гранки

МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2001

УДК 539.374

© 2001 г. Н.Г. БУРАГО, А.Н. КОВШОВ ов

МОДЕЛЬ ДИЛАТИРУЮЩЕЙ РАЗРУШАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Публикуемая работа посвящена определяющим соотношениям, описывающим термомеханическое поведение геоматериалов. В работе [1] было дано подробное описание общего термодинамического метода построения определяющих соотношений для сплошных сред с конечным числом параметров состояния, который является обобщением исследований [2–5]. В данной работе последовательно применяя термодинамический метод для разработки модели деформирования геоматериалов. В отличие от предшествующих работ для построения модели требуется только задание свободной энергии и скорости диссипации как функций определяющих параметров. Дилатансионная зависимость и другие, упоминаемые ниже, свойства геоматериалов будут при этом следствиями.

етcя

Как показывают известные экспер иментальные исследования, геоматериалы обладают своеобразными свойствами такими, как пластическая сжимаемость и немонотонность диаграммы нагружения "сдвиг-касательное напряжение", которая наряду с участком упрочнения имеет также "ниспадающий" участок, связываемый с разупрочнением материала. Разрушение геоматериалов происходит постепенно с накоплением различного рода микродефектов. При этом скорости распространения волн в геоматериалах зависят от величины повреждаемости и уменьшаются с ее ростом.

Наконец, многочисленные эксперименты показывают, что характерным свойством геоматериалов является дилатансия, т.е. существование зависимости объемной деформации материала от сдвиговых деформаций.

Дилатансию геоматериалов можно описывать различными методами. В [6] показано, что если деформирование геоматериала (грунта) описывать уравнениями пластического течения с использованием ассоциированного закона и условия текучести типа условия Мизеса, в котором функция текучести зависит от первого инварианта тензора напряжений, то дилатансия имеет место. При этом скорость диссипации механической энергии и скорость объемного расширения в случае плоской деформации пропорциональны максимальной скорости сдвига и коэффициент пропорциональности равен коэффициенту внутреннего трения.

Следствием указанной связи является зависимость между компонентами тензора скоростей пластических деформаций, называемая условием дилатансии или дилатансионной зависимостью. В [7–9] условие дилатансии сразу постулируется в виде кинематического ограничения для компонент тензора скоростей пластической деформации, которое содержит так называемую скорость дилатансии. Это приводит к тому, что в зависимости от знака скорости дилатансии возможно как разрыхление, так и уплотнение дилатирующего геоматериала при сдвиге. При этом связь плотности среды ρ и давления p становится дифференциальной и не всегда интегрируемой. Функция $p(\rho)$ может быть различной при различных путях деформирования элемента среды.

В [10, 11] рассмотрена возможность построения моделей пластического деформирования материалов (в частности модели сыпучих сред) исходя из свойств диссипативной функции. Показано, что с учетом априорно заданной дилатансионной зависимости можно так определить диссипативную функцию, что с помощью ассоциированного закона получаются определяющие соотношения для среды, обладающей свойством дилатансии. В [12] рассматривается зависимость эффекта дилатансии от вида напряженного состояния среды. При этом используется ассоциированный закон пластического течения при специально выбранном виде функции текучести и условие дилатансии не задается заранее.

Таким образом, для описания поведения геоматериалов предлагались различные модели, в которых, в той или иной мере учитывались указанные свойства. В так называемых моделях "постепенного разрушения" в качестве определяющих соотношений используется ассоциированный закон упругопластического течения, а поверхность текучести задается так, чтобы учесть процессы упрочнения, разупрочнения и состояние "остаточной" прочности. В моделях континуального разрушения, активно развиваемых в последнее время, для описания разрушения геоматериалов вводится новый структурный параметр, называемый повреждаемостью. Его связывают с накоплением микродефектов в среде при деформировании и он ответственен за уменьшение скоростей распространения волн в геоматериалах. В моделях повреждающихся геоматериалов, которые с физической точки зрения представляются наиболее оправданными, определяется скорость накопления повреждаемости и учитывается ее обратное влияние на напряженно-деформированное состояние среды через зависимость упругих и пластических свойств от повреждаемости. Определяющие соотношения, входящие в модели повреждаемости часто конструируются на основе представлений микромеханики о процессах деформирования и разрушения геоматериалов.

Определяющие соотношения должны удовлетворять общим принципам термомеханики, то есть быть в согласии с законами термодинамики, с теорией размерности и с принципами инвариантности и объективности. Эти требования легко удовлетворяются при построении определяющих соотношений термодинамическим методом [1], применяемым ниже.

Будем учитывать, что деформирование геоматериалов сопровождается изменением температуры, теплопроводностью, упруговязкопластическим течением с дилатансией и накоплением повреждаемости. Поэтому в качестве независимых параметров состояния геоматериалов рассмотрим температуру T, материальный тензор деформации $\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}$, материальный тензор пластической деформации $\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}_p$, повреждаемость $\boldsymbol{\omega}$, скорости их изменения dT/dt, $\mathring{\mathbf{e}} = d\,\mathring{\varepsilon}/dt$, $\mathring{\mathbf{e}}_p = d\,\mathring{\varepsilon}_p/dt$, $d\omega/dt$ и градиент температуры ∇T.

Будем считать, что свободная энергия φ и функция скорости диссипации D (диссипативная функция) являются функциями этих определяющих параметров. При этом необходимо конкретизировать выражения этих функций, опираясь на физические представления о свойствах геоматериалов.

Тензор пластических деформаций $\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ будем рассматривать как структурный параметр, ответственный за изменение структуры материала при пластическом деформировании. Такой подход отличается от общепринятого, но имеет преимущество, т.к. позволяет обойтись без отдельного определения тензора упругих деформаций, в качестве которого будет использоваться разность тензора деформации $\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}$ и тензора пластических деформаций $\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}_p$. При этом тензор пластических деформаций $\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ определяет в пространстве деформаций точку, где свободная энергия имеет минимум по деформациям.

Свободная энергия φ будет функцией температуры T, тензора деформации $\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}$, тензора пластических деформаций $\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ и повреждаемости ω. Независимость свободной энергии от остальных параметров состояния показана в [1]. Обратимая объемная деформация геоматериалов при умеренных нагрузках невелика. Упругие сдвиговые деформации также не могут быть большими. Эти предположения позволяют принять простейшее выражение для свободной энергии в виде

$$\varphi = \frac{K(T,\boldsymbol{\omega})}{2\rho}((\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_p):\mathbf{I})^2 + \frac{\mu(\mathbf{T},\omega)}{\rho}((\boldsymbol{\epsilon}'-\boldsymbol{\epsilon}'_p):(\boldsymbol{\epsilon}'-\boldsymbol{\epsilon}'_p)) \tag{1}$$

где ρ – текущая плотность, $K(T, \omega)$ – модуль объемного сжатия, зависящий от температуры и повреждаемости ω, $\mu(T, \omega)$ – модуль сдвига, $\boldsymbol{\epsilon}'$ – девиатор тензора деформации, $\boldsymbol{\epsilon}'_p$ – девиатор тензора пластической деформации, $\mathbf{I}$ – единичный тензор, двоеточие обозначает свертку тензоров. В этом выражении для свободной энергии используются пространственные тензоры деформации $\boldsymbol{\epsilon}$ и пластической деформации $\boldsymbol{\epsilon}_p$, √ которые связаны с материальными тензорами следующим образом:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{F}^{-T}\cdot\ \mathring{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\mathbf{F}^{-1} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_p = \mathbf{F}^{-T}\cdot\ \mathring{\boldsymbol{\epsilon}}_p\ \cdot\mathbf{F}^{-1} \tag{3}$$

где $\mathbf{F}$ – тензор градиента деформации.

Функцию скорости диссипации построим таким образом, чтобы можно было описать пластическую объемную сжимаемость, вязкопластические свойства геоматериалов, их теплопроводность, а также накопление повреждаемости и дилатансию. Примем, что

$$D = H(A_1)k_v f_v(\mathbf{e}_p:\mathbf{I})^2 + H(A_2)k_p f_p(\mathbf{e}'_p:\mathbf{e}'_p) + H(\Phi)k_\omega\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \frac{k_q}{T}\nabla T\cdot\nabla T \tag{4}$$

где H – функция Хевисайда, равная единице для неотрицательных значений аргумента и нулю в противном случае. Аргументы A_1 и A_2 определяют условия пластичности по объему и по сдвигу соответственно и имеют вид:

$$A_1 = p^2 - k_v^2 f_v^2(\mathbf{e}_p:\mathbf{I})^2, \quad A_2 = \boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}' - k_p^2 f_p^2(\mathbf{e}'_p:\mathbf{e}'_p)$$

Коши. ?

где $p = -{}^1/_3(\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{I})$ – давление, а $\boldsymbol{\sigma}'$ – девиатор тензора напряжений. Принято, что повреждаемость ω есть скалярная величина и растет, если выполнен критерий разрушения

$$\Phi(T, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}_p, \omega) \geqslant 0 \tag{5}$$

Функции f_v и f_p – положительные функции от инвариантов тензора и/или девиатора скоростей пластической деформации соответственно. Коэффициенты k_v, k_p, k_ω, k_q – положительные функции температуры, деформации и структурных параметров $\boldsymbol{\epsilon}_p$, ω.

В выражении для скорости диссипации (4) первое слагаемое описывает необратимый процесс объемной вязкопластической деформации, второе – необратимое вязкопластическое формоизменение, третье – накопление повреждаемости ω и последнее – теплопроводность. Таким образом, диссипативная функция определяется ~~тензорами~~ тензором пластической деформации $\boldsymbol{\epsilon}_p$, который, как указывалось выше, рассматривается как структурный параметр и входит в диссипативную функцию через тензор скоростей пластических деформаций $\mathbf{e}_p$ и его девиатор $\mathbf{e}'_p$, а также структурным параметром повреждаемости ω и градиентом температуры ∇T.

Заметим также, что функции f_v и f_p не предполагаются однородными ~~от своих аргументов~~. Поэтому диссипативная функция также не является однородной. При этом для получения определяющих соотношений, в отличии от [13], не привлекаются никакие дополнительные экстремальные принципы.

Искомые определяющие соотношения находятся просто как возможное решение неравенства диссипации

φ

$$-\rho\left(\eta+\frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)\frac{dT}{dt}+\left(\mathring{\boldsymbol{\sigma}}-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}}\right):\mathring{\mathbf{e}}-\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}_p}\right):\mathring{\mathbf{e}}_p-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\frac{d\omega}{dt}+\mathbf{q}\cdot\frac{\nabla T}{T}\geqslant 0$$ V

и имеют вид

$$\eta+\frac{\partial\varphi}{\partial T}=\eta_D(\pi),\quad \mathring{\boldsymbol{\sigma}}-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}}=\mathring{\boldsymbol{\sigma}}_D(\pi)$$ $\mathring{X}_D$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\mathring{\chi}}=\mathring{\mathbf{X}}_D(\pi),\quad \mathbf{q}=\mathbf{q}_D(\pi)$$

∇T

где правые части определяют скорость диссипации

$$D=-\rho\eta_D\frac{dT}{dt}+\mathring{\boldsymbol{\sigma}}_D:\mathring{\mathbf{e}}-\rho\mathring{\mathbf{X}}_D:\frac{d\mathring{\chi}}{dt}+\mathbf{q}_D\cdot\frac{\nabla R}{T}\geqslant 0$$ VV

и находятся (определяются, вычисляются) в соответствии с принятым выражением для скорости диссипации (4). Были использованы также следующие обозначения:

$$\pi=\left(T,\mathring{\boldsymbol{\epsilon}},\mathring{\boldsymbol{\chi}},\frac{dT}{dt},\mathring{\mathbf{e}},\frac{d\mathring{\boldsymbol{\chi}}}{dt},\nabla T\right),\quad \mathring{\boldsymbol{\chi}}=(\mathring{\boldsymbol{\epsilon}}_p,\omega),\quad \mathring{\sigma}=F^{-1}\cdot\sigma\cdot F^{-T}$$ V

Учитывая выражение для свободной энергии и то, что диссипативная функция не зависит от тензора скоростей деформации ($\mathring{\sigma}_D=0$), получим определяющие соотношения для напряжения в виде $\mathring{\sigma}_D$

$$\mathring{\boldsymbol{\sigma}}=\rho\partial\varphi/\partial\mathring{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{6}$$

или

$$-p\mathbf{I}+\boldsymbol{\sigma}'=K((\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_p):\mathbf{I})\mathbf{I}+2\mu(\boldsymbol{\epsilon}'-\boldsymbol{\epsilon}'_p) \tag{7}$$

где $p=-1/3(\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{I})$ – давление, а $\boldsymbol{\sigma}'$ – девиатор тензора напряжений. Отсюда следует, что $p=-K(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_p):\mathbf{I}$ и $\boldsymbol{\sigma}'=2\mu(\boldsymbol{\epsilon}'-\boldsymbol{\epsilon}'_p)$.

Определяющие соотношения для девиаторной и шаровой составляющих тензора скоростей пластической деформации $\mathbf{e}_p$ получаются такими:

$$\mathbf{e}'_p=H(A_2)(k_p f_p)^{-1}\boldsymbol{\sigma}' \tag{8}$$

$$(\mathbf{e}_p:\mathbf{I})=-H(A_1)(k_v f_v)^{-1}p \tag{9}$$

Для повреждаемости ω аналогично получим следующее определяющее ~~выражение~~ уравнение V:

$$k_\omega\frac{d\omega}{dt}=-H(\Phi)\left(\frac{1}{2}((\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_p):\mathbf{I})^2\frac{\partial K}{\partial\omega}+(\boldsymbol{\epsilon}'-\boldsymbol{\epsilon}'_p)^2:\mathbf{I}\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right) \tag{10}$$

Определяющие соотношения для энтропии, внутренней энергии и тепловых потоков принимают вид

$$\eta=-\partial\varphi/\partial T,\quad \eta_D=0,\quad U=\varphi+\eta T,\quad \mathbf{q}=\mathbf{q}_D=k_q\nabla T \tag{11}$$

Проанализируем записанные определяющие соотношения. Если $\partial K/\partial\omega\leqslant 0$ и

$\partial\mu/\partial\omega \leqslant 0$, то из (10) следует

$$k_\omega d\omega/dt \geqslant 0 \tag{12}$$

и повреждаемость является неубывающей функцией времени, что соответствует физическим представлениям. При этом для роста повреждаемости необходимо выполнение ~~хотя бы одного из условий нагружения $A_1 \geqslant 0, A_2 \geqslant 0$~~ и условия разрушения $\Phi \geqslant 0$. Уменьшение скоростей распространения волн с ростом повреждаемости обеспечивается убыванием модулей упругости K и μ с ростом повреждаемости. V

Рассмотрим дилатансионные эффекты. Соотношение (9) в общем случае играет роль дилатансионного соотношения. В частном случае, если принять, что

V $e_p \to e'_p$

$$f_v = (\mathbf{e}'_p : \mathbf{e}'_p)^{-1/2} \tag{13}$$

то для скорости расширения из (9) получим следующее дилатансионное соотношение:

V $e_p \to e'_p$

$$\mathbf{e}_p : \mathbf{I} = -H(A_1)\frac{p}{k_v}(\mathbf{e}'_p : \mathbf{e}'_p)^{1/2} \tag{14}$$

Соотношение (14) обобщает результат [6]. Из (14) в случае плоской деформации, так же как и в [6], следует, что скорость расширения пропорциональна максимальной скорости сдвига. Но при этом в отличие от результата [6] коэффициент пропорциональности зависит от давления. Наличие зависимости между скоростью объемного расширения и скоростью сдвига означает, что предлагаемая модель описывает явление дилатансии при деформации геоматериалов. Явление пластической объемной сжимаемости также описывается соотношениями (9). Видно, что положительное давление приводит к сжатию. Условие $A_1 > 0$ определяет условие пластичности по объему.

Немонотонность сдвиговой диаграммы нагружения может быть описана соотношением (8) путем специального задания условия нагружения для формоизменения ("условия пластичности на сдвиг") $A_2 > 0$.

Вопрос о задании функций нагружения $A_1(T, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}_p, \omega)$, $A_2(T, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}_p, \omega)$ и функции разрушения $\Phi(T, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}_p, \omega)$, заслуживает отдельного обсуждения (очень подробный обзор был сделан, например, в [5]). Этот вопрос отражает одну из наиболее трудных традиционных проблем механики пластических сред и его рассмотрение выходит за рамки настоящей работы.

В настоящей работе получены определяющие соотношения дилатирующей разрушающейся упруговязкопластической среды, подсказываемые законами термодинамики. Конечно, это не самые общие соотношения, а лишь один из возможных вариантов. Простор для конструирования определяющих соотношений очень велик. Например, при записи диссипативной функции можно было бы использовать явно другие инварианты тензора скоростей пластических деформаций. Вместо (или наряду с) объемной пластической деформации можно было бы использовать в качестве параметра состояния пористость или остаточную плотность (плотность разгруженного состояния), которые часто более удобны (см. например [1]), особенно при анализе конечных деформаций. В любом случае модификации, детализация и тарировка определяющих соотношений должны выполняться в непосредственной связи с физическими экспериментами и конкретными типами геоматериалов. Здесь лишь проиллюстрирован простой способ построения таких соотношений.

Авторы выражают признательность В.Н. Кукуджанову за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00659).

numerical V

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бураго Н.Г., Глушко А.И., Ковшов А.Н.* Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 6. С. 4–15.
2. *Kondaurov V.I., Kukudjanov V.N.* On costitutive equations and numeri~~k~~cal solution of the multidimensional problems of the dynamics of nonisothermic elastic-plastic media with finite deformations // Archives of Mech. 1979. V. 31. № 5. P. 623–647.
3. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет прикладных программ "АСТРА": Препринт 326. М.: ИПМ АН СССР, 1988. 68 с.
4. *Кукуджанов В.Н., Сантаойя К.* Термодинамика вязкоупругих сред с внутренними параметрами // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 115–126.

Localization

5. *Kukudzhanov V.N., Bourago N.G., Kovshov A.N., Ivanov V.L., Shneiderman D.N.* On the problem of Damage and ~~K~~ocalization of Strains. Preprint 95 : 11. Goteborg: Chalmers Univ. Technol., 1995. 35 p.

V

6. *Друккер Д., Прагер В.* Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Механика. Новое в зарубежной науке. Определяющие законы механики и грунтов. М.: Мир, 1975. С. 166–177.
7. *Николаевский В.Н., Сырников Н.М.* О предельном течении сыпучей дилатирующей среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 159–166.
8. *Николаевский В.Н.* Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучей среды // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 1070–1082.
9. *Николаевский В.Н.* Послесловие. Современные проблемы механики грунтов. М.: Мир, 1975. С. 210–229.
10. *Бережной И.А., Ивлев Д.Д., Чадов В.Б.* О построении модели сыпучих сред, исходя из определения диссипативной функции // ДАН СССР. 1973. Т. 213. № 6. С. 1270–1273.
11. *Каменярж Я.А.* О задании моделей пластических сред при помощи функции диссипации // ДАН СССР. 1974. Т. 215. № 4. С. 804–806.
12. *Ломакин Е.В.* Пластическое течение дилатирующей среды в условиях плоской деформации // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 6. С. 58–68.
13. *Циглер Г.* ~~Экспериментальные~~ принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М.: Мир, 1966. 135 с.

V
Экстремальные

Москва

Поступила в редакцию
15.05.2001