
лас
раз

нап
дан
вне
дан

про
рен
мен
сис

чет
зуд
сто
воз

теор
ния

в т
кол
вия

скоп
а до

о п
и о

служ
во