XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20 – 24 августа 2015 года. С. 2778-2779.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ

И.С. Никитин[1], Н.Г. Бураго[2], В.Л. Якушев[1]

1 – *Институт автоматизации проектирования РАН, г. Москва*

2 – *Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва*

i_nikitin@list.ru

Аннотация. На основе асимптотического метода осреднения получены континуальные уравнения слоистой среды с проскальзыванием с учетом членов второго порядка по малому параметру толщины слоя. Использовано линейное условие проскальзывания, связывающее скачки касательных смещений на контактных границах и касательные напряжения. Такого рода модели необходимы при решении динамических задач геофизики. Они могут быть полезны при описании композитных материалов с дополнительными мягкими прослойками между слоями из основного, достаточно жесткого упругого материала. Исследованы волновые свойства полученной системы уравнений. Построено решение задачи о поверхностной волне на границе упругого слоистого полупространства.

В данной работе на основе асимптотического метода [1, 2] получены осредненные уравнения слоистой среды с проскальзыванием на межслойных границах с учетом членов второго порядка по малому параметру толщины слоя. Использовано линейное условие проскальзывания, связывающее скачки касательных смещений на контактных границах и касательные напряжения.

Интерес к проблеме распространения и трансформации волн в слоистых средах обусловлен прикладными задачами сейсмологии и инженерной геофизики. Как правило, сейсмичность связана с горными районами, в которых скальные породы выходят на земную поверхность. Зачастую эти породы содержат регулярные сетки трещин, позволяющие рассматривать их как слоистые структуры. Классические исследования волновых полей в таких средах обычно исходят из непрерывности поля смещений. Однако для достаточно сильных сейсмических воздействий следует учитывать возможность касательных подвижек на границах слоев. Для протяженных воздействий необходимо использовать «осредненные», континуальные модели сплошных сред со структурой, так как невозможно следить за деформацией каждого элемента структуры.

Осредненные уравнения нулевого приближения для слоистой среды с проскальзыванием были выведены ранее [3, 4]. Полученные в данной работе уравнения являются асимптотически полным обобщением моделей [5 ,6] слоистых сред, основанных на инженерных подходах или приближенных гипотезах о характере деформирования слоев. Такого рода модели необходимы при изучении статического деформирования горных массивов и при решении динамических (волновых) задач геофизики. Теория слоистых сред с проскальзыванием на контактных границах также может быть полезна при описании композитных материалов с дополнительными мягкими прослойками (скажем, резиновыми) между слоями из основного, достаточно жесткого упругого материала.

Полученная двумерная динамическая система уравнений для рассматриваемой слоистой среды имеет вид:

$$(\lambda+2\mu)w_{1,11}+\left(\lambda+\frac{k\mu}{k+\mu}\right)w_{3,13}+\frac{k\mu}{k+\mu}w_{1,33}-\frac{\varepsilon^2\mu^3}{3(k+\mu)^2}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\left(w_{1,1133}+w_{3,3111}\right)+\rho\frac{\varepsilon^2\mu^2}{12(k+\mu)^2}\left(w_{1,33tt}+w_{3,31tt}\right)=\rho w_{1,tt}$$

$$(\lambda+2\mu)w_{3,33}+\left(\lambda+\frac{k\mu}{k+\mu}\right)w_{1,13}+\frac{k\mu}{k+\mu}w_{3,11}-\frac{\varepsilon^2\mu^3}{3(k+\mu)^2}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\left(w_{1,1113}+w_{3,1111}\right)+\rho\frac{\varepsilon^2\mu^2}{12(k+\mu)^2}\left(w_{1,13tt}+w_{3,11tt}\right)=\rho w_{3,tt}$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ – постоянная толщина слоя (малый параметр), k – коэффициент сдвиговой связи слоев, λ и μ – модули Ламе, ρ – плотность, w_1 и w_3 – смещения в направлении декартовых осей x_1 (вдоль слоев) и x_3 (поперек слоев).

Исследованы волновые свойства полученной системы уравнений, получены дисперсионные соотношения при распространении гармонических волн в произвольном направлении. Решены задачи прохождения и трансформации волн на границе изотропной упругой и исследуемой слоистой среды.

Так, например, для гармонических волн в направлении $\mathbf{n}=(n_1,n_3)$ с частотой ω и волновым вектором $\boldsymbol{\kappa}=\kappa\mathbf{n}=(\kappa_1,\kappa_3)$, $\kappa_1=\kappa n_1$, $\kappa_3=\kappa n_3$, $|\boldsymbol{\kappa}|=\kappa$, $|\mathbf{n}|=1$ нелинейное дисперсионное уравнение для скоростей их распространения в исследуемой слоистой среде имеет вид:

$$\zeta^4-\left(1+\frac{\mu_\varepsilon}{(\lambda+2\mu)}\right)\zeta^2+\frac{\mu_\varepsilon}{(\lambda+2\mu)}+4\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\frac{(\mu-\mu_\varepsilon)}{(\lambda+2\mu)}n_1^2n_3^2=0,$$

где $\zeta=c/c_1$, $c=\omega/\kappa$ – фазовая скорость распространения волн в слоистой среде, $c_1=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ и $c_2=\sqrt{\mu/\rho}$ – скорости распространения упругих продольных и поперечных волн в однородной упругой среде, волновое число $\kappa=2\pi/l$, l – длина гармонической волны. Также введены обозначения:

$$\tilde{\mu}=\mu\frac{k}{k+\mu},\ \beta=\frac{\mu}{k+\mu},\ \beta_1=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\beta^2/3,\ \beta_2=\beta^2/12,\ \mu_*=\mu\beta_1/\beta_2,\ \mu_\varepsilon=\tilde{\mu}+\varepsilon^2\beta_2(\mu_*\kappa_1^2-\rho\omega^2).$$

Если направление распространения волны задать с помощью угла α, $n_1=\sin\alpha$, то для определенных значений α уравнение для скоростей имеет точные решения:

при $\alpha=0$ квазипродольная волна $\zeta_1=1$, квазипоперечная волна $\zeta_2=\sqrt{\tilde{\mu}}\Big/\sqrt{(\lambda+2\mu)(1+\varepsilon^2\kappa^2\beta_2)}$;

при $\alpha=\pi/4$ квазипродольная волна $\zeta_1=\sqrt{(\lambda+\mu+\tilde{\mu}+\varepsilon^2\kappa^2\beta_2\mu_*/2)}\Big/\sqrt{(\lambda+2\mu)(1+\varepsilon^2\kappa^2\beta_2)}$, квазипоперечная волна $\zeta_2=\sqrt{\mu}\Big/\sqrt{(\lambda+2\mu)}$;

при $\alpha=\pi/2$ квазипродольная волна $\zeta_1=1$, квазипоперечная волна $\zeta_2=\sqrt{(\tilde{\mu}+\varepsilon^2\kappa^2\beta_2\mu_*)}\Big/\sqrt{(\lambda+2\mu)(1+\varepsilon^2\kappa^2\beta_2)}$.

Из этих формул явно видна анизотропия и дисперсия гармонических волн в рассматриваемой слоистой среде. При остальных значениях α решение дисперсионного уравнения найдено в принятом приближении □ ε^2.

Построено решение задачи о поверхностной волне типа Рэлея на границе упругого слоистого полупространства. Выявлена дисперсия поверхностной волны в среде с рассматриваемой структурой при достаточно малых значения коэффициента связи слоев k. Графики зависимости безразмерной скорости поверхностной волны c/c_1, от коэффициента связи слоев k показаны на рис. 1 для различных значений параметра толщины слоя к длине волны ε/l =0.5, 0.3, 0.1. Выход на асимптотику классического корня Рэлея происходит для значений безразмерного коэффициента $k/(\lambda+2\mu)>1.5\div 2$.

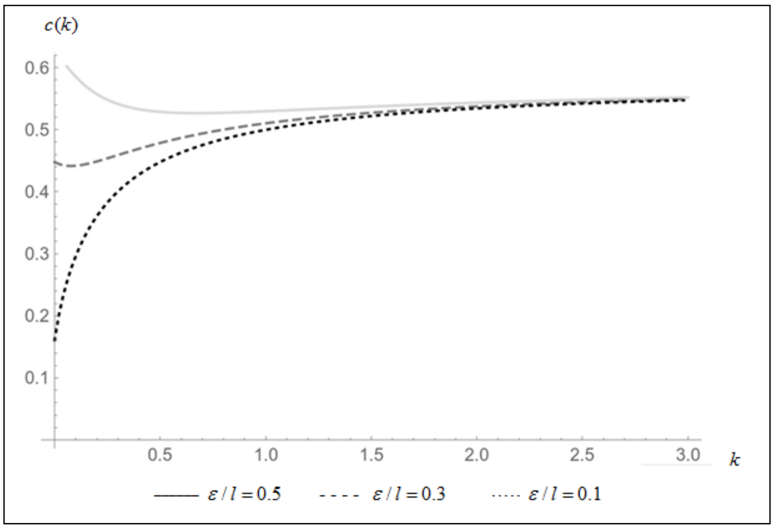

Рис. 1

Отметим, что граница применимости полученной асимптотической теории точно не определена. Достаточно условно при расчетах была принята верхняя граница малого параметра ε/l =0.5. Тем не менее, для коэффициентов связи слоев, начиная со значений $k/(\lambda+2\mu)>0.7$, расчеты дают близкие значения скоростей распространения квазипродольных, квазипоперечных и поверхностных волн для всего диапазона длин волн ε/l < 0.5.

Полагаем, что полученную уточненную модель можно использовать для исследования трансформации сейсмических волн при их выходе на земную поверхность в горных массивах, содержащих регулярные параллельные сетки трещин, с учетом возможных сдвиговых подвижек на контактных границах. Также эта теория может быть полезна при описании деформирования композитных материалов с дополнительными мягкими прослойками между слоями из основного, достаточно жесткого упругого материала.

Работа выполнена по проекту РФФИ № 15-08-02392-а.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. Sanchez-Palencia E. Non homogeneous media and vibration theory. Berlin: Springer, 1980. 398 p.
3. Никитин И.С. Осредненные уравнения слоистой среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах.// Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С .80-86.
4. Никитин И.С. Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением. //Изв. РАН. МТТ. 2008. № 4. С. 154-165.
5. Зволинский Н.В., Шхинек К.Н. Континуальная модель слоистой среды// Изв. РАН. МТТ. 1984. № 1. С. 5-14.
6. Салганик Р.Л. Приближение сплошной среды для описания деформирования слоистого массива// Изв. РАН. МТТ. 1987. № 3. С.48-56.