МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1975

УДК 531.36

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СОВОКУПНОСТИ УРАВНЕНИЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

О. Ф. БОЙЧУК, А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, В. А. СТОРОЖЕНКО

(Киев, Москва)

Записана в исходных координатах функция Ляпунова для уравнений в вариациях основной задачи инерциальной навигации. Найдены четыре интеграла, позволяющие записать общее решение этих уравнений и подтверждающие теорему о постоянстве конечного поворота возмущений, сформулированную и доказанную геометрическим путем.

1. Вопрос устойчивости решения основаой задачи автономного определения координат являлся предметом исследований многих авторов [1-4]. Сущность проблемы состоит в изучении устойчивости решений системы дифференциальных уравнений [5]

$$(1.1)\qquad \frac{d\theta}{dt}\cos\chi+\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\chi=\omega_x(t)$$

$$-\frac{d\theta}{dt}\sin\chi+\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\chi=\omega_y(t)$$

$$\frac{d\chi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}\cos\theta=\omega_z(t)$$

где θ, ψ, χ — углы Эйлера — Крылова, характеризующие координаты местоположения движущегося объекта на земной сфере и угол поворота в азнмуте стабилизированной платформы. С географическими широтой φ и долготой λ местоположения углы θ и ψ связаны посредством соотношений

$$(1.2)\qquad \theta={}^1/_2\pi-\varphi,\qquad \psi=\lambda+Ut+{}^1/_2\pi$$

Величины $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ в правых частях уравнений (1.1) представляют собой измеренные проекции вектора абсолютной угловой скорости вращения стабилизированной в горизонте платформы на оси неизменно связанной с ней системы координат xyz и являются известными функциями времени. В случае, если указанные величины определяются в системе точно, они могут быть представлены следующим образом

$$(1.3)\qquad \omega_x(t)=\frac{d\theta^\circ}{dt}\cos\chi^\circ+\frac{d\psi^\circ}{dt}\sin\theta^\circ\sin\chi^\circ$$

$$\omega_y(t)=-\frac{d\theta^\circ}{dt}\sin\chi^\circ+\frac{d\psi^\circ}{dt}\sin\theta^\circ\cos\chi^\circ$$

$$\omega_z(t)=\frac{d\psi^\circ}{dt}\cos\theta^\circ+\frac{d\chi^\circ}{dt}$$

Здесь θ°, ψ°, χ° — те же, что и ранее введенные углы, но только соответствующие истинным координатам местоположения объекта.

В работе [4] устойчивость решения основной задачи автономного определения исследовалась геометрическим методом, при этом было показано, что конечный поворот, осуществляющий переход сопровождающего связанного трехгранника[1] из невозмущенного (основного) положения в возмущенное, является постоянным на протяжении всего времени движения и зависит только от начальных условий. Это свидетельствует об устойчивости решения, так как малым начальным возмущениям координат соответствуют столь же малые текущие возмущения. Между тем известно, что, вследствие устойчивости решения, для уравнений возмущенного движения, соответствующих системе (1.1), существует функция Ляпунова. Представляет поэтому интерес получить эту функцию в явном виде и проанализировать связь упомянутого выше геометрического доказательства устойчивости с доказательством посредством второго метода Ляпунова.

Введем в рассмотрение возмущения $\Delta\theta$, $\Delta\psi$, $\Delta\chi$ по каждой из переменных при помощи формул

$$\theta=\theta^\circ+\Delta\theta,\qquad \psi=\psi^\circ+\Delta\psi,\qquad \chi=\chi^\circ+\Delta\chi \tag{1.4}$$

и представим с учетом соотношений (1.3) уравнения возмущенного движения в виде

$$\frac{d\Delta\theta}{dt}=\frac{d\theta^\circ}{dt}(\cos\Delta\chi-1)-\frac{d\psi^\circ}{dt}\sin\theta^\circ\sin\Delta\chi \tag{1.5}$$

$$\frac{d\Delta\psi}{dt}=\frac{d\theta^\circ}{dt}\operatorname{cosec}(\theta^\circ+\Delta\theta)\sin\Delta\chi+\frac{d\psi^\circ}{dt}[\sin\theta^\circ\cos\Delta\chi-\sin(\theta^\circ+\Delta\theta)]$$

$$\frac{d\Delta\chi}{dt}=\frac{d\psi^\circ}{dt}[\cos\theta^\circ-\operatorname{ctg}(\theta^\circ+\Delta\theta)\sin\theta^\circ\cos\Delta\chi]-\frac{d\theta^\circ}{dt}\operatorname{ctg}(\theta^\circ+\Delta\theta)\sin\Delta\chi$$

Чтобы найти функцию Ляпунова для уравнений (1.5), воспользуемся функцией, найденной в работе [3] для уравнений, эквивалентных (1.5), но записанных в возмущениях параметров Родрига — Гамильтона. Эта функция имеет вид

$$V=(r_0-r_0^\circ)^2+(r_1-r_1^\circ)^2+(r_2-r_2^\circ)^2+(r_3-r_3^\circ)^2 \tag{1.6}$$

где r_i ($i=0, 1, 2, 3$) — значения параметров в возмущенном движении, именно

$$r_0=\cos\frac{\theta^\circ+\Delta\theta}{2}\cos\frac{\psi^\circ+\Delta\psi+\chi^\circ+\Delta\chi}{2} \tag{1.7}$$

$$r_1=\sin\frac{\theta^\circ+\Delta\theta}{2}\cos\frac{\psi^\circ+\Delta\psi-\chi^\circ-\Delta\chi}{2}$$

$$r_2=\sin\frac{\theta^\circ+\Delta\theta}{2}\sin\frac{\psi^\circ+\Delta\psi-\chi^\circ-\Delta\chi}{2}$$

$$r_3=\cos\frac{\theta^\circ+\Delta\theta}{2}\sin\frac{\psi^\circ+\Delta\psi+\chi^\circ+\Delta\chi}{2}$$

r_i° ($i=0, 1, 2, 3$) — соответственно значения параметров Родрига — Гамильтона в невозмущенном движении

$$r_0^\circ=\cos\frac{\theta^\circ}{2}\cos\frac{\psi^\circ+\chi^\circ}{2},\qquad r_1^\circ=\sin\frac{\theta^\circ}{2}\cos\frac{\psi^\circ-\chi^\circ}{2} \tag{1.8}$$

$$r_2^\circ=\sin\frac{\theta^\circ}{2}\sin\frac{\psi^\circ-\chi^\circ}{2},\qquad r_3^\circ=\cos\frac{\theta^\circ}{2}\sin\frac{\psi^\circ+\chi^\circ}{2}$$

[1] Т. е. системы координат xyz, связанной со стабилизированной платформой.

Подставляя выражения (1.7) и (1.8) в правую часть равенства (1.6) и учитывая тождество

$$r_0^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2=1 \tag{1.9}$$

после несложных преобразований получим

$$V=2\left[1-\cos\frac{\Delta\theta}{2}\cos\frac{\Delta\psi}{2}\cos\frac{\Delta\chi}{2}+\cos\left(\theta^\circ+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\frac{\Delta\chi}{2}\sin\frac{\Delta\psi}{2}\right] \tag{1.10}$$

Функция (1.10) является положительно-определенной функцией величин $\Delta\theta$, $\Delta\psi$, $\Delta\chi$. Действительно, разложение ее в степенной ряд дает

$$V={}^1/_4[\Delta\theta^2+(\Delta\psi+\Delta\chi\cos\theta^\circ)^2+\Delta\chi^2\sin^2\theta^\circ]+\ldots \tag{1.11}$$

Знакоопределенность функции определяется формой, состоящей из членов разложения наинизших степеней [6], т. е. согласно (1.11) формой второго порядка, которая является положительно-определенной везде, за исключением значений $\theta^\circ=\pm 0, \pi, \ldots$, соответствующих полюсам земной сферы. Отсюда и следует положительная определенность функции V, представленной формулой (1.10) или в форме ряда (1.11). Производная функции V по времени имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}=&\frac{d\Delta\theta}{dt}\left[\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cos\frac{\Delta\psi}{2}\cos\frac{\Delta\chi}{2}-\sin\left(\theta^\circ+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\frac{\Delta\chi}{2}\sin\frac{\Delta\psi}{2}\right]-\\&-2\frac{d\theta^\circ}{dt}\sin\left(\theta^\circ+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\frac{\Delta\chi}{2}\sin\frac{\Delta\psi}{2}+\\&+\frac{d\Delta\psi}{dt}\left[\cos\frac{\Delta\theta}{2}\cos\frac{\Delta\chi}{2}\sin\frac{\Delta\psi}{2}+\cos\left(\theta^\circ+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\cos\frac{\Delta\psi}{2}\sin\frac{\Delta\chi}{2}\right]+\\&+\frac{d\Delta\chi}{dt}\left[\cos\frac{\Delta\theta}{2}\cos\frac{\Delta\psi}{2}\sin\frac{\Delta\chi}{2}+\cos\left(\theta^\circ+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\frac{\Delta\psi}{2}\cos\frac{\Delta\chi}{2}\right]\end{aligned} \tag{1.12}$$

Нетрудно показать, используя уравнения (1.5), что производная dV/dt обращается в нуль. Таким образом, функция V, определяемая формулой (1.10), является функцией Ляпунова для уравнений возмущенного движения (1.5) и удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения [6].

2. Обращение производной функции $\dot V$ в нуль в силу уравнений возмущенного движения свидетельствует о том, что эта функция является первым интегралом уравнений (1.5). Представим этот интеграл в виде

$$\cos\frac{\Delta\theta}{2}\cos\frac{\Delta\psi}{2}\cos\frac{\Delta\chi}{2}-\cos\left(\theta^\circ+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\frac{\Delta\chi}{2}\sin\frac{\Delta\psi}{2}=C_0 \tag{2.1}$$

Покажем аналитически, что установленный выше интеграл (2.1) соответствует утверждению о постоянстве угла конечного поворота, переводящего сопровождающий трехгранник из невозмущенного положения в возмущенное. Это утверждение доказано геометрическим путем в работе [4].

Согласно обозначениям (1.7) кватернион $\mathbf{r}$, описывающий переход неподвижного трехгранника $\xi\eta\zeta$ в положение, соответствующее сопровождающему трехграннику в возмущенном положении, может быть представлен в виде

$$\mathbf{r}=r_0+\mathbf{i}r_1+\mathbf{j}r_2+\mathbf{k}r_3 \tag{2.2}$$

Кватернион, соответствующий повороту, переводящему трехгранник $\xi\eta\zeta$ в положение, соответствующее сопровождающему трехграннику в невозмущенном движении, в согласии с (1.8) имеет вид

$$\mathbf{r}^\circ = r_0^\circ + \mathbf{i}r_1^\circ + \mathbf{j}r_2^\circ + \mathbf{k}r_3^\circ \tag{2.3}$$

Наконец, кватернион $\mathbf{p}$, соответствующий переходу трехгранника из невозмущенного положения в возмущенное, можно определить как результат перемножения кватерниона $\mathbf{r}$ на кватернион $\mathbf{r}^*$, обратный [1] $\mathbf{r}^\circ$, таким образом

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} \circ \mathbf{r}^* \tag{2.4}$$

$$\mathbf{r}^* = r_0^\circ - \mathbf{i}r_1^\circ - \mathbf{j}r_2^\circ - \mathbf{k}r_3^\circ \tag{2.5}$$

Пользуясь формулой перемножения кватернионов [7], определим параметры кватерниона $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3 \tag{2.6}$$

имеем

$$\begin{aligned} p_0 &= r_0 r_0^\circ + r_1 r_1^\circ + r_2 r_2^\circ + r_3 r_3^\circ \\ p_1 &= r_1 r_0^\circ - r_0 r_1^\circ - r_2 r_3^\circ + r_3 r_2^\circ \\ p_2 &= -r_0 r_2^\circ + r_2 r_0^\circ + r_1 r_3^\circ - r_3 r_1^\circ \\ p_3 &= -r_0 r_3^\circ + r_3 r_0^\circ - r_1 r_2^\circ + r_2 r_1^\circ \end{aligned} \tag{2.7}$$

Воспользуемся выражениями (1.7) и (1.8) и подставим их в правые части соотношений (2.7). Получим

$$\begin{aligned} p_0 &= \cos\frac{\Delta\theta}{2}\cos\frac{\Delta\psi}{2}\cos\frac{\Delta\chi}{2} - \cos\left(\theta^\circ + \frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\frac{\Delta\psi}{2}\sin\frac{\Delta\chi}{2} \\ p_1 &= \sin\frac{\Delta\theta}{2}\cos\left(\psi^\circ + \frac{\Delta\psi}{2}\right)\cos\frac{\Delta\chi}{2} + \sin\left(\theta^\circ + \frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\left(\psi^\circ + \frac{\Delta\psi}{2}\right)\sin\frac{\Delta\chi}{2} \\ p_2 &= \sin\frac{\Delta\theta}{2}\sin\left(\psi^\circ + \frac{\Delta\psi}{2}\right)\cos\frac{\Delta\chi}{2} - \sin\left(\theta^\circ + \frac{\Delta\theta}{2}\right)\cos\left(\psi^\circ + \frac{\Delta\psi}{2}\right)\sin\frac{\Delta\chi}{2} \\ p_3 &= \cos\frac{\Delta\theta}{2}\sin\frac{\Delta\psi}{2}\cos\frac{\Delta\chi}{2} + \cos\left(\theta^\circ + \frac{\Delta\theta}{2}\right)\cos\frac{\Delta\psi}{2}\sin\frac{\Delta\chi}{2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

С другой стороны, параметры Родрига — Гамильтона могут быть представлены в виде [8]

$$p_0 = \cos\frac{\varkappa}{2}, \quad p_1 = l\sin\frac{\varkappa}{2}, \quad p_2 = m\sin\frac{\varkappa}{2}, \quad p_3 = n\sin\frac{\varkappa}{2} \tag{2.9}$$

где $\varkappa$ — угол конечного поворота, обеспечивающего переход сопровождающего трехгранника из невозмущенного положения в возмущенное; l, m, n — направляющие косинусы оси, вокруг которой совершается упомянутый поворот. Из сравнения первых строчек формул (2.8) и (2.9) с соотношением (2.1) вытекает равенство

$$p_0 = \cos(\varkappa / 2) = C_0 \tag{2.10}$$

что и доказывает утверждение о постоянстве угла $\varkappa$.

---

[1] В данном случае обратный кватернион равен сопряженному в силу соотношения нормировки типа (1.9).

3. В работе [4] показано также, что ось, вокруг которой происходит упомянутый конечный поворот, сохраняет неизменное направление в пространстве относительно неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$, т. е. направляющие косинусы l, m, n постоянны, а следовательно, постоянны в соответствии с формулами (2.9) и (2.10) и параметры p_1, p_2, p_3. Этот факт так же можно установить аналитически, привлекая уравнения возмущенного движения. Действительно, легко проверить, что производные по времени параметров p_1, p_2, p_3 в силу уравнений (1.5) равны нулю. В связи с этим в соответствии с формулами (2.8) имеют место еще три первых интеграла

(3.1)
$$\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cos\left(\psi^\circ+\frac{\Delta\psi}{2}\right)\cos\frac{\Delta\chi}{2}+\sin\left(\theta^\circ+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\left(\psi^\circ+\frac{\Delta\psi}{2}\right)\sin\frac{\Delta\chi}{2}=C_1$$

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2}\sin\left(\psi^\circ+\frac{\Delta\psi}{2}\right)\cos\frac{\Delta\chi}{2}-\sin\left(\theta^\circ+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\cos\left(\psi^\circ+\frac{\Delta\psi}{2}\right)\sin\frac{\Delta\chi}{2}=C_2$$

$$\cos\frac{\Delta\theta}{2}\sin\frac{\Delta\psi}{2}\cos\frac{\Delta\chi}{2}+\cos\left(\theta^\circ+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\cos\frac{\Delta\psi}{2}\sin\frac{\Delta\chi}{2}=C_3$$

Из четырех первых интегралов, представленных формулами (2.1) и (3.1), независимых только три, так как параметры p_0, p_1, p_2, p_3 удовлетворяют тождеству

$$p_0^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2=1 \tag{3.2}$$

Тождество (3.2) в соответствии с (2.1), (3.1) связывает также и произвольные постоянные C_i, именно

$$C_0^2+C_1^2+C_2^2+C_3^2=1 \tag{3.3}$$

Как следствие из вышеизложенного вытекает, что кватернион **p**, соответствующий переходу сопровождающего трехгранника из невозмущенного положения в возмущенное, является постоянным и может быть представлен исходя из формул (2.1), (2.4), (2.8), (2.9) и (3.1) в виде

$$\mathbf{p}=C_0+\mathbf{i}C_1+\mathbf{j}C_2+\mathbf{k}C_3=\mathbf{r}(0)\circ\mathbf{r}^*(0) \tag{3.4}$$

Равенство (3.4), полученное строго на основании чисто аналитических соображений, выражает установленный в [4] факт постоянства конечного поворота, характеризующегося кватернионом **p**. Это равенство в совокупности с (2.4) дает общее решение уравнений возмущенного движения (1.5). Действительно, умножая обе части равенства (2.4) справа на кватернион $\mathbf{r}^\circ$ и используя соотношения (2.2), (2.3) и (2.5), получим следующее выражение для вычисления кватерниона **r**

$$\begin{aligned} r_0+\mathbf{i}r_1+\mathbf{j}r_2+\mathbf{k}r_3= \\ =[r_0(0)+\mathbf{i}r_1(0)+\mathbf{j}r_2(0)+\mathbf{k}r_3(0)]\circ[r_0^\circ(0)-\mathbf{i}r_1^\circ(0)- \\ -\mathbf{j}r_2^\circ(0)-\mathbf{k}r_3^\circ(0)]\circ[r_0^\circ(t)+\mathbf{i}r_1^\circ(t)+\mathbf{j}r_2^\circ(t)+\mathbf{k}r_3^\circ(t)] \end{aligned} \tag{3.5}$$

При этом в правой части равенства (3.5) начальные значения параметров $r_i(0)$, $r_i^\circ(0)$ следует связать с начальными значениями углов θ, ψ и χ

в возмущенном и невозмущенном движении. В соответствии с формулами (1.7) и (1.8) имеем

$$
(3.6)\qquad r_0(0)=\cos\frac{\theta(0)}{2}\cos\frac{\psi(0)+\chi(0)}{2},\quad r_1(0)=\sin\frac{\theta(0)}{2}\cos\frac{\psi(0)-\chi(0)}{2}
$$

$$
r_2(0)=\sin\frac{\theta(0)}{2}\sin\frac{\psi(0)-\chi(0)}{2},\quad r_3(0)=\cos\frac{\theta(0)}{2}\sin\frac{\psi(0)+\chi(0)}{2}
$$

(3.7)

$$
r_0{}^\circ(0)=\cos\frac{\theta^\circ(0)}{2}\cos\frac{\psi^\circ(0)+\chi^\circ(0)}{2},\quad r_1{}^\circ(0)=\sin\frac{\theta^\circ(0)}{2}\cos\frac{\psi^\circ(0)-\chi^\circ(0)}{2}
$$

$$
r_2{}^\circ(0)=\sin\frac{\theta^\circ(0)}{2}\sin\frac{\psi^\circ(0)-\chi^\circ(0)}{2},\quad r_3{}^\circ(0)=\cos\frac{\theta^\circ(0)}{2}\sin\frac{\psi^\circ(0)+\chi^\circ(0)}{2}
$$

Найденное здесь решение, естественно, совпадает с решением, полученным в работе [9] другим способом. Производя обратный переход от параметров Родрига — Гамильтона r_i к переменным θ, ψ и χ, как это сделано в работе [9], получим общее решение, записанное в углах Эйлера — Крылова. Такое же решение имеется также в работах [10, 11].

Поступила 19 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жбанов Ю. К.* Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
2. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации (автономные системы). М., «Наука», 1966.
3. *Кошляков В. Н., Люсин Ю. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шульман И. Ш.* Об устойчивости решений системы дифференциальных уравнений автономного определения координат движущегося объекта. Докл. АН СССР, 1968, т. 179, № 1.
4. *Ишлинский А. Ю.* Геометрическое рассмотрение устойчивости решения основной задачи инерциальной навигации. Инж. ж. МТТ, 1968, № 3.
5. *Ишлинский А. Ю.* Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М., «Наука», 1968.
8. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
9. *Климов Д. М.* Об интегрировании кинематических уравнений инерциальных систем навигации. Изв. вузов. Приборостроение, 1968, № 7.
10. *Бойчук О. Ф.* Эквивалентные конечные повороты и вопрос ошибок автономного определения координат. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 2.
11. *Калинович В. Н.* Про геометричний метод визначення похибок систем інерціальної навигації. Доп. АН УРСР, 1969, № 12.