1955 ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА Том I, в. 1.
ВІДДІЛ ТЕХНІЧНИХ НАУК АН УРСР

ПРО КОВЗНИЙ РУХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

О. Ю. Ішлінський

(Київ)

1°. Нехай динамічна система описується сукупністю диференціальних рівнянь*)

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

в яких деякі з функцій $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мають розриви першого роду на гіперповерхнях

$$F_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Розв'язок сукупності рівнянь (1) можна інтерпретувати, як завдання траєкторії якоїсь точки P в прямокутній системі координат x_1, $x_2, \ldots, x_n$ багатомірного фазового простору при довільному вихідному положенні цієї точки

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0 \tag{3}$$

в початковий момент часу $t = t^0$.

Диференціальні рівняння (1) визначають вектор швидкості згаданої точки P, як функцію координат її поточного місцеперебування.

На поверхнях розриву вектор швидкості, по суті, не визначений.

Розглянемо яку-небудь точку S однієї поверхні розриву. Обмежимось тим випадком, коли вектор швидкості неперервний в кожній з двох малих областей, які оточують цю точку з обох боків поверхні розриву.

Якщо в кожній із згаданих областей наближатись до точки S, то граничні напрямки вектора швидкості виявляться різними. Будемо вважати, що модулі цих граничних векторів відмінні від нуля, а напрямки не лежать в дотичній площині до поверхні розриву, побудованої в точці S.

В цьому випадку для кожної з областей можна побудувати свою траєкторію, на якій розміщена точка S. Якщо проекції граничних векторів на нормаль до поверхні розриву мають один і той же знак, то ці обидві криві можна вважати складовими частинами однієї і тієї ж траєкторії фазової точки P. Точка P рухається по цій траєкторії в одному напрямку (рис. 1), причому при проходженні через поверхню розриву швидкість точки різко змінюється як по величині, так і по напрямку.

Якщо ж згадані проекції мають протилежні знаки, то точка P або віддаляється від поверхні розриву, як би близько не було її початкове положення на одній з цих кривих, або, навпаки, з обох боків попадає в точку S, і надалі її рух уже не може підлягати диференціальним рівнянням (1).

*) Розділ 1° при першому читанні може бути пропущений.

Вважають, звичайно, що далі точка P залишається на поверхні розриву і продовжує рухатися уже з меншим на одиницю числом вільних координат (рис. 2). Такий рух називається ковзним. Можливо виникнення ковзного руху ще з меншим числом степенів свободи, якщо точка P виявиться на перетині декількох поверхень розриву. Можна ввести також поняття нестійких ковзних рухів і ряд інших понять в залежності від поведінки функцій $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ поблизу поверхень розриву (2).

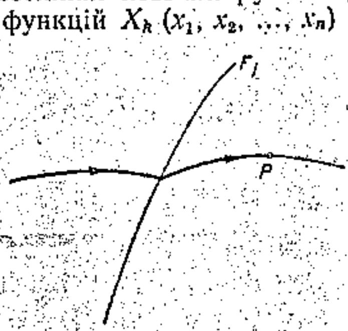

Рис. 1.

Рис. 2.

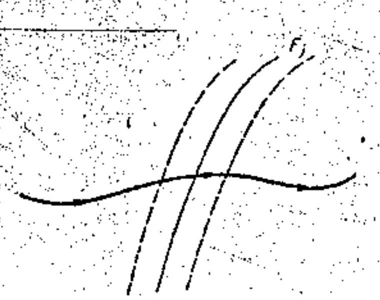

Рис. 3.

Рис. 4.

Припущення про те, що при ковзному русі фазова точка P залишається на поверхні розриву, має чисто геометричний характер. Його не можна прийняти за строге обгрунтування ковзного режиму реальних динамічних систем. Разом з тим функції $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при наявності в них розривів першого роду являються своєрідними абстракціями дійсних представлень швидкостей динамічної системи через її координати.

Природно при цьому розглядати рух динамічної системи, яка підлягає сукупності диференціальних рівнянь (1), як граничний для якоїсь другої динамічної системи, у якої праві частини відповідних диференціальних рівнянь є неперервні функції координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають границею функції $X_k(x_1 x_2 \ldots x_n)$ *). З цією метою можна, наприклад, розглядати сукупність диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (4)$$

*) В деяких випадках функції $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можуть бути граничними для деяких функцій, двозначних у вузькій області між двома граничними поверхнями, близькими до поверхні розриву, що знаходяться від неї по різні боки.

Вводячи поняття двох просторів, що проникають один в одного в цій області, а також правила переходу фазової точки з одного простору в другий при досягненні відповідної границі, можна і в цьому випадку обгрунтувати ковзні режими динамічних систем. Для випадку $n = 2$ це зроблено В. В. Петровим та Г. М. Улановим в їх сумісній роботі, де вони використали багатолисті площини, які багато в чому нагадують риманові поверхні. Згадані багатозначності зустрічаються на практиці при дослідженні поведінки схем автоматичного регулювання, що містять в собі реле з затриманням або аналогічні інші елементи.

де функції $X_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неперервні і збігаються з функціями $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ всюди, крім вузьких областей, що охоплюють поверхні розриву (2) і зникають при граничному переході. При наближенні товщини цих областей до нуля можна чекати, що фазові траєкторії, розміщені всередині них або вироджуються в точки, або в криву, які розміщуються на поверхні F_j. Останні відповідають ковзним режимам.

Вибір значень функцій $X_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в цих вузьких областях в достатній мірі довільний.

Доказ незалежності результату граничного переходу від згаданого вибору являє собою цікаву математичну задачу. Як правило, для реальних динамічних систем вид неперервних функцій $X_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, які мають границею функції $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, являється відомим.

2°. Приведені загальні міркування ілюструються нижче на прикладі однієї гіроскопічної системи.

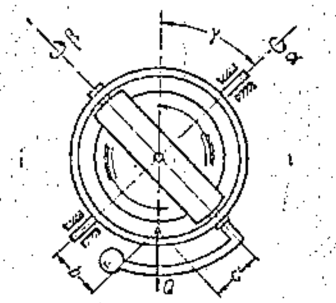

Рис. 5.

Граничні переходи, які приводять до ковзних режимів, вимагають тут порівняно громіздких викладок, зв'язаних з використанням фактичного розв'язку сукупності диференціальних рівнянь типу (4) з неперервними кусочно-лінійними правими частинами. Здається, що після розвитку математичних досліджень, які відносяться до розглянутого питання в його загальній постановці, подібні викладки можуть бути в значній мірі скорочені.

Таким чином, звернемось тепер до дослідження руху гіроскопічного маятника, вісь зовнішнього кільця якого відхилена від вертикалі на кут γ, а центр тяжіння системи ротор — внутрішнє кільце зміщений від точки перетину всіх осей карданового підвісу на віддаль b вздовж осі внутрішнього кільця (або кожуха, при іншому конструктивному оформленні гіромаятника) і на віддаль c вздовж осі зовнішнього кільця підвісу (рис. 5).

Якщо зберігається умова

$$b = c \cdot \operatorname{tg} \gamma, \tag{5}$$

то в положеннях рівноваги центр тяжіння системи ротор — внутрішнє кільце розміщений на одній вертикалі з центром карданового підвісу, якщо, звичайно, не враховувати вплив на гіроскоп кутової швидкості Землі і вважати його корпус нерухомим (відносно Землі).

Малі повороти зовнішнього і внутрішнього карданових кілець від того положення рівноваги, при якому центр тяжіння розміщений нижче центра підвісу, позначимо відповідно через α і β.

Користуючись відомими прийомами теорії гіроскопів [1, 2], можна одержати такі рівняння малих рухів гіромаятника поблизу положення рівноваги:

$$\begin{aligned} H\frac{d\alpha}{dt} &= -(c\alpha\sin\gamma + c\beta\cos\gamma)\,Q, \\ H\frac{d\beta}{dt} &= (b\alpha\sin\gamma + c\beta\sin\gamma)\,Q - K(\beta), \end{aligned} \tag{6}$$

де H — власний кінетичний момент гіроскопа і

Q — вага системи ротор — внутрішнє кільце карданового підвісу.

Так звані інерційні члени та моменти тертя в осях підвісу в рівняннях (6) ігноруються. Момент $K(\beta)$ являє собою штучно створену дію на зовнішнє кільце карданового підвісу з допомогою спеціального устрою (електричного, пневматичного та ін.). Графік залежності цієї дії від кута β зображений на рис. 6, причому

$$m(x) = \frac{K(\beta)}{bQ}, \qquad x = \beta \cos \gamma. \tag{7}$$

Функція $K(\beta)$ має, таким чином, розрив першого роду в точці $\beta = 0$. Будемо вважати, що функція $K(\beta)$ являється граничною при $\beta_1 \to 0$ для функції $K^*(\beta)$, характер зміни якої в залежності від кута β установлюється графіком, зображеним на рис. 7 *).

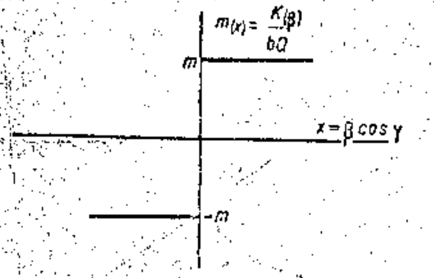

Рис. 6.

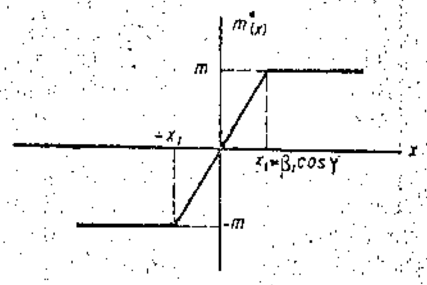

Рис. 7.

Беручи до уваги співвідношення (5) та (7) і вводячи нові змінні

$$x = \beta \cos \gamma \quad \text{та} \quad y = \alpha \sin \gamma, \tag{8}$$

можна привести сукупність диференціальних рівнянь (6) до вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = x + y - m(x),$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{l}{}(x + y). \tag{9}$$

Тут τ — безрозмірний час, зв'язаний із змінною t співвідношенням

$$t = \frac{H}{bQ \cos \gamma} \tau. \tag{10}$$

Якщо $x > 0$, то

$$m(x) = +m, \tag{11}$$

причому m — постійна величина.

---

*) Рівняння (6), як було відмічено вище, описують так званий прецесійний рух гіроскопічної системи без врахування нутацій.

Нутаційні рухи гіроскопічної системи відбуваються з більшою частотою і, як правило, швидко затухають. Однак вони виникають знову при всякій різкій зміні сил, які діють на гіроскопічну систему.

Внаслідок цього неврахування нутаційних рухів при перервному характері зміни моменту $K(\beta)$, як функції кута β (рис. 6), може стрінути заперечення, особливо, при обгрунтуванні ковзних режимів руху гіроскопічної системи. Особливо істотними такі заперечення можуть виявитись для систем силової гіроскопічної стабілізації, де нутаційні коливання дуже помітні, і в ряді випадків потрібний спеціальний розрахунок системи на стійкість.

Однак для системи індикаторного типу уже при достатньо малих значеннях так званої зони лінійності $-\beta_1 < \beta < \beta_1$ графіка моменту $K(\beta)$ (рис. 7) нутаційні рухи зовсім не помітні.

Отже, хоч строго кажучи для перервної функції $m(\beta)$ згадані заперечення залишаються в силі для любої гіроскопічної системи, для систем індикаторного типу врахування нутаційних рухів не потрібне.

Рівняння (9) мають в цьому випадку розв'язок

$$x = -\frac{m\tau^2}{2} + (x_0 + y_0 - m)\tau + x_0,$$

$$y = \frac{m\tau^2}{2} - (x_0 + y_0)\tau + y_0, \tag{12}$$

де x_0 та y_0 вихідні значення відшукуваних функцій $x(\tau)$ та $y(\tau)$ в момент часу $\tau = 0$; величина x_0 мусить бути додатною.

На фазовій площині розв'язкові (12) відповідають фазові траєкторії, що являються дугами парабол

$$y = \frac{(x+y)^2 - (x_0 + y_0)^2}{2m} + y_0. \tag{13}$$

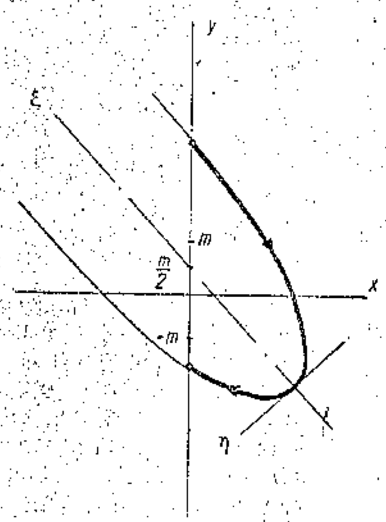

Рис. 8.

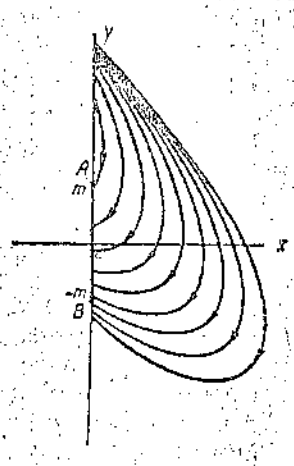

Рис. 9.

Ці дуги (рис. 8) розміщені в правій півплощині ($x > 0$) і упираються своїми кінцями в вісь y.

Вершини парабол (13) розміщені на прямій

$$x + y = \frac{m}{2}. \tag{14}$$

Всі вони мають загальну вісь симетрії, що створює з віссю x кут $\frac{3\pi}{4}$, і можуть бути побудовані за допомогою одного і того ж шаблону, викресленого відповідно рівнянню

$$\eta^2 = \frac{m}{\sqrt{2}}\xi. \tag{15}$$

Рух фазової точки по кожній з траєкторій (13) відбувається так, що вектор швидкості цієї точки повертається по стрілці годинника.

Легко впевнитись, що початок всіх траєкторій правої півплощини розміщений на осі y вище точки A з координатами $x = 0$, $y = +m$. Кінці траєкторій упираються в вісь нижче цієї точки (рис. 9).

Аналогічно можуть бути побудовані фазові траєкторії для випадку $x < 0$, при якому

$$m(x) = -m. \tag{16}$$

Ці траєкторії цілком розміщені в лівій півплощині, вони можуть бути одержані з траєкторій правої півплощини за допомогою повороту цієї півплощини на кут π навколо початку координат або, що те ж саме, за допомогою двох послідовних дзеркальних відображень траєкторій — відносно осі x і далі відносно осі y. Траєкторії лівої півплощини починаються на осі y нижче точки B з координатами $x = 0$, $y = -m$ і упираються в ту ж вісь всюди вище цієї точки.

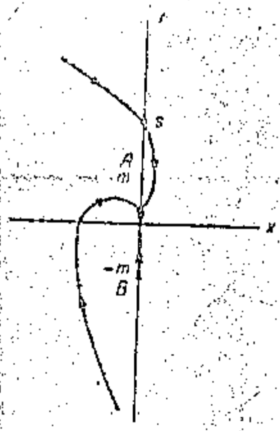

Рис. 10.

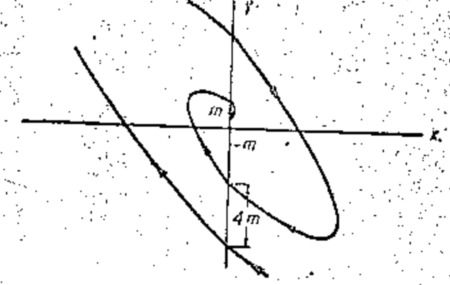

Рис. 11.

Розглянемо тепер якусь точку S осі y, що являється лінією розриву для функції $m(x)$ (рис. 10). Якщо точка S розміщена поза відрізком $(-m, m)$, тобто або вище точки A, або нижче точки B, то вона являється одночасно кінцем траєкторії, розміщеної в одній півплощині (наприклад, лівій) і початком траєкторії, розміщеної в другій півплощині (наприклад, правій). Ясно, що така точка осі y не являється точкою ковзання, і фазова точка P з поточними координатами x та y при своєму русі може без перешкод перетинати вісь y, переходячи з однієї півплощини в іншу.

Фазова траєкторія являє собою в цьому випадку вид спіралі, зіставленої з дуг описаних вище парабол; вона перетинає вісь y в точках, кожна наступна з яких ближче до початку координат, ніж попередня, на відрізок довжиною $2m$ (рис. 11).

Остання з цих дуг буде упиратись в одну з точок відрізка AB. Дальший рух фазової точки P з переходом в іншу півплощину виявляється тепер вже неможливим. Дійсно, в точки відрізка AB упираються кінці траєкторій як лівої, так і правої півплощин. Отже, фазові точки, що знаходяться безпосередньо поблизу цього відрізка (за винятком, можливо, деяких точок, близьких до його кінців A та B), можуть до цього відрізка тільки наближатись (рис. 10).

В силу викладеного вище залишається припустити, що рух фазової точки, після того як вона опиниться на відрізку AB, буде ковзним. Зауважимо, що граничні вектори швидкості фазової точки, яка потрапила з будь-якої півплощини на верхню половину відрізка AB, мають від'ємні проекції на вісь y, а на нижню половину, навпаки, додатні (рис. 10). Можна, таким чином, чекати, що ковзний рух відбувається в напрямі початку координат, який є положенням рівноваги нашої динамічної системи.

Звертаючись до диференціальних рівнянь (9) і покладаючи в них $x = 0$, помічаємо, що перше з них не має змісту, оскільки функція $m(x)$

при $x = 0$ невизначена. Друге рівняння буде мати вигляд

$$\frac{dy}{d\tau} = -y, \tag{17}$$

звідки випливає, що

$$y = y_0 e^{-(\tau - \tau_0)}, \tag{18}$$

де y_0 — ордината фазової точки в момент часу $\tau = \tau_0$ початку її ковзання по відрізку AB.

Легко помітити, що геометричні і аналітичні міркування приводять до одного і того ж якісного висновку про ковзний рух фазової точки до початку координат.

Як уже згадувалось вище, при обговоренні проблеми ковзних рухів в загальному випадку, подібні міркування, основані на припущеннях геометричного і аналітичного характеру, не можуть вважатись переконливими при описанні рухів реальних систем.

3°. Тому розглянемо рух, що описується сукупністю диференціальних рівнянь (9), як граничний для другого руху, диференціальне рівняння якого

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= x + y - m^*(x), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -(x + y), \end{aligned} \tag{19}$$

має неперервну функцію $m^*(x)$, визначену графіком, зображеним на рис. 7.

Розглянемо тепер фазові траєкторії, що відповідають диференціальним рівнянням (19). В залежності від інтервалу зміни величини x ці рівняння мають різний аналітичний вигляд; а саме, при $x > x_1$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= x + y - m, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -(x + y), \end{aligned} \tag{20}$$

далі при $-x_1 < x < x_1$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= x + y - kx, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -(x + y), \end{aligned} \tag{21}$$

де

$$k = \frac{m}{x_1}. \tag{22}$$

Нарешті, при $x < x_1$, рівняння набирають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= x + y + m, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -(x + y). \end{aligned} \tag{23}$$

Розв'язок сукупності диференціальних рівнянь (20) уже був наведений вище, він виражається формулами (12) в яких, однак, потрібно тепер вважати $x_0 > x_1$. Якщо у всіх членів правих частин формул (12) змінити знак на обернений, то одержимо розв'язок сукупності диференціальних рівнянь (23), причому потрібно вважати $x_0 < -x_1$.

Нарешті, сукупність диференціальних рівнянь (21) являється однорідною і лінійною, розв'язок її має такий вигляд:

$$x = e^{-\frac{k}{2}\tau}\left[x_0 \operatorname{ch} n\tau - \frac{(k-2)\,x_0 - 2y_0}{2n} \operatorname{sh} n\tau\right],$$
$$y = e^{-\frac{k}{2}\tau}\left[y_0 \operatorname{ch} n\tau + \frac{(k-2)\,y_0 - 2x_0}{2n} \operatorname{sh} n\tau\right], \tag{24}$$

де

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)}\,. \tag{25}$$

Граничний перехід від сукупності диференціальних рівнянь (19) до рівнянь (9) відбувається при умові $x_1 \to 0$, або, що те ж саме, при $k \to \infty$. В зв'язку з цим число n можна вважати додатним. В такому випадку формули (24) зображують асимптотичний рух фазової точки з координатами x та y до початку координат. Легко показати, що всі фазові траекторії дотикаються в початку координат до прямої

$$y = \left[\frac{k}{2} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)}\right]x, \tag{26}$$

кутовий коефіцієнт якої зростає разом з коефіцієнтом k. Розв'язок (24) справедливий тільки при зміні x в інтервалі $(-x_1, +x_1)$; поза цими границями мають силу формули (12) при $x > x_1$ та їм аналогічні при $x < -x_1$.

Нехай в результаті свого руху фазова точка P опинилась на прямій $x = -x_1$ в якомусь місці з ординатою y_1. Через те, що пряма $x = -x_1$ не являється лінією розриву, то далі рух фазової точки відбуватиметься в області $-x_1 < x < +x_1$ відповідно формулам (24). Може трапитися, що в цьому випадку точка P через деякий час попаде на пряму $x = x_1$ і перейде далі в область $x > x_1$, де її рух буде відбуватись відповідно формулам (12), поки вона знову не вернеться в область $-x_1 < x < +x_1$. Можливий і такий рух, при якому точка P, опинившись в області $-x_1 < x < x_1$, вже її не залишить. Той чи інший вид руху залежить від того, більше чи менше величини x_1 максимальне значення перемінної величини x при її зміні відповідно першій формулі (24). Це в свою чергу залежить від ординати y_0 початку траекторії фазової точки P в області $-x_1 < x < +x_1$.

Далі буде показано таке: якщо $y_1 > m$ (а також, якщо $y_1 < -m$), то при достатньо малому x_1 траекторія, що визначається рівняннями (24), перетинає пряму $x = +x_1$. При цьому час перебування фазової точки між прямими $x = -x_1$ та $x = +x_1$ прямує до нуля разом з x_1.

В граничному випадку при $x_1 \to 0$ одержимо, що точка P при $y_1 > m$ переходить з лівої фазової півплощини в праву, не затримуючись на осі y.

Навпаки, при $-m < y_1 < m$ виявляється, що траекторія фазової точки при достатньо малому x_1, взагалі не залишає області $-x_1 < x < +x_1$ і асимптотично наближається до початку координат $x = y = 0$.

В граничному випадку при $x_1 \to 0$ цей рух обертається в ковзний по осі y_1, що відбувається по закону (18). Доказ справедливості вказаних вище тверджень рівносильний строгому обгрунтуванню закономірностей ковзного режиму розглянутої динамічної системи, через те що при $x_1 \to 0$, неперервна функція $m^*(x)$ має своєю границею функцію $m(x)$ з розривом першого роду в точці $x = 0$.

Отже, перейдемо до детального розгляду поведінки інтегральних кривих, які визначаються рівняннями (24). Як уже було відмічено вище, всі вони в границі при $t \to \infty$ дотикаються до прямої (26). Частина кривих, які проходять через точки прямої $x = -x_1$, взагалі не перетинає вісь y.

Дійсно, якщо початкове положення фазової точки P при $\tau = 0$ визначається координатами

$$x = -x_1, \quad y = y_0, \tag{27}$$

то згідно з першим рівнянням (24) момент часу, коли фазова точка попадає на вісь y, визначається трансцендентним рівнянням

$$\operatorname{th} n\tau = \frac{2nx_1}{(k-2)\,x_1 + 2y_0}. \tag{28}$$

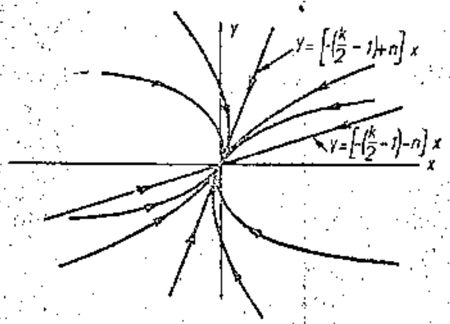

Рис. 12.

При достатньо великому k це рівняння має додатні корені при умові

$$y_0 > \left(n - \frac{k-2}{2}\right)x_1 = \left[-\left(\frac{k}{2}-1\right) + \frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)}\right]x_1. \tag{29}$$

Загальний вигляд сімейства інтегральних кривих, що визначаються рівнянням (21), зображений на рис. 12. В точці $x = y = 0$ це сімейство створює вузол.

Таким чином, якщо

$$y_0 < \left(n - \frac{k-2}{2}\right)x_1, \tag{30}$$

то відповідні криві повністю залишаються при всіх значеннях $\tau > 0$ в смузі $-x_1 < x < 0$.

Нехай умову (29) виконано; тоді фазова точка в деякий момент часу перетне вісь y і далі, досягнувши якоїсь максимальної абсциси x_m, буде асимптотично наближатись до початку координат. Похідна функція $x(\tau)$ по часу має, згідно з формулами (24), вигляд:

$$\frac{dx}{d\tau} = e^{-\frac{k}{2}\tau}\left\{[y_0 - (k-1)\,x_0]\operatorname{ch} n\tau + \frac{(k^2-3k)\,x_0 - ky_0}{2n}\operatorname{sh} n\tau\right\}. \tag{31}$$

Отже, момент часу $\tau = \tau_m$, що відповідає максимальному значенню абсциси точки P, визначається трансцендентним рівнянням

$$\operatorname{th} n\tau_m = 2n\,\frac{(k-1)\,x_0 - y_0}{(k^2-3k)\,x_0 - ky_0}, \tag{32}$$

в якому потрібно покласти $x_0 = -x_1$.

Рівняння (32) завжди має додатний корінь τ_m, через те що нерівність

$$2n\left[(k-1)\,x_1 + y_0\right] < (k^2-3k)\,x_1 + ky_0 \tag{33}$$

рівнозначна нерівності (29) в зв'язку з наявністю тотожності

$$n - \frac{k-2}{2} = \frac{2n(k-1) - (k^2-3k)}{k-2n}. \tag{34}$$

Ця тотожність легко перевіряється, якщо взяти до уваги формулу (25).

Введемо позначення

$$z = 2n\,\frac{(k-1)\,x_1 + y_0}{(k^2-3k)\,x_1 + ky_0}\,, \tag{35}$$

тоді, згідно з рівнянням (28), випливає, що

$$\operatorname{th} n\tau_m = z \quad \text{і} \quad \tau_m = \frac{1}{2n}\ln\frac{1+z}{1-z}\,. \tag{36}$$

Мають місце також формули

$$\operatorname{ch} n\tau_m = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,,\quad \operatorname{sh} n\tau_m = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,,\quad e^{-n\tau_m} = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\,. \tag{37}$$

Знаючи момент часу τ_m, можна представити, відповідно першій з формул (24), вираз для x_m у вигляді

$$x_m = e^{-\frac{k}{2}\tau_m}\operatorname{ch} n\tau_m\left[\frac{(k-2)\,x_1 + 2y_0}{2n}\operatorname{th} n\tau_m - x_1\right]. \tag{38}$$

Використовуючи формули (36) і (37), а також попередню формулу, одержимо важливу рівність

$$\frac{x_m}{x_1} = (1-z)^{\frac{k}{4n}-\frac{1}{2}}\,(1+z)^{-\frac{k}{4n}-\frac{1}{2}}\left[z\left(\frac{k-2}{2n} + \frac{y_0}{nx_1}\right) - 1\right]. \tag{39}$$

Розв'язування питання про те, чи залишить фазова точка P область $-x_1 < x < x_1$, чи ні, повністю визначається величиною відношення x_m до x_1. Точка P піде в область $x_1 > 0$, якщо це відношення більше одиниці. Маючи на увазі знайти границю цього відношення при $k \to \infty$, зауважимо, що мають місце такі розклади по степенях $\frac{1}{k}$:

$$\frac{k}{2n} = \frac{k}{\sqrt{k^2-4k}} = \left(1-\frac{4}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{k} + \frac{6}{k^2} + \ldots,$$

$$\frac{2n}{k} = \left(1-\frac{4}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{k} - \frac{2}{k^2} - \ldots \tag{40}$$

Беручи до уваги ці розклади, а також формулу (22), одержимо

$$z = 2n\,\frac{(k-1)\,x_1 + y_0}{(k^2-3k)\,x_1 + ky_0} = \frac{2n}{k}\,\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)m + y_0}{\left(1-\frac{3}{k}\right)m + y_0} =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{k} - \frac{2}{k^2} - \ldots\right)\left[1 + \frac{\frac{2}{k}\,m}{\left(1-\frac{3}{k}\right)m + y_0}\right] =$$

$$= 1 - \frac{2y_0}{m+y_0}\,\frac{1}{k} + \left[\frac{6m^2}{(m+y_0)^2} - \frac{4m}{m+y_0} - 2\right]\frac{1}{k^2} + \ldots \tag{41}$$

Підставляючи розклади (40) і (41) в формулу (39), будемо мати:

$$\frac{x_m}{x_1}=\left(\frac{2y_0}{m+y_0}\,\frac{1}{k}+\ldots\right)^{\frac{1}{k}+\ldots}\left(2-\frac{2y_0}{m+y_0}\,\frac{1}{k}+\ldots\right)^{-1-\frac{1}{k}-\ldots}\times$$

$$\times\left[\frac{1-\dfrac{2}{k}}{1-\dfrac{2}{k}-\dfrac{2}{k^2}-\ldots}\left(1-\frac{2y_0}{m+y_0}\,\frac{1}{k}+\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{y_0}{m}\left(2+\frac{4}{k}+\ldots\right)\left(1-\frac{2y_0}{m+y_0}\,\frac{1}{k}+\ldots\right)-1\right]. \tag{42}$$

Границя виразу

$$\left(\frac{2y_0}{m+y_0}\,\frac{1}{k}+\ldots\right)^{\frac{1}{k}+\ldots} \tag{43}$$

при $k\to\infty$ дорівнює одиниці, тому що

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\ln\frac{2y_0}{m+y_0}-\ln k\right)\right]=0. \tag{44}$$

Беручи до уваги цю обставину і здійснюючи в формулі (42) решту граничних переходів, приходимо до висновку, що

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_m}{x_1}=\frac{y_0}{m}. \tag{45}$$

Проміжок часу, протягом якого точка P перетинає область $-x_1<x<+x_1$, у всякому випадку менше τ_m. Згідно з другою формулою (36) і розкладами (40) і (41) маємо

$$\tau_m=\frac{1}{k}\left(1+\frac{2}{k}+\ldots\right)\times$$

$$\times\ln\frac{2-\dfrac{2y_0}{m+y_0}\,\dfrac{1}{k}+\ldots}{\dfrac{2y_0}{m+y_0}\,\dfrac{1}{k}+\left[\dfrac{6m^2}{(m+y_0)^2}-\dfrac{4m}{m+y_0}-2\right]\dfrac{1}{k^2}+\ldots} \tag{46}$$

Границя цього виразу при $k\to\infty$ дорівнює нулеві.

Отже, якщо

$$y_0>m, \tag{47}$$

то в границі, коли функція $m^*(x)$ (рис. 7) перетворюється в розривну функцію $m(x)$ (рис. 6), фазова точка P без затримки переходить через лінію розриву $x=0$ з лівої півплощини в праву.

Якщо

$$x_m<x_1, \tag{48}$$

то фазова точка P, попавши в область $-x_1<x<+x_1$, залишиться в ній назавжди, асимптотично наближаючись до початку координат.

При $k \to \infty$ нерівність (48) відповідно формулі (45) еквівалентна умові

$$y_0 < m. \tag{49}$$

Таким чином, якщо фазова точка, рухаючись по траєкторії, розміщеній в лівій півплощині, опиниться в якийсь момент часу на осі ординат нижче точки з координатами $(0,\ m)$, то далі її рух буде ковзним по осі y в напрямі початку координат.

Закон цього руху можна одержати, якщо виконати граничний перехід в рівняннях (24) при $k \to \infty$. Поклавши в них $x_0 = -x_1$ і замінивши гіперболічні функції показниковими, одержимо, використавши формулу (22),

$$x = \frac{m}{2k}\left\{\left(\frac{k-2+\dfrac{2ky_0}{m}}{\sqrt{k(k-4)}}-1\right)e^{\left[-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)}\right]\tau} - \left(\frac{k-2+\dfrac{2ky_0}{m}}{\sqrt{k(k-4)}}+1\right)e^{\left[-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)}\right]\tau}\right\},$$

$$y = \frac{y_0}{2}\left\{\left(1+\frac{k-2}{\sqrt{k(k-4)}}+\frac{2m}{ky_0\sqrt{k(k-4)}}\right)e^{\left[-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)}\right]\tau} + \left(1-\frac{k-2}{\sqrt{k(k-4)}}-\frac{2m}{ky_0\sqrt{k(k-4)}}\right)e^{\left[-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)}\right]\tau}\right\}. \tag{50}$$

Помічаючи, що

$$\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)}\right] = -1, \tag{51}$$

і беручи до уваги в формулах (50) решту граничних переходів, одержимо шукані закономірності ковзного режиму

$$x = 0,$$
$$y = y_0 e^{-\tau}, \tag{52}$$

які з точністю до початку відліку часу збігаються з формулою (18).

4°. Інший спосіб обгрунтування співвідношень (52) полягає в розгляді граничного переходу сукупності диференціальних рівнянь (21), за допомогою яких описується рух фазової точки P в області $-x_1 < x < +x_1$. Відповідно до першого з рівнянь (21) маємо

$$\lim_{x\to\infty} x = \lim_{k\to\infty}\frac{y-\dfrac{dx}{d\tau}}{k-1} = 0. \tag{53}$$

Далі, використовуючи граничне значення змінної x в другому з рівнянь (21), приходимо після відповідного інтегрування до другого співвідношення (52).

Однак, таке обгрунтування співвідношень (52) не можна вважати строгим через те, що при цьому припускається, що граничне представлення розв'язку сукупності диференціальних рівнянь і розв'язок граничної сукупності тих же диференціальних рівнянь збігаються.

Крім того, залишається збоку строге обґрунтування, вільне від міркувань геометричного характеру, переходу фазової точки з лівої півплощини в праву і навпаки, відповідно при

$$y_0 > m \text{ і } y_0 < m.$$

5°. Викладеним вище методом можуть бути обґрунтовані ковзні рухи і в інших випадках.

Розглянемо, наприклад, динамічну систему, поведінка якої підлягає тій же по виду сукупності диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{d\tau} = x + y - m(x),$$
$$\frac{dy}{d\tau} = -(x + y), \tag{54}$$

що і система, розглянута вище, але з функцією $m(x)$, яка визначається графіком, зображеним на рис. 13.

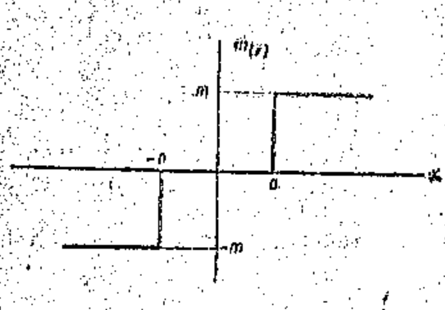

Рис. 13.

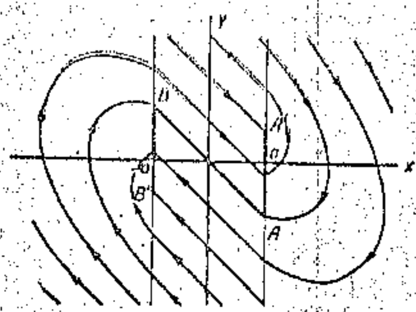

Рис. 14.

Рух фазової точки в областях $x > a$, $x < -a$ відбувається в цьому випадку по параболам (15) (рис. 14).

В області $-a < x < +a$ диференціальні рівняння (54) мають вигляд

$$\frac{dx}{d\tau} = x + y,$$
$$\frac{dy}{d\tau} = -(x + y), \tag{55}$$

звідки випливає, що фазова точка рухається по прямим

$$x + y = 0. \tag{56}$$

Цей рух відбувається зліва направо по прямим (56), що перетинають вісь ординат вище початку і справа наліво, якщо цей перетин знаходиться нижче початку координат.

Всі точки прямої

$$x + y = 0 \tag{57}$$

розміщені в області $-a < x < +a$ і являються положеннями нестійкої рівноваги системи.

По вертикальним відрізкам AA' та BB' відбувається ковзний рух фазової точки відповідно в напрямі точок A і B. Ці точки визначають як би напівстійкий стан рівноваги системи, а саме: в залежності від напрямку малого відхилення фазової точки P, наприклад від точки A, вона або повертається в точку A, або направляється в область $-a < x < +a$ і далі асимптотично наближається до точки B.

Для обгрунтування описаних ковзних режимів потрібно спочатку розглянути динамічну систему, що визначається сукупністю диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{d\tau} = x + y - m^*(x), \qquad \frac{dy}{d\tau} = -(x + y), \tag{58}$$

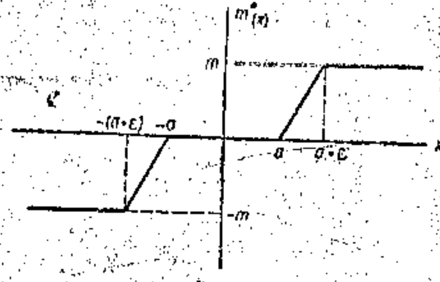

Рис. 15.

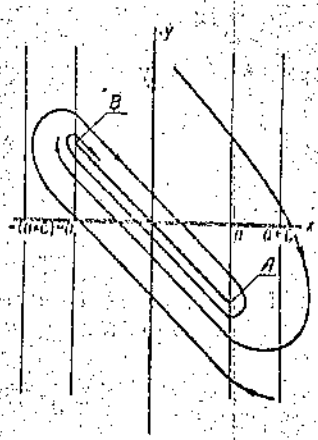

Рис. 16.

де функція $m^*(x)$ — неперервна і має графік, зображений на рис. 15, а потім зробити граничний перехід так, як це було зроблено вище при $\varepsilon \to 0$.

У випадку, коли функція $m^*(x)$ — неперервна, фазові траєкторії при

$$k = \frac{m}{\varepsilon} < 4 \tag{59}$$

„намотуються" на відрізок AB (рис. 16), точки якого являються положеннями нестійкої рівноваги, включаючи і його кінці A та B. Потрібно, однак, відмітити, що точки відрізка AB мають деяку особливість, невластиву, взагалі, положенням нестійкої рівноваги.

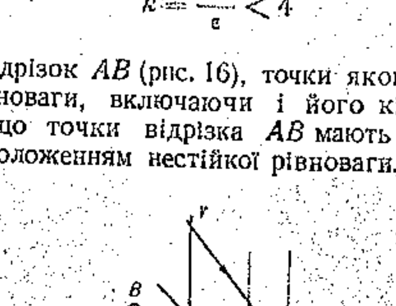

Рис. 17.

При малих відхиленнях фазової точки P від одного з таких положень рівноваги фазова точка після обходу одного з кінців відрізка AB знову проходить поблизу „загубленого" положення рівноваги. Далі такі проходження відбуваються нескінчене число разів, причому фазова траєкторія необмежено наближається до відрізка AB (стійкість по Пуассону).

, а саме: в залежності
?, наприклад, від точ-
направляється в область
до точки B.
жимів потрібно спо-
тися сукупністю дифе-

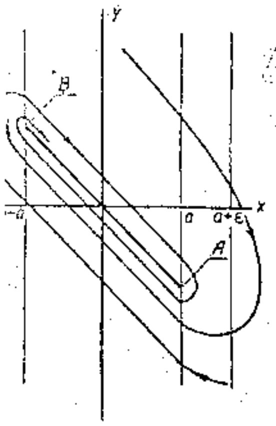

Рис. 16.

зображений на рис. 15,
ло зроблено вище при

фазові траєкторії при

(59)

о являються положен-
ці A та B. Потрібно,
деяку особливість, не-

одного з таких поло-
з кінців відрізка AB
рівноваги. Далі такі
причому фазова траєк-
тійкість по Пуассону).

Якщо $k > 4$, то кожна фазова траєкторія являє собою спіраль, що асимптотично наближається до одного з кінців відрізка AB (рис. 17). При $k \to \infty$ створюються ділянки ковзання AA' та BB', описані вище.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Крылов и Ю. А. Крутков, Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений, Л., 1952.
2. Б. В. Булгаков, Прикладная теория гироскопов, М., 1939.

Надійшло
3.І 1955 р.

Інститут математики
АН УРСР

О СКОЛЬЗЯЩИХ ДВИЖЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Ю. Ишлинский

Резюме

При рассмотрении динамических систем, описываемых уравнениями вида

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеют разрывы первого рода на некоторых поверхностях F_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, возникает задача об определении движения системы в тех случаях, когда фазовая точка P с координатами x_1, $x_2, \ldots, x_n$ попадает на одну из поверхностей разрыва. Принято считать из соображений геометрического характера, что либо точка проскакивает соответствующую поверхность разрыва (рис. 1), либо задерживается на ней (рис. 2), и дальнейшее ее движение происходит с меньшим числом независимых координат. Такое движение называется скользящим.

Для строгого обоснования скользящих режимов предлагается рассматривать динамические системы (1) как предельные для систем, описываемых уравнениями

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где функции $X_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывны и всюду совпадают с функциями $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, кроме узких областей, примыкающих к поверхностям разрыва F_j. При стремлении толщины этих областей к нулю следует ожидать, что фазовые траектории, расположенные внутри них (рис. 3 и 4), либо вырождаются в точки, либо в кривую, расположенные на поверхности F_j. Последние соответствуют скользящим режимам.

Можно привести ряд примеров, в которых непосредственное решение уравнений типа (2) с последующим предельным переходом подтверждает высказанное общее предположение. Одним из них является гироскопическая система, описываемая уравнениями

$$\frac{dx}{d\tau} = x + y - m(x),$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -(x + y), \tag{3}$$

где функция $m(x)$ определена графиком рис. 6. Фазовые кривые этой системы имеют вид, указанный на рис. 10. Отрезок оси $y(-m, +m)$ является участком скользящего режима. Для обоснования скользящих движений, а также „проскока" фазовой точки через ось y вне упомянутого отрезка, следует рассмотреть систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= x + y - m^*(x), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -(x + y), \end{aligned} \tag{4}$$

в которых функция $m^*(x)$ уже непрерывна и имеет график, изображенный на рис. 7. Решение уравнений (4) определяет фазовые траектории, гладкие во всей плоскости. При $x_1 \to 0$ они в пределе стремятся к фазовым кривым системы (3).

Следует отметить, что соответствующие предельные переходы требуют совершения сравнительно громоздких выкладок.

Если функция $m(x)$ в системе (3) определена графиком рис. 13, то следует предварительно рассмотреть динамическую систему типа (4), где функция $m^*(x)$ определена графиком рис. 15 и сделать предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Соответствующие предельные фазовые траектории изображены на рис. 14. Участки AA' и BB' соответствуют скользящим режимам, а отрезок AB — положениям неустойчивого равновесия системы. Точки A и B обладают свойством полуустойчивости, заключающейся в том, что фазовая точка P, будучи „выбита", например, из точки A либо возвращается в точку A, либо, обходя отрезок AB, приходит в точку B.