

## РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ БИНГАМА-ИЛЬЮШИНА В ПЛОСКОМ КОНФУЗОРЕ

**Бураго Н. Г.**

*ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю.Ишлинского, Москва*

Рассматриваются нестационарные течения вязкопластической несжимаемой среды Бингама-Ильюшина в плоском конфузоре. Подробности истории вопроса и обзор можно найти в [1–5]. Отметим, что в большинстве работ решение получается приближенными полуаналитическими методами с использованием упрощающих предположений. Получение численных решений на основе полных исходных уравнений представляет интерес во-первых для сравнений с аналитическими решениями, а во-вторых для исследования задач со сложной геометрией и возможных вариаций исходной формулировки. Возможности такого подхода показаны на примерах расчета методом конечных элементов.

**1. Основные уравнения.** Для расчета определяющие соотношения среды Бингама-Ильюшина были модифицированы с тем, чтобы получать решение сквозным счетом и для вязко-пластического, и для жесткого состояний среды:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{g}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mu \mathbf{e}', \quad \mu = \mu_0(1 + (\varepsilon + (2\mu_0 e_{II}/\tau_s - 1)_+)^{-1})$$

$$\mathbf{e}' = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)/2, \quad e_{II} = \sqrt{\mathbf{e}' : \mathbf{e}'}$$

где новизна имеется в формуле для коэффициента вязкости  $\mu$ , в которую введен малый безразмерный параметр  $\varepsilon$ , позволяющий заменить бесконечное значение вязкости в жесткой области большим, но конечным значением  $\mu = \mu_0(1 + 1/\varepsilon)$  при  $2\mu_0 e_{II} < \tau_s$ . Принято обозначение  $(a)_+ = aH(a)$ , где  $H$  – функция Хевисайда. Конечно, такая регуляризация оригинальных соотношений не является единственно возможной, но она проста и работает хорошо. Обозначения традиционны, штрихи отмечают девиаторы напряжений и скоростей деформаций. Начальные и граничные условия оговариваются далее при описании примеров.

**2. Метод решения.** Нетрудно видеть, что благодаря принятому выражению для коэффициента вязкости расчет сводится к обычной начально-краевой задаче для система уравнений Навье-Стокса. Задача решается в скоростях. Несжимаемость учтена методом штрафных функций. Для этого давление ищется в виде  $p = -\rho c^2 t_0 \nabla \cdot \mathbf{u}$ , где  $\rho c^2 t_0$  – коэффициент штрафа,  $c \gg |\mathbf{u}|$  – фиктивная скорость звука,  $t_0$  – постоянная, имеющая размерность времени. Скорости аппроксимируются кусочно-линейными функциями на нерегулярной сетке треугольных конечных элементов. Применяемая схема МКЭ аналогична двухслойным центрально-разностным схемам. Конвективные члены аппроксимированы явно. Для устойчивости в уравнения вводится искусственная вязкость, при этом физическая вязкость уменьшается по методу экспоненциальной подгонки А.А.Самарского, шаг

по времени ограничен условием Куранта  $\Delta t < \beta h / |\mathbf{u}|$ , где  $h$  - радиус окрестности сеточного шаблона,  $\beta$  - коэффициент запаса. Коэффициент штрафа выбирается так, чтобы фиктивная скорость звука была примерно на порядок больше максимальной скорости в области течения (фиктивное число Маха примерно 0.1).

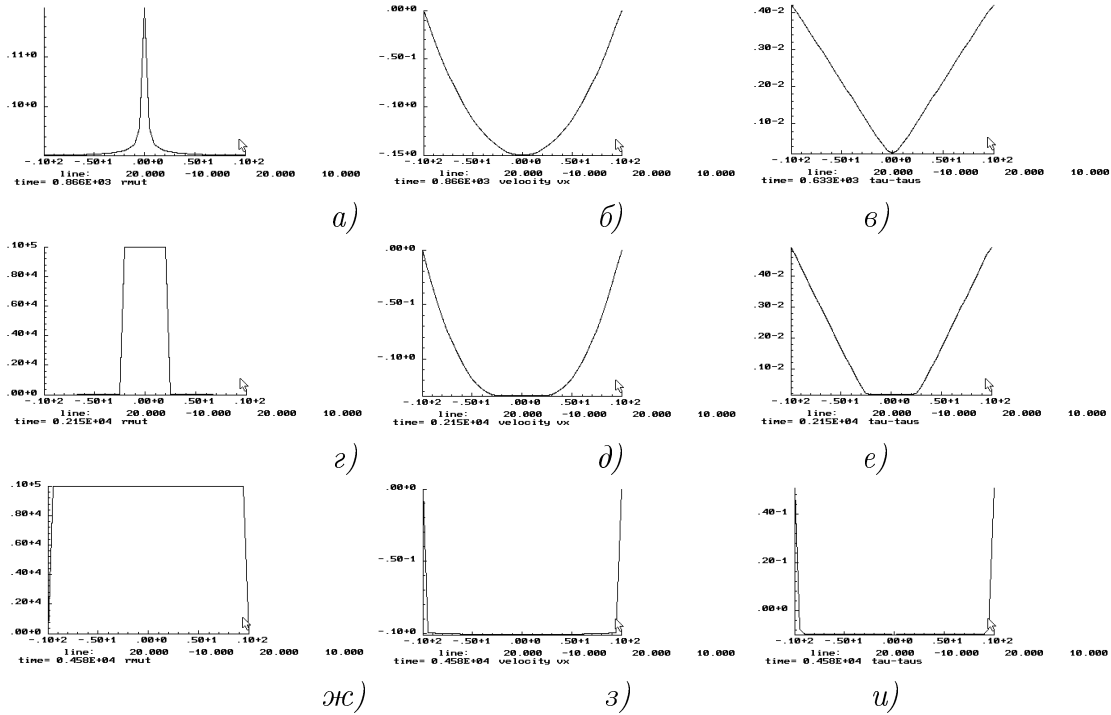


Рис.1. Распределение вязкости (а,г,ж), горизонтальной скорости ( б,д,з) и интенсивности напряжений (в,е,и) во входном сечении ( $x = 20$ ) при  $\tau_s = 10^{-6}$  (а,б,в), при  $\tau_s = 5 \cdot 10^{-5}$  (г,д,е) и при  $\tau_s = 10^{-2}$  (ж,з,и).



Рис.2. Распределение горизонтальной скорости  $u_x$  во входном сечении в моменты, когда она достигает максимальных значений в колебательном режиме.

**3. Результаты.** Для проверки была рассмотрена задача о стационарном плоском течении Пуазейля (рис.1-2). В области течения  $V = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 20, -10 \leq y \leq 10\}$  приняты следующие исходные данные  $Q = \int_{-10}^{10} u_x dy = 2, \mu_0 = 0.1, \varepsilon = 10^{-5}, \rho = 1$ . Для  $\tau_s = 10^{-6}$  вязкость почти всюду равна невозмущенному значению и решение для скорости практически совпадает с аналитическим решением Пуазейля для постоянной вязкости (см. Рис. 1а,1б,1в). По мере увеличения значения  $\tau_s$  зона повышенного значения вязкости разрастается (см. Рис. 1г,1д,1е для ). Для  $\tau_s = 10^{-2}$  решение еще остается стационарным и показано на Рис. 1а,1б,1в.

Для значений  $\tau_s = 3 \cdot 10^{-2}$  и больших решение становится нестационарным и колебательным с модами течения, показанными на рис. 2, где видны типичные

профили скорости  $u_x$  для моментов времени, отвечающих достижению приграничными скоростями максимальных значений. То есть, поток локализуется поочередно то у одной стенки, то у другой, при этом у противоположной стенки возникает возвратное течение.

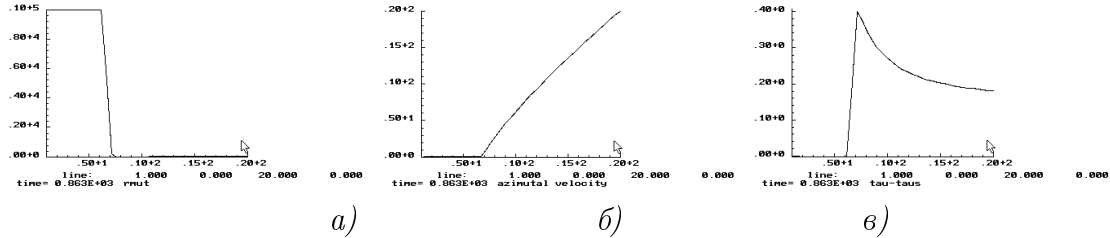


Рис. 3. Радиальное распределение коэффициента вязкости (а), азимутальной скорости (б) и интенсивности вязких напряжений (в) для течения Куэтта в случае среды Бингама-Ильюшина.

Образование зоны жесткого состояния жидкости Бингама-Ильюшина наблюдается в задаче о течения Куэтта. Расчет выполнен для случая неподвижного внутреннего цилиндра (радиуса 1) и вращающегося с азимутальной скоростью  $v_\theta = 1$  внешнего цилиндра (радиуса 20). Для  $\mu_0 = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\tau_s = 10^{-3}$  в решении около внутреннего цилиндра видна область с высоким значением коэффициента вязкости (см. Рис. 3).

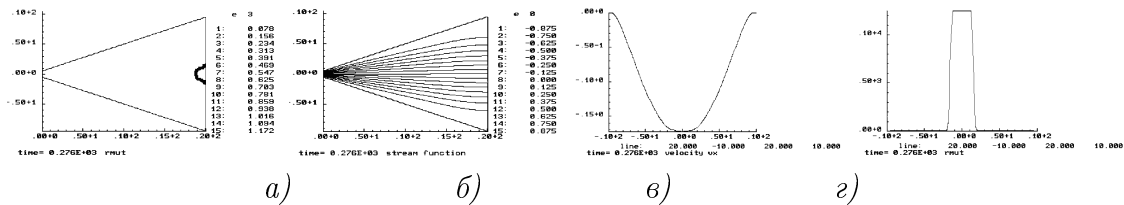


Рис. 4. Число Рейнольдса  $Re = Q/\mu_0 = 160$ . Изолинии вязкости а) и функция тока б), графики горизонтальной скорости в) и вязкости г) по входному сечению  $x = 20$ .

Основной интерес работы был сосредоточен на задаче о течении в плоском конфузоре, которое и приводится ниже. Геометрия конфузора показана на Рис. 4а. На стенках конфузора реализованы условия прилипания, Расход задавался неизменным во времени (путем задания на стенках значений функции тока), начальное распределение скоростей отвечало установившемуся безвихревому потоку с невозмущенным значением вязкости  $\mu = \mu_0$ , плотность полагалась равной 1. На входе и на выходе ставились мягкие граничные условия продолжения решения за границу области решения.

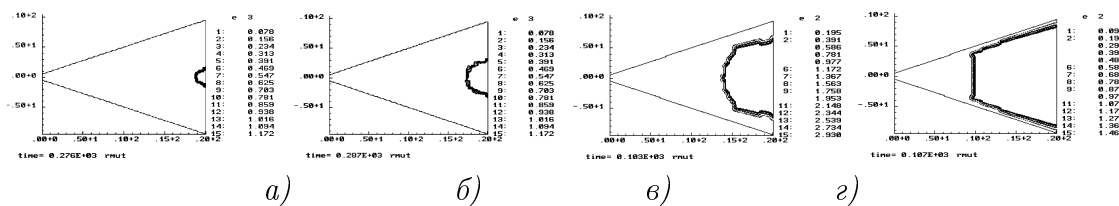


Рис. 5. Влияние числа Рейнольдса на зону жесткого состояния: а) 160, б) 320, в) 640, г) 1280.

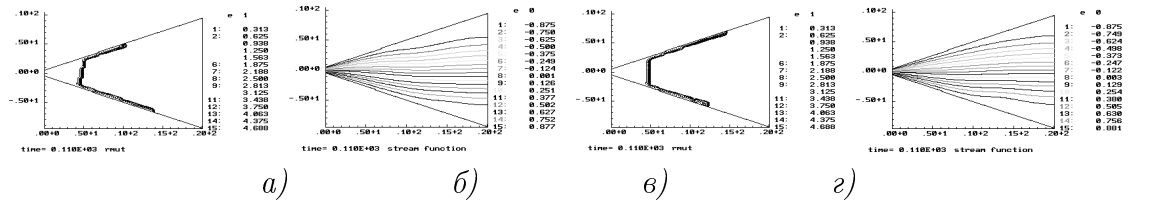


Рис. 6. Колебания конфигурации зон жесткого состояния и линий тока для  $Re = 4000$



Рис. 7. История горизонтальной скорости в точке  $x = 10, y = 4$  для  $Re = 4000$  и в точке  $x = 5, y = 2$  для  $Re = 40000$ .

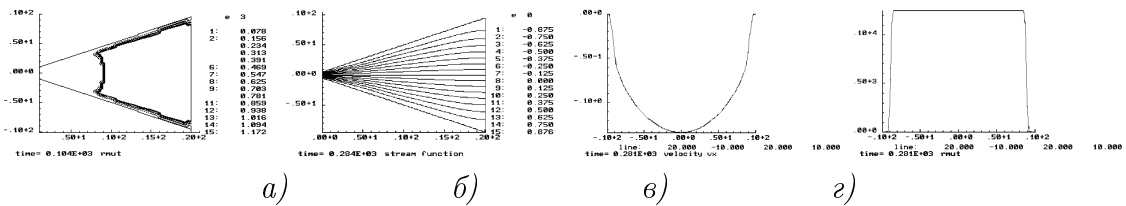


Рис. 8. Влияние предела текучести, равного здесь  $\tau_0 = 0.001$  (сравнение с Рис. 4 для  $\tau_0 = 0.0001$ ), показаны изолинии коэффициента вязкости (а) и функции тока (б), распределение горизонтальной скорости (в) и коэффициента вязкости (г) по входному сечению  $x = 20$ .

**Влияние числа Рейнольдса.** Для  $\tau_0 = 0.0001, \alpha = \pi/8, \varepsilon = 10^{-5}, Re = Q/\mu_0 = 160$  ( $\alpha$  - угол между стенками конфузора и осью абсцисс) решение показано на Рис. 4. Поток направлен справа налево. В середине входного сечения (Рис. 4а) видна небольшая зона жестко-пластического состояния, в которой значения коэффициента вязкости повышены. С ростом числа Рейнольдса растет и зона жестко-пластического состояния (см. Рис. 5). При дальнейшем росте чисел Рейнольдса течение принимает нестационарный характер и локализуется у стенок конфузора. При этом рассматриваемая среда в центральной части конфузора переходит в “жесткое” состояние с высоким значением коэффициента вязкости. Например, при  $Re = 4000$  имеем нестационарный колебательный режим, для которого на Рис. 6 показаны “противофазные” состояния “жесткой” зоны и изолиний функции тока. Развитие нестационарного режима течения во времени видно на Рис. 7, где показана история горизонтальной скорости в характерных точках области течения.

**Влияние “предела текучести”  $\tau_0$ .** С ростом параметра  $\tau_0$ , как и в задаче Пуазейля, наблюдается очень быстрое распространение зоны повышенной вязкости. Например, для варианта, показанного на рис. 4, увеличим предел текучести до  $\tau_0 = 0.001, (\alpha = \pi/8, \varepsilon = 10^{-5}, Re = Q/\mu_0 = 160)$ , тогда зона жесткопластического состояния распространится от входного сечения на значительную часть области

решения (см. Рис. 8) Отметим, что показанные численные решения качественно согласуются с приближенными аналитическими решениями, полученными в [2–5].

Автор благодарит Л.Д.Акуленко и С.В.Нестерова за приобщение к данной проблеме и ценные консультации. Работа поддержана грантами РФФИ №15-08-02392, №14-01-00741 и программой РАН ОЭММПУ-12.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Георгиевский Д. В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: УРСС, 1998. 176 с.
- [2] *Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакишев С. А., Нестеров С. В.* Численно-аналитическое исследование стационарного течения вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 1. С. 44-48.
- [3] *Климов Д. М., Нестеров С. В., Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакишев С. А.* Течение вязкопластической среды с малым пределом текучести в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 375. № 1. С. 37-41.
- [4] *Георгиевский Д. В.* Некоторые неодномерные задачи вязкопластичности: жёсткие зоны и устойчивость // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 61-78.
- [5] *Климов Д. М., Нестеров С. В., Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакишев С. А.* Вязкопластическое течение в конфузоре // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. 2001. Спецвыпуск. С. 89-92.

**Burago N. G.** *Calculation of unsteady flow of Bingham-Plyushin' viscoplastic incompressible medium in flat confusor.* Paper is devoted to calculation of non-stationary flow of Bingham-Plyushin' incompressible visco-plastic medium in flat confusor. In most of studies such calculations are realized using semi-analytical methods and simplified problem statement. The presence of simplifying assumptions puts questions about their physical adequacy, therefore obtaining numerical solutions based on the original equations is of interest for comparison with analytical solutions on the one hand and, on the other hand, for the study of problems with complex geometries and for testing possible variations of the original equations. The possibilities of such approach are demonstrated by the examples of viscoplastic flows using finite element method.