МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1979

УДК 531.38

О ДВИЖЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, В. А. СТОРОЖЕНКО, М. Е. ТЕМЧЕНКО

(Москва, Киев)

Изучаются некоторые вопросы динамики твердого тела на струнном приводе, который, как показано в работе [1], может быть использован при балансировке быстровращающихся тел. Определены условия существования стационарных движений подвешенного на струне осесимметричного твердого тела в предположении, что точка подвеса его к струне не лежит на оси динамической симметрии. Проведено исследование этих условий для осесимметричного твердого тела, у которого точка подвеса к струне находится выше его центра масс.

Излагаемые в данной статье результаты частично содержатся в [2].

1. Пусть твердое тело массы m, обладающее осью динамической симметрии, подвешено на абсолютно гибкой, нерастяжимой и безынерционной струне длины l. Другим своим концом струна шарнирно прикреплена к неподвижной точке O_1.

Предполагается, что точка O_2 (подвеса тела к струне) отстоит от оси динамической симметрии тела на расстоянии, равном l_1 (фиг. 1, a).

Введем невращающуюся систему координат $\xi\eta\zeta$ с началом в неподвижной точке O_1. Ось ζ этой системы направим вертикально вверх.

В точке G (центре масс тела) поместим начала систем координат xyz и $x_1y_1z_1$, жестко связанных с телом. Ось z первой из них проведем через точку O_2 (фиг. 1, a), а ось x расположим в экваториальной плоскости. Оси z_1 и x_1 системы $x_1y_1z_1$ направим соответственно по оси динамической симметрии тела и оси x системы координат xyz.

И, наконец, введем поступательно перемещающуюся вместе с телом систему координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$ с началом в точке G, оси которой во все время движения соответственно параллельны осям ξ, η, ζ (фиг. 2).

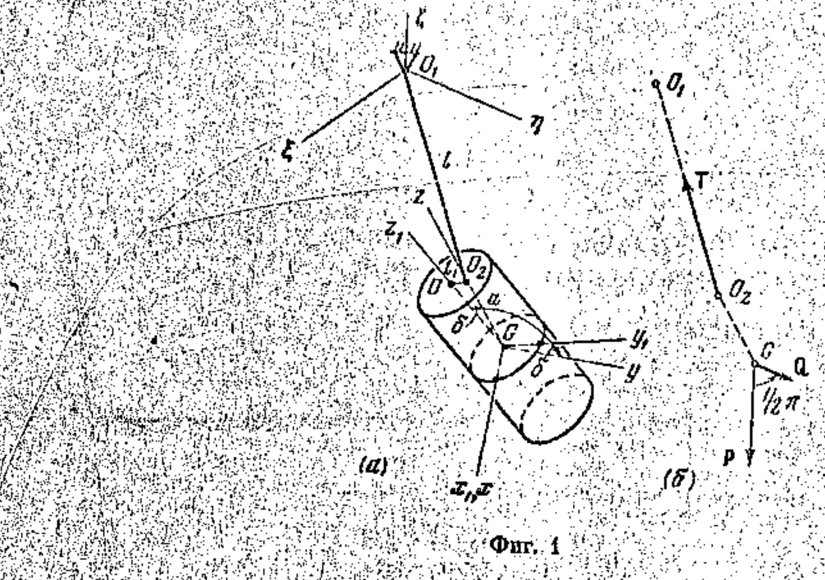
Пусть C — полярный (т. е. относительно оси z_1), а $A=B$ — экваториальные главные центральные моменты инерции тела ($A=B>C$). Через δ обозначим угол между осями z_1 и z или, что то же, между осями y_1 и y (фиг. 1, a). Естественно считать $0<\delta<{}^1/_2\pi$.

Моменты инерции рассматриваемого тела относительно осей x, y, z выражаются в виде

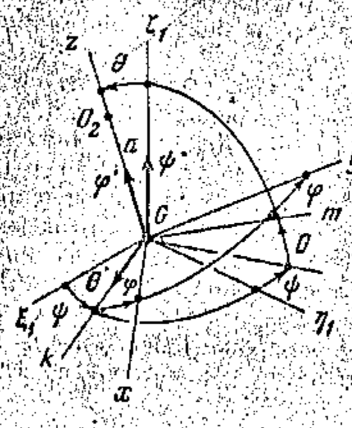
$$I_{xx}=A,\quad I_{yy}=A\cos^2\delta+C\sin^2\delta,\quad I_{zz}=C\cos^2\delta+A\sin^2\delta$$
$$I_{yz}=-(A-C)\sin\delta\cos\delta,\quad I_{zx}=I_{xy}=0 \tag{1.1}$$

Положение жестко связанной с телом системы координат xyz относительно системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$ определим углами Эйлера ψ, θ и φ (фиг. 2). Проекции p, q, r угловой скорости тела на оси x, y, z выражаются известными формулами

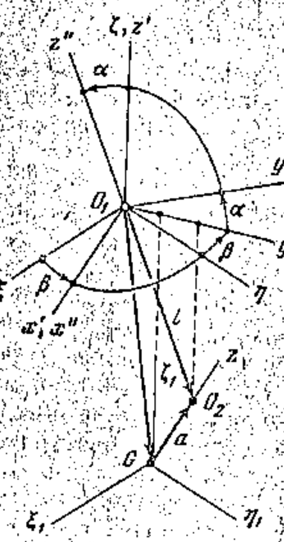
$$\begin{aligned} p&=\psi^{\cdot}\sin\theta\sin\varphi+\theta^{\cdot}\cos\varphi\\ q&=\psi^{\cdot}\sin\theta\cos\varphi-\theta^{\cdot}\sin\varphi\\ r&=\psi^{\cdot}\cos\theta+\varphi^{\cdot}\end{aligned} \tag{1.2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Положение струны относительно неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$ определим углом α — отклонения струны от вертикали (точнее ее продолжения — z'' от оси ζ) и углом β между осью η и проекцией струны на горизонтальную плоскость $\xi\eta$ (фиг. 3).

Обозначим далее буквой a расстояние между центром масс тела G и точкой O_2 (фиг. 1, a). Координаты точки G в системе координат $\xi\eta\zeta$ представлены так:

$$\xi_G=-l\sin\alpha\sin\beta-a\sin\psi\sin\theta$$

$$\eta_G=l\sin\alpha\cos\beta+a\cos\psi\sin\theta \qquad (1.3)$$

$$\zeta_G=-l\cos\alpha-a\cos\theta$$

Тело, подвешенное на струне, имеет пять степеней свободы. Естественно выбрать в качестве обобщенных координат введенные выше углы α,

β, ψ, θ и φ. В этом случае функция Лагранжа приводится к виду

$$
\begin{aligned}
L={}&{}^1/_2 m\{l^2(\dot\alpha^2+\dot\beta^2\sin^2\alpha)+a^2(\dot\theta^2+\dot\psi^2\sin^2\theta)+\\
&+2al[\dot\alpha\dot\theta\sin\alpha\sin\theta+(\dot\alpha\dot\theta\cos\alpha\cos\theta+\dot\beta\dot\psi\sin\alpha\sin\theta)\cos(\beta-\psi)+\\
&+(\dot\alpha\dot\psi\cos\alpha\sin\theta-\dot\beta\dot\theta\sin\alpha\cos\theta)\sin(\beta-\psi)]\}+\\
&+{}^1/_2 A(\dot\psi^2+\dot\theta^2+\dot\varphi^2+2\dot\psi\dot\varphi\cos\theta)-\\
&-{}^1/_2(A-C)[(\cos\theta\cos\delta-\sin\theta\cos\varphi\sin\delta)\dot\psi+\dot\theta\sin\varphi\sin\delta+\dot\varphi\cos\delta]^2+\\
&+mg(l\cos\alpha+a\cos\theta)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Используя функцию (1.4), составим уравнения Лагранжа второго рода. Имеем

$$
\begin{aligned}
&ml^2(\ddot\alpha-\dot\beta^2\sin\alpha\cos\alpha)+mal\sin\alpha(\dot\theta^2\cos\theta+\ddot\theta\sin\theta)+\\
&+mal\cos\alpha\{[\ddot\theta\cos\theta-(\dot\theta^2+\dot\psi^2)\sin\theta]\cos(\beta-\psi)+\\
&+(\ddot\psi\sin\theta+2\dot\theta\dot\psi\cos\theta)\sin(\beta-\psi)\}+mgl\sin\alpha=0\\
&ml\sin\alpha\{l(\ddot\beta\sin\alpha+2\dot\alpha\dot\beta\cos\alpha)+a(\ddot\psi\sin\theta+2\dot\psi\dot\theta\cos\theta)\times\\
&\times\cos(\beta-\psi)+a[(\dot\psi^2+\dot\theta^2)\sin\theta-\ddot\theta\cos\theta]\sin(\beta-\psi)\}=0\\
&A(\ddot\psi-\ddot\varphi\cos\theta-\dot\theta\dot\varphi\sin\theta)+ma^2(\dot\theta\dot\psi\sin2\theta+\ddot\psi\sin^2\theta)+\\
&+mal\sin\theta\{(\ddot\beta\sin\alpha+2\dot\alpha\dot\beta\cos\alpha)\cos(\beta-\psi)+\\
&+[\ddot\alpha\cos\alpha-(\dot\alpha^2+\dot\beta^2)\sin\alpha]\sin(\beta-\psi)\}-(A-C)\{(\cos\theta\cos\delta-\\
&-\sin\theta\cos\varphi\sin\delta)[\ddot\psi(\cos\theta\cos\delta-\sin\theta\cos\varphi\sin\delta)+\ddot\theta\sin\varphi\sin\delta+\\
&+\ddot\varphi\cos\delta-2\dot\psi\dot\theta(\cos\theta\cos\varphi\sin\delta+\sin\theta\cos\delta)+2\dot\psi\dot\varphi\sin\theta\sin\varphi\sin\delta]-\\
&-\dot\theta\dot\varphi\sin\theta(1-2\sin^2\varphi\sin^2\delta)-\dot\theta^2\sin\varphi\sin\delta(\cos\theta\cos\varphi\sin\delta+\\
&+\sin\theta\cos\delta)+\dot\varphi^2\sin\theta\sin\varphi\sin\delta\cos\delta\}=0\\
&A(\ddot\theta+\dot\psi\dot\varphi\sin\theta)+ma^2(\ddot\theta-\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta)+\\
&+mal\{[\sin\alpha\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta\cos(\beta-\psi)]\ddot\alpha-\ddot\beta\sin\alpha\cos\theta\sin(\beta-\psi)+\\
&+\dot\alpha^2\cos\alpha\sin\theta-(\dot\alpha^2+\dot\beta^2)\sin\alpha\cos\theta\cos(\beta-\psi)-\\
&-2\dot\alpha\dot\beta\cos\alpha\cos\theta\sin(\beta-\psi)\}+(A-C)\{\ddot\psi\sin\varphi\sin\delta[(\sin\theta\cos\varphi\sin\delta-\\
&-\cos\theta\cos\delta)-\ddot\theta\sin\varphi\sin\delta-\ddot\varphi\cos\delta]-\dot\psi\dot\varphi[\cos\theta\cos\varphi\sin2\delta+\\
&+\sin\theta(1-2\cos^2\varphi\sin^2\delta)]-\dot\theta\dot\varphi\sin2\varphi\sin^2\delta-\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\delta\cos\delta+\\
&+\dot\psi^2(\sin\theta\cos\varphi\sin\delta-\cos\theta\cos\delta)(\cos\theta\cos\varphi\sin\delta+\sin\theta\cos\delta)\}+mga\sin\theta=0\\
&A(\ddot\varphi+\ddot\psi\cos\theta-\dot\psi\dot\theta\sin\theta)+(A-C)\{[\ddot\psi(\sin\theta\cos\varphi\sin\delta-\cos\theta\cos\delta)-\\
&-\ddot\theta\sin\varphi\sin\delta-\ddot\varphi\cos\delta]\cos\delta+\dot\theta\dot\psi[\sin\theta(1-2\sin^2\delta\cos^2\varphi)+\\
&+\cos\theta\cos\varphi\sin2\delta]+\dot\theta^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\delta+\\
&+\dot\psi^2\sin\varphi\sin\theta\sin\delta(\cos\theta\cos\delta-\sin\theta\cos\varphi\sin\delta)=0
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

2. Нетрудно убедиться, что совокупность уравнений (1.5) допускает частное решение

$$
\alpha=\alpha_0,\quad \beta=\omega t+\beta_0,\quad \psi=\omega t+\psi_0,\quad \theta=\theta_0,\quad \varphi=\varphi_0
\tag{2.1}
$$

соответствующее стационарным движениям рассматриваемого тела. Подставляя решение (2.1) в систему (1.5), находим, что постоянные α_0, β_0, ψ_0, θ_0 и φ_0 связаны уравнениями

$$-ml\omega^2\cos\alpha_0[l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0\cos(\beta_0-\psi_0)]+mgl\sin\alpha_0=0$$

$$mal\omega^2\sin\alpha_0\sin\theta_0\sin(\beta_0-\psi_0)=0,\quad -mal\omega^2\sin\alpha_0\sin\theta_0\sin(\beta_0-\psi_0)=0 \qquad (2.2)$$

$$-ma\omega^2\cos\theta_0[a\sin\theta_0+l\sin\alpha_0\cos(\beta_0-\psi_0)]+$$
$$+(A-C)\omega^2(\sin\theta_0\cos\varphi_0\sin\delta-\cos\theta_0\cos\delta)(\cos\theta_0\cos\varphi_0\sin\delta+$$
$$+\sin\theta_0\cos\delta)+mga\sin\theta_0=0$$

$$(A-C)\sin\theta_0\sin\varphi_0\sin\delta(-\sin\theta_0\cos\varphi_0\sin\delta+\cos\theta_0\cos\delta)\omega^2=0$$

Из совпадающих второго и третьего уравнений (2.2) следует, что при $\alpha_0\neq0$ и $\theta_0\neq0$ должно выполняться условие

$$\sin(\beta_0-\psi_0)=0 \qquad (2.3)$$

Последнее в совокупности с решением (2.1) и при использовании фиг. 2 и 3 позволяет сделать вывод о том, что при стационарном движении тела его центр масс G и точка O_2 (фиг. 1, a) постоянно лежат в вертикальной плоскости $y'z'$ системы координат $x'y'z'$, которая вращается относительно неподвижной системы $\xi\eta\zeta$ с угловой скоростью ω вокруг оси z', совпадающей с осью ζ.

В плоскости $y'z'$ постоянно находятся действующие на тело силы: сила веса $\mathbf{P}=m\mathbf{g}$ и сила $\mathbf{T}$, с которой струна воздействует на тело (фиг. 1, $б$). Если рассматривать относительное равновесие тела по отношению к вращающейся системе координат $x'y'z'$, то к упомянутым силам следует добавить силу инерции переносного движения $\mathbf{Q}$. Из условий равновесия следует, что линия действия силы $\mathbf{Q}$ также постоянно находится в плоскости $y'z'$.

Отметим одно важное обстоятельство. Если точка O_2 (крепления тела к струне) лежит выше неподвижной точки O_1 (фиг. 1, a), то равновесие сил возможно лишь в случае, когда сила $\mathbf{T}$ направлена от неподвижной точки O_1 к точке O_2. При этом в самой струне должны возникнуть сжимающие усилия, что недопустимо [3].

При угле $\alpha_0={}^1/_2\pi$, либо $\alpha_0=-{}^1/_2\pi$ точки O_1 и O_2 будут находиться на одном уровне (фиг. 1, a). При этом линии действия сил $\mathbf{T}$ и $\mathbf{Q}$ совпадают и треугольник сил не может быть замкнут. Следовательно, при стационарном движении тела, подвешенного на струне, точка O_2 всегда находится ниже неподвижной точки O_1. В результате диапазон изменения угла α_0 оказывается следующим:

$$-{}^1/_2\pi<\alpha_0<{}^1/_2\pi \qquad (2.4)$$

Будем считать, что центр масс тела G постоянно расположен ниже точки O_2 подвеса тела к струне [1]. При этом предположении угол θ_0 может изменяться в тех же пределах, что и упомянутый угол α_0, т. е.

$$-{}^1/_2\pi<\theta_0<{}^1/_2\pi \qquad (2.5)$$

Диапазоны (2.4) и (2.5) изменения углов α_0, θ_0 содержат значения $\alpha_0=0$ и $\theta_0=0$. При этих значениях углы β_0, ψ_0, φ_0 оказываются неопределенными.

[1] Случай, когда точка G расположена выше точки O_2 возможен, однако в данной работе он не рассматривается.

При одновременном выполнении равенств $\alpha_0=\theta_0=0$ линии действия силы веса P и силы воздействия струны на тело T совпадают с неподвижной вертикалью ζ. Поэтому главный момент этих сил относительно неподвижной точки O_1 равен нулю. Главный же момент элементарных даламберовых сил инерции тела равен нулю лишь в случае, когда $A=B=C$ [2] (предполагается, что $\delta\neq 0$).

Таким образом, при рассмотрении стационарного движения тела, у которого $A=B\neq C$, значения $\alpha_0=\theta_0=0$ следует исключить из рассмотрения и при исследовании уравнений (2.2) учитывать изменение углов α_0, θ_0 в следующих пределах:

$$-{}^1/_2\pi<\alpha_0<0,\quad 0<\alpha_0<{}^1/_2\pi,\quad -{}^1/_2\pi<\theta_0<0,\quad 0<\theta_0<{}^1/_2\pi \tag{2.6}$$

Из приведенного выше условия (2.3) вытекает, что

$$\beta_0-\psi_0=0 \tag{2.7}$$

Левая часть последнего уравнения (2.2) при учете соотношений (2.6) обращается в нуль при выполнении одного из следующих трех равенств:

$$A=C,\quad (-\sin\theta_0\cos\varphi_0\sin\delta+\cos\theta_0\cos\delta)\,\omega^2=0,\quad \sin\varphi_0=0 \tag{2.8}$$

Рассмотрим каждое из них отдельно.

3. Пусть выполняется первое условие (2.8). Тогда эллипсоид инерции тела становится шаром. В этом случае, учитывая равенство (2.7), первое и четвертое уравнения (2.2) преобразуем к виду

$$\begin{gathered}\cos\alpha_0(l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0)\,\omega^2=g\sin\alpha_0\\ \cos\theta_0(l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0)\,\omega^2=g\sin\theta_0\end{gathered} \tag{3.1}$$

Нетрудно убедиться, что уравнения (3.1) имеют тривиальное решение $\alpha_0=\theta_0=0$. Кроме того, при учете соотношений (2.6) из них следует равенство

$$\operatorname{tg}\alpha_0=\operatorname{tg}\theta_0 \tag{3.2}$$

откуда $\alpha_0=\theta_0$. В итоге приходим к соотношениям

$$\cos\alpha_0=\cos\theta_0=g\,/\,\omega^2(l+a) \tag{3.3}$$

которые, разумеется, справедливы лишь при

$$\omega^2>g(l+a)^{-1} \tag{3.4}$$

Углы φ_0 и $\beta_0=\psi_0$ могут быть при этом произвольными.

Заметим, что условие (2.3) выполняется и в существенно отличном от (2.7) случае, когда

$$\beta_0-\psi_0=\pi \tag{3.5}$$

При этом первое и четвертое уравнения (2.2) приводятся к виду

$$\begin{gathered}\cos\alpha_0(l\sin\alpha_0-a\sin\theta_0)\,\omega^2=g\sin\alpha_0\\ \cos\theta_0(l\sin\alpha_0-a\sin\theta_0)\,\omega^2=-g\sin\theta_0\end{gathered} \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует

$$\operatorname{tg}\alpha_0=-\operatorname{tg}\theta_0 \tag{3.7}$$

Однако при использовании фиг. 2 легко убедиться в том, что одновременное изменение угла ψ_0 на π и знака угла θ_0 на обратный не изменяет положения оси z. Следовательно, рассмотрение случая (3.5) не приводит к появлению новой формы стационарного движения.

4. Рассмотрим теперь стационарное движение тела, которое имеет место при выполнении второго равенства (2.8). Считая по-прежнему углы α_0 и θ_0 отличными от нуля, это равенство преобразуем к виду

$$\cos\varphi_0 = \operatorname{ctg}\delta\operatorname{ctg}\theta_0 \tag{4.1}$$

и подставим значение $\cos\varphi_0$ в четвертое уравнение (2.2). В результате, при использовании условия (2.7) для определения углов α_0, θ_0 вновь приходим к уравнениям (3.1). Их решение определяется приведенными выше соотношениями (3.3). Однако область возможных значений угловой скорости ω, при которых они имеют место, теперь несколько иная, чем (3.4). Из условия (4.1) при использовании равенств (2.6) следует, что

$$\operatorname{ctg}\delta\operatorname{ctg}\theta_0 \leqslant 1 \quad (\theta_0 \geqslant {}^1/_2\pi - \delta) \tag{4.2}$$

Учитывая здесь выражение для θ_0, вытекающее из равенств (3.3), приходим к условию

$$\omega^2 = g/(l+a)\cos\theta_0 \geqslant g/(l+a)\sin\delta = \omega_*^2 \tag{4.3}$$

Для получения наглядной картины рассматриваемого стационарного движения заметим, что выражение, стоящее в левой части второго равенства (2.8), является косинусом угла, образованного осью симметрии тела z_1 и вертикальной осью ζ_1. Действительно, используя фиг. 1 и 2, нетрудно убедиться в существовании зависимостей

$$\cos(x, z_1) = 0, \quad \cos(y, z_1) = -\sin\delta, \quad \cos(z, z_1) = \cos\delta$$
$$\cos(\zeta_1, x) = \sin\theta\sin\varphi, \quad \cos(\zeta_1, y) = \sin\theta\cos\varphi, \quad \cos(\zeta_1, z) = \cos\theta \tag{4.4}$$

Согласно известной формуле аналитической геометрии, косинус угла между осями ζ_1, z_1 соответственно введенных систем координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $x_1y_1z_1$ можно представить, используя соотношения (4.4), следующим образом:

$$\cos(\zeta_1, z_1) = \cos(\zeta_1, x)\cos(x, z_1) + \cos(\zeta_1, y)\cos(y, z_1) +$$
$$+\cos(\zeta_1, z)\cos(z, z_1) = \cos\theta\cos\delta - \sin\theta\sin\delta\cos\varphi \tag{4.5}$$

Равенство (4.5) справедливо во все время движения тела. При его стационарном движении, когда $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ и выполняется второе условие (2.8), оно приобретает вид

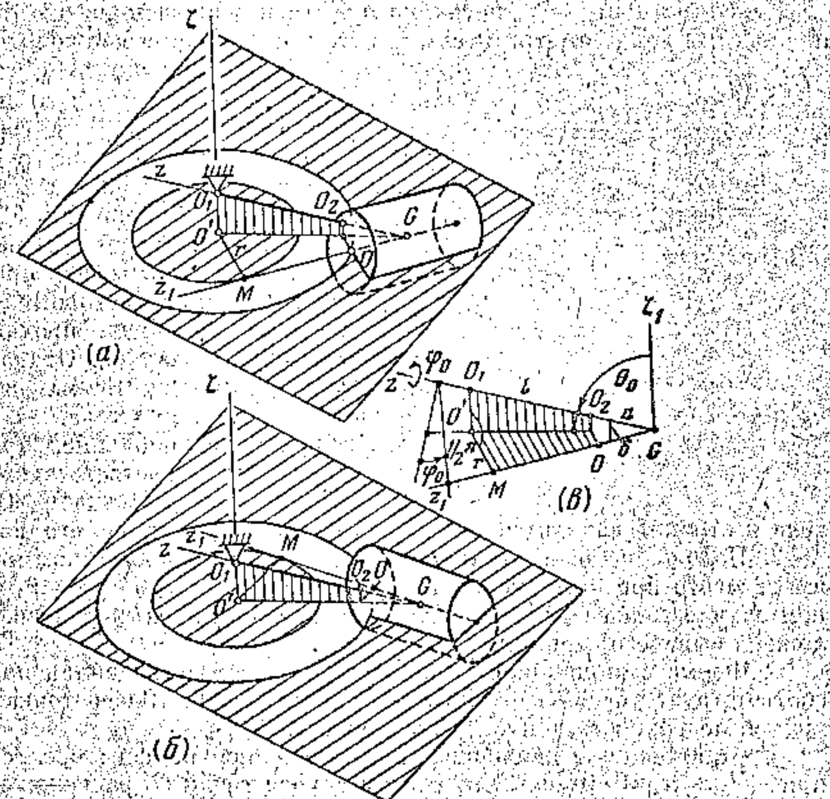
$$\cos(\zeta_1, z_1) = 0 \tag{4.6}$$

Из этого равенства вытекает, что в рассматриваемом стационарном движении ось симметрии тела z_1 перпендикулярна вертикальной оси ζ_1 и, следовательно, постоянно находится в горизонтальной плоскости (фиг. 4, *а*, *б*).

При $\omega < \omega_*$ стационарное движение тела, при котором справедливы равенства (3.3), невозможно. Если же $\omega > \omega_*$, то ось z_1, двигаясь в горизонтальной плоскости, будет постоянно касаться некоторой окружности радиуса r, центр которой O' лежит на неподвижной вертикали ζ (фиг. 4, *а*, *б*). Нетрудно показать, используя фиг. 4, *в*, что радиус r определяется формулой

$$r = (a+l)(\sin^2\delta - \cos^2\theta_0)^{1/2} \tag{4.7}$$

В предельном случае при $\theta_0 \to {}^1/_2\pi$ (и в силу второго равенства (2.8) и



Фиг. 4

соотношений (3.3), при $\varphi_0 \to {}^1/_2\pi$, $\omega \to \infty$) радиус r будет стремиться к величине

$$r=(a+l)\sin\delta \tag{4.8}$$

Отметим, что при $\omega^2=\omega_*{}^2=g[(a+l)\sin\delta]^{-1}$, согласно равенствам (3.3), (4.3)

$$\cos\alpha_0=\cos\theta_0=\sin\delta \tag{4.9}$$

В этом случае из формулы (4.7) вытекает, что $r=0$, и ось симметрии тела z_1 будет пересекать неподвижную вертикаль ζ.

Следует заметить, что при изменении θ_0 в интервале $({}^1/_2\pi-\delta,\ {}^1/_2\pi)$ уравнение (4.1) имеет два решения:

$$\varphi_0=\arccos(\operatorname{ctg}\delta\operatorname{ctg}\theta_0),\quad \varphi_0=2\pi-\arccos(\operatorname{ctg}\delta\operatorname{ctg}\theta_0) \tag{4.10}$$

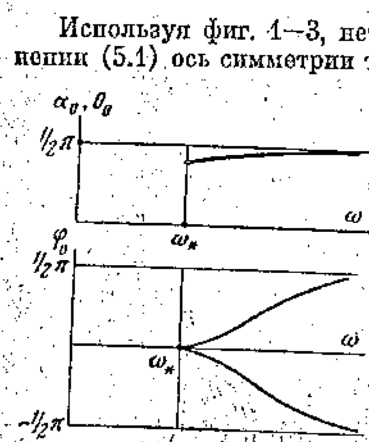
Этим решениям соответствуют два стационарных движения, при которых ось тела z_1 занимает положения, симметричные относительно плоскости $O_1O'G$. На фиг. 4, *а, б* показаны положения тела при этих стационарных движениях.

Графики зависимости углов α_0, θ_0, φ_0 от изменения угловой скорости ω для только что рассмотренных стационарных движений представлены на фиг. 5. Из этих графиков видно, что при больших значениях ω углы α_0, θ_0 стремятся к ${}^1/_2\pi$. При этом угол φ_0 будет асимптотически стремиться к ${}^1/_2\pi$ при стационарном движении, схематически изображенном на фиг. 4, *а*, и к $-{}^1/_2\pi$ при движении, представленном на фиг. 4, *б*.

5. Рассмотрим третье условие (2.8), из которого следует

$$\varphi_0=0 \tag{5.1}$$

Используя фиг. 1–3, нетрудно прийти к заключению, что при выполнении (5.1) ось симметрии тела z_1 в его стационарном движении все время находится во вращающейся вертикальной плоскости $y'z'$. Принимая это во внимание и учитывая неравенства (2.6) и соотношение (2.7), можно выделить четыре существенно отличные формы стационарных движений тела, схематически изображенные на фиг. 6. Как видно из фиг. 6, во всех четырех случаях ось симметрии тела описывает прямой круговой конус, вершина которого (точка N) расположена на вертикали, проходящей через неподвижную точку O_1. Охарактеризуем кратко каждую из упомянутых выше форм стационарного движения тела.



Фиг. 5

1. Стационарное движение, представленное на фиг. 6, *а*, соответствует условию $0<\alpha_0<{}^1/_2\pi$, $0<\theta_0<{}^1/_2\pi$. Точка O_2 (крепления тела к струне) находится вне поверхности конуса ниже его вершины N.

2. Положение тела в стационарном движении, показанном на фиг. 6, *б*, имеет место при выполнении неравенств $0<\alpha_0<{}^1/_2\pi$, $-{}^1/_2\pi<\theta_0<0$. В данном случае точка O_2 также находится вне поверхности конуса, но расположена выше его вершины.

3. Форма стационарного движения тела, представленная на фиг. 6, *в*, соответствует условию $-{}^1/_2\pi<\alpha_0<0$, $-{}^1/_2\pi<\theta_0<0$. Здесь точка O_2 лежит внутри поверхности конуса ниже точки N.

4. Стационарное движение, представленное на фиг. 6, *г*, существует при $-{}^1/_2\pi<\alpha_0<0$, $0<\theta_0<{}^1/_2\pi$. В этом случае точка O_2 расположена внутри поверхности конуса выше его вершины.

Определим зависимости углов α_0 и θ_0 от изменения угловой скорости ω во всех указанных выше четырех случаях стационарного движения тела. С этой целью в первом и четвертом уравнениях (2.2) используем равенства (2.7) и (5.1). В результате получим

$$-m\omega^2 l\cos\alpha_0(l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0)+mgl\sin\alpha_0=0$$
$$-ma\omega^2\cos\theta_0(l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0)+mga\sin\theta_0+{}^1/_2(C-A)\,\omega^2\sin 2(\theta_0+\delta)=0 \tag{5.2}$$

Уравнения (5.2) при учете неравенств (2.6), введении замены переменных

$$\sin\theta_0=x,\ \sin\alpha_0=y,\ \cos\theta_0=(1-x^2)^{1/2},\ \cos\alpha_0=(1-y^2)^{1/2}$$

и обозначений

$$\varkappa=a/l,\ \sigma=(A+C)(mal)^{-1}\cos 2\delta,\ \rho=(A-C)(mal)^{-1}\sin\delta\cos\delta,\ \nu=g/\omega^2 l \tag{5.3}$$

приводятся к следующим:

$$x=y\varkappa^{-1}[\nu(1-y^2)^{-1/2}-1],\quad y=x(\nu+\rho x)(1-x^2)^{-1/2}-(\varkappa+\sigma)x-\rho(1-x^2)^{1/2} \tag{5.4}$$

Решениями совокупности уравнений (5.4) при произвольном изменении параметра ν и фиксированных значениях остальных параметров $\varkappa$, σ, ρ являются точки пересечения кривых, заданных на плоскости (x, y) уравнениями

$$x=f_1(y,\nu)=y\varkappa^{-1}[\nu(1-y^2)^{-1/2}-1]$$
$$y=f_2(x,\nu)=x(\nu+\rho x)(1-x^2)^{-1/2}-(\varkappa+\sigma)x-\rho(1-x^2)^{1/2} \tag{5.5}$$

при одних и тех же значениях ν.

Нетрудно заметить, что изменению переменных x, y в каждой из четвертей плоскости (x, y) соответствует одна из форм стационарного движения тела, схематически представленных на фиг. 6.

6. Исследуем прежде всего на плоскости (x, y) однопараметрическое семейство кривых $x=f_1(y, \nu)$. Оно имеет две асимптоты $y=\pm 1$ и общую точку с координатами $(0, 0)$.

Анализируя вторую производную функции $x=f_1(y, \nu)$ по y

$$\frac{\partial^2 f_1(y, \nu)}{\partial y^2}=3\nu y\,(1-y^2)^{-5/2} \qquad (6.1)$$

убеждаемся, что в верхней полуплоскости $y>0$ кривые, представленные функцией $x=f_1(y, \nu)$, обращены вогнутостью в сторону положительного направления оси x, а в нижней полуплоскости — в сторону отрицательного направления этой оси. Точка с координатами $(0, 0)$ является точкой перегиба. При $\nu<1$ эти кривые имеют вертикальные касательные. Точки касания расположены во второй и четвертой четвертях плоскости (x, y). Координаты этих точек соответственно имеют вид

$$x_1=-\varkappa^{-1}(1-\nu^{2/3})^{3/2}, \quad y_1=(1-\nu^{2/3})^{1/2} \qquad (6.2)$$

$$x_2=\varkappa^{-1}(1-\nu^{2/3})^{3/2}, \quad y_2=-(1-\nu^{2/3})^{1/2} \qquad (6.3)$$

На фиг. 7 кривые $x=f_1(y, \nu)$ показаны тонкими сплошными линиями.

Рассмотрим на этой же плоскости (x, y) однопараметрическое семейство кривых $y=f_2(x, \nu)$. Оно имеет общую точку с координатами $(0, -\rho)$ и общую асимптоту — прямую $x=1$. Прямая $x=-1$ также является асимптотой этого семейства для всех значений параметра ν, кроме значения $\nu=\rho$.

Для определения вогнутости кривых $y=f_2(x, \nu)$ исследуем знак второй производной функции $y=f_2(x, \nu)$ по переменной x

$$\frac{\partial^2 f_2(x, \nu)}{\partial x^2}=3(\rho+\nu x)\,(1-x^2)^{-5/2} \qquad (6.4)$$

Оказывается, что в правой полуплоскости $(x>0)$ кривые, заданные уравнением $y=f_2(x, \nu)$, направлены вогнутостью в сторону положительного направления оси y. При этом из рассмотрения выражения для первой производной функции $y=f_2(x, \nu)$ вытекает, что условие существования экстремума этой функции приводится к виду

$$(\varkappa+\sigma)\,(1-x^2)^{3/2}=\nu+3\rho x-2\rho x^3 \qquad (6.5)$$

Из этого условия следует, что при $\nu=\varkappa+\sigma$ кривая $y=f_2(x, \nu)$ имеет минимум в точке $x=0$. Нетрудно убедиться, что при $\nu>\varkappa+\sigma$ кривые $y=f_2(x, \nu)$ в правой полуплоскости не имеют экстремума. Действительно, пусть

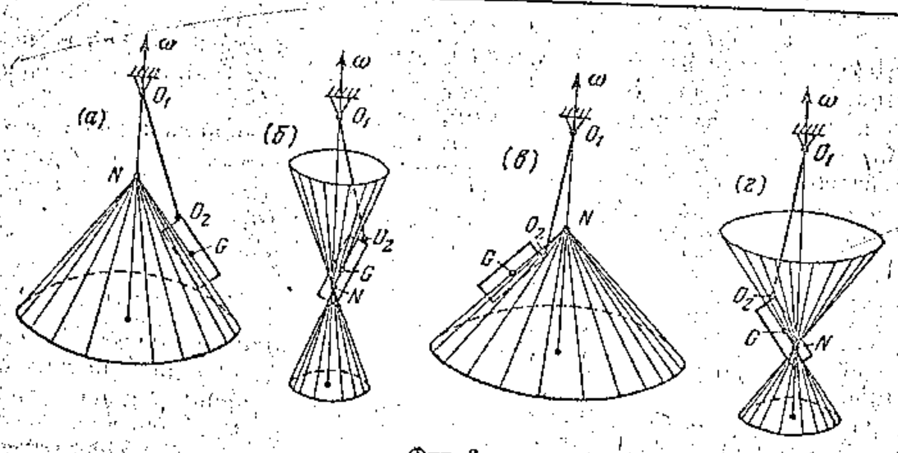
$$\nu=\varkappa+\sigma+b, \quad b>0 \qquad (6.6)$$

Подставив это выражение в условие (6.5), получаем

$$(\varkappa+\sigma)\,[(1-x^2)^{3/2}-1]=b+\rho x(3-2x^2) \qquad (6.7)$$

Однако последнее равенство невозможно, так как его левая часть отрицательна, а правая положительна. Если же $b<0$ и $\nu<\varkappa+\sigma$, то равенство (6.7) возможно и, следовательно, кривая $y=f_2(x, \nu)$ будет иметь экстремум.

Для изучения поведения кривых $y=f_2(x, \nu)$ в левой полуплоскости



Фиг. 6

рассмотрим вначале случай $\nu=\rho$. Согласно второму соотношению (5.5),
уравнение кривых $y=f_2(x, \nu)$ приводится к виду

$$y=-(\varkappa+\sigma)x-\rho(1-x^2)^{1/2} \tag{6.8}$$

Если угол δ достаточно мал, то в соответствии с формулами (5.3) мож-
но считать $\varkappa+\sigma\gg\rho$. При этом кривая, описываемая уравнением (6.8), по
форме будет близкой к прямой

$$y=-(\varkappa+\sigma)x \tag{6.9}$$

При $\nu<\rho$ в левой полуплоскости ($x<0$) вторая производная функции
$y=f_2(x, \nu)$ по переменной x положительна; следовательно, кривые $y=$
$=f_2(x, \nu)$ обращены вогнутостью в сторону положительного направления
оси y. При $\nu>\rho$ эти кривые имеют точку перегиба, координаты которой
$x=-\rho/\nu$, $y=\rho\nu^{-1}[\varkappa+\sigma-(\nu^2-\rho^2)^{1/2}]$. Справа от этой точки кривые $y=$
$=f_2(x, \nu)$ обращены вогнутостью в сторону положительного направления
оси y, слева – в сторону отрицательного ее направления. Для значений ν,
близких к ρ, кривые $y=f_2(x, \nu)$ в области $-1<y<1$ близко подходят
к асимптоте $x=-1$. В дальнейшем по мере увеличения или уменьшения
параметра ν они удаляются от асимптоты.

На фиг. 7 семейство кривых $y=f_2(x, \nu)$ изображено тонкими пунктир-
ными линиями.

7. Определим точки пересечения кривых $x=f_1(y, \nu)$ и $y=f_2(x, \nu)$,
являющиеся искомыми решениями совокупности уравнений (5.4).

При изменении величин x и y в первой четверти плоскости (x, y)
имеет место, как уже упоминалось выше, форма стационарного движе-
ния тела, представленная на фиг. 6, *а*.

Так как в области $0<x$, $y<1$ кривые $x=f_1(y, \nu)$ выпуклы, а кривые
$y=f_2(x, \nu)$ вогнуты, то точек их пересечения может быть только две.
Однако левый конец вогнутых кривых (точка с координатами $(0, -\rho)$)
лежит всегда ниже, чем левый конец выпуклых кривых. Вследствие этого
одна из точек пересечения этих кривых не попадает в область $0<x$,
$y<1$.

Нетрудно убедиться (см. фиг. 7), что в данном случае точка пересе-
чения кривых $x=f_1(y, \nu)$ и $y=f_2(x, \nu)$ существует при любом ν. Действи-
тельно, при малых ν соответствующие кривые рассматриваемых семейств
близки к своим асимптотам, пересекающимся в точке с координатами
(1.1). Поэтому вблизи этой точки находится и точка пересечения упо-
мянутых кривых. Напротив, при больших значениях ν эта точка при-

ближается к точке с координатами $(0, 0)$, являющейся предельной при $\nu \to \infty$.

Ветвь кривой стационарных движений в координатах $x=\sin\theta_0$, $y=\sin\alpha_0$ представляет собой кривую, соединяющую точки с координатами $(0,0)$ и $(1,1)$. Эта ветвь содержит точку B_1 с координатами

$$x=y=\cos\delta \tag{7.1}$$

являющуюся точкой пересечения кривых $x=f_1(y, \nu)$ и $y=f_2(x, \nu)$ при значении параметра ν, равном

$$\nu=(1+\varkappa)\sin\delta \tag{7.2}$$

В этом легко убедиться, если непосредственно подставить значения (7.1) и (7.2) в уравнения (5.4) и воспользоваться обозначениями (5.3).

Следует отметить, что точка B_1 является точкой ветвления. Действительно, сравнивая формулы (7.1) и (4.9), приходим к заключению, что эта точка будет общей для рассматриваемой формы стационарного движения и для двух симметричных форм, рассмотренных в п. 4.

На фиг. 8, *а* построены графики зависимости углов α_0, θ_0 от изменения угловой скорости ω на интервале $(0, \infty)$.

При изменении переменных x и y во второй четверти плоскости (x, y) будет существовать форма стационарного движения тела, представленная на фиг. 6, *б*. В данной области при малых значениях параметра ν, удовлетворяющих неравенству $\nu<\rho$, существуют две точки пересечения кривых $y=f_2(x, \nu)$ и $x=f_1(y, \nu)$. Одна из них близка к точке с координатами $(-1,1)$, вторая — к точке R_1, координаты которой (см. фиг. 7)

$$x_1=-\sin\delta, \quad y_1=\varkappa\sin\delta \tag{7.3}$$

Последние, как нетрудно проверить, являются решением совокупности уравнений (5.4) при $\nu=0$.

При $\nu>\rho$ также существуют две точки пересечения упомянутых кривых. Однако с кривыми $y=f_2(x, \nu)$ пересекается уже не верхняя часть кривой $x=f_1(y, \nu)$, а нижняя. Таким образом, при $\nu=\rho$ кривая стационарных движений имеет как бы разрыв[1]. В дальнейшем две точки пересечения кривых $y=f_2(x, \nu)$ и $x=f_1(y, \nu)$ по мере увеличения параметра ν сближаются и при определенном значении ν_1^* сливаются в одну точку B_2 (фиг. 7). Для ее отыскания следует воспользоваться условием касания упомянутых кривых, которое приводится к виду

$$\varkappa^{-1}[\nu(1-x^2)^{-1/2}-1][-(\varkappa+\sigma)+(\nu+3\rho x-\rho x^3)(1-x^2)^{-1/2}]=1 \tag{7.4}$$

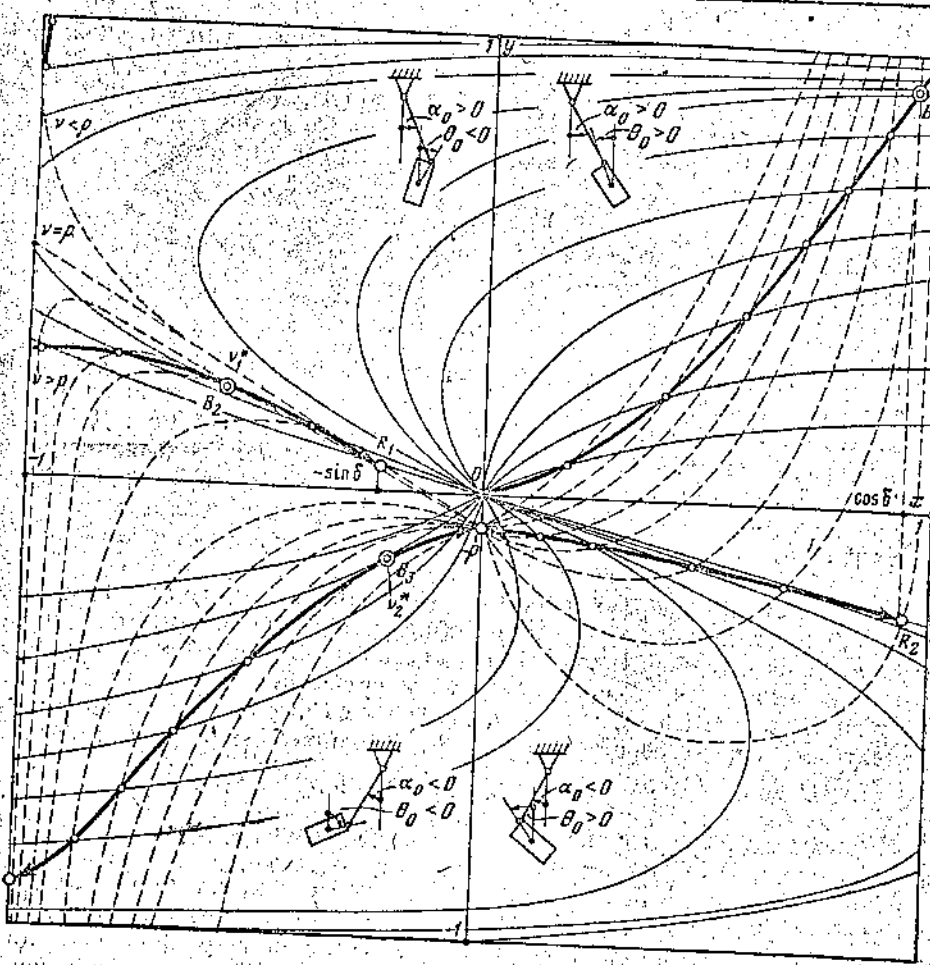
Это условие совместно с уравнениями (5.5) составляет совокупность трех уравнений для отыскания неизвестных величин ν_1^*, x_1^*, y_1^*, соответствующих предельному значению ν_1^*, после которого пересечение кривых $x=f_1(y, \nu)$ и $y=f_2(x, \nu)$ становится невозможным.

На фиг. 7 представлено решение системы (5.5) во второй четверти плоскости (x, y), т. е. при $x<0$, $y>0$. Оказывается, что это решение в указанной области существует лишь при изменении переменных x, y соответственно в пределах $-\sin\delta>x>-1$, $1>y>\varkappa\sin\delta$[2].

---

[1] Точки пересечения кривых $x=f_1(y, \nu)$ и $y=f_2(x, \nu)$, близкие к $(-1, 1)$, как бы продолжают ветвь кривой стационарного движения тела при $-\pi<\theta_0<-\frac{1}{2}\pi$, не рассматривающегося в данной работе. Этим и объясняется кажущаяся разрывность решения.

[2] Стрелкой указано, что ветвь кривой стационарных движений в данном случае стремится к точке R_1 (фиг. 7), ее не достигая. Такое же назначение стрелок имеется в виду и на последующих фигурах.

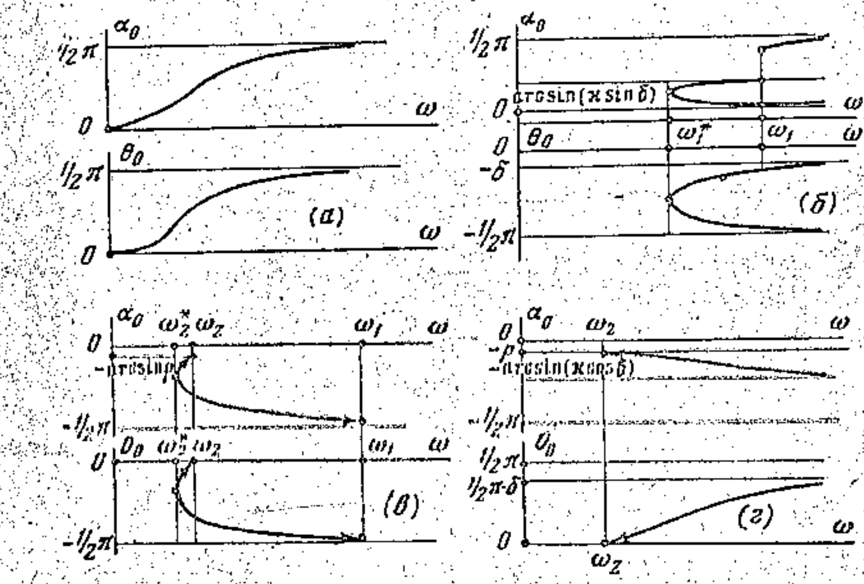


Фиг. 7

На фиг. 8, *б* приведены графики изменения углов α_0, θ_0 в зависимости
от изменения параметра ω для данной формы стационарного движения.
Как видно из этих графиков, значению ν_1^* соответствует точка с абсцис-
сой $\omega_1^*=(g/\nu_1^*l)^{1/2}$, от которой ответвляются две ветви. Верхняя ветвь
графика α_0 в точке с абсциссой $\omega_1=(g/l\rho)^{1/2}$ претерпевает разрыв.
При $\omega\to\infty$ нижняя ветвь графика α_0 стремится к значению $\alpha_0=$
$=\arcsin(\varkappa\sin\delta)$, верхняя же и нижняя ветви графика θ_0 стремятся со-
ответственно к значениям $\theta_0=-\delta$, $\theta_0=-{}^1/_2\pi$.

Изменению переменных x, y в области $(x<0, y<0)$ соответствует фор-
ма стационарного движения, изображенная на фиг. 6, *в*. При $\nu\leqslant\rho$ кривые
$y=f_2(x, \varkappa)$ в исследуемой области $0>x$, $y>-1$ проходят вблизи точки
$(0, 0)$, кривые же $x=f_1(y, \nu)$ близки к своей асимптоте $y=-1$ (фиг. 7).
Из этого следует, что для всех значений $\nu\leqslant\rho$ не существует точек пере-
сечения кривых $x=f_1(y, \nu)$ и $y=f_2(x, \nu)$, а следовательно, и стационарно-
го движения тела.

При $\nu>\rho$ появляется точка пересечения кривых вблизи точки с коор-
динатами $(-1, -1)$. В дальнейшем с ростом ν появляется вторая точка
пересечения этих кривых, когда кривая $x=f_1(y, \nu)$ пересекает ось y в точ-
ке с координатами $x=0$, $y=-\rho$. Подставив координаты этой точки в пер-
вое уравнение (5.5), получаем условие для нахождения соответствующе-
го значения $\nu=(1-\rho^2)^{1/2}=\nu_2$.



Фиг. 8

Таким образом, при $\nu=(1-\rho^2)^{1/2}$ существуют две точки пересечения кривых $x=f_1(y,\nu)$ и $y=f_2(x,\nu)$. При дальнейшем увеличении ν эти точки приближаются одна к другой и при определенном значении $\nu=\nu_2^*$ сливаются в одну точку B_3 (фиг. 7), являющуюся точкой касания кривых $x=f_1(y,\nu)$ и $y=f_2(x,\nu)$. При последующем увеличении параметра ν эти кривые не пересекаются в рассматриваемой области. Значение ν_2^* находится на той же совокупности уравнений (7.4) и (5.5), что и значение ν_1^*.

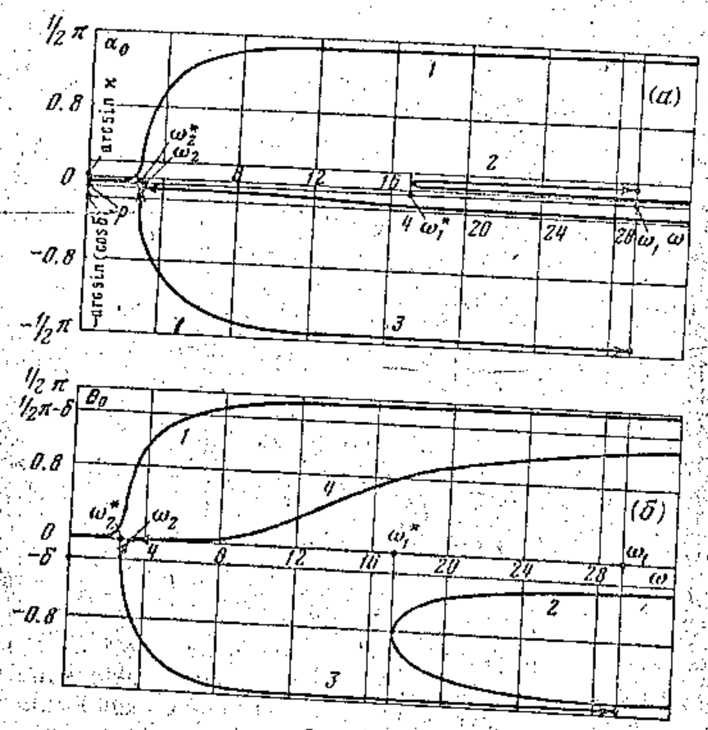
На фиг. 7 жирной линией изображена кривая, являющаяся геометрическим местом точек пересечения кривых $x=f_1(y,\nu)$ и $y=f_2(x,\nu)$ при различных значениях ν в рассматриваемой области.

Графики зависимости углов $\alpha_0=\arcsin y$, $\theta_0=\arcsin x$ для данной формы стационарного движения представлены на фиг. 8, *в*. Согласно четвертому соотношению (5.3), на этих графиках значению ν_2^* соответствует точка с абсциссой $\omega_2^*=(g/l\nu_2^*)^{1/2}$. При $\omega=\omega_2^*$ на каждом из приведенных графиков имеется точка, от которой ответвляются две ветви. Одна из них стремится к точке с абсциссой $\omega_2=[g/l(1-\rho^2)^{1/2}]^{1/2}$ (значения ординат в этой точке равны соответственно $\sin\alpha_0=-\rho$, $\theta_0=0$), вторая — к точке, абсцисса которой $\omega_1=(g/l\rho)^{1/2}$.

Рассмотрим изменение переменных x, y в области $x>0$, $y<0$. Этому случаю соответствует форма стационарного движения тела, изображенная на фиг. 6, *г*.

Ранее было указано, что в данном случае точка с координатами $(0,-\rho)$, являющаяся левым концом вогнутой кривой $y=f_2(x,\nu)$, лежит ниже точки с координатами $(0,0)$ — левого конца выпуклой части кривой $x=f_1(y,\nu)$. Поэтому эти кривые в рассматриваемой области могут пересекаться при любом ν лишь в одной точке. Для малых ν она близка к точке R_2 (фиг. 7) с координатами $x=\cos\delta$, $y=-\varkappa\cos\delta$, являющимся решением системы (5.5), когда $\nu=0$.

При определенном значении ν кривая $x=f_1(y,\nu)$ пересекает ось y в точке с координатами $(0,-\rho)$. Это значение, как уже было выяснено ранее, равно $\nu=(1-\rho^2)^{1/2}$. Для всех $\nu>\nu_2$ пересечения кривых $y=f_2(x,\nu)$ и $x=f_1(y,\nu)$ в данной области уже не будет.



Фиг. 9

Таким образом, рассматриваемая форма стационарного движения тела возможна при значении параметра ν, изменяющемся в пределах $0<\nu<\nu_2=(1-\rho^2)^{1/2}$, что соответствует, согласно последнему из равенств (5.3), значениям угловой скорости ω, изменяющимся в пределах

$$[gl^{-1}(1-\rho^2)^{-1/2}]^{1/2}=\omega_2<\omega<\infty$$

На фиг. 8, *г* представлены зависимости углов $\alpha_0=\arcsin y$, $\theta_0=\arcsin x$ от изменения параметра ω.

8. Числовой пример. Осесимметричное твердое тело в виде прямого кругового цилиндра (фиг. 1) вращается на струне длины $l=101.98$ см. Радиус цилиндра $r=6.725$ см; высота $h=40$ см, $a=20.396$ см, $l_1=4$ см, $\delta=11,25°$, $\varkappa=a/l=0.2$, $A/m=144.64$ см², $C/m=22.615$ см², $\sigma=(A-C)\times(mal)^{-1}\cos 2\delta=0.05404$, $\rho={}^1/_2\sigma \operatorname{tg} 2\delta=0.01142$, $g=981$ см·с$^{-2}$.

При этих числовых данных была решена система уравнений (5.5) для значений переменных x, y, изменяющихся в пределах $-1<x<1$, $-1<y<1$. По полученным данным были построены графики зависимости углов α_0 и θ_0 от изменения угловой скорости ω для рассмотренных выше вариантов стационарных движений тела (см. фиг. 9).

Анализ полученных графиков проводился так же, как это было сделано выше в п. 7. Введенные в п. 7 характерные значения угловой скорости ω оказались в данном случае равными: $\omega_2=3.102$ с$^{-1}$; $\omega_1=29.02$ с$^{-1}$; $\omega_2^*=2.91$ с$^{-1}$; $\omega_1^*=17.15$ с$^{-1}$.

Поступила 4 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г.* Метод балансировки вращающихся твердых тел на струнном приводе. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, вып. 5.
2. *Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е.* О стационарных движениях вращающегося на струне симметричного твердого тела. В сб.: Динамика и устойчивость управляемых систем. Изд-о Ин-та математики АН УССР, 1977.
3. *Ишлинский А. Ю.* Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.