1954 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. VI, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

1954, Т. 6, № 4

О плоском движении песка

А. Ю. Ишлинский

1°. Принято считать, что сыпучая среда (песок) находится в состоянии равновесия, если касательное напряжение τ_ν на произвольно ориентированной элементарной площадке с нормалью ν не больше модуля соответствующего нормального напряжения σ_ν, умноженного на коэффициент трения f, характеризующий данную сыпучую среду. При этом считают, что сыпучая среда не может обладать растягивающими напряжениями, т. е. всюду должно быть

$$\sigma_\nu < 0. \tag{1}$$

Таким образом, при равновесии сыпучей среды на всех элементарных площадках, относящихся к любой точке среды, соблюдается неравенство

$$\tau_\nu \leqslant -f\sigma_\nu. \tag{2}$$

Если через каждую точку среды можно провести такую элементарную площадку с нормалью ν^*, для которой имеет место равенство

$$\tau_{\nu^*} = -f\sigma_{\nu^*}, \tag{3}$$

то состояние равновесия среды называется предельным.

Теория предельного состояния равновесия сыпучей среды явилась предметом обстоятельного изучения ряда авторов, первым из которых был Кулон [1]. Недавно В. В. Соколовский [2] дал исчерпывающее исследование плоского случая теории предельного равновесия среды, для которой

$$\tau_\nu \leqslant \tau_s - f\sigma_\nu, \tag{4}$$

где τ_s — так называемый коэффициент сцепления среды.

Частными случаями среды Соколовского являются идеально пластическое тело ($f = 0$, τ_s — пластическая постоянная) и собственно сыпучая среда, рассмотренная выше ($\tau_s = 0$).

Движение сыпучей среды, насколько нам известно, исследованию не подвергалось.

Ниже строятся уравнения плоского движения собственно сыпучей среды и рассматриваются некоторые примеры таких движений.

2°. Введем следующие гипотезы, характеризующие поведение сыпучей среды при ее движении.

1. Среда неупруга и несжимаема.

2. Величины напряжений в среде не зависят от величин скоростей ее деформирования.

3. Направления главных осей напряженного состояния и главных осей деформирования (тензора скоростей деформации) совпадают в каждой точке движущейся среды.

4. Напряженное состояние среды удовлетворяет тем же условиям, что и напряженное состояние предельного равновесия сыпучей среды, т. е. условиям (2) и (3).

Гипотезы 1, 2 и 4 в разъяснениях не нуждаются. Пояснение к гипотезе 3 будет приведено несколько ниже.

3°. Пусть $u(x, y)$, $v(x, y)$ — проекции скорости какой-либо точки сыпучей среды на оси неподвижной декартовой системы координат xy и σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты тензора напряжения в той же системе координат, X и Y — компоненты массовых сил. Наконец, буквой ϱ обозначим плотность сыпучей среды.

Перечисленные гипотезы позволяют построить следующую систему пяти уравнений, содержащих пять искомых функций u, v, σ_x, σ_y, τ_{xy} трех независимых переменных x, y и t:

$$\begin{aligned} \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \varrho X+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \\ \varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= \varrho Y+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{6}$$

$$\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}}=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}, \tag{7}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=-\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\cdot\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}. \tag{8}$$

Первые два уравнения представляют собой дифференциальные уравнения плоского движения произвольной сплошной среды. Равенство (6) выражает условие несжимаемости среды. В силу пропорции (7) главные оси тензора скоростей деформирования и тензора напряжения соответственно совпадают. Наконец, алгебраическое соотношение (8), как нетрудно показать, является условием предельного состояния какого-либо элемента сыпучей среды. Действительно, круг Мора (рис. 1), изображающий напряженное состояние какого-либо элемента сыпучей среды, непременно должен касаться прямых

$$\tau=\pm f\sigma. \tag{9}$$

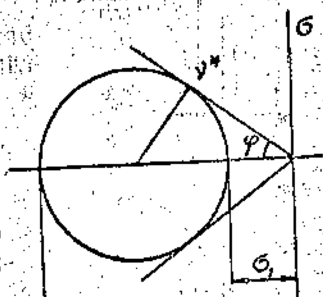

Рис. 1.

В противном случае либо не будет выполнено ни для какой площадки условие предельного напряженного состояния (2), либо круг будет пересекать прямые (9), и для бесчисленного множества площадок будет нарушено неравенство (2).

Соединим точку касания круга одной из прямых (9) с центром круга. Из рассмотрения получившегося прямоугольного треугольника имеем

$$\tau_{\max}=-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\sin\varphi. \tag{10}$$

Здесь σ_1, σ_2 — главные напряжения элемента сыпучей среды,

$$\tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \tag{11}$$

— максимальное касательное напряжение того же элемента, или, что то же, радиус круга Мора и φ — угол наклона касательной к оси абсцисс. Так как

$$f = \operatorname{tg} \varphi, \tag{12}$$

то

$$\sin \varphi = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}. \tag{13}$$

Учитывая теперь, что

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{14}$$

и, кроме того,

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \tag{15}$$

приходим на основании формулы (10) к соотношению (8).

Для дальнейшего условие предельного состояния, т. е. соотношение (8) или эквивалентное ему равенство (10), удобно представить в другой форме. Считая для определенности $\sigma_1 > \sigma_2$, $(|\sigma_1| < |\sigma_2|)$, получим, используя формулу (11),

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = -\sin \varphi \, \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \tag{16}$$

Отсюда

$$\sigma_1 = k\sigma_2, \tag{17}$$

где

$$k = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = (\sqrt{1+f^2} - f)^2. \tag{18}$$

Таким образом, предельное напряженное состояние сыпучей среды характеризуется, в частности, тем, что отношение главных напряжений в любой ее точке одно и то же.

4°. Теперь представляется возможным пояснить гипотезу 3, введенную выше.

Представим себе сыпучую среду в форме прямоугольника (рис. 2), по граням которого действуют нормальные сжимающие напряжения σ_x и σ_y (касательное напряжение τ_{xy} равно нулю). Если

$$\sigma_y = k\sigma_x, \quad \sigma_x < 0, \quad |\sigma_y| > |\sigma_x|, \tag{19}$$

то среда находится в состоянии предельного равновесия. Ясно, что размеры прямоугольника могут изменяться лишь в направлении действия напряжений σ_y. При этом соотношения (19) должны сохраняться. В силу симметрии углы прямоугольника не будут искажаться. Следовательно, в данном случае тензор деформации (а также и тензор скоростей деформирования) коаксиален тензору напряжений.

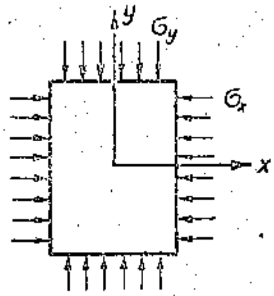

Рис. 2.

Рассмотрим теперь частицу движущейся среды в форме бесконечно малого прямоугольника, стороны которого ориентированы по главным направлениям тензора скоростей деформирования. Спустя бесконечно малый промежуток времени dt, длины сторон прямоугольника претерпят относительные удлинения

$$e_1 dt, \; e_2 dt, \tag{20}$$

где e_1 и e_2 — главные скорости деформирования. Углы прямоугольника скажутся при этом на величины высших порядков.

Таким образом, если отвлечься от перемещения частицы, соответствующего перемещению ее как абсолютно жесткого тела, то деформация происходит точно так же, как и в примере деформации среды в форме прямоугольника со сторонами, параллельными осям x и y. В силу симметрии силы, приложенные к периметру бесконечно малого прямоугольника, должны быть нормальны к сторонам прямоугольника, т. е. тензор напряжений должен иметь те же главные направления, что и тензор деформации.

Влияние изменения направления действия сил на стороны выделенной частицы вследствие ее бесконечно малого поворота за время dt, очевидно, приводит к поправкам высшего порядка малости. То же относится и к влиянию массовых сил и сил инерции. Таким образом, гипотеза 3 оправдана.

Заметим, что при условии

$$e_1 > e_2 \tag{21}$$

главные напряжения σ_1 и σ_2 должны удовлетворять неравенству

$$\sigma_1 > \sigma_2, \tag{22}$$

а так как оба они отрицательны, то

$$|\sigma_2| > |\sigma_1|. \tag{23}$$

Наибольшее по модулю главное сжимающее напряжение в теории сыпучей среды называется активным. Другое главное напряжение именуется пассивным.

5°. Обращаясь к кругу Мора или к аналитическим соотношениям сопротивления материалов, получаем следующее уравнение:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{24}$$

для отыскания угла θ между главным направлением тензора напряжения и осью x. Уравнение (24) допускает два решения, отличающиеся друг от друга на угол $\frac{\pi}{2}$, в соответствии с наличием двух взаимно перпендикулярных направлений двумерного тензора второго ранга.

Для тензора скоростей деформирования имеем аналогичную формулу

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{e_{xy}}{e_{xx} - e_{yy}}, \tag{25}$$

где ϑ — угол между главным направлением тензора деформации и осью x, а

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{26}$$

— скорости соответствующих удлинений и скорость сдвига.

В силу гипотезы 3 правые части формул (24) и (25) должны быть равны друг другу, что и приводит к уравнению (7).

6°. Уравнения движения непрерывной среды (5) и условие несжимаемости (6), отнесенные к полярной системе координат, имеют вид

$$\varrho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_\Theta\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\Theta}-\frac{v_\Theta^2}{r}\right)=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\Theta}}{\partial\Theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\Theta}{r}+\varrho F_r$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v_\Theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\Theta}{\partial r}+v_\Theta\frac{1}{r}\frac{\partial v_\Theta}{\partial\Theta}+\frac{v_r v_\Theta}{r}\right)=\frac{\partial\tau_{r\Theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\Theta}{\partial\Theta}+\frac{2\tau_{r\Theta}}{r}+\varrho F_\Theta \qquad (27)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\Theta}{\partial\Theta}=0. \qquad (28)$$

Здесь v_r и v_Θ — проекции скорости частицы соответственно на направление радиуса-вектора и на перпендикулярное к нему направление, F_r и F_Θ — проекции массовых сил на те же направления; σ_r, σ_Θ и $\tau_{r\Theta}$ — компоненты тензора напряжений в полярных координатах. Уравнения (7) и (8) в полярных координатах примут соответственно вид:

$$\frac{\dfrac{\partial v_\Theta}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial\Theta}-\dfrac{v_\Theta}{r}}{\dfrac{\partial v_r}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\Theta}{\partial\Theta}-\dfrac{v_r}{r}}=\frac{2\tau_{r\Theta}}{\sigma_r-\sigma_\Theta}, \qquad (29)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_r-\sigma_\Theta}{2}\right)^2+\tau_{r\Theta}^2}=-\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\cdot\frac{\sigma_r+\sigma_\Theta}{2}. \qquad (30)$$

7°. В случае движения с радиальной симметрией, при котором скорости всех частиц направлены по соответствующим радиусам-векторам, имеем

$$v_r=v_r(r,t),\quad v_\Theta=0. \qquad (31)$$

На основании пропорции (29) немедленно приходим к выводу, что

$$\tau_{r\Theta}=0. \qquad (32)$$

Второе из уравнений (27) при условии $\varrho F_\Theta=0$ обращается в тождество, а первое приводится к виду

$$\varrho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\Theta}{r}+\varrho F_r. \qquad (33)$$

Из условия несжимаемости —

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}=0 \qquad (34)$$

получаем, что

$$v_r=\frac{Q(t)}{r}, \qquad (35)$$

где $Q(t)$ — некоторая функция времени, имеющая простой механический смысл, ибо представляет собой с точностью до множителя 2π величину потока песка через окружность произвольного радиуса, окружающую начало координат. Выражение $2\pi Q(t)$ называется мощностью потока; в случае так называемого источника, когда

$$Q(t)>0 \qquad (36)$$

имеем

$$e_{rr}=\frac{\partial v_r}{\partial r}=-\frac{Q(t)}{r^2}<0,\quad e_{\Theta\Theta}=\frac{v_r}{r}=\frac{Q(t)}{r^2}>0. \qquad (37)$$

Следовательно, в соответствии с изложенным выше, главное напряжение σ_r является в данном случае активным, т. е.

$$|\sigma_r| > |\sigma_\theta|. \tag{38}$$

Нетрудно убедиться, что условие предельного напряженного состояния (30) приводится при учете неравенства (38) и тождества (32) к виду

$$\sigma_\theta = (\sqrt{1+f^2}-f)^2\,\sigma_r. \tag{39}$$

Напротив, в случае стока, т. е. при

$$Q(t) < 0, \tag{40}$$

активным напряжением является σ_θ, и условие предельного напряженного состояния оказывается следующим:

$$\sigma_\theta = (\sqrt{1+f^2}+f)^2\,\sigma_r. \tag{41}$$

Для решения конкретных задач следует заменить в уравнении (33) величину скорости v_r ее выражением через $Q(t)$ согласно формуле (35) и напряжение σ_θ через σ_r, пользуясь одним из равенств (39) или (41) в зависимости от знака $Q(t)$. Соответственно получим уравнение

$$\varrho\left(\frac{1}{r}\,\frac{dQ}{dt}-\frac{Q^2}{r^3}\right)=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{n\sigma_r}{r},\quad n=1-(\sqrt{1+f^2}-f)^2>0 \tag{42}$$

для случая источника и уравнение

$$\varrho\left(\frac{1}{r}\,\frac{dQ}{dt}-\frac{Q^2}{r^3}\right)=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{m\sigma_r}{r},\quad m=(\sqrt{1+f^2}+f)^2-1 \tag{43}$$

в случае стока.

8°. Уравнения (42) и (43) можно использовать и для отыскания предельного равновесия сыпучей среды, имеющей форму полого бесконечного цилиндра. Для этой цели следует считать мощность источника или стока бесконечно малой величиной и положить в упомянутых уравнениях $Q(t)=0$, после чего они обращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Интегрируя их, получаем, что при одном и том же давлении p_a на внутренней границе цилиндра $r=a$ давление p_b на внешней границе $r=b$ должно быть равно значению

$$p_{b\,\min}=\left(\frac{a}{b}\right)^n p_a \tag{44}$$

в случае бесконечно медленного расширения цилиндра и

$$p_{b\,\max}=\left(\frac{b}{a}\right)^m p_a \tag{45}$$

при бесконечно медленном его обжатии.

Промежуточным значениям давления p_b соответствует непредельное состояние равновесия цилиндра, при котором равенство (3) может не достигаться ни в одной точке среды.

Интересно отметить, что при обращении в нуль одного из давлений p_a или p_b равновесие сыпучей среды невозможно.

9°. При внезапных очень больших давлениях, действующих на песчаную среду в течение весьма малого промежутка времени, определение поля скоростей среды сводится к решению дифференциальных уравнений в импульсах напряжения.

Пусть, например, на внешней границе покоящегося полого песчаного цилиндра внезапно возникло давление p_b, имеющее характер импульса с интенсивностью I_b. Интегрируя левую и правую части уравнения (43) по времени в исчезающем малом интервале времени $0 \leqslant t \leqslant$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{ds_r}{dr} - \frac{ms_r}{r} = \frac{\varrho Q}{r}. \tag{46}$$

Здесь Q — мощность внезапно возникшего стока и s_r — импульс напряжения σ_r.

Интеграл уравнения (46)

$$s_r = C\left(\frac{b}{r}\right)^{-m} - \frac{\varrho Q}{m} \tag{47}$$

должен удовлетворять двум граничным условиям

$$s_r(a) = 0$$
$$s_r(b) = -I_b. \tag{48}$$

Это дает возможность определить мощность стока Q; имеем

$$Q = -\frac{mI_b}{\varrho\left[\left(\frac{b}{a}\right)^m - 1\right]}. \tag{49}$$

Учитывая формулу (35), получим следующий закон распределения скоростей в песчаном цилиндре в мгновение времени, непосредственно следующее за импульсом:

$$v_r = -\frac{mI_b}{\varrho\left[\left(\frac{b}{a}\right)^m - 1\right]} \cdot \frac{1}{r}. \tag{50}$$

При $m \to 0$ получаем известное выражение

$$v_r = -\frac{I_b}{\varrho \ln\frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{r} \tag{51}$$

для распределения скоростей идеальной несжимаемой жидкости в результате импульсивного обжатия полого цилиндра.

10°. Последующее движение полого песчаного цилиндра определяется исходным уравнением (43) при соответствующих граничных условиях на внешней и внутренней границах цилиндра.

Уравнение (43), после умножения обеих его частей на r^{-m}, допускает частную интеграцию по переменной r, в результате которой образуется соотношение

$$r^{-m}\sigma_r = \varrho\left(\frac{r^{-m-2}}{m+2}Q^2 - \frac{r^{-m}}{m}\frac{dQ}{dt}\right) + f(t), \tag{52}$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени. Эту функцию нетрудно исключить из дальнейшего рассмотрения следующим приемом. Согласно соотношению (52) справедливы следующие два равенства:

$$-a^{-m}p_a = \varrho\left(\frac{a^{-m-2}}{m+2}Q^2 - \frac{a^{-m}}{m}\frac{dQ}{dt}\right) + f(t),$$

$$-b^{-m}p_b = \varrho\left(\frac{b^{-m-2}}{m+2}Q^2 - \frac{b^{-m}}{m}\frac{dQ}{dt}\right) + f(t). \tag{53}$$

Приравнивая друг другу разности левых и правых частей последних равенств, получаем уравнение

$$\frac{a^{-m}-b^{-m}}{m}\frac{dQ}{dt} - \frac{a^{-m-2}-b^{-m-2}}{m+2}Q^2 = \frac{a^{-m}p_a - b^{-m}p_b}{\varrho}, \tag{54}$$

в котором величины p_a и p_b могут быть, как правило, функциями времени и внешнего и внутреннего радиусов цилиндра a и b. Последние связаны соотношением

$$b^2 = a^2 + c^2, \tag{55}$$

где c — постоянная. Это соотношение выражает постоянство площади сечения цилиндра при его деформации и является, в сущности, следствием условия несжимаемости (34).

Переменные $Q(t)$ и $a(t)$, содержащиеся в уравнении (54), также связаны между собой. Действительно, значение скорости v_r на внутренней границе цилиндра равно производной $\frac{da}{dt}$. Используя это обстоятельство, получаем согласно формуле (35)

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{a}Q(t). \tag{56}$$

Исключая посредством соотношений (55) и (56) из уравнения (54) переменные $Q(t)$ и $b(t)$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно единственной искомой функции $a(t)$

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{1}{a}\left[1 - \frac{m}{m+2}\cdot\frac{a^{-m-2} - (a^2+c^2)^{-\frac{m}{2}-1}}{a^{-m} - (a^2+c^2)^{-\frac{m}{2}}}\cdot a^2\right]\left(\frac{da}{dt}\right)^2 =$$

$$= \frac{m}{\varrho a}\cdot\frac{a^{-m}p_a - (a^2+c^2)^{-\frac{m}{2}}p_b}{a^{-m} - (a^2+c^2)^{-\frac{m}{2}}}. \tag{57}$$

Это уравнение в случае $p_a = p_b = \mathrm{const}$ интегрируется в квадратурах, и в случае, если p_a и p_b не зависят от времени, — допускает понижение порядка.

В случае $p_a = p_b = 0$ проще всего исходить непосредственно из уравнения (54). Замечая, что

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{dQ(a)}{da}\cdot\frac{da}{dt} = \frac{1}{a}Q(a)\frac{dQ(a)}{da}, \tag{58}$$

следует представить его, используя соотношение (55), в виде

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{da}=\frac{m}{m+2}\cdot\frac{a^{-m-2}-(a^2+c^2)^{-\frac{m}{2}-1}}{a^{-m}-(a^2+c^2)^{-\frac{m}{2}}}a. \tag{59}$$

Обе части последнего равенства являются логарифмическими производными, вследствие чего имеем

$$Q=C\left[a^{-m}-(a^2+c^2)^{-\frac{m}{2}}\right]^{-\frac{1}{m+2}}, \tag{60}$$

где C — постоянная интеграции, определяемая из начальных условий движения. Далее, согласно соотношению (56) получим

$$t=\frac{1}{C}\int\limits_{a_0}^{a}\left[a^{-m}-(a^2+c^2)^{-\frac{m}{2}}\right]^{\frac{1}{m+2}}a\,da, \tag{61}$$

где a_0 — начальное значение внутреннего радиуса цилиндра. Интеграл (61) при $a\to 0$ сходится, что позволяет получить выражение для продолжительности времени исчезновения внутренней полости цилиндра

$$T=-\frac{1}{v_0 a_0}\left[a^{-m}-(a^2+c^2)^{-\frac{m}{2}}\right]^{-\frac{1}{m+2}}\int\limits_{0}^{a_0}\left[a^{-m}-(a^2+c^2)^{-\frac{m}{2}}\right]^{\frac{1}{m+2}}a\,da. \tag{62}$$

Здесь v_0 — начальное значение скорости частиц на внутренней границе цилиндра.

11°. Заметим, что уравнением (42), которое описывает процесс осесимметрического расширения песка, можно пользоваться лишь в том случае, если в результате его решения напряжение σ_r оказывается отрицательным. В частности, по этой причине уравнение (42) не может быть использовано при решении задачи о расширении полого цилиндра, если давление на его границах отсутствует. Случай возникновения отрицательных давлений физически соответствует распадению сплошной среды на отдельные частицы, каждая из которых совершает движение по инерции. Возможны и такие случаи движения песка, при которых происходит постепенное распадение среды на частицы со своеобразной «волной распадения». Наконец, в некоторых случаях может происходить и обратное явление — собирание песка в квази-сплошную среду на внешней границе ускоренно расширяющегося полого цилиндра.

12°. Рассмотрим теперь другой случай движения песка при наличии радиальной симметрии. Именно, пусть движение таково, что радиальная составляющая скорости частиц v_r отсутствует и, следовательно, в силу уравнения несжимаемости (28) трансверсальная составляющая v_θ является функцией только координаты r и времени t.

Далее, на основании пропорции (29) получаем, что

$$\sigma_r=\sigma_\theta. \tag{63}$$

Кроме того, очевидно, что знак касательного напряжения $\tau_{r\theta}$ должен совпадать со знаком скорости деформации сдвига

$$\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r},$$

иначе не будет соблюдено соответствие между направлениями наибольшего по модулю (активного) напряжения и деформации сжатия эленентов песчаной среды. Для определенности будем считать знак напряжения $\tau_{r\theta}$ положительным.

Условие (30), которому удовлетворяют компоненты тензора напряжения, сводится в нашем случае к соотношению

$$\tau_{r\theta} = -\alpha\sigma_r, \tag{64}$$

где

$$\alpha = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}. \tag{65}$$

В свою очередь уравнения движения песчаной среды (27) принимают вид

$$-\varrho\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial\sigma_r}{\partial r}, \tag{66}$$

$$\varrho\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r}. \tag{67}$$

Умножим обе части уравнения (66) на $-\alpha$ и учтем соотношение (64). Получим равенство

$$\alpha\varrho\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}, \tag{68}$$

используя которое совместно с уравнением (67), приходим к формуле

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2}\varrho\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial t} - \alpha v_\theta^2\right) \tag{69}$$

для определения напряжения $\tau_{r\theta}$, если известна скорость движения частиц v_θ как функция переменных r и t.

Подставляя согласно последней формуле выражение $\tau_{r\theta}$ в равенство (68), приходим к следующему уравнению в частных производных относительно искомой функции v_θ:

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r\,\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial t} - 2\alpha\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\right) = 0, \tag{70}$$

которое можно представить также в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial t}(rv_\theta) = 2\alpha\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta). \tag{71}$$

Уравнение (70) принадлежит к гиперболическому типу. Его характеристиками являются в плоскости rt два семейства прямых $t = \mathrm{const}$ и $r = \mathrm{const}$.

13°. Нетрудно, не обращаясь к общей теории дифференциальных уравнений гиперболического типа, получить известные дифференциальные соотношения на этих характеристиках. Действительно, так как

$$d\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r\,\partial t}dr + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial t^2}dt \tag{72}$$

$$d\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}dr + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r\,\partial t}dt, \tag{73}$$

то на первом семействе характеристик ($t = \mathrm{const}$, $dt = 0$), имеем

$$d\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r\,\partial t}dr. \tag{74}$$

Используя уравнение (70), можно исключить из последнего равенства смешанную производную от искомой функции v_θ по переменным r и t. В результате приходим к первому дифференциальному соотношению

$$d\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}\right)=\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+2\alpha\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\right)\right]dr. \tag{75}$$

Аналогично получаем дифференциальное соотношение на втором семействе характеристик, именно:

$$d\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)=\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+2\alpha\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\right)\right]dt. \tag{76}$$

К сожалению, дифференциальные соотношения (75) и (76) не допускают интегрирующих комбинаций, вследствие чего исходное уравнение (70) не может быть существенно упрощено.

14°. Конкретные задачи могут быть решены посредством обычного метода замены дифференциальных соотношений (75) и (76) приближенными конечно-разностными. Таким образом, можно, например, решить задачу Гурса об отыскании функции v_θ по заданным ее значениям на двух характеристиках.

Сюда относится задача об определении движения песка, если известны значения скорости v_θ как функции переменной r для начального мгновения времени и закон изменения ее во времени на одной из границ среды.

При решении задач подобного рода следует иметь в виду возможность постепенного образования или, напротив, исчезновения зон, в которых деформация сыпучей среды отсутствует. В этих зонах равенство (3) в общем случае не осуществляется. Кроме того, возможно образование линий разрыва $r=\text{const}$ значений скорости v_θ. На этих линиях следует считать, что

$$|\tau_{r\theta}|=-f\sigma_r. \tag{77}$$

15°. Простейшим примером образования линии разрыва является случай стационарного движения песка, занимающего область $a\leqslant r\leqslant b$, при следующих условиях на границах

$$v_\theta(a)=v_\theta^\circ=\text{const}, \tag{78}$$

$$v_\theta(b)=0. \tag{79}$$

Такое движение оказывается невозможным. Действительно, согласно уравнению (70) либо должно иметь место равенство $v_\theta=0$, либо функция v_θ удовлетворяет уравнению в обыкновенных производных

$$\frac{dv_\theta}{dr}+\frac{v_\theta}{r}=0, \tag{80}$$

решение которого имеет вид

$$v_\theta=\frac{C}{r}. \tag{81}$$

В обоих случаях нельзя удовлетворить одновременно обоим граничным условиям (78) и (79).

Вместе с тем, если, например, рассмотреть более сложный случай движения песка, при котором $v_r\neq 0$, то, как нетрудно показать, при

тех же граничных
решение в предела
или $r\to 0$, причем
Заметим, что
ально пластическо

1. C. Coulomb
blemes de statique, rel
des sc. de Paris, 1773.
2. В. В. Сокол

Поступила 25 августа
Киев.

ючить из последнего равен
функции v_θ по переменны
дифференциальному соотно-

$$+\frac{v_\theta}{r}\Big)\Big]\, dr. \qquad (75)$$

тношение на втором семей

$$+\frac{v_\theta}{r}\Big)\Big]\, dt. \qquad (76)$$

ния (75) и (76) не допус
е чего исходное уравнение

лены посредством обычного
ий (75) и (76) приближен
можно, например, решить
заданным ее значениям на

движения песка, если из-
еременной r для начального
времени на одной из границ

дует иметь в виду возмож-
ив, исчезновения зон, в ко-
ет. В этих зонах равенство
ме того, возможно образо-
рости v_θ. На этих линиях

(77)

линии разрыва является
ающего область $a \leqslant r \leqslant b$,

(78)

(79)

Действительно, согласно
о равенство $v_\theta = 0$, либо
кновенных производных

(80)

(81)

ременно обоим граничным

сть более сложный случай
к нетрудно показать, при

ех же граничных условиях (78) и (79) задача допускает решение. Это решение в пределе, при $v_r \to 0$, приводит к разрыву скорости v_θ на линии $r = a$, причем всюду при $r > a$, $v_\theta \to 0$.

Заметим, что то же самое имеет место для аналогичной задачи идеально пластической среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Coulomb, Application des regles de maximis et minimis a quelques problemes de statique, relatifs a l' architecture. Memoires de savants étrangérs de l' Acad. des sc. de Paris, 1773.
2. В. В. Соколовский, Статика сыпучей среды, Изд-во АН СССР, 1942.

Поступила 25 августа 1954 г.
Киев.