АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АН СССР

МОСКВА 1984

УДК 531:539.5

Н.Г.БУРАГО

ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ПОДВИЖНЫХ АДАПТИВНЫХ КООРДИНАТАХ[1]

В работе: 1) приведена удобная для численных методов общая запись уравнений МСС [1-3] в подвижных координатах, 2) для произвольной реологии получены полезные дифференциальные формы термодинамических функций и уравнение теплопроводности, 3) с позиций МСС рассмотрены вопросы построения координатных сеток и управления подвижными адаптивными координатами.

1. Метод подвижных координат (см. обзоры в [4-8]), применяющийся все чаще как эффективный вычислительный прием, имеет важное методическое значение для МСС. Введение подвижных координат (подвижно-координатный подход) позволяет получить непрерывный переход между двумя "полюсами" МСС – подходами Эйлера и Лагранжа к описанию движений сплошной среды. Это, отмеченное многими авторами, обстоятельство ставит вопрос о наиболее удобной и универсальной записи уравнений МСС. Единообразная формулировка уравнений может послужить основой для разработки алгоритмов, индифферентных по отношению к смене классов задач МСС. Многое в этом направлении сделано в работах [4-8] (там же дальнейшие ссылки). Предлагаемый здесь материал следует рассматривать как полезное дополнение.

2. Пусть $\overset{o}{\mathbf{x}} = (\overset{o}{x}{}^1, \overset{o}{x}{}^2, \overset{o}{x}{}^3)$ - лагранжевы метки точек материальной среды, указывающие их начальные (при $t = 0$) положения в декартовой прямоугольной системе координат евклидова пространства X.

[1] Бураго Н.Г. Формулировка уравнений механики сплошной среды в подвижных адаптивных координатах. Сб. "Численные методы механики твердого деформируемого тела" / Ред. Г.И.Пшеничнов, М.:ВЦ АНСССР , 1984. С. 32-49. Ввиду плохого качества сканированных копий данной статьи для удобства чтения текст постранично набран заново.

УДК 531:539.5

Н.Г.БУРАГО

ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ПОДВИЖН[...] АДАПТИВНЫХ КООРДИНАТАХ

В работе: I) приведена удобная для численных методов об[...] запись уравнений МСС [I-3] в подвижных координатах, 2) для про[...]извольной реологии получены полезные дифференциальные формы термодинамических функций и уравнение теплопроводности, 3) с позиций МСС рассмотрены вопросы построения координатных сеток и управления подвижными адаптивными координатами.

I. Метод подвижных координат (см. обзоры в работах [4-8]), применяющийся все чаще как эффективный вычислительный прием, имеет важное методическое значение для МСС. Введение подвижных координат (подвижно-координатный подход) позволяет получить не[...]прерывный переход между двумя "полюсами" МСС - подходами Эйлер[...] и Лагранжа к описанию движений сплошной среды. Это, отмеченное многими авторами, обстоятельство ставит вопрос о наиболее удоб[...]ной и универсальной записи уравнений МСС. Единообразная формул[...]ровка уравнений может послужить основой для разработки алгорит[...]мов, индифферентных по отношению к смене классов задач МСС. Мн[...]гое в этом направлении сделано в работах [4-8] (там же дальней[...]шие ссылки). Предлагаемый здесь материал следует рассматриват[...] как полезное дополнение.

2. Пусть $\overset{o}{x} = (\overset{o}{x}{}^1, \overset{o}{x}{}^2, \overset{o}{x}{}^3)$ - лагранжевы метки точек материа[...]ной среды, указывающие их начальные (при $t=0$) положения в дек[...]товой прямоугольной системе координат евклидова пространства X

Пусть

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) = \mathbf{x}(\overset{o}{\mathbf{x}}, t)\,,\quad \overset{o}{\mathbf{x}} \in V\,,\ t \geq 0 \qquad (1)$$

это закон движения материальной среды (множества точек $\overset{o}{\mathbf{x}}$), указывающий актуальные (в данный момент времени t) координаты материальных точек $\overset{o}{\mathbf{x}}$.

Рассмотрим движение безмоментной сплошной материальной среды в области $V \subset X$, имеющей в общем случае подвижные границы. Точки этой области $\mathbf{x} \in V$ поставим в некоторое взаимно однозначное соответствие точкам фиксированной области $\breve{V} = V\big|_{t=0}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\breve{\mathbf{x}}, t)\,,\quad \breve{\mathbf{x}} \in \breve{V}\,,\quad t \geq 0 \qquad (2)$$

Например, если в области $\breve{V}$ ввести сетку, то закон (2) опишет подвижную сетку в области V. Произвол в выборе отображения (2) модно использовать для того, чтобы подвижная сетка в области "следила" за особенностями решения, например за контактными разрывами и лагранжевыми границами или сгущалась бы в области больших градиентов решения.

Полагая отображение (1) взаимно однозначным исключим $\mathbf{x}$ с помощью (2), тогда получим

$$\overset{o}{\mathbf{x}} = \overset{o}{\mathbf{x}}(\breve{\mathbf{x}}, t)\,,\quad \breve{\mathbf{x}} \in \breve{V}\,,\quad t \geq 0 \qquad (3)$$

Соотношение (3) показывает, какие из материальных точек пространства X находятся в актуальный момент времени $t \geq 0$ в области V, а соотношение (2) показывает их положения. Соотношения (2) и (3) это параметрическая форма закона (1). В начальный момент времени

$$\mathbf{x}\big|_{t=0} = \overset{o}{\mathbf{x}}\big|_{t=0} = \breve{\mathbf{x}}\,,\quad \breve{\mathbf{x}} \in \breve{V} \qquad (4)$$

Множество точек $\breve{\mathbf{x}} \in \breve{V}$ рассматривается как сплошная координатная среда с законом движения (2). Полагаем, что все определяемые функции являются настолько гладкими, насколько это необходимо по ходу изложения. Независимыми переменными являются подвижные координаты $\breve{\mathbf{x}}$ и время t.

Определим скорости движения материальной и координатной

...

$$x = (x^1, x^2, x^3) = \hat{x}(\overset{\circ}{x}, t); \quad \overset{\circ}{x} \in X, \ t \geq 0 \qquad (I)$$

...закон движения материальной среды (множества точек $\overset{\circ}{x}$), ...ающий актуальные (в данный момент времени t) координаты ...риальных точек $\overset{\circ}{x}$.

...ассмотрим движение безмоментной сплошной материальной сре... в области $V \subset X$, имеющей в общем случае подвижные границы. ...ам этой области $x \in V$ поставим в некоторое взаимно однозначное ...оответствие точкам фиксированной области $\check{V} = V|_{t=0}$:

$$x = x(\check{x}, t); \quad \check{x} \in \check{V}, \ t \geq 0. \qquad (2)$$

...пример, если в области $\check{V}$ ввести сетку, то закон (2) опишет ...жную сетку в области V. Произвол в выборе отображения (2) ...жно использовать для того, чтобы подвижная сетка в области ..."...ила" за особенностями решения, например за контактными ...ицами и лагранжевыми границами или сгущалась бы в местах ...льших градиентов решения.

Полагая отображение (I) взаимно однозначным, исключим x ...помощью (2), тогда получим

$$\overset{\circ}{x} = \overset{\circ}{x}(\check{x}, t), \quad \check{x} \in \check{V}, \ t \geq 0. \qquad (3)$$

...отношение (3) показывает, какие из материальных точек простран... X находятся в актуальный момент времени $t \geq 0$ в области V, ...(2) указывает их положения. Соотношения (2) и (3) это параметрическая форма закона (I). В начальный момент времени

$$x|_{t=0} = \overset{\circ}{x}|_{t=0} = \check{x}; \quad \check{x} \in \check{V}. \qquad (4)$$

...жество точек $\check{x} \in \check{V}$ рассматривается как сплошная координатная ...реда с законом движения (2). Полагаем, что все определяемые ...функции являются настолько гладкими, насколько это необходимо ...по ходу изложения. Независимыми переменными являются подвижные ...координаты $\check{x}$ и время t.

3. Определим скорости движения материальной и координатной

сред: $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ соответственно

$$\mathbf{u} = u^k \mathbf{e}_k \,, \quad u^k = \left.\frac{\partial x^k}{\partial t}\right|_{\overset{o}{\mathbf{x}}} = \frac{dx^k}{dt}$$

$$\mathbf{w} = w^k \mathbf{e}_k \,, \quad w^k = \left.\frac{\partial x^k}{\partial t}\right|_{\breve{\mathbf{x}}} = \frac{\partial x^k}{\partial t}$$

где $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}^k$ - декартов ортонормированный базис.

Криволинейную систему координат $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ можно ввести одним из трех способов

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \,, \quad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\overset{o}{\mathbf{x}}) \,, \quad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\breve{\mathbf{x}})$$

Координаты $\boldsymbol{\xi}$ - это зависимые пространственные переменные.

Локальный базис для координат $\boldsymbol{\xi}$ можно образовать с помощью любой из декартовых конфигураций $\{\mathbf{x}\}$, $\{\overset{o}{\mathbf{x}}\}$, $\{\breve{\mathbf{x}}\}$. Обозначим выбранную для этой цели декартову конфигурацию $\{\tilde{\mathbf{x}}\}$. Базис

$$\tilde{\mathbf{Э}}_i = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial \xi^i} \mathbf{e}_k \,, \quad \tilde{\mathbf{Э}}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{x}^k} \mathbf{e}_k$$

называется сопутствующим при $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, начальным при $\tilde{\mathbf{x}} = \overset{o}{\mathbf{x}}$ и подвижно-координатным при $\tilde{\mathbf{x}} = \breve{\mathbf{x}}$, а декартова конфигурация $\{\tilde{\mathbf{x}}\}$ - отсчетной.

Независимо от выбора пары ($\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}$) лагранжев подход имеем при $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, эйлеров подход при $\mathbf{w} = 0$.

Отсчетные конфигурации $\{\mathbf{x}\}$ и $\{\overset{o}{\mathbf{x}}\}$ традиционно используются в МДТТ (механике деформируемого твердого тела). С ними связаны две системы тензоров для описания напряжений и деформаций: тензоры Коши и Альманси в первом случае и тензоры Кирхгоффа и Грина во втором (см. [3]).

В МЖГ (механике жидкости и газа) как правило используется конфигурация $\{\mathbf{x}\}$. Начальная конфигурация $\{\overset{o}{\mathbf{x}}\}$ вовсе исключается из постановки задач. Лишь неявно наличие взаимно-однозначного соответствия (1) для близких состояний материальной среды подразумевается при использовании материальных временных производных d/dt. Движение материальной и координатной сред характеризуется полем скоростей $\mathbf{u}(\breve{x}, t)$ и связью (2).

сред: $\bar{u}$ и $\bar{w}$ соответственно

$$\bar{u} = u^k \bar{e}_k\,,\quad u^k = \frac{\partial x^k}{\partial t}\Big|_{\overset{\circ}{x}} = \frac{d x^k}{d t}\,, \tag{4}$$

$$\bar{w} = w^k \bar{e}_k\,,\quad w^k = \frac{\partial x^k}{\partial t}\Big|_{\check{x}} = \frac{\partial x^k}{\partial t}\,, \tag{5}$$

где $\bar{e}_k = \bar{e}^k$ - декартов ортонормированный базис.

Криволинейную систему координат $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ можно вв[...] сти одним из трех способов

$$\xi = \xi(x)\,,\ \xi = \xi(\overset{\circ}{x})\,,\ \xi = \xi(\check{x})\,.$$

Координаты ξ - это зависимые пространственные переменные.

Локальный базис для координат ξ можно образовать с по[...] щью любой из декартовых конфигураций $\{x\}$, $\{\overset{\circ}{x}\}$, $\{\check{x}\}$. Обоз[...] чим выбранную для этой цели декартову конфигурацию $\{\tilde{x}\}$. Бази[...]

$$\tilde{\bar{\vartheta}}_i = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial \xi^i}\bar{e}_k\,,\quad \tilde{\bar{\vartheta}}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{x}^k}\bar{e}^k \tag{6}$$

называется сопутствующим при $\tilde{x} = x$, начальным при $\tilde{x} = \overset{\circ}{x}$ и под[...] вижно-координатным при $\tilde{x} = \check{x}$, а декартова конфигурация $\{\tilde{x}\}$ - отсчетной.

Независимо от выбора пары $(\tilde{x}, \xi)$ лагранжев подход имеем при $\bar{w} = \bar{u}$, эйлеров подход при $\bar{w} = 0$.

Отсчетные конфигурации $\{x\}$ и $\{\overset{\circ}{x}\}$ традиционно использу[...] ются в МДТТ (механике деформируемого твердого тела). С ними связаны две системы тензоров для описания напряжений и дефор[...] ций: тензоры Коши и Альманси в первом случае и тензоры Кирхг[...] и Грина во втором (см. [3]).

В МЖГ (механике жидкости и газа) как правило используетс[...] актуальная конфигурация $\{x\}$. Начальная конфигурация $\{\overset{\circ}{x}\}$ во[...] исключается из постановки задач. Лишь неявно наличие взаимно однозначного соответствия (I) для близких состояний материал[...] среды подразумевается при использовании материальных времен[...] производных d/dt. Движение материальной и координатной сред характеризуется полем скоростей $\bar{u}(\check{x}, t)$ и связью (2).

Можно применить и подвижно-координатную конфигурацию в качестве отсчетной: $\tilde{\mathbf{x}} = \breve{\mathbf{x}}$. Введенные обычным путем тензоры напряжений и деформаций в этом случае будут совпадать с тензорами Коши и Альманси при $\mathbf{w} = 0$ и с тензорами Кирхгоффа и Грина при $\mathbf{w} = \mathbf{u}$. Эта интересная возможность, однако, слишком необычна.

Уравнения МСС в подвижных координатах, сформулированные в актуальной отсчетной конфигурации, будут привычными, универсальными и удобными.

4. Рассмотрим уравнения для материальной среды. Введем сопутствующий локальный базис $\mathbf{Э}_i = \tilde{\mathbf{Э}}_i\big|_{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}}$, метрики начальной и актуальной конфигураций

$$\overset{o}{g}_{ij} = \frac{\partial \overset{o}{x}{}^m}{\partial \xi^i}\frac{\partial \overset{o}{x}_m}{\partial \xi^j}, \quad \hat{g}_{kn} = \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k}\frac{\partial x_m}{\partial \xi^n}, \quad \hat{g}^{kn} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^n}{\partial x_m} \tag{7}$$

тензор деформаций Альманси

$$dl^2 - dl_0^2 = 2\hat{\varepsilon}_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_{ij}\mathbf{Э}^i\mathbf{Э}^j \tag{8}$$

где $dl^2 = 2\hat{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j$ и $dl_0^2 = 2\overset{o}{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j$ - квадраты элементов длины в конфигурациях $\{\mathbf{x}\}$ и $\{\overset{o}{\mathbf{x}}\}$. Введем тензор напряжений Коши

$$d\mathbf{P} = \hat{\sigma}^{ik}\hat{\mathbf{Э}}_i \hat{n}_k dS, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\sigma}^{ij}\mathbf{Э}_i\mathbf{Э}_j \tag{9}$$

где $d\mathbf{P}$ - сила, действующая на площадке dS с нормалью $\hat{n}_k\mathbf{Э}^k$.

Определим тензор скоростей деформаций

$$\frac{d}{dt}(dl^2 - dl_0^2) = 2\hat{e}_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad \hat{\mathbf{e}} = \hat{e}_{ij}\mathbf{Э}^i\mathbf{Э}^j \tag{10}$$

и материальную временную производную [4-8]:

$$\frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial x^k}{\partial t} + \frac{\partial x^k}{\partial \breve{x}^n}\frac{\partial \breve{x}^n}{\partial t} \quad , \quad \frac{d\breve{x}^n}{dt} = \frac{\partial \breve{x}^n}{\partial x^k}(u^k - w^k)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \breve{x}^n}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \breve{x}^n} \quad , \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u^k - w^k)\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{11}$$

Из тождества $d\overset{o}{\mathbf{x}}/dt = 0$ получаем уравнения для функций $\overset{o}{\mathbf{x}}$:

можно применить и подвижно-координатную конфигурацию в качестве отсчетной: $\tilde{x}=\check{x}$. Введенные обычным путем тензоры напряжений и деформаций в этом случае будут совпадать с тензорами Коши и Альманси при $\bar{w}=0$ и с тензорами Кирхгоффа и Грина при $\bar{w}=\bar{u}$. Эта интересная возможность, однако, слишком необычна.

Уравнения МСС в подвижных координатах, сформулированные в актуальной отсчетной конфигурации, будут привычными, универсальными и удобными.

4. Рассмотрим уравнения для материальной среды. Введем соответствующий локальный базис $\hat{\vec{\partial}}_i=\tilde{\vec{\partial}}_i\big|_{\tilde{x}=x}$, метрики начальной и актуальной конфигураций

$$\mathring{g}_{ij}=\frac{\partial\mathring{x}^m}{\partial\xi^i}\frac{\partial\mathring{x}_m}{\partial\xi^j},\ \hat{g}_{kn}=\frac{\partial x^m}{\partial\xi^k}\frac{\partial x_m}{\partial\xi^n},\ \hat{g}^{kn}=\frac{\partial\xi^k}{\partial x^m}\frac{\partial\xi^n}{\partial x_m}, \tag{7}$$

тензор деформаций Альманси

$$dl^2-dl_0^2=2\hat{\varepsilon}_{ik}d\xi^i d\xi^k,\ \hat{\varepsilon}=\hat{\varepsilon}_{ik}\hat{\vec{\partial}}^i\hat{\vec{\partial}}^k, \tag{8}$$

где $dl^2=\hat{g}_{ik}d\xi^i d\xi^k$ и $dl_0^2=\mathring{g}_{ik}d\xi^i d\xi^k$ - квадраты элементов длины в конфигурациях $\{x\}$ и $\{\mathring{x}\}$. Введем тензор напряжений Коши

$$d\bar{P}=\hat{\sigma}^{ik}\hat{\vec{\partial}}_i\hat{n}_k dS,\ \hat{\sigma}=\hat{\sigma}^{ik}\hat{\vec{\partial}}_i\hat{\vec{\partial}}_k, \tag{9}$$

где $d\bar{P}$ - сила, действующая на площадке dS с нормалью $\hat{n}_k\hat{\vec{\partial}}^k$.

Определим тензор скоростей деформаций

$$\frac{d}{dt}(dl^2-dl_0^2)=2\hat{e}_{ik}d\xi^i d\xi^k,\ \hat{e}=\hat{e}_{ik}\hat{\vec{\partial}}^i\hat{\vec{\partial}}^k \tag{10}$$

и материальную временную производную [4-8]:

$$\frac{dx^k}{dt}=\frac{\partial x^k}{\partial t}+\frac{\partial x^k}{\partial\check{x}^n}\frac{d\check{x}^n}{dt},\ \frac{d\check{x}^n}{dt}=\frac{\partial\check{x}^n}{\partial x^k}(u^k-w^k),$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{d\check{x}^n}{dt}\frac{\partial}{\partial\check{x}^n},\ \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(u^k-w^k)\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{11}$$

Из тождества $d\mathring{x}/dt=0$ получаем уравнения для функций $\mathring{x}$:

$$\frac{\partial \overset{o}{\mathbf{x}}{}^i}{\partial t} + (u^k - w^k)\frac{\partial \overset{o}{\mathbf{x}}{}^i}{\partial x^k} = 0 \tag{12}$$

Подставляя (8) в (10), после простой выкладки получаем

$$\hat{e}_{ij} = \frac{d\hat{\varepsilon}_{ij}}{dt} + \hat{\varepsilon}_{ik}\frac{\partial \hat{v}^k}{\partial \xi^j} + \hat{\varepsilon}_{kj}\frac{\partial \hat{v}^k}{\partial \xi^i} = \frac{D\hat{\varepsilon}_{ij}}{Dt} \tag{13}$$

связь между компонентами тензоров $\hat{\mathbf{e}}$ и $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Скорость $\hat{v}^k$ - это

$$\mathbf{v} = \hat{v}^k \hat{\mathbf{Э}}_k, \quad \hat{v}^k = d\xi^k / dt \tag{14}$$

скорость движения материальной точки в системе координат ξ.

Наличие добавочных членов в (13) не связано с выбором отсчетной конфигурации, а зависит только от типа криволинейных координат ξ. Если $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\overset{o}{\mathbf{x}})$, то добавочные члены пропадут. При $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ выражение (13) соответствует определению так называемой производной Ривлина [3] для дважды ковариантных тензоров второго ранга. Для тензоров с произвольным строением индексов объективные временные производные (не зависящие от вращения и деформации локального базиса) при $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\overset{o}{\mathbf{x}})$ переходят в обычные материальные временные производные [1].

Из (7), (8) и (13) следует

$$\hat{e}_{ij} = 0.5\left(\frac{\partial u^m}{\partial \xi^i}\frac{\partial x_m}{\partial \xi^j} + \frac{\partial x^m}{\partial \xi^i}\frac{\partial u_m}{\partial \xi^j}\right) \tag{15}$$

Приравнивая (13) и (15), получим уравнение для определения деформаций для тех случаев, когда начальная конфигурация исключается из постановки задачи.

5. Отметим полезные формулы. Следующая формула значительно облегчает выкладки типа (7), (8), (13) -> (15):

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial a(\breve{x},t)}{\partial \xi^k(\breve{x},t)}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi^k}\frac{\partial a}{\partial l} - \frac{\partial a}{\partial \xi^m}\frac{\partial}{\partial \xi^k}\frac{\partial \xi^m}{\partial l} \tag{16}$$

где $\partial / \partial l$ - любое пространственное или временное дифференцирование. Выводится она так:

$$\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial a}{\partial \xi^k} = \left(\left.\frac{\partial}{\partial l}\right|_{\xi} + \frac{\partial \xi^n}{\partial l}\frac{\partial}{\partial \xi^n}\right)\frac{\partial a}{\partial \xi^k} =$$

$$\frac{\partial \overset{o}{x}{}^{k}}{\partial t} = (w^m - u^m)\frac{\partial \overset{o}{x}{}^{k}}{\partial x^m}. \qquad (I$$

Подставляя (8) в(I0), после простой выкладки получаем

$$\hat{e}_{ij} = \frac{d\hat{\varepsilon}_{ij}}{dt} + \hat{\varepsilon}_{ik}\frac{\partial \hat{v}^k}{\partial \xi^j} + \hat{\varepsilon}_{kj}\frac{\partial \hat{v}^k}{\partial \xi^i} = \frac{D\hat{\varepsilon}_{ij}}{Dt} \qquad (I$$

связь между компонентами тензоров $\hat{e}$ и $\hat{\varepsilon}$. Скорость $\hat{v}^k$- это

$$\bar{v} = \hat{v}^k \hat{\bar{\partial}}_k, \quad \hat{v}^k = d\xi^k/dt \qquad (I$$

скорость движения материальной среды в системе координат ξ. Наличие добавочных членов с $\hat{v}^k$ в (I3) не связано с выбором от счетной конфигурации, а зависит только от типа криволинейных координат ξ. Если $\xi = \xi(\overset{o}{x})$, то добавочные члены пропадут. При $\xi = \xi(x)$ выражение (I3) соответствует определению так называем производной Ривлина [3] для дважды ковариантных тензоров второго ранга. Для тензоров с произвольным строением индексов объективные временные производные (не зависящие от вращения и деформации локального базиса) при $\xi = \xi(\overset{o}{x})$ переходят в обычные материальные временные производные [I].

Из (7),(8) и (I3) следует

$$\hat{e}_{ij} = 0.5\left(\frac{\partial x^n}{\partial \xi^i}\frac{\partial u_n}{\partial \xi^j} + \frac{\partial u^n}{\partial \xi^i}\frac{\partial x_n}{\partial \xi^j}\right). \qquad (I$$

Приравнивая (I3) и (I5), получим уравнения для определени деформаций для тех случаев,когда начальная конфигурация исключается из постановки задачи.

5. Отметим полезные формулы. Следующая формула значительно облегчает выкладки типа (7),(8),(I3) $\to$ (I5):

$$\frac{\partial}{\partial \ell}\left(\frac{\partial a(\check{x},t)}{\partial \xi^k(\check{x},t)}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi^k}\frac{\partial a}{\partial \ell} - \frac{\partial a}{\partial \xi^m}\frac{\partial}{\partial \xi^k}\frac{\partial \xi^m}{\partial \ell}, \qquad (I$$

где $\partial/\partial\ell$ - любое временное или пространственное дифференцирование. Выводится она так:

$$\frac{\partial}{\partial \ell}\frac{\partial a}{\partial \xi^k} = \left(\frac{\partial}{\partial \ell}\Big|_{\xi} + \frac{\partial \xi^n}{\partial \ell}\frac{\partial}{\partial \xi^n}\right)\frac{\partial a}{\partial \xi^k} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\left.\frac{\partial a}{\partial l}\right|_{\xi} + \frac{\partial \xi^n}{\partial l}\frac{\partial a}{\partial \xi^n}\right) - \frac{\partial a}{\partial \xi^m}\frac{\partial}{\partial \xi^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial l}$$

Эта формула верна и при построении разностных схем

$$\frac{\partial a_{(n+1)}}{\xi^k_{(n+1)}} = \frac{\partial a_{(n)}}{\partial \xi^k_{(n)}} + \frac{\partial \delta a_{(n)}}{\partial \xi^k_{(n)}} - \frac{\partial a_{(n)}}{\partial \xi^m_{(n)}}\frac{\partial \delta \xi^m_{(n)}}{\partial \xi^k_{(n)}} + O(\tau^2)$$

где $\delta a_{(n)}$ и $\delta \xi^k_{(n)}$ - приращения функций $a_{(n)}$ и $\xi^k_{(n)}$ на шаге по времени $\tau = \delta t$, n - номер шага.

Продифференцируем детерминант $\Delta^x_\xi = \det(\partial x / \partial \xi)$ по любому параметру l (см. [9], стр. 94):

$$\frac{\partial}{\partial l}\Delta^x_\xi = \frac{1}{2}\Delta^x_\xi \hat{g}^{ij}\frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial l}$$

Подставим сюда (7) и применим (16), тогда получим формулу, которая используется далее

$$\frac{\partial}{\partial l}\Delta^x_\xi = \Delta^x_\xi\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial \xi^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial l}\right) \qquad (17)$$

и ее следствие [6]

$$\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\Delta^x_\xi \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) = 0$$

6. Рассмотрим запись законов сохранения. Пусть в эйлеровой системе координат $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ сформулирован закон сохранения (уравнение баланса) величины $\hat{A}$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} \int_{V_*} \hat{A}\,dV = \int_{S_*} (\hat{B}^m - \hat{A}\hat{u}^m)\hat{n}_m dS + \int_{V_*} \hat{f}\,dV \qquad (18)$$

где $\hat{V}_* \subset V$ - произвольная подобласть, $\hat{S}_*$ - ее поверхность; $\hat{n}_m \hat{Э}^m$ - единичная внешняя нормаль к dS; $\hat{A}$, $\hat{B}^m$ и $\hat{f}$ - тензоры с одинаковым строением индексов, лишь у $\hat{B}^m$ есть дополнительный индекс "m".

Преобразуем левую часть (л.ч.) уравнения (18), используя (17) и теорему Остроградского-Гаусса о преобразовании интегралов

$$л.ч. = \int_{V_*}\left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial t}\right)dV =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\frac{\partial a}{\partial \ell}\bigg|_\xi + \frac{\partial \xi^m}{\partial \ell}\frac{\partial a}{\partial \xi^m}\right) - \frac{\partial a}{\partial \xi^m}\frac{\partial}{\partial \xi^k}\frac{\partial \xi^m}{\partial \ell}.$$

Эта формула полезна и при построении разностных схем

$$\frac{\partial a_{(n+1)}}{\partial \xi^k_{(n+1)}} = \frac{\partial a_{(n)}}{\partial \xi^k_{(n)}} + \frac{\partial \delta a_{(n)}}{\partial \xi^k_{(n)}} - \frac{\partial a_{(n)}}{\partial \xi^m_{(n)}}\frac{\partial \delta \xi^m_{(n)}}{\partial \xi^k_{(n)}} + O(\tau^2),$$

где δa и $\delta \xi^k$ - приращения функций a и ξ^k на шаге по времени $\tau = \delta t$, n - номер шага.

Продифференцируем детерминант $\Delta^x_\xi = det(\partial x/\partial \xi)$ по любому параметру ℓ (см.[9], стр. 94) :

$$\frac{\partial}{\partial \ell}\Delta^x_\xi = \frac{1}{2}\Delta^x_\xi\, \hat{g}^{ij}\frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \ell},$$

подставим сюда (7) и применим (I6), тогда получим формулу, которая используется далее,

$$\frac{\partial}{\partial \ell}\Delta^x_\xi = \Delta^x_\xi\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \ell} - \frac{\partial}{\partial \xi^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial \ell}\right) \qquad (I7)$$

и ее следствие [6]

$$\frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\Delta^x_\xi \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) = 0.$$

6. Рассмотрим запись законов сохранения. Пусть в эйлеровой системе координат $\xi = \xi(x)$ сформулирован закон сохранения (уравнение баланса) величины $\hat{A}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_x \int\limits_{V_*} \hat{A}\, dV = \int\limits_{S_*} (\hat{B}^m - \hat{A}\hat{u}^m)\hat{n}_m\, dS + \int\limits_{V_*} \hat{f}\, dV, \qquad (I8)$$

где $V_* \subset V$ - произвольная подобласть, S_* - ее поверхность; $\hat{n}^m$ - единичная внешняя нормаль к dS ; $\hat{A}$, $\hat{B}^m$ и $\hat{f}$ тензоры с одинаковым строением индексов, лишь у $\hat{B}^m$ есть дополнительный индекс "m".

Преобразуем левую часть (л.ч.) уравнения (I8), используя (I7) и теорему Остроградского-Гаусса о преобразовании интегралов

$$\text{л.ч.} = \int\limits_{V_*}\left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial t}\right)dV =$$

$$= \int\limits_{\breve{V}_*} \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{A}\Delta_{\breve{x}}^{x}\right)d\breve{V} - \int\limits_{S_*} \hat{A}\hat{w}^k \hat{n}_k dS$$

Учитывая (11) и (14), получим интегральную форму закона (18) в подвижных координатах ([10], стр. 56)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_*} \hat{A}dV + \int\limits_{S_*} (\hat{A}\hat{\Omega}^k - \hat{B}^k)\hat{n}_k dS = \int\limits_{V_*} \hat{f}dV \qquad (19)$$

где

$$\hat{\Omega}^k = \hat{u}^k - \hat{w}^k, \quad \hat{u}^k \hat{\mathbf{Э}}_k = u^n \mathbf{e}_n, \quad \hat{w}^k \hat{\mathbf{Э}}_k = w^n \mathbf{e}_n$$

Дифференциальное следствие уравнения (19) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{A}\Delta_{\xi}^{x}) + \frac{\partial}{\partial \xi^k}(\Delta_{\xi}^{x}(\hat{A}\hat{\Omega}^k - \hat{B}^k)) = \Delta_{\xi}^{x}(\hat{A}H + \hat{f}) \qquad (20)$$

где использована формула (17) и обозначено

$$H = -\frac{\partial}{\partial \xi^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial t}$$

Источниковый член с H пропадает при $\xi = \xi(\breve{\mathbf{x}})$ (см. [5,6]). Для случая $\xi = \xi(\mathbf{x})$ уравнение (20) получено в [10, стр. 155].

Пусть $\delta\hat{A}(\breve{\mathbf{x}})$ - произвольный тензор, такой, что свертка $\hat{A}\cdot\delta\hat{A}(\breve{\mathbf{x}})$ - скаляр. Умножим уравнение (20) на $\delta\hat{A}(\breve{\mathbf{x}})$ и проведем операцию свертки. После интегрирования по области V_ξ изменения ξ получим вариационную форму закона (18) в подвижных координатах

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V} \hat{A}\cdot\delta\hat{A}dV + \int\limits_{V} (\hat{B}^k - \hat{A}\hat{\Omega}^k)\cdot\frac{\partial\delta\hat{A}}{\partial\xi^k}dV =$$
$$= \int\limits_{V} \hat{f}\cdot\delta\hat{A}dV + \int\limits_{S} (\hat{B}^k - \hat{A}\hat{\Omega}^k)\cdot\hat{n}_k\delta\hat{A}dS \qquad (21)$$

Исходя из обычной формы законов сохранения (18) (см. [1-3]) в уравнениях (19)-(21) получаем

*) для закона сохранения массы (ρ - плотность массы):

$$\hat{A} = \rho, \quad \hat{B}^k = 0, \quad \hat{f} = 0, \quad \delta\hat{A} = \delta\rho$$

*) для закона сохранения импульса ($\mathbf{F} = F^k\mathbf{e}_k$ - массовые силы)

$$\hat{A} = \rho\mathbf{u}, \quad \hat{B}^k = \hat{\mathbf{Э}}_m\hat{\sigma}^{mk}, \quad \hat{f} = \rho\mathbf{F}, \quad \delta\hat{A} = \delta\mathbf{u}$$

$$= \int\limits_{\check{V}_*} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{A} \Delta^{x}_{\check{x}}) d\check{V} - \int\limits_{\check{S}_*} \hat{A} \hat{w}^k \hat{n}_k d\check{S}.$$

Учитывая (II) и (I4), получаем интегральную форму закона (I8) в подвижных координатах ([I0], стр. 56)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{V_*} \hat{A} dV + \int\limits_{\check{S}_*} (\hat{A} \hat{\Omega}^k - \hat{B}^k) \hat{n}_k d\check{S} = \int\limits_{V_*} f dV, \quad (19)$$

где

$$\hat{\Omega}^k = \hat{u}^k - \hat{w}^k, \quad \hat{u}^k \hat{\bar{\partial}}_k = u^n \bar{e}_n, \quad \hat{w}^k \hat{\bar{\partial}}_k = w^k e_r.$$

Дифференциальное следствие уравнения (I9) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{A} \Delta^{x}_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\Delta^{x}_{\xi} (\hat{A} \hat{\Omega}^k - \hat{B}^k)\right) = \Delta^{x}_{\xi} (\hat{A} H + \hat{f}), \quad (20)$$

где использована формула (I7) и обозначено

$$H = -\frac{\partial}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial t}.$$

Источниковый член с H пропадает при $\xi = \xi(\check{x})$ (см. [5 , 6]). Для случая $\xi = x$ уравнение (20) получено в [I0 , стр. I55].

Пусть $\delta \hat{A}(\check{x})$ – произвольный тензор, такой, что свертка $\hat{A} \delta \hat{A}$ - скаляр. Умножим уравнение (20) на $\delta \hat{A}$ и проведем операцию свертки. После интегрирования по области V_ξ изменения получим вариационную форму закона (I8) в подвижных координатах

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{V} \hat{A} \delta \hat{A} dV + \int\limits_{V} (\hat{B}^k - \hat{A} \hat{\Omega}^k) \frac{\partial \delta \hat{A}}{\partial \xi^k} dV =$$
$$= \int\limits_{V} \hat{f} \delta \hat{A} dV + \int\limits_{\check{S}} (\hat{B}^k - \hat{A} \hat{\Omega}^k) \hat{n}_k \delta \hat{A} d\check{S}. \quad (21)$$

Исходя из обычной формы законов сохранения (I8)(см. [I-3]) в уравнениях (I9)-(2I) получаем

ж) для закона сохранения массы (ϱ - плотность массы)

$$\hat{A} = \varrho, \quad \hat{B}^k = 0, \quad \hat{f} = 0, \quad \delta \hat{A} = \delta \varrho,$$

ж) для закона сохранения импульса ($\bar{F} = F^k \bar{e}_k$ - массовые силы)

$$\hat{A} = \varrho \bar{u}, \quad \hat{B}^k = \hat{\bar{\partial}}_m \hat{\sigma}^{mk}, \quad \hat{f} = \varrho \bar{F}, \quad \delta \hat{A} = \delta \bar{u},$$

*) для закона сохранения энергии

$$\hat{A} = \rho E\,,\;\; \hat{B}^k = -\hat{q}^k + \hat{\sigma}^{ik}\hat{u}_k\,,\;\; \hat{f} = \rho(r + F^i u_i)\,,\;\; \delta\hat{A} = \delta E$$

где $E = (U + \hat{u}^i\hat{u}_i/2)$ - полная энергия единицы массы, U .- внутренняя энергия, $\hat{q}^k\hat{\text{Э}}_k$ - вектор теплового потока, обусловленного теплопроводностью, определяется законом Фурье

$$\hat{q}^k = -\hat{\lambda}^{ik}\partial T/\partial\xi^i$$

где T – абсолютная температура, $\hat{\lambda}^{ik}\hat{\text{Э}}_i\hat{\text{Э}}_k$ - тензор теплопроводности среды ($\hat{\lambda}^{ik}\hat{a}_i\hat{a}_k \ge 0$, $\hat{a}^k\hat{\text{Э}}_k$ - произвольный вектор).

Рассмотрим термодинамику материальной сплошной среды. Примем гипотезу макроскопической определимости [2], утверждающую существование набора внешних термодинамических параметров γ, независимо меняющихся во времени под влиянием внешних воздействий, такого, что термодинамические функции состояния являются однозначными функциями этих параметров. Удобно принять $\gamma = (T, \hat{\varepsilon}_{ik}, \hat{\beta})$, где T, $\hat{\varepsilon}_{ik}$ - термодинамические параметры, $\hat{\beta}$ - параметры нетермомеханической природы (химические реакции, электродинамика и т.д.).

Для лагранжева элемента объема законы термодинамики имеют вид

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + B^\beta\dot{\beta} + \rho\tilde{r} - \nabla\cdot\mathbf{q} \qquad (22)$$

$$\rho T\dot{\eta} = -\nabla\cdot\mathbf{q} + \rho\tilde{r} + D\,, \quad D \ge 0 \qquad (23)$$

где для краткости индексы опущены, $\dot{(...)} \equiv d(...)/dt$; $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $B^\beta\dot{\beta}$ - мощности работы $\boldsymbol{\varepsilon}$ и β процессов соответственно, $\tilde{r}$ - массовые источники тепла, обусловленные немакроскопическими процессами (радиация), $\nabla\cdot\mathbf{q} = (\Delta_\xi^x)^{-1}\partial(\Delta_\xi^x\hat{q}^k)/\partial\xi^k$ - приток тепла за счет теплопроводности, η - удельная энтропия, , D - скорость диссипации работы $\boldsymbol{\varepsilon}$ и β процессов [2]:

$$D = D^\varepsilon\dot{\varepsilon} + D^\beta\dot{\beta} + D^t \qquad (24)$$

где член $D^T\dot{T}$, дописываемый в (24)из соображений типа "принципа равноприсутствия" [3], опущен, для D^t можно записать $D^t = D^t_{(\varepsilon)} + D^\beta_{(\beta)}$. Явное выделение членов для β- процессов в уравнениях (22)-(24) имеет смысл только в том случае, если решается связанная T -ε-β-задача. В этом случае законы сохранения п.6

) для закона сохранения энергии

$$\hat{A} = \varrho E\ , \ \hat{B}^k = -\hat{q}^k + \hat{\sigma}^{ik}\hat{u}_i\ , \ \hat{f} = \varrho(r + F^i u_i),\ \delta\hat{A} = \delta E,$$

где $E = \mathcal{U} + \hat{u}^i\hat{u}_i/2$ - полная энергия единицы массы, $\mathcal{U}$ - внутренняя энергия, $\hat{q}^k\hat{\vartheta}_k$ - вектор теплового потока, обусловленного теплопроводностью, определяется законом Фурье.

$$\hat{q}^k = -\hat{\lambda}^{ik}\partial T/\partial \xi^k,$$

где T - абсолютная температура, $\hat{\lambda}^{ik}\hat{\vartheta}_i\hat{\vartheta}_k$ - тензор теплопроводности среды ($\hat{\lambda}^{ik}\hat{a}_i\hat{a}_k \geq 0$, $\hat{a}_i\hat{\vartheta}^i$ - произвольный вектор).

7. Рассмотрим термодинамику материальной сплошной среды. Примем гипотезу макроскопической определимости [2], утверждающую существование набора внешних термодинамических параметров γ , независимо меняющихся во времени под влиянием внешних воздействий, таких, что термодинамические функции состояния являются однозначными функционалами этих параметров. Удобно принять $\gamma = (T, \hat{\varepsilon}_{ik}, \hat{\beta})$, где T , $\hat{\varepsilon}_{ik}$ - термомеханические параметры, $\hat{\beta}$ - параметры нетермомеханической природы (химические реакции, электродинамика и т.д.).

Для лагранжева элемента объема законы термодинамики имеют вид

$$\varrho\dot{\mathcal{U}} = \sigma\dot{\varepsilon} + B^\beta\dot{\beta} + \varrho\tilde{r} - \nabla\bar{q}, \tag{22}$$

$$\varrho T\dot{\eta} = -\nabla\bar{q} + \varrho\tilde{r} + \mathcal{D},\ \ \mathcal{D} \geq 0, \tag{23}$$

где для краткости индексы опущены; $(...)^{\cdot} \equiv d(...)/dt$; $\sigma\dot{\varepsilon}$ и $B^\beta\dot{\beta}$ - мощности работы ε и β процессов соответственно, $\tilde{r}$ - массовые источники тепла, обусловленные немакроскопическими процессами (радиация), $\nabla\bar{q} = (\Delta^x_\xi)^{-1}\cdot\partial(\Delta^x_\xi\hat{q}^k)/\partial\xi^k$ приток тепла за счет теплопроводности, $\mathcal{D}$ - скорость диссипации работы $\varepsilon - \beta$ процессов [2] :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^\varepsilon\dot{\varepsilon} + \mathcal{D}^\beta\dot{\beta} + \mathcal{D}^t, \tag{24}$$

где член $\mathcal{D}^T\dot{T}$, дописываемый в (24) из соображений типа "принципа равноприсутствия" [3] , опущен, для $\mathcal{D}^t$ можно записать $\mathcal{D}^t = \mathcal{D}^t_{(\varepsilon)} + \mathcal{D}^t_{(\beta)}$. Явное выделение членов для β -процессов в уравнениях (22)-(24) имеет смысл только в том случае, если решается связанная $T - \varepsilon - \beta$-задача. В этом случае законы сохранения п.6

должны быть дополнены уравнениями баланса для β - процессов.

В случае чисто термомеханической задачи участие β - процессов в тепловом балансе учитывается во внешних источниках тепла

$$\rho r = \rho \tilde{r} + D^{\beta}\dot{\beta} + D^{t}_{(\beta)}$$

и притоке нетермомеханических видов энергии [1, стр. 259,242,315]

$$\rho q^{**} = B^{\beta}\dot{\beta} - D^{\beta}\dot{\beta} - D^{t}_{(\beta)}$$

- обратимая часть работы β- процессов. Соответствующую форму законов термодинамики легко записать. Часто полагают $q^{**} = 0$.

Полный дифференциал по времени от любого из функционалов U , η, φ, где $\varphi = U - T\eta$ - свободная энергия, в области достаточной гладкости имеет вид [2]

$$d\psi = \psi_{,T}dT + \psi_{,\varepsilon}d\varepsilon + \psi_{,\beta}d\beta + \psi_{,t}dt \tag{25}$$

Учитывая независимость приращений параметров γ и времени t, функционалы γ-процессов $\psi_{,T}$, $\psi_{,\varepsilon}$, $\psi_{,\beta}$, $\psi_{,t}$ будем рассматривать как частные производные от ψ по актуальным значениям γ и t, определяемые непосредственно соотношениями (25). Величины $\psi_{,T}$, $\psi_{,\varepsilon}$, $\psi_{,\beta}$, $\psi_{,t}$ являются в (25) множителями , но не операторами. Дифференциалы (25), а через них и введенные производные вычисляются с помощью теоремы о дифференцировании сложной функции и с использованием дифференциалов Фреше в нормированных пространствах предысторий γ-процессов, подробности есть в [12, п. 6.1].

Энергетические функционалы МСС могут содержать явно зависимость от времени (ядра релаксации, например), не нарушающую принципа объективности [3].

Не фиксируя определяющих соотношений

$$\hat{\sigma}^{ik} = \hat{\sigma}^{ik}(\gamma),\ \hat{\lambda}^{ik} = \hat{\lambda}^{ik}(\gamma),\ \hat{B}^{\beta} = \hat{B}^{\beta}(\gamma)$$

$$\hat{D}^{\varepsilon} = \hat{D}^{\varepsilon}(\gamma),\ \hat{D}^{\beta} = \hat{D}^{\beta}(\gamma),\ \hat{D}^{t} = \hat{D}^{t}(\gamma) \tag{26}$$

в правых частях которых стоят тензорнозначные функционалы γ-процессов, используя введенное выше определение производных, найдем полезные общие выражения для $\dot{U}$ и $\dot{\eta}$. Из (22)-(24) имеем

.

должны быть дополнены уравнениями баланса для β -процессов.

В случае чисто термомеханической задачи участие β -проце в тепловом балансе учитывается во внешних источниках тепла

$$\varrho r = \varrho \tilde{r} + \mathcal{D}^{\beta}\dot{\beta} + \mathcal{D}^{t}_{(\beta)}$$

и притоке нетермомеханических видов энергии [1], стр.259,242,31

$$\varrho q^{**} = B^{\beta}\dot{\beta} - \mathcal{D}^{\beta}\dot{\beta} - \mathcal{D}^{t}_{(\beta)}$$

- обратимая часть работы β - процессов. Соответствующую форму конов термодинамики легко записать. Часто полагают $q^{**} \approx 0$.

Полный дифференциал по времени от любого из функционалов η, φ, где $\varphi = u - T\eta$ - свободная энергия, в области доста ной гладкости имеет вид [2]:

$$d\psi = \psi_{,T}\, dT + \psi_{,\varepsilon}\, d\varepsilon + \psi_{,\beta}\, d\beta + \psi_{,t}\, dt.$$

Учитывая независимость приращений параметров γ и времени t, ф ционалы γ-процесса $\psi_{,T}$, $\psi_{,\varepsilon}$, $\psi_{,\beta}$, $\psi_{,t}$ будем рассматривать ка частные производные от ψ по актуальным значениям γ и t, опр ляемые непосредственно соотношениями (25). Величины $\psi_{,T}$, $\psi_{,\varepsilon}$, $\psi_{,\beta}$, $\psi_{,t}$ являются в (25) множителями, но не операторами. Диф ренциалы (25), а через них и введенные производные вычисляютс помощью теоремы о дифференцировании сложной функции и с исполь ванием дифференциалов Фреше в нормированных пространствах пред торий γ-процесса, подробности есть в [12], (§6.1)].

Энергетические функционалы МСС могут содержать явно завис мость от времени (ядра релаксации, например), не нарушающую п ципа объективности [3].

Не фиксируя определяющих соотношений

$$\hat{\sigma}^{ik} = \hat{\sigma}^{ik}(\gamma),\quad \hat{\lambda}^{ik} = \hat{\lambda}^{ik}(\gamma),\quad B^{\beta} = B^{\beta}(\gamma),$$

$$\hat{\mathcal{D}}^{\varepsilon} = \hat{\mathcal{D}}^{\varepsilon}(\gamma),\quad \hat{\mathcal{D}}^{\beta} = \hat{\mathcal{D}}^{\beta}(\gamma),\quad \mathcal{D}^{t} = \mathcal{D}^{t}(\gamma),$$

в правых частях которых стоят тензорнозначные функционалы γ-п цесса, используя введенное выше определение производных, найде полезные общие выражения для $\dot{u}$ и $\dot{\eta}$. Из (22)-(24) имеем

$$\rho\dot{\varphi} = -\rho\eta\dot{T} + (\sigma - D^{\varepsilon})\dot{\varepsilon} + (B^{\beta} - D^{\beta})\dot{\beta} - D^{t} \qquad (27)$$

Учитывая (25) и взаимную независимость $\dot{T}$, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\beta}$, получим

$$\varphi_{,T} = -\eta\ ,\ \rho\varphi_{,\varepsilon} = \sigma - D^{\varepsilon}\ ,\ \rho\varphi_{,\beta} = B^{\beta} - D^{\beta}\ ,\ \rho\varphi_{,t} = -D^{t} \qquad (28)$$

Полная временная производная от энтропии равна

$$\dot{\eta} = -(\dot{\varphi_{,T}}) \qquad (29)$$

Меняя порядок дифференцирования и учитывая (27), получаем

$$\rho T\dot{\eta} = \rho c\dot{T} - T(\sigma - D^{\varepsilon})_{,T}\dot{\varepsilon} + T(B^{\beta} - D^{\beta})_{,T}\dot{\beta} - T(D^{t})_{,T} \qquad (30)$$

где

$$c = U_{,T} = T\eta_{,T} = -T(\varphi_{,T})_{,T}$$

теплоемкость при постоянных ε и β, Из (22), (23), (30) имеем

$$\rho\dot{U} = \rho c\dot{T} - (\sigma - D^{\varepsilon} - T(\sigma - D^{\varepsilon})_{,T})\dot{\varepsilon} +$$

$$+(B^{\beta} - D^{\beta} - T(B^{\beta} - D^{\beta})_{,T})\dot{\beta} - (D^{t} - T(D^{t})_{,T}) \qquad (31)$$

Из (22) и (30) или из (23) и (31) следует уравнение теплопроводности (дифференциальная лагранжева форма)

$$\rho c\dot{T} = \rho\tilde{r} - \nabla\mathbf{q} + D_{*}$$

где

$$D_{*} = D + T(\sigma - D^{\varepsilon})_{,T}\dot{\varepsilon} + T(B^{\beta} - D^{\beta})_{,T}\dot{\beta} - T(D^{t})_{,T}$$

приток тепла за счет ε-β-процессов. Сходный результат имеется в [3, стр. 65]. Анализ частных случаев для различных газообразных, жидких и твердых деформируемых сред показал, что выражения (28)-(33) прекрасно согласуются с известными данными.

Для многих сред более удобен такой выбор термодинамических параметров $\tilde{\gamma} = (T, \rho, \varepsilon^{'}_{ij}, \beta)$, где $\varepsilon^{'}_{ij}$ - девиатор деформаций. Учитывая связь $\dot{\rho}/\rho + \hat{g}^{ij}\hat{e}_{ij} = 0$ (сохранение массы), видим, что $\dot{\gamma}$ и $\dot{\tilde{\gamma}}$ связаны взаимно однозначно, поэтому наборы γ и $\tilde{\gamma}$ эквивалентны.

При $c = const$ (в общем случае $c = c(\gamma)$) для уравнения теплопроводности в уравнениях баланса (19)-(21) имеем

$$\hat{A} = \rho cT\ ,\ \hat{B}^{k} = -\hat{q}^{k}\ ,\ \hat{f} = \rho\tilde{r} + D_{*}\ ,\ \delta\hat{A} = \delta T$$

8. Рассмотрим подробнее определяющие соотношения (26). При-

$$\rho\dot{\varphi} = -\rho\eta\dot{T} + (\sigma - \mathcal{D}^{\varepsilon})\dot{\varepsilon} + (B^{\beta} - \mathcal{D}^{\beta})\dot{\beta} - \mathcal{D}^{t}, \tag{27}$$

Учитывая (25) и взаимную независимость $\dot{T}$, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\beta}$, получим

$$\varphi_{,T} = -\eta; \ \rho\varphi_{,\varepsilon} = \sigma - \mathcal{D}^{\varepsilon}; \ \rho\varphi_{,\beta} = B^{\beta} - \mathcal{D}^{\beta}; \ \rho\varphi_{,t} = -\mathcal{D}^{t}. \tag{28}$$

Полная временная производная от энтропии равна

$$\dot{\eta} = -(\varphi_{,T})^{\cdot}. \tag{29}$$

Меняя порядок дифференцирования и учитывая (27), получаем

$$\rho T\dot{\eta} = \rho c\dot{T} - T(\sigma - \mathcal{D}^{\varepsilon})_{,T}\dot{\varepsilon} - T(B^{\beta} - \mathcal{D}^{\beta})_{,T}\dot{\beta} + T(\mathcal{D}^{t})_{,T} \tag{30}$$

где

$$c = u_{,T} = T\eta_{,T} = -T\varphi_{,T,T}$$

теплоемкость при постоянных ε и β. Из (22),(23),(30) имеем

$$\rho\dot{u} = \rho c\dot{T} + (\sigma - \mathcal{D}^{\varepsilon} - T(\sigma - \mathcal{D}^{\varepsilon})_{,T})\dot{\varepsilon} +$$
$$+ (B^{\beta} - \mathcal{D}^{\beta} - T(B^{\beta} - \mathcal{D}^{\beta})_{,T})\dot{\beta} - (\mathcal{D}^{t} - T(\mathcal{D}^{t})_{,T}). \tag{31}$$

Из (22) и (30) или из (23) и (31) следует уравнение теплопроводности (дифференциальная лагранжева форма):

$$\rho c\dot{T} = \rho\tilde{r} - \nabla\bar{q} + \mathcal{D}_{*}, \tag{32}$$

где

$$\mathcal{D}_{*} = \mathcal{D} + T(\sigma - \mathcal{D}^{\varepsilon})_{,T} + T(B^{\beta} - \mathcal{D}^{\beta})_{,T} - T(\mathcal{D}^{t})_{,T} \tag{33}$$

приток тепла за счет $\varepsilon - \beta$ процессов. Сходный результат имеется в [3, стр.65]. Анализ частных случаев для различных газообразных, жидких и твердых деформируемых сред показал, что выражения (28)-(33) прекрасно согласуются с известными данными.

Для многих сред более удобен такой набор термодинамических параметров $\tilde{\gamma} = (T, \rho, \hat{\varepsilon}'_{ij}, \hat{\beta})$, где $\hat{\varepsilon}'_{ij}$ - девиатор деформаций. Учитывая связь $\dot{\rho}/\rho + \hat{g}^{ik}\dot{\hat{e}}_{ik} = 0$ (сохранение массы), видим, что $\dot{\gamma}$ и $\dot{\tilde{\gamma}}$ связаны взаимно однозначно, поэтому наборы γ и $\tilde{\gamma}$ эквивалентны.

При $c = const$ (в общем случае $c = c(\gamma)$) для уравнения теплопроводности в уравнениях баланса (19)-(21) имеем

$$\hat{A} = \rho c T, \ \hat{B}^{k} = -\hat{q}^{k}, \ \hat{f} = \rho\tilde{r} + \mathcal{D}_{*}, \ \delta\hat{A} = \delta T.$$

8. Рассмотрим подробнее определяющие соотношения (26). При-

мем гипотезу о параметрах состояния [1-3]: существует набор μ функционалов γ-процесса, значения которых полностью определяют состояние лагранжевого элемента объема. При этом правые части определяющих соотношений (26) являются однощначными функциями от μ.

$$\hat{\sigma}^{ik} = \hat{\sigma}^{ik}(\mu),\ \hat{\lambda}^{ik} = \hat{\lambda}^{ik}(\mu),\ \hat{B}^{\beta} = \hat{B}^{\beta}(\mu)$$

$$\hat{D}^{\varepsilon} = \hat{D}^{\varepsilon}(\mu),\ \hat{D}^{\beta} = \hat{D}^{\beta}(\mu),\ \hat{D}^{t} = \hat{D}^{t}(\mu) \qquad (35)$$

Например, для сред с конечным числом параметров состояния роль μ играют: *) актуальные значения термодинамических параметров состояния γ, *) актуальные скорости $D\gamma/dt$ и *) функционалы χ, определяемые дифференциальными неголономными связями

$$\frac{D\chi}{dt} = \chi^T \dot{T} + \chi^{\varepsilon}\hat{e} + \chi^{\beta}\frac{D\beta}{dt} + \chi^t \qquad (36)$$

где $\chi^T, \chi^{\varepsilon}, \chi^{\beta}, \chi^t$ - однозначные функции параметров состояния. В частности, χ это пластические деформации, параметры упрочнения.

Учитывая (35) в соотношениях (27), (30), (31), после (численного) интегрирования можно получить зависимости $\psi(\mu)$: $\psi \sim \varphi, \eta, U$. Однако, существование выражений $\psi(\mu)$ в конечном виде в общем случае ниоткуда не следует, так как связи (27), (30), (31) могут быть неголономными. Эти связи устанавливают соответствие между структурой дифференциалов основных термодинамических функций и определяющими соотношениями, которое должно выполняться в термодинамически корректных моделях сплошной среды.

9. Рассмотрим уравнения для координатной среды. Эта среда является сплошной, обратимо деформируемой, сопротивляющейся сдвигу и объемной деформации, сгущающейся в областях больших градиентов решения задачи МСС для материальной среды и удовлетворяющей, возможно, некоторым дополнительным требованиям.

Это описание свойств координатной среды (см. [5, стр.69,70]) очень похоже на описание свойств обычной термоупругой среды, только вместо температуры надо применить некоторую полунорму мем гипотезу о параметрах состояния [I-3]: существует набор μ функционалов γ-процесса, значения которых полностью определяют состояние лагранжева элемента объема. При этом правые части определяющих соотношений (26) являются однозначными функциями от μ

$$\hat{\sigma}^{ij} = \hat{\sigma}^{ij}(\mu), \quad \hat{\lambda}^{ij} = \hat{\lambda}^{ij}(\mu), \quad \hat{B}^{\beta} = \hat{B}^{\beta}(\mu),$$
$$\hat{\mathfrak{D}}^{\varepsilon} = \hat{\mathfrak{D}}^{\varepsilon}(\mu), \quad \hat{\mathfrak{D}}^{\beta} = \hat{\mathfrak{D}}^{\beta}(\mu), \quad \hat{\mathfrak{D}}^{t} = \hat{\mathfrak{D}}^{t}(\mu). \tag{35}$$

Например, для сред с конечным числом параметров состояния роль μ играют: ж) актуальные значения термодинамических параметров состояния γ, ж) актуальные скорости $D\gamma/Dt$ и ж) функционалы χ, определяемые дифференциальными неголономными связями

$$\frac{D\chi}{Dt} = \chi^{T}\dot{T} + \chi^{\beta}\frac{D\beta}{Dt} + \chi^{\varepsilon}\hat{e} + \chi^{t}, \tag{36}$$

где $\chi^{T}, \chi^{\beta}, \chi^{\varepsilon}, \chi^{t}$ - однозначные функции параметров состояния. В частности, χ - это пластические деформации, параметры упрочнения.

Учитывая (35) в соотношениях (27),(30),(31), после (численного) интегрирования можно получить зависимости $\Psi(\mu)$; $\Psi \sim \varphi, \eta, \mathcal{U}$. Однако существование выражений $\Psi(\mu)$ в конечном виде в общем случае ниоткуда не следует, так как связи (27),(30),(31) могут быть неголономными. Эти связи устанавливают соответствие между структурой дифференциалов основных термодинамических функций и определяющими соотношениями, которое должно выполняться в термодинамически корректных моделях сплошной среды.

9. Рассмотрим уравнения для координатной среды. Эта среда является: сплошной, обратимо деформируемой, сопротивляющейся сдвигу и объемной деформации, сгущающейся в областях больших градиентов решения задачи МСС для материальной среды и удовлетворяющей, возможно, некоторым дополнительным требованиям.

Это описание свойств координатной среды (см.[5 , стр. 69,70] очень похоже на описание свойств обычной термоупругой среды, только вместо температуры надо применить некоторую полунорму решения задачи МСС для материальной среды.

Сформулируем две системы уравнений для координатной среды: первую в базисе актуальной конфигурации, вторую в базисе подвижно-координатной конфигурации

$$\breve{\mathbf{Э}}_i = \frac{\partial x^n}{\partial \xi^i}\mathbf{e}_n, \quad \breve{\mathbf{Э}}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n}\mathbf{e}_n \tag{37}$$

Первая система уравнений отмечена крышками "$\widehat{(...)}$", вторая галочками "$\breve{(...)}$".

Введем тензоры деформаций и напряжений для координатной среды

*) в базисе $\hat{\mathbf{Э}}_i$ (аналоги тензоров Альманси и Коши)

$$dl^2 - d\breve{l}^{\,2} = 2\hat{\gamma}_{ik} d\xi^i d\xi^k, \quad \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{ik}\hat{\mathbf{Э}}^i\hat{\mathbf{Э}}^k \tag{38}$$

$$d\boldsymbol{\pi} = \hat{\alpha}^{ik}\hat{\mathbf{Э}}_k \hat{n}_i dS, \quad \hat{\alpha} = \hat{\alpha}^{ij}\hat{\mathbf{Э}}_i\hat{\mathbf{Э}}_j \tag{39}$$

*) в базисе $\breve{\mathbf{Э}}_i$ (аналоги тензоров Грина и Кирхгоффа):

$$dl^2 - d\breve{l}^{\,2} = 2\breve{\gamma}_{ik} d\xi^i d\xi^k, \quad \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{ik}\breve{\mathbf{Э}}^i\breve{\mathbf{Э}}^k \tag{40}$$

$$d\boldsymbol{\pi} = \breve{\alpha}^{ik}\breve{\mathbf{Э}}_k \breve{n}_i d\breve{S}, \quad \breve{\alpha} = \breve{\alpha}^{ij}\breve{\mathbf{Э}}_i\breve{\mathbf{Э}}_j \tag{41}$$

В этих формулах

$$\breve{g}_{ij} = \frac{\partial x^n}{\partial \xi^i}\frac{\partial x_n}{\partial \xi^j}$$

метрика подвижно-координатной конфигурации, $d\breve{l}^{\,2} = \breve{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j$ - элемент длины в подвижно-координатной конфигурации, $d\boldsymbol{\pi}$, - сила, действующая в координатной среде на площадке $d\breve{S}$, dS и $d\breve{S}$, а также dl и $d\breve{l}$ связаны отображением (2).

Подвижные координаты $\breve{\mathbf{x}}$ играют для координатной среды роль лагранжевых переменных, поэтому уравнения движения в обоих системах имеют лагранжеву форму

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_\xi^x R\mathbf{w}) = \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\Delta_\xi^x \hat{\alpha}^{ik}\hat{\mathbf{Э}}_i\right) + \Delta_\xi^x \boldsymbol{\psi} \tag{42}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_\xi^{\breve{x}} \breve{R}\mathbf{w}) = \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\Delta_\xi^{\breve{x}} \breve{\alpha}^{ik}\breve{\mathbf{Э}}_i\right) + \Delta_\xi^{\breve{x}} \breve{\boldsymbol{\psi}} \tag{43}$$

решения задачи МСС для материальной среды.

Сформулируем две системы уравнений для координатной среды: первую в базисе актуальной конфигурации, вторую в базисе подвижно-координатной конфигурации

$$\check{\vartheta}_i = \frac{\partial \check{x}^n}{\partial \xi^i}\bar{e}_n\,, \quad \check{\vartheta}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n}\bar{e}^n. \qquad (37)$$

Первая система уравнений отмечена крышками $\wedge$,вторая галочками $\vee$.

Введем тензоры деформаций и напряжений для координатной среды

а) в базисе $\hat{\vartheta}_i$ (аналоги тензоров Альманси и Коши):

$$dl^2 - d\check{l}^2 = 2\hat{\gamma}_{ik}\,d\xi^i d\xi^k\,, \quad \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{ik}\hat{\vartheta}^i\hat{\vartheta}^k\,, \qquad (38)$$

$$d\bar{\pi} = \hat{\alpha}^{ik}\hat{\vartheta}_k\hat{n}_i\,dS\,, \quad \hat{\alpha} = \hat{\alpha}^{ik}\hat{\vartheta}_i\hat{\vartheta}_k\,, \qquad (39)$$

б) в базисе $\check{\vartheta}_i$ (аналоги тензоров Грина и Кирхгоффа):

$$dl^2 - d\check{l}^2 = 2\check{\gamma}_{ik}\,d\xi^i d\xi^k\,, \quad \check{\gamma} = \check{\gamma}_{ik}\check{\vartheta}^i\check{\vartheta}^k\,, \qquad (40)$$

$$d\bar{\pi} = \check{\alpha}^{ik}\hat{\vartheta}_k\check{n}_i\,d\check{S}\,, \quad \check{\alpha} = \check{\alpha}^{ik}\check{\vartheta}_i\check{\vartheta}_k\,. \qquad (41)$$

В этих формулах

$$\check{g}_{ik} = \frac{\partial \check{x}^n}{\partial \xi^i}\frac{\partial \check{x}_n}{\partial \xi^k}$$

метрика подвижно-координатной конфигурации, $d\check{l}^2 = \check{g}_{ik}\,d\xi^i d\xi^k$; $d\check{l}$ - элемент длины в подвижно-координатной конфигурации, $d\bar{\pi}$ - сила, действующая в координатной среде на площадке dS , dS и $d\check{S}$, а также dl и $d\check{l}$ связаны отображением (2) .

Подвижные координаты $\check{x}$ играют для координатной среды роль лагранжевых переменных, поэтому уравнения движения координатной среды в обеих системах имеют лагранжеву форму

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta^{x}_{\xi} R\,\bar{w}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\Delta^{x}_{\xi}\hat{\alpha}^{ik}\hat{\vartheta}_i\right) + \Delta^{x}_{\xi}\bar{\varphi}\,, \qquad (42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta^{\check{x}}_{\xi}\check{R}\,\bar{w}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\Delta^{\check{x}}_{\xi}\check{\alpha}^{ik}\hat{\vartheta}_i\right) + \Delta^{\check{x}}_{\xi}\check{\varphi}\,, \qquad (43)$$

где R и $\breve{R}$ - операторы, характеризующие инерцию координатной среды, $\boldsymbol{\psi}$ и $\breve{\boldsymbol{\psi}}$ - объемные силы в координатной среде. Чтобы замкнуть системы уравнений (38), (39), (42) и (40), (41), (43) надо определить реологию координатной среды.

Покажем на примерах, что многие уравнения, применяемые для построения координатных сеток и для управления подвижными координатами, можно интерпретировать как частные случаи записанной системы уравнений, отвечающие различным реологиям. Примеры :

*) Если в двумерном случае для уравнений первой системы положить

$$\xi = \breve{x}\,,\ R = 0\,,\ \boldsymbol{\psi} = 0$$

и принять следующую реологию:

$$\hat{\alpha}^{11} = L\ ,\ \hat{\alpha}^{22} = 1/L\ ,\ \hat{\alpha}^{12} = 0\,,\ L = (\hat{g}_{11}/\hat{g}_{22})^{1/2}$$

то получим уравнения "конформных" отображений (алгоритм III) из работы [4, стр. 234,235].

*) Если в уравнениях второй системы положить

$$w^2 = w^3 = 0\,,\ Rw^1 = (\Delta_{\xi}^{\breve{x}})^{-1}\int_0^t w^1 dt\,,\quad \xi = \breve{x} \tag{44}$$

и принять следующую реологию (ε_* - ненулевая константа):

$$\breve{\alpha}^{ij} = (\varepsilon_* + \theta)\breve{g}^{ij}$$

то получим уравнение для управления подвижной сеткой, сгущающейся по одной координате, из работы [5, стр. 71, 187]. Здесь θ - некоторая полунорма решения задачи МСС для материальной среды

$$\theta = \sum_n a_{(n)} \left(\frac{\partial f_{(n)}}{\partial \xi^i} \frac{\partial f_{(n)}}{\partial \xi^j} \hat{g}_{ij} \right)^{b_{(n)}/2}$$

где $a_{(n)}$ и $b_{(n)}$ - положительные константы, $f_{(n)}$ - характерные компоненты решения уравнений материальной среды.

Полагая $R = \breve{R} = 0$ имеем безинерционную координатную среду, которая будет обладать наилучшими адаптационными свойствами, но требует применения неявных схем расчета движения координат. Определение инерции в виде (44) позволяет избежать нежелательных волновых процессов в координатной среде, оставляя возможность применения явных схем расчета.

где R и $\check{R}$ – операторы, характеризующие инерцию координатной среды, $\bar{\varphi}$ и $\check{\bar{\varphi}}$ – объемные силы в координатной среде. Чтобы замкнуть системы уравнений (38),(39),(42) и (40),(4I),(43) надо определить реологию координатной среды.

Покажем на примерах, что многие уравнения, применяемые для построения координатных сеток и для управления подвижными координатами, можно интерпретировать как частные случаи записанной системы уравнений, отвечающие различным реологиям. Примеры:

ж) Если в двумерном случае для уравнений первой системы положить $\xi=\check{x}, R=0, \bar{\varphi}=0$ и принять следующую реологию:

$$\hat{\alpha}^{11}=L,\ \hat{\alpha}^{22}=1/L,\ \hat{\alpha}^{12}=0,\ L=(\hat{g}_{11}/\hat{g}_{22})^{1/2},$$

то получим уравнения "конформных" отображений (алгоритм III) из работы [4 , стр. 234,235].

ж) Если в уравнениях второй системы положить

$$W^2=W^3=0,\ \check{R}W^1=(\Delta_{\xi}^{\check{x}})^{-1}\int_0^t W^1 dt,\ \xi=\check{x}, \tag{44}$$

и принять следующую реологию (ε_* – ненулевая константа):

$$\check{\alpha}^{ij}=(\varepsilon_*+\theta)\check{g}^{ij},$$

то получим уравнение для управления подвижной сеткой сгущающейся по одной координате из работы [5 , стр. 7I,I87]. Здесь θ – некоторая полунорма решения задачи МСС для материальной среды

$$\theta=\sum_n a_{(n)}\left(\frac{\partial f_{(n)}}{\partial \xi^i}\frac{\partial f_{(n)}}{\partial \xi^j}\hat{g}^{ij}\right)^{b_{(n)}/2},$$

где $a_{(n)}$ и $b_{(n)}$ – положительные константы, $f_{(n)}$ – характерные компоненты решения уравнений материальной среды.

Полагая $R=\check{R}=0$, имеем безинерционную координатную среду, которая будет обладать наилучшими адаптационными свойствами, но требует применения неявных схем расчета движения координат. Определение инерции в виде (44) позволяет избежать нежелательных волновых процессов в координатной среде, оставляя возможность применения явных схем расчета.

Можно ожидать, что хорошие результаты для целей построения координатных сеток и управления ими даст реология "термоупругости" следующего простого вида:

$$\hat{\alpha}^{ij} = (\lambda \hat{g}^{ik} \hat{g}^{mn} + 2\mu \hat{g}^{im} \hat{g}^{kn}) \hat{\gamma}_{mn} + \hat{g}^{ik} \theta \tag{45}$$

$$\breve{\alpha}^{ij} = (\lambda \breve{g}^{ik} \breve{g}^{mn} + 2\mu \breve{g}^{im} \breve{g}^{kn}) \breve{\gamma}_{mn} + \breve{g}^{ik} \theta \tag{46}$$

где λ и μ коэффициенты упругости координатной среды. Если принять эту реологию, то при

$$\xi = \breve{x},\ R = 0,\ \boldsymbol{\psi} = 0,\ \theta = 0,\ \hat{g}_{ij} >> \breve{g}_{ij}$$

уравнения первой системы соответствуют уравнениям для квазиконформных отображений (см. [4, стр. 232, 237-242]), а уравнения второй системы соответствуют обращенным уравнениям Лапласа (см. [4, стр. 228]).

Объемные координатные силы $\boldsymbol{\psi}$ и $\breve{\boldsymbol{\psi}}$ можно применить для введения штрафа за "нелагранжевость" ("неэйлеровость") координатной среды

$$\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u} - \mathbf{w}) / \tau_*, \quad \breve{\boldsymbol{\psi}} = (\mathbf{u} - \mathbf{w}) / \tau_*$$

где τ_* - малая положительная константа.

Во многих случаях адаптацию координатной среды к границам подвижной области V и управление ее движением с целью не допустить нежелательного искажения координатных линий (ячеек сетки) можно реализовать на основе простых геометрических соображений без решения каких-либо дифференциальных уравнений [4,7,8].

10. Рассмотрим в общем виде систему уравнений и краевую задачу для координатной и материальной сред.

Выделим часть зависимых переменных в качестве основных искомых функций

$$\mathbf{\Gamma} = (x, w, \rho, u, T, \chi, \overset{o}{x}) \tag{47}$$

где первые две характеризуют координатную среду, остальные – материальную.. Анализируя соотношения общей задачи, можно увидеть, Можно ожидать, что хорошие результаты для целей построения координатных сеток и управления ими даст реология "термоупругости" следующего простого вида:

$$\hat{\alpha}^{ik} = (\lambda \hat{g}^{ik} \hat{g}^{mn} + 2\mu \hat{g}^{im} \hat{g}^{kn}) \hat{\gamma}_{mn} + \hat{g}^{ik}\theta, \tag{45}$$

$$\check{\alpha}^{ik} = (\lambda \check{g}^{ik} \check{g}^{mn} + 2\mu \check{g}^{im} \check{g}^{kn}) \check{\gamma}_{mn} + \check{g}^{ik}\theta, \tag{46}$$

где λ и μ - коэффициенты упругости координатной среды. Если принять эту реологию, то при

$$\xi = \check{x}, \; R=0, \; \bar{\varphi}=0, \; \theta=0, \; \hat{g}_{ij} \gg \check{g}_{ij}$$

уравнения первой системы соответствуют уравнениям для квазиконформных отображений (см. [4 , стр. 232, 237-242]) , а уравнения второй системы соответствуют обращенным уравнениям Лапласа (см. [4 , стр. 228]) .

Объемные координатные силы $\bar{\varphi}$, $\check{\bar{\varphi}}$ можно применить для введения штрафа за "нелагранжевость" ("неэйлеровость") координатной среды

$$\bar{\varphi} = (\bar{u} - \bar{w})/\tau_*, \; \dot{\check{\bar{\varphi}}} = (\bar{u} - \bar{w})/\tau_*$$

где τ_* - малая положительная константа.

Во многих случаях адаптацию координатной среды к границам подвижной области V и управление ее движением с целью не допустить нежелательного искажения координатных линий (ячеек сетки) можно реализовать на основе простых геометрических соображений без решения каких-либо дифференциальных уравнений [4,7,8].

10. Рассмотрим в общем виде систему основных уравнений и краевую задачу для координатной и материальной сред.

Выделим часть зависимых переменных в качестве основных искомых функций

$$\Gamma = (x, \bar{w}, \rho, \bar{u}, T, \hat{\chi}, \mathring{x}), \tag{47}$$

где первые две характеризуют координатную среду, остальные - материальную. Анализируя соотношения общей задачи, можно увидеть, что все остальные искомые функции выражаются через основные и их первые пространственные производные для каждого фиксированного момента времени. Ясно, что набор основных искомых функций определен "с точностью до взаимно однозначной замены основных искомых функций".

Основными уравнениями являются:

*) для координатной среды: уравнения (5) и уравнения движения (42) или (43),

*) для материальной среды: закон сохранения массы (п.6), закон сохранения импульса (п.6), уравнение теплопроводности (п.7), законы сохранения (баланса) для β-процессов, которые здесь не конкретизированы, уравнения (36) для функционалов γ-процесса, уравнение (12) для функции $\overset{o}{\mathbf{x}}$.

Остальные соотношения общей задачи рассматриваются как вспомогательные , позволяющие выразить все искомые функции через основные и их первые пространственные производные.

В тех случаях, когда начальная конфигурация не участвует в постановке задачи, функции $\overset{o}{\mathbf{x}}$ из списка (47) исключаются и уравнения (12) отбрасываются. Если это требуется, то при этом в число основных искомых функций вводятся деформации и уравнения (13) для их определения. Вместо деформаций можно ввести дисторсию $F_j^k = \partial \mathbf{x}^k / \overset{o}{\mathbf{x}}{}^j$ и соответствующие уравнения (см. [6]).

Для построения консервативных методов уравнение теплопроводности надо заменить уравнением для полной энергии (п.6) и дополняющим его энергетическим уравнением состояния (31), что особенно удобно, если последнее голономно.

Основные уравнения для материальных сред дифференциального типа представимы в форме уравнений баланса (19)-(21). При этом

*) для уравнений (36) имеем

$$\hat{A} = \rho\hat{\chi}\,, \quad \hat{B}^m = 0\,, \quad \hat{f} = \rho(\chi^T \dot{T} + \chi^\varepsilon \hat{e} + \chi^\beta \frac{D\beta}{dt} + \chi^t - \hat{z})\,, \quad \delta\hat{A} = \delta\chi$$

где $\hat{z}$ - добавочные члены в выражении для объективной временной что все остальные искомые функции выражаются через основные и их первые пространственные производные для каждого фиксированного момента времени. Ясно, что набор основных искомых функций определен "с точностью до взаимно однозначной замены основных искомых функций".

Основными уравнениями являются:

ж) для координатной среды: уравнения (5) и уравнения движения (42) или (43) ,

ж) для материальной среды: закон сохранения массы (п.6) ; закон сохранения импульса (п.6)), уравнение теплопроводности (п.7) ; законы сохранения (баланса) для $\hat{\beta}$-процессов, которые здесь не конкретизированы; уравнения (36) для функционалов γ-процесса; уравнения (I2) для функций $\overset{\circ}{x}$.

Остальные соотношения общей задачи рассматриваются как вспомогательные, позволяющие выразить все искомые функции через основные и их первые пространственные производные.

В тех случаях, когда начальная конфигурация не участвует в постановке задачи, функции $\overset{\circ}{x}$ из списка (47) исключаются и уравнения (I2) отбрасываются. Если это требуется, то при этом в число основных искомых функций вводятся деформации и уравнения (I3) для их определения. Вместо деформаций можно ввести дисторсию $F^{k}_{\alpha} = \partial x^{k}/\partial \overset{\circ}{x}{}^{\alpha}$ и соответствующие уравнения (см.[6]).

Для построения консервативных методов уравнение теплопроводности надо заменить уравнением для полной энергии (п.6) и дополняющим его дифференциальным энергетическим уравнением состояния (3I), что особенно удобно, если последнее голономно.

Основные уравнения для материальных сред дифференциального типа представимы в форме уравнений баланса (I9)-(2I) . При этом ж)для уравнений (36) имеем

$$\hat{A} = \rho\hat{\chi}, \ \hat{B}^{m} = 0, \ \hat{f} = \rho\left(\hat{\chi}^{ik}_{\varepsilon}\hat{e}_{ik} + \hat{\chi}^{\beta}\frac{D\beta}{Dt} + \hat{\chi}^{t} - \hat{z}\right), \ \delta\hat{A} = \delta\hat{\chi},$$

где $\hat{z}$ - добавочные члены в выражении для объективной временной производной от $\hat{\chi}$:

$$\hat{z} = \frac{D\hat{\chi}}{dt} - \frac{d\hat{\chi}}{dt}$$

*) для уравнений (12) имеем

$$\hat{A} = \rho \overset{o}{\mathbf{x}}, \quad \hat{B}^m = 0, \quad \hat{f} = 0, \quad \delta\hat{A} = \delta\overset{o}{\mathbf{x}}$$

*) для уравнений (13) имеем

$$\hat{A} = \rho\hat{\varepsilon}_{ij}, \quad \hat{B}^m = 0, \quad \hat{f} = \rho[\hat{e}_{ij} - \hat{\varepsilon}_{il}\frac{\partial\hat{u}^l}{\partial\xi^i} - \hat{\varepsilon}_{lj}\frac{\partial\hat{u}^l}{\partial\xi^j}], \quad \delta\hat{A} = \delta\hat{\varepsilon}^{ij}$$

*) для уравнений дисторсии имеем (см. [6])

$$\hat{A} = \rho F_l^m, \quad \hat{B}^m = 0, \quad \hat{f} = 0, \quad \delta\hat{A} = \delta F_m^l$$

Область решения такова

$$Ц = \{(\breve{x}, t) : \breve{x} \in \breve{V}, t \geq 0\}$$

Основные уравнения дополняются начальными условиями

$$\mathbf{\Gamma}\big|_{e=0} = \mathbf{\Gamma}^0(\breve{x}), \quad \breve{x} \in \breve{V} \tag{48}$$

Граничные условия для уравнений координатной среды ставятся так же, как для уравнений теории упругости при лагранжевом подходе: на части границы $\breve{S}$ области $\breve{V}$ при $t \geq 0$ задаются ограничения на скорости $\mathbf{w}$ или непосредственно на координаты x^i (главные условия), а на остальной части границы задаются ограничения на соответствующие проекции вектора координатных напряжений (естественные условия).

Граничные условия для уравнений материальной среды также имеют вид главных граничных условий (ограничения на величины $\hat{A}$, для которых сформулированы уравнения баланса)

$$\hat{A} = A_з(\breve{x}, t), \quad \breve{x} \in \breve{S}_A \subset \breve{S}, \quad t \geq 0 \tag{49}$$

или естественных граничных условий (ограничений на соответствующие потоки $\breve{B}^k\breve{n}_k$):

$$\breve{B}^k\breve{n}_k = B_n(\mathbf{\Gamma}, \breve{x}, t), \qquad \breve{x} \in \breve{S}_B = \breve{S} \setminus \breve{S}_A, \quad t \geq 0 \tag{50}$$

где $A_з$, и B_n - заданные функции, B_n может содержать первые производные от основных искомых функций.

производной от $\hat{\chi}$: $\hat{z} = \frac{D\hat{\chi}}{Dt} - \frac{d\hat{\chi}}{dt}$;

в) для уравнений (I2) имеем

$$\hat{A} = \rho\overset{\circ}{\hat{x}}, \ \hat{B}^{\kappa} = 0, \ \hat{f} = 0, \ \delta\hat{A} = \delta\overset{\circ}{\hat{x}};$$

г) для уравнений (I3) имеем

$$\hat{A} = \rho\hat{\varepsilon}_{ij}, \ \hat{B}^{\kappa} = 0, \ \hat{f} = \rho\left[\hat{e}_{ij} - \hat{\varepsilon}_{i\ell}\frac{\partial\hat{v}^{\ell}}{\partial\xi^{j}} - \varepsilon_{\ell j}\frac{\partial\hat{v}^{\ell}}{\partial\xi^{i}}\right], \ \delta\hat{A} = \delta\hat{\varepsilon}^{ij};$$

д) для уравнений дисторсии имеем (см. [6])

$$\hat{A} = \rho F^{m}_{\ell}, \ \hat{B}^{\kappa} = 0, \ \hat{f} = 0, \ \delta\hat{A} = \delta F^{\ell}_{m}.$$

Область решения такова

$$Ц = \{(\hat{x}, t) : \hat{x} \in \check{V}, \ t \geq 0\}.$$

Основные уравнения дополняются начальными условиями

$$\Gamma\big|_{t=0} = \Gamma_0(\check{x}), \ \check{x} \in \check{V}. \qquad (48)$$

Граничные условия для уравнений координатной среды ставятся так же, как для уравнений теории упругости при лагранжевом подходе: на части границы $\check{S}$ области $\check{V}$ при $t \geq 0$ задаются ограничения на скорости $\overline{W}$ или непосредственно на координаты x^{i} (главные условия), а на остальной части границы задаются ограничения на соответствующие проекции вектора координатных напряжений (естественные условия).

Граничные условия для уравнений материальной среды также имеют вид главных граничных условий (ограничений на величины $\hat{A}$, для которых сформулированы уравнения баланса)

$$\hat{A} = A_{з}(\check{x}, t), \ \check{x} \in \check{S}_{A} \subset \check{S}, \ t \geq 0, \qquad (49)$$

или естественных граничных условий (ограничений на соответствующие потоки $\hat{B}^{\kappa}\hat{n}_{k}$):

$$\hat{B}^{\kappa}\hat{n}_{\kappa} = B_{n}(\Gamma, \check{x}, t), \ \check{x} \in \check{S}_{B} = \check{S} \setminus \check{S}_{A}, \ t \geq 0; \qquad (50)$$

где $\hat{A}$ и B_{n} - заданные функции, B_{n} может содержать первые производные от основных искомых функций.

При использовании вариационных уравнений (21) условия (50) непосредственно включаются в эти уравнения.

Конкретный вид функций $A_з$, и B_n, а также число необходимых на данном участке границы $\breve{S}$ условий (49), (50) для основных уравнений определяются следующими факторами:

*) Конкретным содержанием задачи.

*) Типом границ: $\Omega_n = 0$ - "лагранжева" граница ($\Omega_n = (u^k - w^k)n_k$ - проекция скорости движения материальной среды относительно подвижных координат на нормаль к границе), $\Omega_n < 0$ - входная "эйлерова" граница, $\Omega_n > 0$ - выходная "эйлерова" граница.

*) Присутствием в уравнении баланса потоков $B^m \neq 0$. При численном решении члены $B^m \neq 0$ могут появляться во всех уравнениях баланса (искусственная или аппроксимационная вязкость).

*)Величиной скорости Ω_n .в сравнении со скоростью звука.

Наиболее прост случай "лагранжевых" границ. Если $B^m = 0$, то соответствующее уравнение баланса на "лагранжевой" границе превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение по времени. Для такого уравнения граничных условий не требуется. Иначе условия имеют вид одного из типов (49),(50).

Анализ возможных случаев для "эйлеровых" границ нетривиален (см. например, [11]). Проблема граничных условий в этом случае имеем много общего с ее аналогом в эйлеровой аэрогидромеханике.

Автор благодарит К.И.Заппарова, В.И.Кондаурова, В.Н.Кукуджанова и Г.И.Пшеничнова за ряд полезных дискуссий.

Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. т. 1, М., Наука, 1970.

2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М., МГУ, 1971.

3. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М., Мир, 1979.

4.Численное решение многомерных задач газовой динамики.

При использовании вариационных уравнений (21) условия (50) непосредственно включаются в эти уравнения.

Конкретный вид функций $\hat{A}_z$ и B_n , а также число необходим на данном участке границы $\check{S}$ условий (49),(50) для основных ур нений определяются следующими факторами.

ж) Конкретным содержанием задачи,

ж) Типом границ: $\Omega_n=0$ - "лагранжева" граница ($\Omega_n=\hat{\Omega}^k\hat{n}_k$ - проек ция скорости движения материальной среды относительно подвижны координат на нормаль к границе) , $\Omega_n<0$ - входная "эйлерова" гр ница, $\Omega_n>0$ - выходная "эйлерова" граница,

ж) Присутствием в уравнениях баланса потоков $\hat{B}^k\neq 0$. При численн решении члены $\hat{B}^k\neq 0$ могут появляться во всех уравнениях балан (искусственная или аппроксимационная вязкость) ;

ж) Величиной скорости Ω_n в сравнении со скоростью звука.

Наиболее прост случай "лагранжевых" границ. Если $\hat{B}^k=0$, т соответствующее уравнение баланса на "лагранжевой"границе прев щается в обыкновенное дифференциальное уравнение по времени. Дл такого уравнения граничных условий не требуется. Иначе условия имеют вид одного из типов(49),(50).

Анализ возможных случаев для "эйлеровых"границ нетривиален (см., например, [11]). Проблема граничных условий в этом случае имеет много общего с ее аналогом в эйлеровой аэрогидромеханике.

Автор благодарит К.И.Заппарова, В.И.Кондаурова, В.Н.Кукуджанова и Г.И.Пшеничнова за ряд полезных дискуссий.

Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. т.1. М., Наука , 1970.

2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М., МГУ, 1971.

3. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М., Мир , 1979.

4. Численное решение многомерных задач газовой динамики.

Под редакцией С.К.Годунова. М., Наука, 1976.

5. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск, Наука, 1981.

6. Кондауров В.И. О законах сохранения и симметризации уравнений нелинейной теории термоупругости. Докл. АН СССР, 1981, т. 256. Т. 4.

7. Заппаров К.И., Кукуджанов В.Н. Численное решение нестационарных задач динамики упругопластической среды методом подвижных сеток. Сб. Численные методы в механике твердого деформируемого тела. М., ВЦ АН СССР, 1984. С. 65-86.

8. Кондауров В.И., Петров И.Б. Численное исследование процессов внедрения в упругопластические преграды. Сб. Численные методы в механике твердого деформируемого тела. М., ВЦ АН СССР, 1984. С. 115-132.

9. Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и механике сплошных сред. М. Наука. 1971.

10. Вычислительные методы в гидродинамике. М., Мир. 1967.

11. Роуч. П. Вычислительная гидродинамика. М., Мир. 1980.

12. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М., Мир. 1974.

Под редакцией С.К.Годунова. М., Наука, 1976.

5. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск, Наука, 1981.

6. Кондауров В.И. О законах сохранения и симметризации уравнений нелинейной теории термоупругости. Докл. АН СССР, 1981, т.256, №4.

7. Заппаров К.И., Кукуджанов В.Н. Численное решение нестационарных задач динамики упругопластической среды методом подвижных сеток. Сб. Численные методы в механике твердого деформируемого тела (данный сборник).

8. Кондауров В.И., Петров И.Б. Численное исследование процессов внедрения в упругопластические преграды. Сб. Численные методы в механике твердого деформируемого тела (данный сборник).

9. Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М., Наука, 1971.

10. Вычислительные методы в гидродинамике. М., Мир, 1967.

11. Роуч П. Вычислительная гидромеханика. М., Мир, 1980.

12. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М., Мир, 1974.