

Рис. 44. Цилиндрический корпус под действием гидравлического удара:
 а — схема действия ударной волны; б — изменение напряжений во времени.

оттеупорных материалов и тугоплавких материалов с противокислительными покрытиями, прочности графитов и композиционных металлических материалов, неразрушающих методов контроля повреждаемости материала, прочности при импульсных нагрузках, на возможном подходе к прогнозированию характеристик длительной прочности на большие базы (до 100 000 ч и более) и т. п. Все эти вопросы в той или иной мере исследуются в ряде учреждений страны, в том числе в Институте проблем прочности АН УССР.

На основании всего сказанного выше можно утверждать, что лишь прикладной механики, связанное с вопросами прочности, резко меняется. Это определяется прежде всего существенным повышением параметров рабочих тел, рабочих режимов и воздействий внешних сред, вызывающих применение новых материалов, для которых характерна большая нестабильность основных механических свойств во времени.

Несмотря на существенные сдвиги в части изучения предельного состояния инженерных конструкций, находящихся в сложных условиях эксплуатации, как расчетным, так и экспериментальным путем с использованием экспериментальных методов определения полей деформаций и развития расчетных методов с использованием ЭВМ, существует определенная диспропорция между потребностью в современном испытательном оборудовании и вычислительных машинах и возможностью их приобретения.

Мы надеемся, что рассмотрение на нашем съезде важнейших проблем механики деформируемого твердого тела, как и проблем по другим разделам механики, явится большим стимулом в решении задач, стоящих перед советской наукой по выполнению программы десятой пятилетки, принятой XXV съездом КПСС.

Современные проблемы теоретической и прикладной механики.
 Тр. IV Всес. съезда по теор. и прикл. мех. Киев, 1976. Киев: Наукова думка, 1978. ОБЩАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

УДК 531. 383

Ю. К. Жбанов, А. Ю. Ишлинский

ДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО КОМПАСА

Схема пространственного гироскопического компаса была предложена в начале 30-х годов как возможное усовершенствование двухроторного гироскопического компаса фирмы «Аншютц».

Упрощенная теория этого прибора была дана Геккелером [28] и получила развитие в трудах А. Н. Крылова [1], Б. И. Кудревича [2], Б. В. Булгакова [3]. Строгая теория пространственного компаса, свободная от упрощающих допущений, принятых в работах [1—3, 28], изложена в статье [4], результаты которой вместе с более поздними исследованиями положены в основу настоящего сообщения.

Большинство результатов теории пространственного компаса нашли практическое применение и прошли экспериментальную проверку при совершенствовании двухроторных гироскопических компасов, получивших широкое распространение.

Теория пространственного компаса может представить интерес и потому, что этот прибор явился механическим прообразом систем инерциальной навигации.

Многие общие результаты, полученные при исследовании пространственного компаса, непосредственно переносятся на широкий класс автономных навигационных систем, обладающих, как и пространственный компас, свойством невозмущаемости, о котором речь пойдет ниже.

Чувствительный элемент пространственного гироскопического компаса представляет собой механическую систему, состоящую из двух гироскопов, роторы которых вращаются внутри кожухов, а кожуха размещены в общей рамке и могут поворачиваться относительно нее вокруг своих осей, перпендикулярных к осям вращения роторов (рис. 1 и 2). Оси вращения кожухов в общей

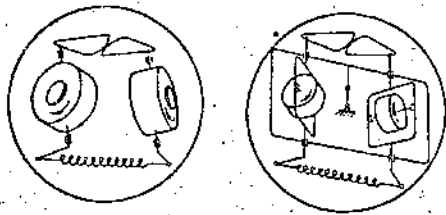


Рис. 1. Чувствительный элемент пространственного гироскопического компаса — гиросфера.

Рис. 2. Кинематическая схема гиросферы.

по величине и противоположные по направлению моменты, зависящие от угла поворота гироскопов относительно рамки. Рамка с гироскопами закреплена внутри герметичной сферической оболочки и образует вместе с этой рамкой чувствительный элемент гироскопического компаса — гиросферу. Последняя целиком погружена в токопроводящую жидкость и удерживается от соприкосновения с отслеживающим ее ориентацию контейнером силами электромагнитного отталкивания. Плотность жидкости подбирается так, чтобы гиросфера имела в ней нейтральную плавучесть.

В таких условиях геометрический центр сферической оболочки как центр гироскопических сил может быть принят за центр идеального шарового шарнира, осуществляющего подвес чувствительного элемента компаса, или просто за точку подвеса гироскопической рамки (рис. 2). Центр масс гиросферы смещен от ее геометрического центра на некоторую величину, что превращает гиросферу в своеобразный гироскопический маятник, или, как говорят, в гиросферическую систему. Линия смещения центра масс, линия маятниковости у гироскопического компаса параллельна осям вращения кожухов, т.е. ортогональна обрису векторов кинетических моментов гироскопов. Гироскопы вместе с кожухами сбалансированы так, что их повороты внутри рамки не меняют положения центра масс системы в целом.

Для исследования свойств пространственного компаса в прецессионной постановке с гиросферой или, что то же, с гироскопической рамкой связывают правую прямоугольную систему координат x, y, z с началом в центре подвеса (рис. 3).

Ось z проводится параллельно осям вращения кожухов, так, чтобы центр масс гиросферы оказался на отрицательной ее части, ось y — параллельно вектору сум-

рамке параллельны друг другу. Кожухи связаны между собой сцепкой, например зубчатые сектора, так, что углы поворота гироскопов в рамке всегда равны друг другу по величине и противоположны по направлению. Кроме сцепки, кожуха гироскопов связаны между собой пружиной, накладываемой на гироскопы вокруг осей вращений их кожухов равные

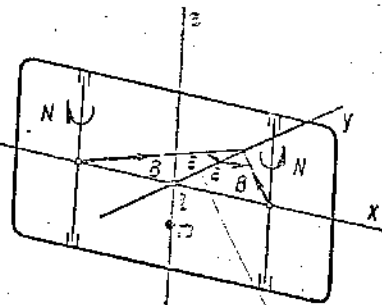


Рис. 3. Гиросферическая рамка.

марного кинетического момента обоих гироскопов. Ось x тем самым определяется однозначно.

Вводятся обозначения: m — масса гиросферы; l — расстояние от центра масс до центра подвеса; B — величина кинетического момента гироскопа (считается, что они одинаковы); ε — угол, образуемый осью каждого гироскопа с осью y ; $N(\varepsilon)$ — разность моментов, приложенных к правому и левому гироскопу вокруг осей их кожухов; H — величина суммарного кинетического момента обоих гироскопов:

$$H = 2B \cos \varepsilon. \quad (1)$$

Прецессионные уравнения движения гироскопической рамки, следующие из закона изменения момента количества движения, примененного последовательно к системе в целом и к каждому гироскопу в отдельности, имеют вид

$$\begin{aligned} -\omega_x 2B \cos \varepsilon &= M_x, & \omega_x 2B \cos \varepsilon &= M_z, \\ \frac{d}{dt} (2B \cos \varepsilon) &= M_y, & -\omega_y 2B \sin \varepsilon &= N(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции абсолютной угловой скорости гиросферы на ее собственные оси, а M_x, M_y, M_z — проекции момента, создаваемого силой реакции, приложенной к рамке в точке ее подвеса, относительно центра масс. Поскольку точка подвеса лежит на оси z , то в любом случае

$$M_z = 0. \quad (3)$$

Зависимость $N(\varepsilon)$ для пространственного компаса выбирается так, чтобы выполнялось соотношение

$$N(\varepsilon) = -\frac{4B^2}{mlR} \sin \varepsilon \cos \varepsilon, \quad (4)$$

где R — радиус Земли.

С учетом соотношений (1), (3), (4) система уравнений (2) принимает вид

$$\omega_x = 0, \quad \omega_z = -\frac{M_x}{H}, \quad \omega_y = \frac{H}{mlR}, \quad \frac{dH}{dt} = M_y. \quad (5)$$

Система уравнений (5) отражает все динамические свойства рассматриваемой гироскопической рамки (в прецессионной постановке). Фактическое ее движение зависит от конкретного вида моментов M_x и M_y , создаваемых реакцией в точке подвеса. Реакция же в точке подвеса зависит от движения этой точки и от того, в каком силовом поле это движение происходит.

С точки зрения навигации представляет интерес поведение исследуемой гиросферической системы при произвольном перемещении точки ее подвеса по поверхности Земли (рис. 4). Идеализация условий при построении излагаемой теории пространственного компаса состоит в том, что поверхность Земли принимается на сферу радиуса R и считается, что эта сфера является эквипотенциальной поверхностью гравитационного поля.

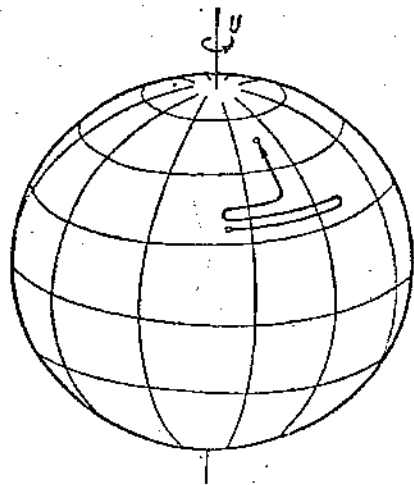


Рис. 4. Движение точки подвеса гироскопической рамки по поверхности Земли.

падала с нормалью к поверхности сферы, пересекая ее центр; ось x_0 направляется по вектору линейной скорости точки O в ее движении по сфере S . Направление оси y_0 определяется однозначно.

Угловое движение гироскопической рамки с точкой подвеса в точке O рассматривается относительно подвижной системы координат $x_0y_0z_0$. Проекции абсолютной угловой скорости системы $x_0y_0z_0$ на собственные оси имеют вид

$$\omega_{x_0}^0 = 0, \quad \omega_{y_0}^0 = \frac{v}{R}, \quad \omega_{z_0}^0 = \omega(t). \quad (6)$$

Если пренебречь различием траекторий центра подвеса и центра масс, то проекции силы реакции в точке подвеса выразятся равенствами

$$F_{x_0} = m \frac{dv}{dt}, \quad F_{y_0} = m\omega v, \quad F_{z_0} = m \left(g - \frac{v^2}{R} \right). \quad (7)$$

Создаваемые силой реакции моменты относительно центра масс гироскопической рамки зависят от ориентации рамки в системе координат $x_0y_0z_0$.

Угловое движение гироскопической рамки пространственного компаса относительно системы $x_0y_0z_0$ имеет одно исключительное свойство — свойство невозмущаемости. Состоит оно в следующем. Если в некоторый момент времени гироскопическая рамка ориентирована так, что связанный с нею трехгранник xyz совпадает с трехгранником $x_0y_0z_0$ (рис. 6) и выполнено соотношение

$$H = mlv, \quad (8)$$

Движение точки подвеса оказывается удобным рассматривать не относительно поверхности Земли, а относительно поверхности сферы S , совпадающей с земной поверхностью, но не участвующей в суточном вращении, т. е. не меняющей своей ориентации в инерциальном пространстве (рис. 5). Движение точки подвеса по сфере S задается двумя функциями времени: $v(t)$ — линейная скорость перемещения по сфере S ; $\omega(t)$ — угловая скорость вращения вектора \vec{v} вокруг нормали к сфере.

С движущейся по сфере S точкой подвеса O связывается правая прямоугольная система координат $x_0y_0z_0$ так, чтобы ось z_0 совпадала с нормалью к поверхности сферы, отрицательной частью пересекая ее центр; ось x_0 направляется по вектору линейной скорости точки O в ее движении по сфере S . Направление оси y_0 определяется однозначно.

Угловое движение гироскопической рамки с точкой подвеса в точке O рассматривается относительно подвижной системы координат $x_0y_0z_0$. Проекции абсолютной угловой скорости системы $x_0y_0z_0$ на собственные оси имеют вид

$$\omega_{x_0}^0 = 0, \quad \omega_{y_0}^0 = \frac{v}{R}, \quad \omega_{z_0}^0 = \omega(t). \quad (6)$$

Если пренебречь различием траекторий центра подвеса и центра масс, то проекции силы реакции в точке подвеса выразятся равенствами

$$F_{x_0} = m \frac{dv}{dt}, \quad F_{y_0} = m\omega v, \quad F_{z_0} = m \left(g - \frac{v^2}{R} \right). \quad (7)$$

Создаваемые силой реакции моменты относительно центра масс гироскопической рамки зависят от ориентации рамки в системе координат $x_0y_0z_0$.

Угловое движение гироскопической рамки пространственного компаса относительно системы $x_0y_0z_0$ имеет одно исключительное свойство — свойство невозмущаемости. Состоит оно в следующем. Если в некоторый момент времени гироскопическая рамка ориентирована так, что связанный с нею трехгранник xyz совпадает с трехгранником $x_0y_0z_0$ (рис. 6) и выполнено соотношение

$$H = mlv, \quad (8)$$

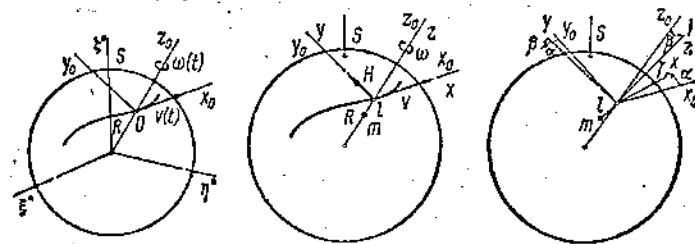


Рис. 5. Движение точки подвеса по сфере S . Система координат, связанная с траекторией.

Рис. 6. Невозмущенное движение.

Рис. 7. Возмущенное движение.

то совпадение трехгранников и соотношение (8) не нарушаются в дальнейшем при произвольном движении точки подвеса по сфере S .

Действительно, при совпадении трехгранников приложенные к гироскопической рамке моменты силы реакции легко вычисляются:

$$M_x = -lF_{y_0} = -ml\omega v, \quad (9)$$

$$M_y = lF_{x_0} = ml \frac{dv}{dt};$$

и решение

$$\omega_x = \omega_{x_0}^0, \quad \omega_y = \omega_{y_0}^0, \quad \omega_z = \omega_{z_0}^0, \quad H(t) = mlv(t), \quad (10)$$

соответствующее невозмущенному движению, при учете выражений (6), (8), (9), обращает систему уравнений (5) в систему тождеств.

При произвольном отклонении от невозмущенного движения ориентация трехгранника xyz относительно осей $x_0y_0z_0$ характеризуется тремя углами поворотов α, β, γ , последовательно выполняемых вокруг осей z, x, y (рис. 7).

Выражения для проекций угловой скорости гироскопической рамки и приложенного к ней момента в этом случае принимают вид

$$\omega_x = \frac{v}{R} \left(\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \right) - \left(\omega + \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos \beta \sin \gamma + \frac{d\beta}{dt} \cos \gamma;$$

$$\omega_y = \frac{v}{R} \cos \alpha \cos \beta + \left(\omega + \frac{d\alpha}{dt} \right) \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt};$$

$$\omega_z = \frac{v}{R} \left(\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \right) + \left(\omega + \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos \beta \cos \gamma + \frac{d\beta}{dt} \sin \gamma. \quad (11)$$

$$M_x = ml \frac{dv}{dt} \sin \alpha \cos \beta - ml\omega v \cos \alpha \cos \beta - ml \left(g - \frac{v^2}{R} \right) \sin \beta;$$

$$M_y = ml \frac{dv}{dt} (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) -$$

$$- ml \omega v (\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) + ml \left(g - \frac{v^2}{R} \right) \cos \beta \sin \gamma.$$

Текущее значение угла поворота гироскопов ε можно представить в виде суммы

$$\varepsilon = \sigma + \delta, \quad (12)$$

где угол σ соответствует углу поворота гироскопов в невозмущенном движении, а угол δ — отклонению от этого положения, так что для любого момента времени можно записать

$$H = 2B \cos(\sigma + \delta), \quad (13)$$

$$2B \cos \sigma = mlv, \quad (14)$$

Уравнения возмущенного движения гироскопической рамки получаются подстановкой выражений (11) и (13) в систему уравнений (5). Величины ω , v и определяемая равенством (14) величина σ должны при этом считаться известными функциями времени.

Линейная часть уравнений возмущенного движения, если принять

$$g - \frac{v^2}{R} \approx g \quad (15)$$

и обозначить

$$\sqrt{\frac{g}{R}} = \nu \text{ (частота Шулера)}, \quad (16)$$

приводится к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} \right) = \nu\beta + \omega \left(\frac{2B\delta \sin \sigma}{ml \sqrt{gR}} \right), \quad (17)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\nu \left(\frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} \right) + \omega\gamma,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\nu \left(\frac{2B\delta \sin \sigma}{ml \sqrt{gR}} \right) - \omega\beta,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{2B\delta \sin \sigma}{ml \sqrt{gR}} \right) = \nu\gamma - \omega \left(\frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} \right).$$

Обозначения

$$x_1 = \frac{v\alpha}{\sqrt{gR}}, \quad x_2 = -\beta, \quad x_3 = -\frac{2B\delta \sin \sigma}{ml \sqrt{gR}}, \quad x_4 = \gamma \quad (18)$$

позволяют записать систему (17) в компактной матричной форме

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu & -\omega & 0 \\ \nu & 0 & 0 & -\omega \\ \nu & 0 & 0 & -\nu \\ 0 & \omega & \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Заменой переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \cos \theta - y_3 \sin \theta, \\ x_2 &= y_2 \cos \theta - y_4 \sin \theta, \\ x_3 &= y_3 \cos \theta + y_1 \sin \theta, \\ x_4 &= y_4 \cos \theta + y_2 \sin \theta, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\theta = \int_0^t \omega(t) dt, \quad (21)$$

система (19) приводится [5, 6] к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\nu y_2, & \dot{y}_3 &= -\nu y_4, \\ \dot{y}_2 &= \nu y_1, & \dot{y}_4 &= \nu y_3, \end{aligned} \quad (22)$$

общее решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{10} \cos \nu t - y_{20} \sin \nu t, \\ y_2 &= y_{20} \cos \nu t + y_{10} \sin \nu t, \\ y_3 &= y_{30} \cos \nu t - y_{40} \sin \nu t, \\ y_4 &= y_{40} \cos \nu t + y_{30} \sin \nu t. \end{aligned} \quad (23)$$

Картину движения в исходных переменных $x_1 \div x_4$, соответствующую общему решению (23), удобно представить по фазовым траекториям в плоскостях $y_2 y_1$ ($y_4 y_3$) — рис. 8; $y_3 y_1$ ($y_4 y_2$) — рис. 9 и, наконец, в $x_3 x_1$ ($x_4 x_2$) — рис. 10.

В плоскостях $y_2 y_1$ и $y_4 y_3$ изображающая точка из исходного положения, соответствующего начальному состоянию системы при $t = 0$, движется равномерно по окружности, концентричной началу координат, угловая скорость движения по окружности равна частоте Шулера ν . В плоскостях $y_3 y_1$ и $y_4 y_2$ фазовые траектории имеют форму эллипса, вписанного в прямоугольник, стороны которого равны диаметрам окружностей в плоскостях $y_2 y_1$ и $y_4 y_3$. Эксцентриситет эллипса зависит от соотношения фаз в движении изображающих точек по окружностям. Фазовая траектория в плоскости $y_4 y_2$ полностью повторяет траекторию в плоскости $y_3 y_1$, запаздывая ровно на четверть периода.

Переход от переменных $y_3 y_1$ к переменным x_3, x_1 , как и от переменных y_4, y_2 к x_4, x_2 , заданный формулами (20), соответствует повороту фазовых плоскостей y в фазовых плоскостях x на угол θ (рис. 10). Так что фазовую траекторию в плоскости $x_3 x_1$ ($x_4 x_2$) можно представить как траекторию в плоскости $y_3 y_1$ ($y_4 y_2$), вращающуюся дополнительно вокруг начала координат с угловой скоростью ω (по часовой стрелке при $\omega > 0$).

Движение по каждой из координат $x_1 \div x_4$ имеет один и тот же характер (рис. 10) — колебания с пульсирующей амплитудой. Значения минимальных и максимальных амплитуд ограничены вели-

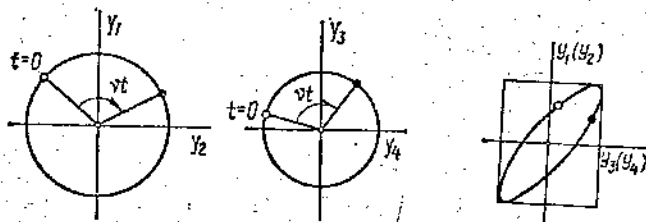


Рис. 8. Фазовые траектории в плоскостях y_1y_2 и y_3y_4 .

Рис. 9. Фазовые траектории в плоскостях y_3y_1 и y_4y_2 .

чинами главных полуосей эллипса — фазовой траектории в плоскости y_3y_1 (y_4y_2).

Видимый «период» основных колебаний в координатах $x_1 \div x_2$ в общем случае отличается от периода обхода изображающей точкой своей эллиптической траектории, который равен периоду Шулера. В частном случае, например при начальных условиях

$$x_1(0) \neq 0, \quad x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0,$$

фазовая траектория в плоскости y_4y_2 вырождается в точку, эллипс в плоскостях y_3y_1 (y_4y_2) вырождается в прямую. Колебания по каждой из координат приобретают ту особенность, что видимый «период» основных колебаний становится равным периоду Шулера (рис. 11).

Если угловая скорость ω остается постоянной, то пульсации амплитуд носят периодический характер, как это изображено на рис. 10 и 11.

Постоянство угловой скорости ω имеет место, например, в том случае, когда точка подвеса неподвижна относительно Земли. В этом случае

$$\omega = U \sin \varphi,$$

где U — угловая скорость суточного вращения Земли, а φ — геоцентрическая широта (угол между плоскостью экватора и радиусом вектором, проведенным из центра Земли в точку подвеса). Период пульсации в этом случае

$$T_{\pi} = \frac{2\pi}{U \sin \varphi},$$

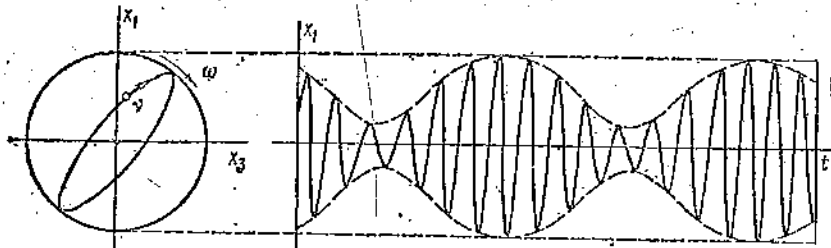


Рис. 10. Фазовая траектория в плоскости x_3x_1 . График функции $x_1(t)$ при постоянном значении ω .

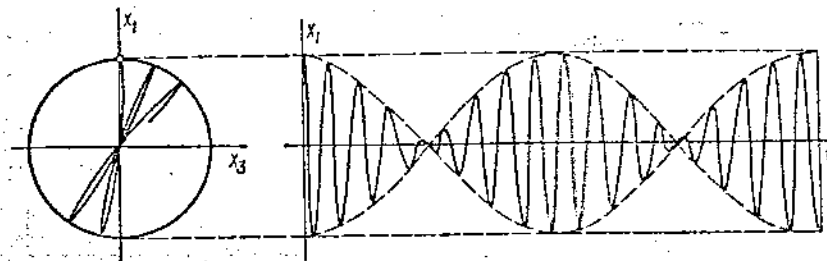


Рис. 11. Движение системы при начальном отклонении по координате x_1 .

если не считать его вдвое меньше в силу неразличимости «знака» амплитуд. Обратим здесь внимание еще на одно обстоятельство. Координаты x_1, x_2 , согласно обозначениям (18), задают отклонение оси z связанного с гиросферой трехгранника от геоцентрической вертикали z_0 и в рамках линейной постановки могут рассматриваться как проекции единичного вектора оси z на оси x_0 и y_0 . Согласно полученной интерпретации, траектория этой проекции в плоскости x_0y_0 (фазовая траектория в плоскости x_1x_2) имеет вид эллипса поворачивающегося в системе координат $x_0y_0z_0$ с угловой скоростью ω вокруг оси z_0 (поворот эллипса происходит по часовой стрелке, если смотреть со стороны положительной части оси z_0). Поскольку ω — это абсолютная угловая скорость вращения осей x_0y_0 вокруг оси z_0 , то отсюда следует, что абсолютная угловая скорость вращения осей эллипса вокруг оси z_0 равна нулю. Главные оси эллиптического конуса, описываемого осью z , или в частном случае плоскость колебаний оси z , аналогично плоскости колебаний маятника Фуко не вращаются в инерциальном пространстве вокруг вертикали. Аналогия с маятником Фуко затрагивает и более существенные свойства движения.

Согласно решению (20), (23) и выявленной в предыдущем разделе геометрической картине движения, максимальные значения амплитуд для всех переменных x_1, x_2, x_3, x_4 одинаковы. Эти же значения соответствуют амплитудам в исходных переменных β, γ , поскольку [см. (18)]

$$\beta = -x_2, \quad \gamma = x_1.$$

Выражения же для исходных переменных α, δ , согласно (18), с учетом (14) и (16) могут быть записаны в виде

$$\alpha = \frac{Rv}{v} x_1, \quad \delta = -\frac{Rv}{v} \operatorname{tg} \sigma x_3.$$

При умеренных скоростях движения точки подвеса относительно Земли, когда можно считать

$$v \approx RU \cos \varphi,$$

амплитудные значения переменных α, δ , соответственно в $v/U \cos \varphi$ и в $v \operatorname{tg} \sigma / U \cos \varphi$ раз превышают амплитудные значения переменных x_1, x_3 , а следовательно, и переменных β, γ .

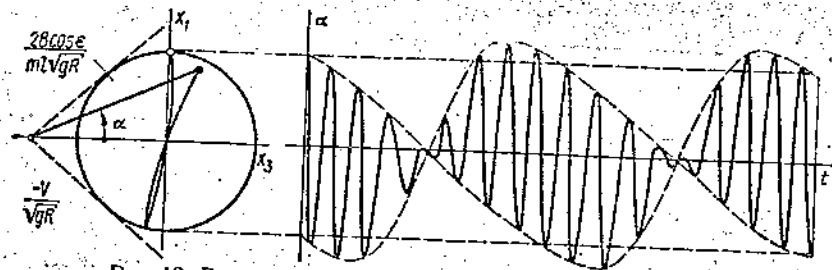


Рис. 12. Движение системы при конечных движениях угла α .

Величина $v/U \approx 17$. Таким образом, линейаризация исходных уравнений по переменным α и δ , в частности линейаризация их тригонометрических функций, гораздо раньше (при меньших амплитудах) становится неправомерной, чем линейаризация по переменным β и γ . Однако оказалось, что систему (19) можно получить из исходной, не прибегая к линейаризации по переменным α и δ . После линейаризации исходной системы лишь по переменным β , γ и их производным к системе (19) приводит подстановка переменных [7]:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2B \cos \varepsilon}{ml \sqrt{gR}} \sin \alpha, \\ x_2 &= -\beta \cos \alpha + \gamma \sin \alpha, \\ x_3 &= \frac{2B \cos \varepsilon}{ml \sqrt{gR}} \cos \alpha - \frac{v}{\sqrt{gR}}, \\ x_4 &= \gamma \cos \alpha + \beta \sin \alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

Решение (20), (23) и вся геометрическая картина движения, построенная в переменных $x_1 \div x_4$, сохраняется для переменных $x_1 \div x_4$. Связь новых переменных x_2 , x_4 с углами β , γ по-прежнему проста. Величины x_2 , x_4 , как и прежние координаты x_2 , x_4 , суть проекции единичного вектора оси z на оси x_0 , y_0 , вычисленные с учетом конечного значения угла α .

Исходные переменные α и ε в соответствии с заменой переменных (24) удобно изобразить на фазовой плоскости $x_3 x_1$. Для этого достаточно текущую точку фазовой траектории соединить с точкой $x_3 = -v/\sqrt{gR}$, $x_1 = 0$ (рис. 12). Длина соединяющего эти точки отрезка

$$\frac{2B \cos \varepsilon}{ml \sqrt{gR}},$$

а угол, образуемый им с осью x_3 , равен углу α .

При максимальных амплитудах переменных $x_1 \div x_4$, близких к величине v/\sqrt{gR} , в графике функции $\alpha(t)$ появляется характерная особенность. При постоянных положительных значениях ω переход от максимальных положительных амплитуд угла α к максимальным отрицательным происходит значительно быстрее, чем переход

обратный (рис. 12). Максимальные значения угла α соответствуют тем моментам времени, когда изображающая точка в фазовой плоскости $x_3 x_1$ ближе всего подходит к касательным, проведенным из точки $(-v/\sqrt{gR}, 0)$ к окружности с центром в начале координат и радиусом, равным максимальной амплитуде переменных $x_1 \div x_4$.

Величина v/\sqrt{gR} при умеренных скоростях движения точки подвеса относительно Земли оценивается как

$$\frac{v}{\sqrt{gR}} \approx \frac{U \cos \varphi}{v} \approx \frac{\cos \varphi}{17};$$

в градусной мере — это $3,5^\circ$.

При максимальных амплитудах углов β , γ , близких к этой величине или даже ее превосходящих, линейаризация тригонометрических функций углов β , γ и исходной системы уравнений в целом вполне допустима, поэтому вся рассмотренная геометрическая картина движения остается справедливой.

Аналогия гироскопического компаса с маятником Фуко, проявившаяся в картине его свободных колебаний, рассмотренных по линейаризованным уравнениям движения, остается справедливой и для полных уравнений, составленных в рамках прецессионной теории [8—11, 29].

Для выявления этой аналогии удобно использовать векторную форму уравнений движения гироскопического компаса [12, 30]. В этом случае движение точки подвеса по сфере S задается единичным вектором $\vec{r}_1(t)$ радиуса, проведенного из центра сферы S к точке подвеса (рис. 13). Положение и состояние гироскопического компаса характеризуются вектором его суммарного кинетического момента \vec{H} и единичным вектором \vec{r} оси z , проходящей от центра масс к точке подвеса чувствительного элемента (гироскопической рамки) компаса.

Конструкцией гироскопической рамки (рис. 14) обеспечивается выполнение двух условий:

а) векторы \vec{H} и \vec{r} ортогональны, т. е.

$$\vec{H} \cdot \vec{r} = 0; \quad (25)$$

б) для производной вектора \vec{r} в инерциальном пространстве выполняется соотношение

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{H} \times \vec{r}}{mlR}, \quad (26)$$

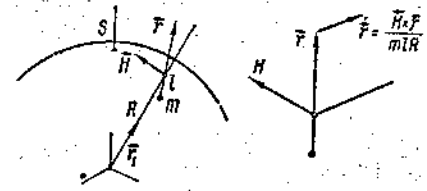


Рис. 13. Векторы, характеризующие движение точки подвеса и состояние гироскопического компаса.

Рис. 14. Связь векторов \vec{H} , \vec{r} , \vec{r}_1 .

которое означает, что движение вектора \vec{r} в инерциальном пространстве сводится к вращению вокруг вектора \vec{H} с угловой скоростью, пропорциональной его величине.

Связь введенных здесь векторов с прежними координатами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ выявляется следующим рассмотрением. Согласно равенству (26), вектор \vec{r} ортогонален векторам \vec{H} и \vec{r}_1 , направленным соответственно по осям y и z трехгранника, связанного с гироскопической рамкой. Последовательность векторов $\vec{r}, \vec{H}, \vec{r}_1$ образует правую тройку, так что вектор \vec{r} всегда направлен по оси x того же трехгранника.

Вектор \vec{r}_1 , если условиться, что точкой изображается дифференцирование в инерциальном пространстве, задает направление оси x_0 трехгранника, связанного с траекторией точки подвеса по сфере S . Угол между векторами \vec{r} и \vec{r}_1 — это угол между осями x и x_0 ; его проекция на горизонтальную плоскость (ортогональную \vec{r}_1) равна углу α с точностью до величин второго порядка малости по сравнению с углом между векторами \vec{r} и \vec{r}_1 .

Модуль вектора \vec{r} , согласно равенству (26), связан прямым соотношением с модулем кинетического момента

$$|\vec{H}| = mlR|\dot{\vec{r}}|,$$

так что имеет место равенство

$$2B \cos \varepsilon = mlR|\dot{\vec{r}}|,$$

определяющее значение угла ε .

Углы β, γ — это углы отклонения вектора \vec{r} от вектора \vec{r}_1 в плоскости, перпендикулярной к \vec{r} (угол β), и в плоскости, содержащей векторы \vec{r} и \vec{r}_1 (угол γ). Таким образом, векторы \vec{r} и \vec{r}_1 , подчиненные двум условиям

$$|\vec{r}| = 1, \quad \vec{r} \cdot \vec{r}_1 = 0$$

и имеющие, следовательно, четыре независимые координаты, полностью характеризуют состояние гироскопического компаса, если известны векторы \vec{r}_1 и $\dot{\vec{r}}_1$, задающие движение точки подвеса по сфере S .

При составлении уравнений движения, определяющих изменение вектора \vec{r} во времени, в предположении, что вектор \vec{r}_1 известен как функция времени, будем считать, что движение центра масс гироскопической рамки в инерциальном пространстве практически не отличается от движения точки подвеса, т. е. пренебрежем величиной l по сравнению с радиусом Земли R .

Гравитационное поле в районе всех масс гироскопической рамки будем считать однородным и создаваемым с гравитационным полем в точке подвеса.

Сила реакции, приложенная к гироскопической рамке в точке подвеса, выразится соотношением

$$\vec{F} = mR\ddot{\vec{r}}_1 + mg\vec{r}_1, \quad (27)$$

а создаваемый ею момент относительно центра масс будет задаваться равенством

$$\vec{M} = l\vec{r} \times \vec{F} = mlR\ddot{\vec{r}} \times \left(\vec{r}_1 + \frac{g}{R}\vec{r}_1 \right). \quad (28)$$

Умножая обе части равенства (26) векторно слева на $mlR\ddot{\vec{r}}$, получаем выражение для вектора \vec{H} :

$$\vec{H} = mlR\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}. \quad (29)$$

Подставляя выражения (29) и (28) в прецессионное уравнение

$$\dot{\vec{H}} = \vec{M}, \quad (30)$$

приходим к уравнению

$$\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} \times \left(\vec{r}_1 + \frac{g}{R}\vec{r}_1 \right), \quad (31)$$

эквивалентному уравнению

$$\ddot{\vec{r}} + \lambda\dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 + \frac{g}{R}\vec{r}_1, \quad (32)$$

в котором множитель λ должен находиться из условия

$$|\dot{\vec{r}}| = 1.$$

Невозмущенное движение гироскопического компаса соответствует решению

$$\vec{r} = \vec{r}_1(t) \quad (33)$$

при $\lambda = g/R$.

Уравнение (32) непосредственно указывает на механическую аналогию гироскопического компаса с математическим маятником при длине, равной радиусу Земли (рис. 15). Если считать, что гравитационное поле в месте расположения массы такого маятника то же, что и в точке его подвеса, т. е. гравитационная сила, приложенная к массе, равна $-mg\vec{r}_1$, то уравнения движения маятника совпадут с уравнением (32). Допущение о гравитационном поле при длине маятника, равной радиусу Земли, слишком искусственно, но оно может быть заменено другим, более естественным. Можно считать, что масса маятника, принимаемая равной единице, испытывает гра-

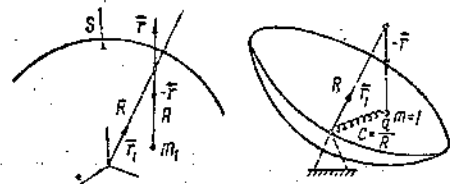


Рис. 15. Механическая аналогия гироскопического компаса с математическим маятником.

Рис. 16. Механическая аналогия гироскопического компаса с материальной точкой.

шей связи, то уравнения ее движения примут вид (32).

Механическая система, изображенная на рис. 16, аналогичная в механическом смысле пространственному компасу, помогает наглядно представить возможность раскачки колеблющегося маятника, а следовательно, и колеблющегося компаса, специальным подбором движения вектора $\vec{r}_1(t)$, т. е. подбором движения точки подвеса. Маятник раскачивается, если центробежная сила, связанная с движением сферической поверхности удерживающей связи, совершает преимущественно положительную работу.

При равномерном движении точки подвеса по окружности на сфере S вектор $\vec{r}_1(t)$ описывает в пространстве круговой конус. В системе координат, вращающейся вокруг оси этого конуса вместе с вектором \vec{r}_1 , связь, наложенная на тяжелую точку, становится стационарной, а суммарное поле сил остается потенциальным. Интеграл энергии в этом случае дает достаточное условие устойчивости невозмущенного движения в виде [8,13—16]

$$\Omega < \nu,$$

где Ω — угловая скорость вращения вектора \vec{r}_1 вокруг оси конуса, или круговая частота движения точки подвеса по окружности на сфере S .

Уравнение (32) обладает той общностью, что оно описывает поведение достаточно широкого класса автономных навигационных систем, обеспечивающих построение нормали к сфере S при произвольном перемещении по ее поверхности [17—20]. Границы этого класса выясняются из следующего рассуждения.

Пусть данная система реагирует лишь на кажущееся ускорение в некоторой точке (точке подвеса) $R\vec{r}_1(t)$, перемещающейся по сфере S . Иными словами, система реагирует на вектор кажущегося ускорения

$$\vec{\omega}_1 = R\ddot{\vec{r}}_1 + g\vec{r}_1,$$

Пусть эта система обладает тем свойством, что строит направление, задаваемое единичным вектором \vec{r} , совпадающее в

тяжении к центру Земли с силой, пропорциональной удалению от него (рис. 16):

$$\vec{F} = -\frac{g}{R}(R\vec{r}_1 - R\vec{r}).$$

Такую зависимость имеет гравитационная сила для внутренних точек однородного шара. Если принять, что нить маятника не провисает, точка находится на неосвобождающей

невозмущенном движении системы с вектором $\vec{r}_1(t)$ при произвольных перемещениях точки $R\vec{r}_1(t)$ по сфере S . Иными словами, известно, что в невозмущенном движении системы

$$\vec{r} = \vec{r}_1(t)$$

при произвольном дважды дифференцируемом единичном векторе $\vec{r}_1(t)$. Пусть, наконец, известно, что система не реагирует на составляющую кажущегося ускорения, коллинеарную построенному системой вектору \vec{r} .

Кроме заданной системы, с точкой подвеса $R\vec{r}_1(t)$, которая в возмущенном движении строит вектор \vec{r} , уже не совпадающий с вектором \vec{r}_1 (рис. 17), рассмотрим такую же систему в невозмущенном состоянии с подвесом в точке $R\vec{r}(t)$. Кажущееся ускорение, на которое реагирует вторая (воображаемая) система, имеет вид

$$\vec{\omega} = R\ddot{\vec{r}} + g\vec{r}.$$

Обе системы строят один и тот же вектор \vec{r} , следовательно, кажущиеся ускорения для обеих систем могут отличаться лишь на составляющую, коллинеарную вектору \vec{r} , к которой обе системы нечувствительны, т. е. должно выполняться равенство

$$R\ddot{\vec{r}} + g\vec{r} = R\ddot{\vec{r}}_1 + g\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}, \quad (34)$$

эквивалентное уравнению (32).

Таким образом, уравнение (32) описывает возмущенное движение любой системы, обладающей свойствами, оговоренными при выводе равенства (34).

Условия (25) и (26)

$$a) \vec{H} \cdot \vec{r} = 0,$$

$$b) \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{H} \times \vec{r}}{mIR},$$

определившие все рассмотренные выше свойства системы, также являются достаточно общими и могут выполняться не только для рассмотренной схемы гироскопического компаса.

Условие а) сводится к чисто конструктивному требованию. Условие б) более сложное. Оно приобретает достаточно простой смысл, если система нечувствительна к кажущемуся ускорению, коллинеарному \vec{r} . В этом случае выполнение условия а) обеспечивает отсут-



Рис. 17. Идентичность возмущенного и невозмущенного движения.

ствие непосредственной зависимости вектора \vec{r} от силы реакции, приложенной к системе в точке ее подвеса. Момент этой силы относительно центра масс ортогонален вектору \vec{r} и вызванная им прецессия вектора \vec{H} не приводит к непосредственному изменению вектора \vec{r} ; так что условие б) должно выполняться исключительно за счет действия внутренних сил. Таким образом, условие б) в данном случае сводится к требованию, чтобы действие внутренних сил в системе приводило к вращению осей, связанных с вектором \vec{r} , вокруг вектора суммарного кинетического момента с угловой скоростью, пропорциональной его величине:

$$\omega_H = \frac{H}{mIR}$$

Условия а), б) остаются, например, выполненными, если гироскопическая рамка будет повернута относительно линии маятника на произвольный угол вокруг вектора кинетического момента [21, 22]. Условия остаются выполненными при неравных кинетических моментах гироскопов B_1, B_2 , если момент, развиваемый пружинным датчиком, соответствует выражению

$$N(\epsilon) = \frac{4B_1B_2}{mIR} \sin \epsilon \cos \epsilon, \quad (35)$$

где под ϵ понимается половина угла между осями собственного вращения роторов.

Выполнение условий а), б) можно обеспечить, исключив из конструкции гироскопического компаса спарник (секторную связь между гироскопами) [23, 24], если какой-то конструкцией пружинного датчика или, например, используя электрические датчики момента, обеспечить наложение гироскопами друг на друга моментов в соответствии с формулой (4) или (35).

Условия а), б) могут быть выполнены и в более сложных конструкциях, в том числе и в конструкциях с количеством роторов больше двух [25].

При использовании векторной формы уравнений движение системы в случае малых отклонений вектора \vec{r} от вектора \vec{r}_1 удобно рассматривать в проекции на плоскость, ортогональную вектору \vec{r}_1 . Если в этой плоскости ввести систему координат, ось которой не вращается в инерциальном пространстве вокруг вектора \vec{r}_1 , то линейные уравнения для векторов $\vec{\rho}$ и \vec{v} проекций векторов \vec{r} и $\dot{\vec{r}}$, полученные проектированием уравнения (32) на выбранную плоскость, принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\rho}} &= \vec{v} - \vec{v}_1, \\ \dot{\vec{v}} &= \dot{\vec{v}}_1 - v^2 \vec{\rho}. \end{aligned} \quad (36)$$

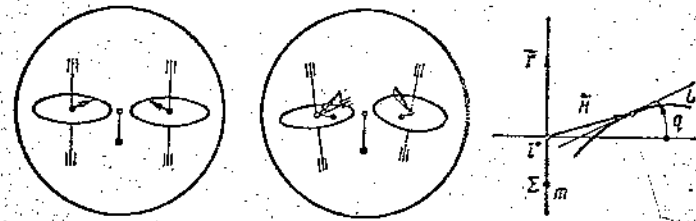


Рис. 18. Идеальная схема пространственного гироскопического компаса.

Рис. 19. Нарушения в идеальной схеме пространственного гироскопического компаса.

Рис. 20. Геометрический смысл параметра q .

Здесь принято, как и раньше, $g = v^2/R \approx \xi$ и введено обозначение \vec{v}_1 для вектора \vec{r}_1 , лежащего в плоскости, ортогональной \vec{r}_1 . Введением безразмерной переменной

$$\vec{u} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_1}{v} \quad (37)$$

система (36) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\rho}} &= v\vec{u}, \\ \dot{\vec{u}} &= -v\vec{\rho}, \end{aligned} \quad (38)$$

из которого легко может быть получена вся геометрическая картина движения, рассмотренная выше.

Выполнение условий (25), (26) в схеме двухроторного гироскопического компаса сводится к ряду конструктивных требований, характер которых схематично изображен на рис. 18. Требуется параллельность осей кожухов друг другу, ортогональность осей собственного вращения гироскопов осям кожухов, совпадение центров масс систем ротор — кожух с осями вращения кожухов, равенство кинетических моментов и параллельность линии, соединяющей центр масс системы с точкой подвеса, осям вращения кожухов.

При выполнении перечисленных требований пружинный датчик момента, реализующий зависимость (4), придает данной гироскопической системе свойство невозмущаемости. Подразумевается, конечно, что и в подвесе системы и в подвесе ее гироскопов полностью отсутствует трение.

Как было отмечено выше, перечисленные требования могут быть несколько смягчены. Вместо параллельности линии центр масс — точка подвеса осей вращения кожухов достаточно потребовать ортогональность этой линии к вектору суммарного кинетического момента. При неравных кинетических моментах достаточно датчиком моментов реализовать зависимость (35), чтобы свойство невозмущаемости было сохранено.

В общем же случае даже малое нарушение перечисленных требований приводит к потере свойства невозмущаемости. Схематично эти нарушения изображены на рис. 19.

Если нарушения малы, то уравнения движения, аналогичные системе уравнений (36), принимают вид [12]

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \vec{v} - \vec{v}_1 + q \frac{1}{v_1} \vec{r}_1 \times \vec{v}, \\ \dot{\vec{v}} &= (1 + \rho) (\vec{v}_1 - v_1^2 \vec{\rho}). \end{aligned} \quad (39)$$

Два безразмерных параметра — ρ и q , вошедшие в систему уравнений (39), определяют суммарное влияние всех рассматриваемых отклонений на динамические свойства гироскопического компаса. Связь параметров ρ и q с совокупностью исходных отклонений определяется следующим образом. Предполагается, что при отсутствии внешних сил, т. е. в случае, когда реакция в точке подвеса равна нулю (практически в невесомости), угловая скорость рамки, несмотря на нарушения кинематической схемы, остается пропорциональной суммарному кинетическому моменту ее гироскопов:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{H}}{mlR}, \quad (40)$$

Величина же l в соотношении (40) в нашем случае может оказаться отличной от фактического расстояния между центром масс и точкой подвеса, которое обозначим как l^* . Безразмерный параметр ρ определяется из соотношения

$$l^* = l(1 + \rho),$$

т. е.

$$\rho = \frac{l^* - l}{l}.$$

Параметр q определяется следующим образом. В нашем случае единичный направляющий вектор линии, соединяющей центр масс с центром подвеса (вектор \vec{r}), не ортогонален вектору суммарного кинетического момента \vec{H} . Угол между этими векторами в общем случае также может меняться при повороте гироскопов в рамке, т. е. при изменении модуля вектора \vec{H} . Параметр q определяется равенством

$$q = \frac{\partial (\vec{H} \cdot \vec{r})}{\partial H}.$$

Геометрический смысл параметра иллюстрируется рис. 20. В плоскости, содержащей векторы \vec{r} и \vec{H} , в прямоугольной системе координат, связанной с вектором \vec{r} , при изменении модуля H вектор \vec{H} описывает некоторую кривую L . Тангенс угла наклона касательной к кривой L , записанный, вообще говоря, от модуля H , и есть безраз-

мерный параметр q . В частном случае, когда угол между векторами \vec{r} и \vec{H} остается постоянным при любом H , величина q равна отклонению угла между \vec{r} и \vec{H} от прямого. Уравнения (39) позволяют установить величины возмущений, приобретаемых гироскопическим компасом при маневрировании объекта, на котором он установлен. Форма свободных колебаний такого «неидеального» компаса имеет характерные особенности. Отличие от нуля параметров ρ и q приводит к изменению периода колебаний гироскопического компаса (период обращения по эллипсу)

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left(1 - \frac{1}{2} \rho\right)$$

и к изменению периода пульсаций амплитуды колебаний

$$T_{\square} = \frac{2\pi U \sin \varphi}{1 + \frac{1}{2} q \frac{U^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{v^2}}.$$

Эта зависимость может использоваться при регулировках чувствительных элементов гироскопических компасов.

При высокочастотных перемещениях точки подвеса, вызываемых, например, вибрацией основания, исследование свойств гироскопического компаса в рамках прецессионной теории становится неправомерным. В подобном исследовании должны быть учтены факторы, определяющие формы собственных движений рассматриваемой системы в диапазоне частот, близких к частотам внешних возмущений. Помимо факторов, определяющих нутационное движение системы — экваториальные моменты инерции роторов, моменты инерции вспомогательных элементов конструкции, в большинстве случаев необходимо учитывать упругую податливость конструктивных элементов, соединяющих значительные массы тела со значительными моментами инерции. Какие именно элементы следует считать деформируемыми, массы или моменты инерции каких именно элементов следует учесть — это зависит как от параметров конкретной конструкции, так и от того диапазона частот, в пределах которого исследуются свойства данной системы.

В исследовании поведения двухроторного гироскопического компаса с учетом реальных параметров конструкции при вибрации точки подвеса в частотах, характерных для мест его установки, оправдало себя следующее представление о его механической схеме [26].

Чувствительный элемент гироскопического компаса — гиросфера — рассматривается как система трех твердых тел: двух роторов и оболочки. Считается, что центры масс роторов неподвижны относительно оболочки, по ориентации роторов, помимо свободного вращения вокруг собственных осей и совместного поворота вокруг осей кожухов, может дополнительно изменяться относительно оболочки за счет деформации элементов конструкции — мембран, соединя-

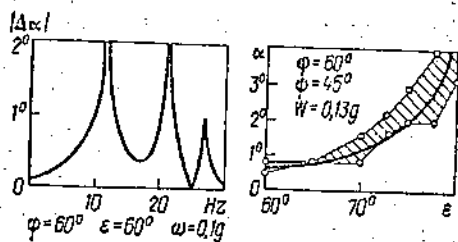


Рис. 21. Резонансная характеристика гироскопического компаса.

Рис. 22. Погрешности гироскопического компаса на качающемся основании.

уравнениям, составленным в предположении малости углов отклонения от равновесного положения и линейной зависимости восстанавливающих моментов сил от величины деформаций. Если учесть малые (линейные) колебания направления периодических моментов сил, приложенных к гироскопам, то окажется, что их средние значения за период (вибрации) отличны от нуля. Моменты сил, приложенных к гироскопам, при вибрации точки подвеса имеют постоянные составляющие.

Постоянные составляющие моментов изменяют равновесное положение гироскопического компаса. Наиболее заметную величину при этом имеет поворот вокруг вертикальной оси — азимутальное отклонение компаса от положения равновесия, соответствующее погрешности прибора в определении курса. Для одной из реальных конструкций зависимость азимутальной погрешности от частоты вибрации основания при постоянной амплитуде вибрационных перегрузок изображена на рис. 21 [26]. Резонансные частоты, связанные с поступательными перемещениями элементов, для исследованной конструкции оказались значительно выше собственных частот угловых колебаний.

Результаты, полученные при исследовании вибрации, используются и для анализа поведения гироскопического компаса в условиях качающегося основания. Совпадение результатов теоретического расчета (рис. 22, сплошная кривая) с экспериментальными данными (заштрихованная область) достигается в этом случае, если дополнительно учесть влияние небольшого люфта в осях подвесов кожухов гироскопов [27].

Рассмотренный в докладе круг исследований, относящихся к динамике пространственного компаса, по-видимому, может считаться характерным для современного теоретического исследования свойств гироскопических приборов различного назначения. К этому кругу относится прецессионная теория идеального функционирования прибора, исследование влияния отклонений реальной конструкции от идеальной схемы прибора, исследование влияния на основные свойства прибора высокочастотных механических процессов, характерных для его конкретной конструкции. Источником возбуждения

ющих массивные обода роторов с валами гироскопов, самих валов и их подшипников, осей и подшипников подвеса кожухов.

Вибрация точки подвеса в горизонтальной плоскости вызывает угловые колебания оболочки, которые сопровождаются угловыми колебаниями роторов. Формы угловых колебаний и резонансные частоты находятся по линейным

высокочастотных процессов может служить не только внешнее воздействие, как это было принято в изложенном выше, но и собственные внутренние источники вибрации. Типичный источник — динамическая несимметрия ротора. Существенную роль играет вибрация, создаваемая скоростными подшипниками гироскопов. Эта область интенсивно исследуется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О теории гироскопа Аншютца, изложенной проф. Геккалером. — Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., 1940, № 4, с. 423—474. Собрание трудов, т. 2, ч. 1. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1943, с. 179.
2. Кудревич Б. И. Теория и практика гироскопического компаса, ч. 4. Л., Изд-во ВМФ СССР, 1939. 252 с.
3. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. Изд. 3-е. М., Изд-во МГУ, 1976. 400 с.
4. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопа. — Прикл. математика и механика, 1956, 20, вып. 4, с. 487—499.
5. Кошляков В. Н. О приводимости уравнений движения гироскопа. — Прикл. математика и механика, 1961, 25, вып. 5, с. 801—805.
6. Ляшенко В. Ф. О приводимости уравнений движения гироскопа и двухгироскопической вертикали. — Прикл. математика и механика, 1962, 26, вып. 2, с. 369—372.
7. Жбанов Ю. К. Решение уравнений движения гироскопа при конечных углах отклонения от меридиана. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 102—104.
8. Жбанов Ю. К. Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. — Прикл. математика и механика, 1960, 24, вып. 6, с. 1024—1029.
9. Андреев В. Д. К теории маятниково-гироскопической системы, удовлетворяющей условиям М. Шулера. — Прикл. математика и механика, 1965, 29, вып. 6, с. 1108—1111.
10. Девянин Е. А. Об аналогии движения гироскопа движущейся материальной точки. — Инж. журнал, МТТ, 1968, № 1, с. 3—5.
11. Девянин Е. А. Аналогия движения невозмущаемых гироскопов движущейся материальной точки. — Труды Ин-та механики МГУ, 1970, вып. 7, с. 44—54.
12. Жбанов Ю. К. К теории гироскопа. — Прикл. математика и механика, 1962, 26, вып. 6, с. 1130—1135.
13. Меркин Д. Р. Об устойчивости движения гироскопа. — Прикл. математика и механика, 1961, 25, вып. 6, с. 983—991.
14. Меркин Д. Р. Об устойчивости движения гироскопа. — Инж. журнал, МТТ, 1966, № 5, с. 26—32.
15. Кошляков В. Н., Ляшенко В. Ф. Об интеграле в теории гироскопа. — Прикл. математика и механика, 1963, 27, вып. 1, с. 10—15.
16. Кошляков В. Н., Ляшенко В. Ф. Об устойчивости гироскопов. — Прикл. математика и механика, 1963, 27, вып. 5, с. 885—887.
17. Андреев В. Д. Об общих уравнениях инерциальной навигации. — Прикл. математика и механика, 1964, 28, вып. 2, с. 242—257.
18. Климов Д. М. Об условиях невозмущаемости гироскопической рамы. — Прикл. математика и механика, 1964, 28, вып. 3, с. 511—513.
19. Девянин Е. А. О возможных принципах построения системы инерциальной навигации. — Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 6, с. 10—14.
20. Кондорский И. Д. К теории гироскопических систем. — Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 4, с. 11—15.
21. Ишлинский А. Ю. Теория двухгироскопической вертикали. — Прикл. математика и механика, 1957, 21, вып. 2, с. 175—183.

22. Ишлинский А. Ю. Полная компенсация внешних возмущений, вызванных маневрированием в гироскопических системах. — В кн.: Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. Труды совещания. Киев, 16—20 октября 1958 г. К., 1959, с. 81—92.
23. Василько В. П., Онищенко С. М. К теории корректируемого двухроторного гироскопа. — Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 4, с. 30—37.
24. Василько В. П., Кошляков В. Н., Шиф М. А. К теории корректируемого гироскопа. — Инж. журнал, МТТ, 1967, № 5, с. 41—44.
25. Ройтенберг Я. Н. Многогироскопная вертикаль. — Прикл. математика и механика, 1946, 10, вып. 1, с. 101—124.
26. Жбанов Ю. К. Гироскоп на вибрирующем основании. — Прикл. математика и механика, 1961, 25, вып. 5, с. 933—937.
27. Жбанов Ю. К. Гироскоп на качке. — Инж. журнал, МТТ, 1966, № 3, с. 178—179.
28. Geckeler I. W. Kreiselmechanik des Ansehütz ∇ Raumkompasses. — Ingr.— Arch., 1935, Bd. 6, No. 4, p. 229—252.
29. Bauersfeld W. Die Bewegungsgesetze des Raumkompasses. — Ingr.— Arch., 1930, Bd. 27, No. 6, p. 365—371.
30. Chirstoph P. Die 84-Minuten-Abstimmung beim Kreisel und Raumkompasses. — Ingr.— Arch., 1958, Bd. 26, No. 4, p. 233—241.

УДК 531.011

В. В. Румянцев

О НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ МЕХАНИКИ

В докладе рассматриваются вопросы определения понятий возможных перемещений и идеальности связей, совместности основных дифференциальных принципов механики систем, стесненных идеальными голономными и неголономными связями, и распространения этих принципов на некоторые классы управляемых механических систем.

Введение. Ж. Лагранж [1] в основу созданной им аналитической механики положил вариационный дифференциальный принцип

$$\sum_{\nu} (F_{\nu} - m_{\nu} \omega_{\nu}) \cdot \delta r_{\nu} = 0, \quad (1)$$

представляющий собой обобщение с помощью принципа Даламбера принципа возможных перемещений. Здесь m_{ν} и ω_{ν} — массы и ускорения относительно инерциальной системы координат материальных точек; r_{ν} — радиусы-векторы точек, причем $\omega_{\nu} = \dot{r}_{\nu}$; δr_{ν} — возможные перемещения, допускаемые связями в данный момент времени t ; $F_{\nu} = F(r_{\nu}, \dot{r}_{\nu}, t)$ — заданные силы, приложенные к точкам системы.

Уравнение (1) представляет собой следствие аксиомы определения идеальных связей

$$\sum_{\nu} R_{\nu} \cdot \delta r_{\nu} = 0 \quad (2)$$

в уравнений Ньютона

$$m_{\nu} \omega_{\nu} = F_{\nu} + R_{\nu} \quad (\nu = 1, \dots, N), \quad (3)$$

R_{ν} обозначают реакции связей.

Принцип Даламбера — Лагранжа (1) является основным принципом аналитической механики систем с идеальными связями; все другие вариационные принципы представляют собой следствия или модификации этого принципа. В принципе (1) сравниваются одновременные ($\delta t = 0$) положения системы в действительном и любом бесконечно близком кинематически-возможном движении, соответствующих уравнениям связей.

К. Гаусс [2], сравнивая действительное движение системы лишь с теми кинематически-возможными движениями, в которых для данного момента времени координаты и скорости точек имеют такие же значения, как и в действительном движении, на основе уравнения (1) показал, что для действительного движения функция

$$Z = \sum_{\nu} \frac{1}{2m_{\nu}} (m_{\nu} \omega_{\nu}^2 - F_{\nu})^2, \quad (4)$$

названная принуждением, имеет минимум ($\delta Z = 0, \delta^2 Z \geq 0$).

Известны некоторые видоизменения принципа Гаусса. Так, Г. Герц [3] показал, что величину \sqrt{Z} в случае $F_{\nu} = 0$ можно трактовать как кривизну траектории изображающей точки в многомерном пространстве; такая интерпретация принципа Гаусса носит название принципа кратчайшего пути Герца. Учитывая уравнения (3), выражению (4) можно придать также вид [4]

$$Z = \sum_{\nu} \frac{R_{\nu}^2}{2m_{\nu}}, \quad (5)$$

позволяющий представить принцип Гаусса в виде принципа наименьших действий. Н. Г. Четаев [5] видоизменял принцип Гаусса в принцип максимума работы сил на элементарном цикле. Принцип Четаева позволил расширить характер обычно рассматривавшихся механических систем путем привлечения из термодинамики принципа Карно.

Ф. Журден [6] предложил сравнивать действительное движение с теми кинематически-возможными движениями, в которых для данного момента времени координаты точек имеют такие же значения, как и в действительном движении, и показал, что для действительного движения справедливо уравнение

$$\sum_{\nu} (m_{\nu} \omega_{\nu} - F_{\nu}) \delta r_{\nu} = 0. \quad (6)$$

Принципы Гаусса (4) и Журдена (6) отличаются один от другого, а также от принципа Даламбера — Лагранжа (1) лишь формой выражений и классами сравниваемых движений, но не степенью общности. И Гаусс и Журден подтвердили эквивалентность установленных ими принципов принципу Даламбера — Лагранжа.

Принцип Гаусса установлен в 1829 г., когда рассматривались главным образом голономные связи, а принцип Журдена — в 1909 г., когда уже неизбежно изучались и линейные неголономные связи.

При рассмотрении нелинейных неголономных связей первого порядка Аппель и Делассю (1911—1913 гг.), считавшие, что нелинейные связи невозможно реализовать через линейные предельным переходом, пришли к выводу, что принцип Даламбера — Лагранжа перестает быть справедливым для систем, стесненных такими связями, тогда как принцип Гаусса остается справедливым.

Позже Н. Г. Четаев [7] показал, что если аксиоматически определить возможные перемещения систем, стесненных нелинейными неголономными связями

$$\Phi_p(r_{\nu}, \dot{r}_{\nu}, t) = 0 \quad (p = 1, \dots, k), \quad (7)$$

уравнениями вида

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \Phi_p}{\partial r_{\nu}} \delta r_{\nu} = 0, \quad (8)$$

то принципы Даламбера — Лагранжа и Гаусса будут совместными.