POLISH ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF MATHEMATICS

BANACH CENTER Publications

VOLUME 13

Computational Mathematics

PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS

COMPUTATIONAL MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 13
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1984

ПАКЕТЫ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ LTPBVP И SPARSE

А. А. АБРАМОВ, Н. Г. БУРАГО, В. В. ДИТКИН, А. Л. ДЫШКО, А. Ю. ЕРЕМИН, А. Ф. ЗАБОЛОЦКАЯ, Н. Б. КОНЮХОВА, Н. Я. МАРЬЯШКИН, Б. С. ПАРИЙСКИЙ, В. И. УЛЬЯНОВА, И. И. ЧЕЧЕЛЬ

Вычислительный Центр АН СССР, ул. Вавилова 40, Москва, СССР

Введение

В Вычислительном центре АН СССР создан пакет прикладных программ *Линейные обыкновенные краевые задачи*, предназначенный для решения двухточечных краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений, а также систем таких уравнений. Пакет является частью системы пакетов прикладных программ для реализации общих методов вычислительной математики и включен в вычислительный комплекс САФРА (см. [1]). Пакет состоит из двух частей: систематизированной библиотеки процедур и программ с именем LTPBVP (Linear Two Point Boundary Value Problem) и пакета SPARSE. Программы пакета LTPBVP написаны на языке ФОРТРАН и АЛГОЛ. Пакет SPARSE — на языке ФОРТРАН. Реализация пакета предусмотрена на ЭВМ БЭСМ-6.

В пакет LTPBVP включены как методы для решения краевых дифференциальных задач, т.е. задач, сформулированных в виде системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, заданными какими-либо формулами, и соответствующих граничных условий, так и для решения разностных краевых задач, сформулированных в виде системы линейных алгебраических уравнений специального типа. В пакете LTPBVP реализованы методы для решения двухточечных краевых задач, задач с условием периодичности и общей двухточечной задачи с нераспадающимися краевыми условиями. Пакет содержит в виде отдельных процедур и подпрограмм почти все известные авторам варианты метода прогонки. Процедуры пакета LTPBVP сданы в Государственный фонд алгоритмов и программ при ВЦ АН СССР (тексты процедур, комментарии к этим текстам и тестовые примеры). В [25]–[40] приведены краткие сведения об этих материалах.

Пакет SPARSE предназначен для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами. Такие задачи возникают, например, при разностной аппроксимации дифференциальных краевых задач. Способы представления данных, структура пакета SPARSE и методы решения описаны в [22], [23].

Процедуры и подпрограммы пакетов LTPBVP и SPARSE использовались для решения разнообразных тестовых задач. В настоящее время пакеты успешно используются для решения различных прикладных задач.

1. Пакет LTPBVP

1.1. Реализованные методы. Методы, использованные в пакете LTPBVP, можно условно разделить на две группы:

(а) классические прогонки, включая классическую дифференциальную прогонку, потоковую прогонку и классическую прогонку с условием периодичности, а также их разностные аналоги;

(б) ортогональные прогонки.

Для решения одного уравнения второго порядка (самосопряженная краевая задача)

$$\big(p(x)y'\big)'-q(x)y=f(x), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$
$$a_1y(a)+\beta_1y'(a)=\gamma_1, \quad a_2y(b)+\beta_2y'(b)=\gamma_2,$$

где x — вещественная переменная, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — заданные на $[a, b]$ вещественные функции, a_i, β_i, γ_i — вещественные числа, $a_i^2+\beta_i^2\neq 0$, предусмотрены следующие варианты метода прогонки:

— классический вариант метода прогонки (см. [2]–[5], [25]);

— потоковый вариант метода прогонки для случая, когда $p(x)=1/\sigma(x)$ и $\sigma(x)\geqslant 0$ (см. [6], [26]);

— циклическая прогонка для случая задачи с граничными условиями периодичности (см. [7], [25]).

Для решения общей двухточечной задачи с распадающимися граничными условиями для одного уравнения второго порядка

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$
$$a_1y(a)+\beta_1y'(a)=\gamma_1, \quad a_2y(b)+\beta_2y'(b)=\gamma_2,$$

где x — вещественная переменная, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции, a_i, β_i, γ_i — числа, $|a_i|^2+|\beta_i|^2=1$, применяются два алгоритма ортогональной прогонки: вариант ортогонального переноса граничных условий для задачи с вещественными коэффициентами (см. [8], [27]) и его модификация для задачи с комплексными коэффициентами (см. [9], [27]).

Для решения краевых задач для систем второго порядка вида

$$y''-P(x)y=f(x), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$
$$A_1y(a)+B_1y'(a)=C_1, \quad A_2y(b)+B_2y'(b)=C_2,$$

где x — вещественная переменная, $P(x)$ — заданная на $[a, b]$ функция — квадратная матрица порядка n, A_i, B_i — квадратные матрицы порядка n, $f(x)$ — заданная на $[a, b]$ функция–столбец высоты n, C_1, C_2 — столбцы высоты n, используются следующие методы:

— матричная классическая дифференциальная прогонка для задач с действительными коэффициентами при $B_1=B_2=E$ (см. [13], [10], [28]);

— два метода ортогональной прогонки для самосопряженной задачи: $P=P^*$, $A_1B_1^*=B_1A_1^*$, $A_2B_2^*=B_2A_2^*$ (см. [11], [29] для задачи с действительными коэффициентами и [12], [30] для задачи с комплексными коэффициентами).

Для решения вещественных краевых задач для систем первого порядка вида

$$y'-P(x)y=f(x), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$
$$\psi_ay(a)=g_a, \quad \psi_by(b)=g_b,$$

где $P(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ квадратная матрица порядка n, $f(x)$ — непрерывный на $[a, b]$ столбец высоты n, ψ_a — матрица размера $k\times n$, ψ_b — матрица размера $(n-k)\times n$, g_a, g_b — столбцы высоты соответственно k и $n-k$, применяются следующие методы:

— классический вариант метода прогонки (см. [13], [14], [31]);

— три различных метода ортогональной прогонки (см. [15], [5], [16], [32], [33], [34]);

— дифференциальная прогонка с промежуточной ортогонализацией и нормировкой базисных решений (см. [17], [35]).

Для решения двухточечных краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с нераспадающимися граничными условиями, т.е. задач вида

$$y'-P(x)y=f(x), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$
$$Ay(a)+By(b)=C,$$

где $P(x), A, B$ — квадратные матрицы порядка n, $f(x)$, C — столбцы высоты n, используется хорошо известный прием, который сводит эту задачу к задаче вдвое большей размерности с распавшимися граничными условиями (см. [18], [36]). Прием состоит в следующем. Введем

$$y_1 = \begin{bmatrix} y(x) \\ y(a+b-x) \end{bmatrix}, \quad P_1(x) = \left[\begin{array}{c|c} P(x) & 0 \\ \hline 0 & -P(a+b-x) \end{array}\right],$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} f(x) \\ -f(a+b-x) \end{bmatrix}, \quad Q = [E \mid -E], \quad R = [A \mid B].$$

Тогда получим задачу

$$y_1' - P_1(x)y_1 = f_1, \quad a \leqslant x \leqslant (a+b)/2,$$

$$Ry_1(a) = C, \quad Qy_1\big((a+b)/2\big) = 0.$$

Для решения этой задачи в пакете используется метод ортогонального переноса граничных условий.

Во всех подпрограммах, как правило, для решения задач Коши применяется метод Рунге–Кутта с автоматическим выбором шага.

Для решения разностных краевых задач применяются следующие разностные прогонки:

— трехточечная скалярная прогонка (см. [2], [3], [19], [37]);

— трехточечная потоковая прогонка (см. [20], [38]);

— трехточечная скалярная прогонка с условием периодичности (см. [7], [39]);

— многоточечная скалярная прогонка (см. [21], [40]);

— трехточечная матричная прогонка (см. [2], [19], [37]).

Для решения возникающих вспомогательных линейных алгебраических уравнений применяется метод Гаусса с выбором главного элемента.

1.2. О работе процедур. При решении конкретных задач возникает вопрос, каким именно методом целесообразно воспользоваться. Для отдельных типов задач можно отдать предпочтение одним методам перед другими. Однако часто заранее трудно что-либо сказать о нужных свойствах задач. Хорошо обусловленная задача не всегда может быть решена классическими методами прогонки. С „гарантией" эти методы приведут к положительному результату лишь при выполнении достаточных условий, налагаемых на решаемую задачу. Хорошо известно, например, что таким достаточным условием для классической прогонки в случае одного уравнения второго порядка являются условия $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $q(x) \geqslant q_0 > 0$ и неотрицательность чисел — α_1, β_1, α_2 и β_2. Поэтому в ряде процедур, которые реализуют „необщие" методы прогонки, предусматривается выход на метку, которая показывает, что

данный метод не подходит для решения задачи. В этом случае рекомендуется применять какой-либо вариант ортогональной прогонки. С другой стороны, решаемая задача может оказаться плохо обусловленной. Поэтому во всех подпрограммах пакета предусматривается выход на соответствующую метку, если решаемая задача оказывается с заданной точностью плохо обусловленной.

Поясним сказанное на примере. Поскольку классический вариант метода прогонки хорошо известен, то остановимся на решении этим методом одного уравнения второго порядка. Все остальные процедуры и подпрограммы пакета построены по тому же принципу.

Обращение к процедуре имеет вид:

$$\text{clod}(a, b, m, m1, ua, ub, y, y1, \text{pqf}, \text{eps}, \text{lm}, \text{lp}).$$

Имя процедуры — clod — использует буквы слов:

classical (классическая прогонка),

one (для одного уравнения),

differential (дифференциальный вариант).

Здесь:

a, b — концы интервала интегрирования, не обязательно $a < b$;

m — целое число, на m частей разбивается интервал $[a, b]$, значения $y(x)$ и $y'(x)$ вычисляются в $m+1$ точках $x_i = a + i \times \dfrac{(b-a)}{m}$, $i = 0, 1, \ldots, m$;

$m1 = 2^k$ ($0 \leqslant k$ — целое число) — целочисленный параметр, который задает начальный шаг интегрирования $h = (b-a)/(m \times m1)$ для решения задачи Коши (значения m и $m1$ не влияют на конечный результат, но удачный выбор этих величин может существенно сократить время счета решаемой задачи);

$ua[1:3]$, $ub[1:3]$ — массивы, задающие граничные условия; $ua[1] = \alpha_1$, $ua[2] = \beta_1$, $ua[3] = \gamma_1$, $ub[1] = \alpha_2$, $ub[2] = \beta_2$, $ub[3] = \gamma_2$;

$y[0:m]$, $y1[0:m]$ — массивы значений $y(x)$ и $y'(x)$ в точках x_i;

pqf — процедура, определяющая коэффициенты уравнения;

eps — заданная абсолютная точность вычислений для $y(x)$ и $y'(x)$, интегрирование задач Коши на один шаг производится с точностью

$$\text{eps1} = \frac{\text{eps}}{m \times m1} = \frac{\text{eps}}{(b-a)/h};$$

lm — метка, на которую передается управление в случае, когда данный метод не подходит для решения исходной задачи, а именно, когда $(b-a)/h > 10^{10}$, где h — значение шага интегрирования, полученное к моменту выхода на метку lm;

lp — метка, на которую передается управление в случае, когда исходная задача плохо обусловлена, а именно, когда определитель алгебраической системы второго порядка, возникающий после прямой прогонки, меньше eps.

Как уже было отмечено, все процедуры и подпрограммы пакета устроены сходным образом. При этом для удобства использования порядок перечисления формальных параметров в каждой процедуре и их смысл одинаков во всех процедурах.

2. Пакет SPARSE

Пакет SPARSE предназначен для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами на ЭВМ БЭСМ-6 в системе Фортран-Дубна (см. [41]).

В пакете SPARSE разреженность матриц учитывается специальными способами представления данных, исключающих хранение нулевых элементов матриц. В качестве способа решения используется модификация метода Гаусса (см. [23]). Все операции производятся только с ненулевыми элементами исходных, промежуточных и конечных матриц. Эффективным средством оптимизации вычислений служит также предварительная обработка структуры матриц за счет перестановки ее строк и столбцов (см. [42]). Совокупность этих мер позволяет существенно уменьшить время счета и требуемую оперативную память ЭВМ.

Для уменьшения влияния погрешностей вычислений предусмотрены следующие дополнительные возможности:

1. масштабирование строк и столбцов матрицы и правых частей системы,

2. масштабирование ведущих элементов исключения,

3. различные варианты исключения строк и выбора ведущего элемента.

Пакет SPARSE включает в себя внутреннюю систему отладки, с помощью которой обрабатываются все программные прерывания, возникающие при выполнении счетных модулей. В пакете имеются программы диагностики для установления места и причины прерывания. Пользователь может задавать такой режим работы пакета, при котором после прерывания вычисления могут быть продолжены с нужного места. Для этих целей специальные программы контролируют работу счетных модулей и, изменяя управляющие параметры, возобновляют работу пакета. Эти подпрограммы могут пополняться пользователями с учетом специфики решаемых задач.

В пакете используется динамическое распределение памяти и ее защита. Пакет может быть легко включен в готовые программы без существенных изменений.

Пакет SPARSE можно приспосабливать к решению задач с заданной структурой матрицы. При этом эффективность решения существенно возрастает.

Пакет SPARSE можно использовать для решения серии систем с одинаковой структурой матриц и различными правыми частями.

На базе пакета SPARSE в настоящее время разработан пакет SOLVER (см. [24]) для решения систем нелинейных функциональных и обыкновенных дифференциальных уравнений с разреженными якобиевыми матрицами.

Приведем два примера использования пакета SPARSE. Ниже в таблице приведены результаты решения системы 66 нелинейных функциональных уравнений $F(x) = 0$ (см. [43]) методом Ньютона.

Номер итерации	$\|F(x)\|^2$	Время, затрачиваемое на итерации (в сек.)
1	$2.98 \times 10^{+7}$	59
2	$2.92 \times 10^{+4}$	57
3	2.63	5
4	5.15×10^{-2}	4
5	2.46×10^{-5}	5
6	4.73×10^{-10}	4

Из этих данных видно, что времена счета первой и последней итерации различаются более чем на порядок, т.к. на последних итерациях в пакете SPARSE используются ранее полученные протоколы исключения.

Приведем результаты применения пакета SPARSE к расчетам кручения стержня прямоугольного сечения методом конечных элементов (см. [44]). Порядок системы — 674, число ненулевых элементов в матрице — 4484, полуширина ленты исходной используемой матрицы — 253, профиль исходной матрицы — 13795, полуширина ленты после перестановки строк и столбцов (эта перестановка производится самим пакетом) — 30, профиль конечной матрицы — 9318. Время работы программы перестановки строк и столбцов — 35 секунд, время работы остальной части пакета SPARSE (решение системы линейных алгебраических уравнений) — 37 секунд.

Литература

[1] М. М. Горбунов-Посадов, В. Я. Карпов, Д. А. Корягин, В. В. Красотченко, В. В. Мартынюк, *Пакет прикладных программ САФРА. Системное наполнение*, Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1977, № 85.

[2] И. М. Гельфанд, О. В. Локуциевский, *Метод „прогонки" для решения разностных уравнений*; В книге: С. К. Годунов, В. С. Рябенький, *Введение в теорию разностных схем*, Физматгиз, Москва 1962, Дополнение 2, стр. 283–309.

[3] И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, т. 2, Физматгиз, Москва 1960, стр. 387–390.

[4] И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер, *Численные процессы решения дифференциальных уравнений*, „Мир", Москва 1969, стр. 121–152.

[5] Н. С. Бахвалов, *Численные методы*, „Наука", Москва 1973, стр. 548–565.

[6] Л. М. Дегтярев, А. П. Фаворский, *Потоковый вариант метода прогонки*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 8.3 (1968), 679–684.

[7] А. А. Абрамов, В. Б. Андреев, *О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений*, ibid. 3.2 (1963), 376–381.

[8] А. А. Абрамов, *Вариант метода прогонки*, ibid. 1.2 (1961), 349–351.

[9] Е. С. Биргер, Н. Б. Конюхова, *Численный расчет распространения радиоволн в вертикально-неоднородной тропосфере*, Радиотехника и электроника XIV. 7 (1969), 1147–1156.

[10] Э. Полак, *Численные методы оптимизации*, „Мир", Москва 1974.

[11] J. H. Barrett, *A Prüfer transformation for matrix differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 510–518.

[12] В. Б. Лидский, М. Г. Нейгауз, *К методу прогонки в случае самосопряженной системы второго порядка*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2.1 (1962), 161–165.

[13] J. Taufer, *Lösung der Randwertprobleme für Systeme von linearen Differentialgleichungen*, Academia, Praha 1973.

[14] Н. В. Валишвили, *Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ*, „Машиностроение", Москва 1976.

[15] А. А. Абрамов, *О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1.3 (1961), 542–545.

[16] В. И. Ульянова, *О переносе неоднородных граничных условий и о вычислении собственных функций*, ibid. 16.4(1976), 1057–1059.

[17] С. К. Годунов, *О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, УМН, XVI, 3 (99) (1961), 171–174.

[18] K. Moszyński, *A method of solving the boundary value problem for a system of linear ordinary differential equations*, Algorytmy II. 3 (1964), 25–43.

[19] В. В. Огнева, *Метод „прогонки" для решения разностных уравнений*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 4.4 (1967), 803–812.

[20] Л. М. Дегтярев, А. П. Фаворский, *Потоковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами*, ibid. 9.1 (1969), 211–218.

[21] Н. Д. Сафонов, *О методе прогонки для решения разностных краевых задач*, ibid. 4.2 (1964), 256–266.

[22] А. Ю. Еремин, Н. Я. Марьяшкин, *Пакет программ* SPARSE *для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами*, ВЦ АН СССР, Москва 1978.

[23] —, —, *Пакетная обработка систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 18.6 (1978), 1561–1570.

[24] А. Ю. Еремин, Н. Я. Марьяшкин, *Пакет программ* SOLVER *системы нелинейных функциональных и обыкновенных дифференциальных уравнений с разреженными якобиевыми матрицами*, ВЦ АН СССР, Москва 1980.

[25] Е. В. Левшенко, В. И. Ульянова, *Алгоритмы решения линейных самосопряженных краевых задач и задач с условиями периодичности для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методами классической дифференцальной прогонки*, Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 2, П003413.

[26] А. Ф. Заболоцкая, *Алгоритм решения самосопряженных двухточечных линейных краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка (потоковая прогонка)*, Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 2, П003475.

[27] Н. Б. Конюхова, В. И. Ульянова, *Алгоритмы решения линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вещественными и комплексными коэффициентами методами ортогональной дифференциальной прогонки*, Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 2, П003409.

[28] Н. Б. Конюхова, Е. В. Левшенко, *Алгоритм решения самосопряженной двухточечной краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами (матричная классическая дифференциальная прогонка)*, Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 2, П003442.

[29] А. Ф. Заболоцкая, *Алгоритм решения самосопряженной двухточечной линейной краевой задачи для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами*, Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 5, П003853.

[30] А. Л. Дышко, *Алгоритм метода прогонки в случае самосопряженной системы дифференциальных уравнений второго порядка с комплексными коэффициентами*, Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 2, П003474.

[31] В. П. Воробьев, *Алгоритм решения двухточечных краевых задач методом классической прогонки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка* (CLS1D), Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1978, № 5, П003125.

[32] А. А. Абрамов, *Алгоритм решения краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом ортогонального переноса граничных условий*, Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 2, П003412.

[33] Б. С. Парийский, *Алгоритм решения краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом дифференциальной ортогональной прогонки*, Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 2, П003492.

[34] А. А. Абрамов, В. И. Ульянова, *Алгоритм решения краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений модифицированным методом ортогонального переноса граничных условий*, Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 2, П003476.

[35] Н. Г. Бураго, В. М. Любимов, *Алгоритм дифференциальной прогонки с промежуточной ортогонализацией и нормировкой базисных решений для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*, Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 4, П003713.

[36] Б. С. Парийский, *Алгоритм решения двухточечных краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений с нераспадающимися краевыми условиями,* Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 2, П003493.

[37] В. В. Диткин, *Алгоритмы решения разностных краевых задач методами трехточечных прогонок,* Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 3, П003554.

[38] А. Л. Дышко, *Потоковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами,* Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 3, П003638.

[39] И. И. Чечель, *Алгоритм метода прогонки к нахождению периодических решений разностных уравнений,* Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 2, П003490.

[40] —, *Алгоритм метода прогонки для решения разностных краевых задач,* Информ. бюлл. „Алгоритмы и программы" ВНТИЦентра, 1979, № 2, П003489.

[41] А. И. Салтыков, Г. И. Макаренко, *Программирование на языке Фортран,* „Наука", Москва 1976.

[42] N. E. Gibbs, W. G. Polle, Jr., P. K. Stockmeyer, *An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix,* SIAM J. Num. Anal. 13.2 (1976), 236–250.

[43] J. Eriksson, *Solution of sparse systems of multilinear equations,* Report Lith. Mat-R-1977-11, Linkoping Univer., Sweden.

[44] Л. Сегерлинд, *Применение метода конечных элементов,* „Мир", Москва 1979.

Presented to the Semester
Computational Mathematics
February 20 – May 30, 1980