

УДК 539.3

**Н.Г. БУРАГО**, д-р физ.-мат. наук

ведущий научный сотрудник

E-mail: buragong@yandex.ru

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, г. Москва, Россия

**И.С. НИКИТИН**, д-р физ.-мат. наук

директор

E-mail: i\_nikitin@list.ru

Институт автоматизации проектирования Российской академии наук, г. Москва, Россия

*Поступила в редакцию 19.06.2017.*

## ЭКОНОМИЧНЫЙ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ ТРУБ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

*В настоящей работе показано, что задачу о квазистатическом трехмерном напряженно-деформированном состоянии (НДС) упругих труб переменного поперечного сечения под действием внутреннего давления можно решить экономно и быстро численно-аналитическим методом экспресс-анализа, основанном на теории возмущений и разложении решения по малому параметру.*

**Ключевые слова:** упругие трубы, переменное сечение, внутреннее давление, теория возмущений, разложение по малому параметру

В различных отраслях современной техники (авиа-, ракето-, судостроение) находят применение элементы конструкций с периодически меняющейся структурой, например, пластины и оболочки, подкрепленные ребрами жесткости, гофрированные и т. д. Расчет их напряженно-деформированного состояния, как правило, сводится к решению системы дифференциальных уравнений соответствующей теории оболочек или пластин с периодически меняющимися коэффициентами или конструктивно наведенным типом анизотропии. Цилиндрические оболочки с продольными ребрами жесткости можно рассматривать как тонкие трубы с резко изменяющейся (вплоть до разрыва) толщиной поперечного сечения. Теории и расчету таких оболочек аналитическими и численными методами посвящено большое количество работ (см., например, монографии [1–5]).

Однако во многих технических конструкциях существуют элементы в виде толстостенных цилиндров с плавным (возможно, периодическим) изменением толщины поперечного сечения или с волнистым внутренним и внешним контуром. Определение упругого напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндров необходимо для получения оценки квазистатической или циклической (усталостной) прочности. Расчет таких объектов на нагружение внутренним давлением при достаточно произвольной функции изменения толщины поперечного сечения по угловой координате возможен только современными численными методами МКЭ, реализованными в пакетах прикладных программ [5–9].

Однако во многих случаях границы цилиндров содержат малые периодические по окружной координате отклонения от окружности. В этих случаях расчет напряжений можно быстро и экономно выполнять методами теории возмущений (разложения по малому параметру) [10], уменьшая размерность задачи и сводя двумерную или даже трехмерную задачу теории упругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по радиальной координате, которую можно быстро решать аналитически или численно [11–13]. Такой метод экспресс-анализа облегчает проведение параметрических расчетов по определению оптимальных условий эксплуатации.

Данный подход применен к расчету НДС упругой трубы с периодически возмущенной геометрией внутреннего контура под действием внутреннего давления. Случай, когда и внешний контур отличен от окружности, также легко рассматривается предлагаемым методом.

**Постановка задачи.** Полагается, что рассматриваемая длинная труба имеет переменный внутренний радиус поперечного сечения, нагружена внутренним давлением и находится в условиях плоского деформированного состояния. Система уравнений теории упругости в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  имеет вид [14]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0.$$

Напряжения  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\theta}$  связаны с деформациями  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta}$  законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\theta\theta}; \\ \sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta}; \quad \sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta}, \end{aligned}$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе. Связь деформаций и смещений  $u_r, u_\theta$  имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned}$$

Внешний контур является окружностью радиуса  $b$  (рисунок 1). Внешний контур свободен от напряжений:  $\sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0$ .

Граничные условия на внутреннем контуре имеют вид:  $\sigma_{nn} = -P_a; \sigma_{n\tau} = 0$ . Форма внутреннего контура близка к окружности радиуса  $a$  и описывается уравнением  $r = a(1 + \varepsilon g(\theta))$ . Величина  $\varepsilon \ll 1$  является малым параметром.

Функция  $g(\theta)$  определена при  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  и является периодической функцией с периодом  $-\pi/N \leq \theta \leq \pi/N$  (рисунок 2).

Для решения конкретной задачи в дальнейшем функция  $g(\theta)$  выбрана в виде (см. рисунок 2):

$$\begin{aligned} 0 \leq |\theta| \leq \theta_0 - \delta: \quad & g(\theta) = 1; \\ \theta_0 - \delta < |\theta| \leq \theta_0 + \delta: \quad & g(\theta) = \left( 1 - \sin \left( \frac{\pi(\theta - \theta_0)}{2\delta} \right) \right) / 2; \\ \theta_0 + \delta < |\theta| \leq \pi / N: \quad & g(\theta) = 0. \end{aligned}$$

Разложения в ряд Фурье этой функции и ее производной имеют вид:

$$\begin{aligned} g(\theta) &= g_0 / 2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos(kN\theta); \\ g'(\theta) &= -\sum_{k=1}^{\infty} g_k kN \sin(kN\theta); \\ g_k &= \frac{\sin(kN\theta_0)}{k} \frac{\pi / 2}{(\pi / 2 + kN\delta)} \frac{\sin(\pi / 2 - kN\delta)}{(\pi / 2 - kN\delta)}. \end{aligned}$$

Формула для коэффициентов написана в развернутом виде, чтобы наглядно представить резуль-

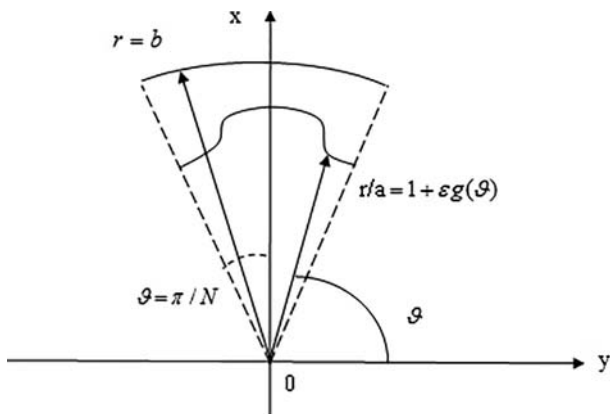


Рисунок 1 — Сектор с ячейкой периодичности

таты предельных переходов при  $k \rightarrow 0$  и  $kN\delta \rightarrow \pi / 2$ . При  $k = 0$  выражение для  $g_0$  имеет вид  $g_0 = 2N\theta_0 / \pi$ .

Для учета граничных условий на внутреннем контуре требуется определить компоненты нормали и касательной к этому контуру через функцию формы  $g(\theta)$ . Угол  $\alpha$  между направлением нормали к внутреннему контуру и радиальным направлением можно выразить через угловую координату  $\theta$  и наклон касательной  $\psi$  к линии внутреннего контура  $\alpha = \psi + \pi/2 - \theta$  (рисунок 3).

Наклон касательной можно определить следующим образом

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \frac{dy}{dx}; \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta; \\ dx &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta; \quad dr = \varepsilon g' d\theta; \\ \operatorname{tg} \psi &= -\frac{\cos \theta + \varepsilon (g \sin \theta)'}{\sin \theta - \varepsilon (g \cos \theta)'}. \end{aligned}$$

Отсюда можно получить искомые приближенные формулы для определения  $\alpha$  с необходимой в дальнейшем точностью:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{ctg}(\psi + \pi / 2 - \theta) = -\frac{1 + \varepsilon g}{\varepsilon g'}; \\ \sin \alpha &= \varepsilon g' + O(\varepsilon^3); \quad \cos \alpha = 1 - \varepsilon^2 g'^2 / 2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Компоненты нормали будут равны

$$n_r = \cos \alpha, \quad n_\theta = \sin \alpha.$$

Для краткости выражений в дальнейшем введем обозначения:

$$\sigma = \sigma_{rr}, \quad \sigma = \sigma_{\theta\theta}, \quad \tau = \sigma_{r\theta}, \quad \Sigma = \sigma_{zz}, \quad u = u_r, \quad v = u_\theta.$$

Выражения для нормальных и касательных напряжений на внутреннем контуре после несложных, но громоздких выкладок, можно привести к виду

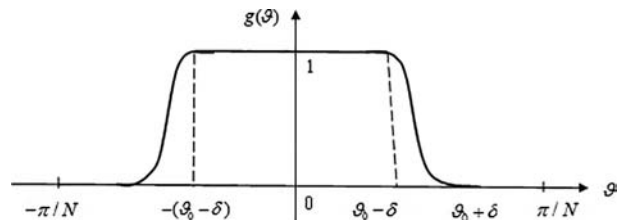


Рисунок 2 — Функция формы границы  $g(\theta)$

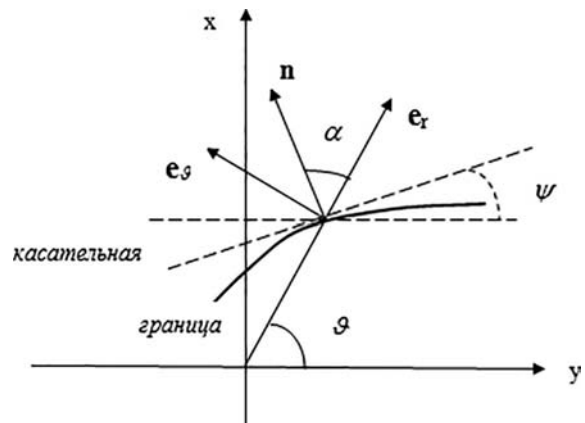


Рисунок 3 — Определение нормали и касательной к границе

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma \cos^2 \alpha + 2\tau \sin \alpha \cos \alpha + s \sin^2 \alpha; \\ \sigma_{\pi}^2 &= \left| \sigma_{ij} n_j \right|^2 - \left| \sigma_{ij} n_i n_j \right|^2 = (\sigma - s)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \\ &\quad + \tau^2 (1 - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) + \\ &\quad + 2\tau \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) (\sigma - s).\end{aligned}$$

**Асимптотический анализ.** Решение ищем в виде асимптотического разложения по малому параметру  $\varepsilon \ll 1$ :

$$\begin{aligned}\sigma(r, \theta) &= \sigma_0(r) + \varepsilon \sigma_1(r, \theta); \quad s(r, \theta) = s_0(r) + \varepsilon s_1(r, \theta); \\ \tau(r, \theta) &= \varepsilon \tau_1(r, \theta); \quad u(r, \theta) = u_0(r) + \varepsilon u_1(r, \theta); \\ v(r, \theta) &= \varepsilon v_1(r, \theta).\end{aligned}$$

Для постановки граничных условий на внутреннем контуре можно вывести приближенные асимптотические представления:

$$\begin{aligned}\sigma|_{r=1+\varepsilon g} &= \sigma|_{r=1} + \varepsilon g \sigma'|_{r=1}; \quad s|_{r=1+\varepsilon g} = s|_{r=1} + \varepsilon g s'|_{r=1}; \\ \tau|_{r=1+\varepsilon g} &= \tau|_{r=1} + \varepsilon g \tau'|_{r=1}; \\ \sigma_{nn}|_{r=1+\varepsilon g} &= \sigma_0 + \varepsilon (\sigma_1 + g \sigma'_0) + O(\varepsilon^2); \\ \sigma_{n\tau}^2|_{r=1+\varepsilon g} &= \varepsilon^2 (\tau_1 + g' (s_0 - \sigma_0))^2 + o(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Подставим эти асимптотические разложения в систему уравнений теории упругости и граничные условия, приравняем члены при нулевой и первой степени малого параметра  $\varepsilon$ . В результате получим две задачи для первых членов разложения компонент смещений и напряжений.

Уравнения осесимметричной задачи для нулевого приближения имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_0}{dr} + \frac{\sigma_0 - s_0}{r} = 0; \quad \sigma_0 = (\lambda + 2\mu) \frac{du_0}{dr} + \lambda \frac{u_0}{r}; \\ s_0 = \lambda \frac{du_0}{dr} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_0}{r}\end{aligned}$$

и дополняются следующими граничными условиями:

$$\sigma_0|_{r=1} = -P_a; \quad \sigma_0|_{r=b} = 0.$$

Распределение компонент напряжений (и их производных) для осесимметричного нагружения невозмущенного внутреннего контура ( $\varepsilon = 0$ ) давлением  $P_a$  (задача для нулевого приближения) хорошо известно и определяется формулами [14]:

$$\begin{aligned}\sigma_0(r) &= -\frac{P_a}{(b^2-1)} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right); \quad \sigma'_0(r) = \frac{P_a}{(b^2-1)} \frac{2b^2}{r^3}; \\ s_0(r) &= \frac{P_a}{(b^2-1)} \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 \right); \quad s_0 - \sigma_0 = \frac{P_a}{(b^2-1)} \frac{2b^2}{r^2}.\end{aligned}$$

В дальнейшем будем использовать это решение. Учтем также, что при  $r = 1$

$$\sigma'_0 = s_0 - \sigma_0 = 2P_a b^2 / (b^2 - 1).$$

Для первого приближения уравнения неосесимметричной задачи имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_1}{\partial \theta} + \frac{\sigma_1 - s_1}{r} = 0; \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_1}{\partial \theta} + \frac{2\tau_1}{r} = 0; \\ \sigma_1 = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \lambda \frac{u_1}{r}; \\ s_1 = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_1}{r}; \\ \tau_1 = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \right)\end{aligned}$$

и дополняются граничными условиями:

$$\begin{aligned}\sigma_1|_{r=1} = -\sigma'_0|_{r=1} g(\theta); \quad \tau_1|_{r=1} = -(s_0 - \sigma_0)|_{r=1} g'(\theta); \\ \sigma_1|_{r=b/a} = 0; \quad \tau_1|_{r=b/a} = 0.\end{aligned}$$

Решение неосесимметричной задачи для первого приближения будем строить с помощью разложения искомых функций в ряды Фурье, соответствующие разложению в эти ряды правых частей граничных условий, т. е. функций  $g(\theta)$  и  $g'(\theta)$ :

$$\begin{aligned}\sigma_1(r, \theta) &= \sigma_{10}(r)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{1k}(r) \cos(kN\theta); \\ s_1(r, \theta) &= s_{10}(r)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} s_{1k}(r) \cos(kN\theta); \\ u_1(r, \theta) &= u_{10}(r)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k}(r) \cos(kN\theta); \\ \tau_1(r, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{1k}(r) \sin(kN\theta); \\ v_1(r, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}(r) \sin(kN\theta).\end{aligned}$$

Для коэффициентов Фурье этих разложений, зависящих от радиальной координаты, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{1k}}{dr} + \frac{n\tau_{1k}}{r} + \frac{\sigma_{1k} - s_{1k}}{r} = 0; \quad \frac{d\tau_{1k}}{dr} - \frac{ns_{1k}}{r} + \frac{2\tau_{1k}}{r} = 0; \\ \sigma_{1k} = \frac{du_{1k}}{dr} + \bar{\lambda} \frac{nv_{1k}}{r} + \bar{\lambda} \frac{u_{1k}}{r}; \quad s_{1k} = \bar{\lambda} \frac{du_{1k}}{dr} + \frac{nv_{1k}}{r} + \frac{u_{1k}}{r}; \\ \tau_{1k} = \bar{\mu} \left( -\frac{nu_{1k}}{r} + \frac{dv_{1k}}{dr} - \frac{v_{1k}}{r} \right)\end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\sigma_{1k}|_{r=1} = \Sigma_{1k}; \quad \tau_{1k}|_{r=1} = T_{1k}; \quad \sigma_{1k}|_{r=b} = 0; \quad \tau_{1k}|_{r=b} = 0,$$

где

$$\Sigma_{1k} = -\sigma'_0|_{r=1} g_k; \quad T_{1k} = (s_0 - \sigma_0)|_{r=1} n g_k$$

или

$$\Sigma_{1k} = -2P_a g_k b^2 / (b^2 - 1); \quad T_{1k} = 2nP_a b^2 g_k / (b^2 - 1).$$

Здесь и далее используются безразмерные переменные. Напряжения и коэффициенты упругости отнесены к  $\lambda + 2\mu$ , безразмерные координаты отнесены к характерному радиусу внутреннего контура  $a$ , введены обозначения  $n = kN$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda / (\lambda + 2\mu)$ ,  $\bar{\mu} = \mu / (\lambda + 2\mu)$ .

Из выписанной выше системы уравнений можно исключить  $s_{1k}$  по формуле

$$s_{1k} = \bar{\lambda} \sigma_{1k} + (1 - \bar{\lambda}^2) \frac{(u_{1k} + nv_{1k})}{r}.$$

В итоге получим систему однородных по радиальной координате обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{1k}}{dr} + (1 - \bar{\lambda}) \frac{\sigma_{1k}}{r} + \frac{n\tau_{1k}}{r} - (1 - \bar{\lambda}^2) \frac{(u_{1k} + nv_{1k})}{r^2} &= 0; \\ \frac{d\tau_{1k}}{dr} + \frac{2\tau_{1k}}{r} - \bar{\lambda} \frac{n\sigma_{1k}}{r} - (1 - \bar{\lambda}^2) \frac{n(u_{1k} + nv_{1k})}{r^2} &= 0; \\ \frac{du_{1k}}{dr} + \bar{\lambda} \frac{u_{1k}}{r} + \bar{\lambda} \frac{nv_{1k}}{r} - \sigma_{1k} &= 0; \\ \frac{dv_{1k}}{dr} - \frac{v_{1k}}{r} - \frac{nu_{1k}}{r} - \frac{\tau_{1k}}{\bar{\mu}} &= 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями:

$$\sigma_{1k}|_{r=1} = \Sigma_{1k}; \quad \tau_{1k}|_{r=1} = T_{1k}; \quad \sigma_{1k}|_{r=b} = 0; \quad \tau_{1k}|_{r=b} = 0.$$

**Решение задачи для первого приближения.** Общее решение системы уравнений первого приближения было найдено в виде суммы четырех фундаментальных степенных решений с показателями  $\gamma_l$ , подлежащими определению:

$$\begin{aligned} \sigma_{1k} &= \sum_{l=1}^4 \sigma_{kl} r^{\gamma_l-1}; \quad \tau_{1k} = \sum_{l=1}^4 \tau_{kl} r^{\gamma_l-1}; \\ u_{1k} &= \sum_{l=1}^4 u_{kl} r^{\gamma_l}; \quad v_{1k} = \sum_{l=1}^4 v_{kl} r^{\gamma_l}. \end{aligned}$$

Система ОДУ перейдет в однородную линейную систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned} (\gamma_l - \bar{\lambda})\sigma_{kl} + n\tau_{kl} - (1 - \bar{\lambda}^2)u_{kl} - n(1 - \bar{\lambda}^2)v_{kl} &= 0; \\ \bar{\lambda}n\sigma_{kl} - (\gamma_l + 1)\tau_{kl} + (1 - \bar{\lambda}^2)nu_{kl} + (1 - \bar{\lambda}^2)n^2v_{kl} &= 0; \\ \sigma_{kl} - (\gamma_l + \bar{\lambda})u_{kl} - \bar{\lambda}nv_{kl} &= 0; \\ \tau_{kl} + \bar{\mu}nu_{kl} - \bar{\mu}(\gamma_l - 1)v_{kl} &= 0. \end{aligned}$$

Исключая  $\sigma_{kl}$  и  $\tau_{kl}$ , получим два однородных уравнения для  $u_{kl}$  и  $v_{kl}$ :

$$\begin{aligned} (\gamma_l^2 - \bar{\mu}n^2 - 1)u_{kl} + (\bar{\lambda}\gamma_l + \bar{\mu}\gamma_l - \bar{\mu} - 1)nv_{kl} &= 0; \\ (\bar{\lambda}\gamma_l + \bar{\mu}\gamma_l + \bar{\mu} + 1)nu_{kl} + (n^2 - \bar{\mu}\gamma_l^2 + \bar{\mu})v_{kl} &= 0. \end{aligned}$$

Детерминант  $D$  этой системы уравнений равен

$$D = \bar{\mu}\gamma_l^4 - 2\bar{\mu}(n^2 + 1)\gamma_l^2 + \bar{\mu}(n^2 - 1)^2.$$

Приравнявая его к нулю для разрешимости этой однородной системы, получим действительные значения четырех степенных показателей  $\gamma_l$ :

$$\gamma_{1,2} = \pm(n + 1); \quad \gamma_{3,4} = \pm(n - 1).$$

Имеют место соотношения

$$v_{kl} = q_{kl}u_{kl}; \quad q_{kl} = -n \frac{\gamma_l(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) + 1 + \bar{\mu}}{n^2 - \bar{\mu}(\gamma_l^2 - 1)};$$

$$\sigma_{kl} = (\gamma_l + \bar{\lambda})u_{kl} + \bar{\lambda}nv_{kl}; \quad \tau_{kl} = -\bar{\mu}nu_{kl} + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)v_{kl}.$$

Из них несложно получить выражения для констант степенного разложения:

$$\sigma_{kl} = (\gamma_l + \bar{\lambda})u_{kl} + \bar{\lambda}nv_{kl}; \quad \tau_{kl} = (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})u_{kl}.$$

И далее функции — коэффициенты Фурье, зависящие от радиальной координаты:

$$\sigma_{1k} = \sum_{l=1}^4 ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})u_{kl}r^{\gamma_l-1};$$

$$\tau_{1k} = \sum_{l=1}^4 (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})u_{kl}r^{\gamma_l-1}.$$

Эти функции следует подставить в граничные условия, из которых получим разрешающую систему для четырех неизвестных  $u_{kl}$ ,  $l = 1, 4$  при любых  $k = 1, 2, 3 \dots$

$$\sum_{l=1}^4 ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})u_{kl} = \Sigma_{1k};$$

$$\sum_{l=1}^4 (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})u_{kl} = T_{1k};$$

$$\sum_{l=1}^4 ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})u_{kl}b^{\gamma_l-1} = 0;$$

$$\sum_{l=1}^4 (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})u_{kl}b^{\gamma_l-1} = 0.$$

Неизвестные  $u_{kl}$  из этой системы найти несложно, но формулы будут иметь громоздкий, мало обозримый вид.

Найдем приближенные, но весьма близкие к точным, решения этой системы для важного прикладного случая  $n = kN \gg 1$ . Этот случай выполняется, если внутренний контур кольца состоит из многих, периодически повторяющихся участков. Для этого достаточно, чтобы  $N \gg 1$ .

Сделаем замену переменных:

$$u_{k1} = U_{k1}/b^{2n}; \quad u_{k2} = U_{k2}; \quad u_{k3} = U_{k3}/b^{2n}; \quad u_{k4} = U_{k4}.$$

Система примет вид:

$$\sum_{l=1,3} ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})U_{kl}/b^{2n} + \sum_{l=2,4} ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})U_{kl} = \Sigma_{1k};$$

$$\sum_{l=1,3} (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})U_{kl}/b^{2n} + \sum_{l=2,4} (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})U_{kl} = T_{1k};$$

$$\sum_{l=1,4} ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})U_{kl} + \sum_{l=2,3} ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})U_{kl}/b^2 = 0;$$

$$\sum_{l=1,4} (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})U_{kl} + \sum_{l=2,3} (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})U_{kl}/b^2 = 0.$$

Отсюда видно, что в принятых предположениях первыми двумя членами в первых двух уравнениях системы можно пренебречь за счет степенного множителя  $1/b^{2n} \ll 1$ .

При этом система расщепляется, и неизвестные находятся поочередно из двух пар уравнений.

Первая пара уравнений относительно  $u_{k2}$  и  $u_{k4}$ :

$$\sum_{l=2,4} ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})u_{kl} = \Sigma_{1k};$$

$$\sum_{l=2,4} (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})u_{kl} = T_{1k}.$$

И затем вторая пара уравнений относительно  $u_{k1}$  и  $u_{k3}$ :

$$\begin{aligned} & ((\gamma_1 + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} n q_{k1}) u_{k1} + ((\gamma_3 + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} n q_{k3}) u_{k3} / b^2 = \\ & = -((\gamma_4 + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} n q_{k4}) u_{k4} + ((\gamma_2 + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} n q_{k2}) u_{k2} / b^2 / b^{2n}; \\ & (-\bar{\mu} n + \bar{\mu} (\gamma_1 - 1) q_{k1}) u_{k1} + (-\bar{\mu} n + \bar{\mu} (\gamma_3 - 1) q_{k3}) u_{k3} / b^2 = \\ & = -((-\bar{\mu} n + \bar{\mu} (\gamma_4 - 1) q_{k4}) u_{k4} + (-\bar{\mu} n + \bar{\mu} (\gamma_2 - 1) q_{k2}) u_{k2} / b^2) / b^{2n}. \end{aligned}$$

Этими неизвестными в итоге можно пренебречь. Решим систему относительно  $u_{k2}$  и  $u_{k4}$ . После вычисления коэффициентов эту систему можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (n+1)u_{k2} + \frac{(n-1)(n+2)}{(n+2\bar{\mu}/(\bar{\lambda} + \bar{\mu}))} u_{k4} &= -\Sigma_{1k} / (2\bar{\mu}); \\ (n+1)u_{k2} + \frac{(n-1)n}{(n+2\bar{\mu}/(\bar{\lambda} + \bar{\mu}))} u_{k4} &= -T_{1k} / (2\bar{\mu}). \end{aligned}$$

Из нее следуют решения:

$$\begin{aligned} u_{k4} &= \frac{(n+2\bar{\mu}/(\bar{\lambda} + \bar{\mu}))(T_{1k} - \Sigma_{1k})}{4\bar{\mu}(n-1)}; \quad u_{k2} = \frac{n\Sigma_{1k} - (n+2)T_{1k}}{4\bar{\mu}(n+1)}; \\ \Sigma_{1k} &= -2P_a g_k b^2 / (b^2 - 1); \quad T_{1k} = 2nP_a b^2 g_k / (b^2 - 1) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u_{k2} &= -\frac{P_a g_k}{2\bar{\mu}} \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \frac{n(n+3)}{(n+1)}; \\ u_{k4} &= \frac{P_a g_k}{2\bar{\mu}} \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \frac{(n+2\bar{\mu}/(\bar{\lambda} + \bar{\mu}))(n+1)}{(n-1)}. \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов Фурье напряжений принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{1k} &= P_a g_k \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \left( \frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{(n+1)(n+2)}{r^n} \right); \\ \tau_{1k} &= P_a g_k \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \left( \frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{n(n+1)}{r^n} \right); \\ s_{1k} &= -P_a g_k \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \left( \frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{(n+1)(n-2)}{r^n} \right). \end{aligned}$$

Значение  $\sigma_{10}$ , соответствующее малой осесимметричной добавке в нагрузку на внутренний контур из-за отклонения его формы от окружности, определим отдельно:

$$\sigma_{10}|_{r=1} = -2P_a \frac{g_0}{2} \frac{b^2}{(b^2 - 1)} = -2P_a \frac{N\theta_0}{\pi} \frac{b^2}{(b^2 - 1)}.$$

Эту поправку, умноженную на  $\varepsilon$ , можно включить в исходное давление  $P_a$ , приложенное к внутреннему контуру. Таким образом, осесимметричное решение следует строить, исходя из нормальной нагрузки, равной  $-P_a^*$ , где

$$P_a^* = P_a \left( 1 + \varepsilon \frac{2\theta_0}{(\pi/N)} \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \right).$$

Окончательное решение для радиальных и касательных напряжений примет вид:

$$1 + \varepsilon g(\theta) \leq r \leq b; \quad -\pi/N \leq \theta \leq \pi/N;$$

$$\begin{aligned} \sigma(r, \theta) &= \sigma_0^*(r) + \varepsilon P_a \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left( \frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{(n+1)(n+2)}{r^n} \right) \times \\ & \quad \times \cos(kN\theta); \\ s(r, \theta) &= s_0^*(r) - \\ & - \varepsilon P_a \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left( \frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{(n+1)(n-2)}{r^n} \right) \cos(kN\theta); \\ \tau(r, \theta) &= \varepsilon P_a \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left( \frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{n(n+1)}{r^n} \right) \sin(kN\theta); \\ \sigma_0^*(r) &= -\frac{P_a^*}{(b^2 - 1)} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right); \quad s_0^*(r) = \frac{P_a^*}{(b^2 - 1)} \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 \right); \\ g_k &= \frac{\sin(kN\theta_0)}{k} \frac{\pi/2}{(\pi/2 + kN\delta)} \frac{\sin(\pi/2 - kN\delta)}{(\pi/2 - kN\delta)}, \quad n = kN. \end{aligned}$$

Таким образом, с использованием метода разложения по малому параметру удалось получить решение достаточно сложной двумерной задачи теории упругости в виде рядов Фурье с известными коэффициентами, которые можно просуммировать численно, добившись практической сходимости сумм конечного числа членов ряда.

**Примеры расчетов.** Расчеты были проведены для следующих значений параметров задачи:

$$\begin{aligned} N &= 12; \quad b = 1,33; \quad \theta_0 = 0,0653\pi / N = 0,171; \\ \pi / N &= 0,262; \quad P_a = 0,001; \quad d = 0,163\theta_0 = 0,028; \\ \theta_1 &= \theta_0 - \delta = 0,143; \quad \theta_2 = \theta_0 + \delta = 0,199. \end{aligned}$$

При суммировании рядов Фурье практическая сходимость с большим запасом достигалась при  $k_{\max} \sim 30$ .

На рисунках 4–7 показаны линии уровня компонент напряжений  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $s$  и корня из второго инварианта девиатора тензора напряжений:

$$\sqrt{I_2} = \sqrt{((\sigma - s)^2 + (\sigma - \Sigma)^2 + (s - \Sigma)^2 + 6\tau^2) / 6},$$

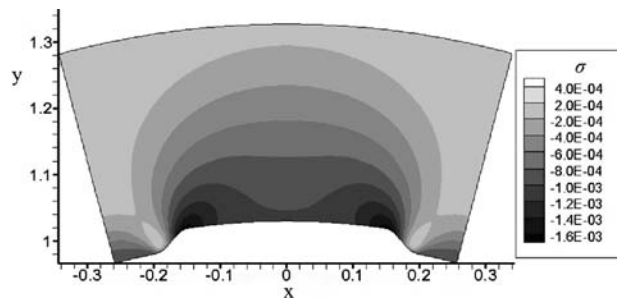


Рисунок 4 — Напряжение  $\sigma$

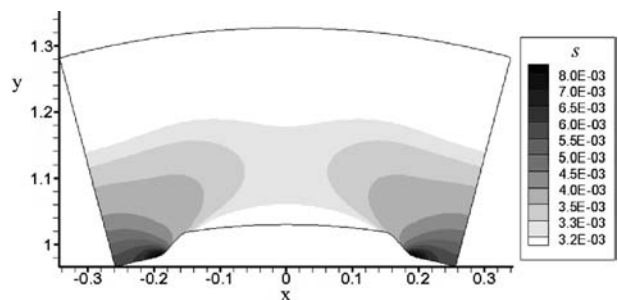


Рисунок 5 — Напряжение  $\tau$



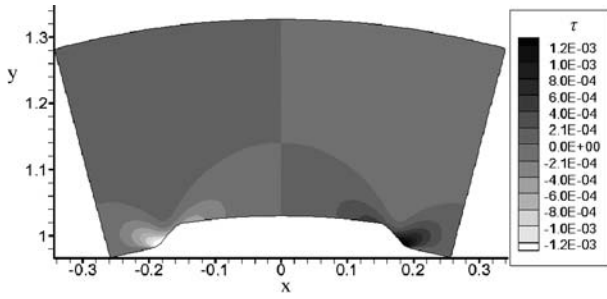


Рисунок 6 — Напряжение  $s$

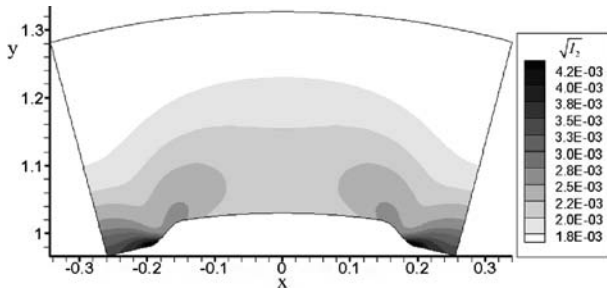
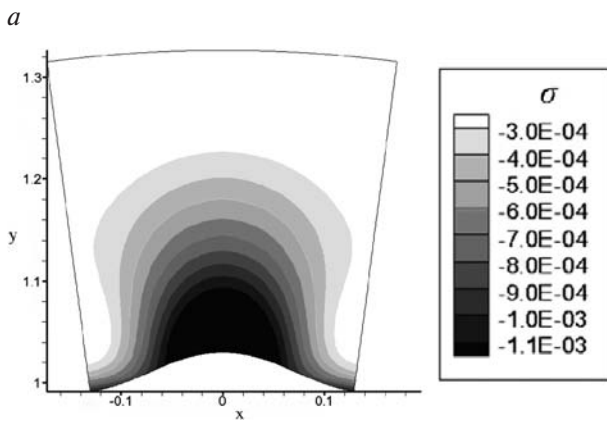
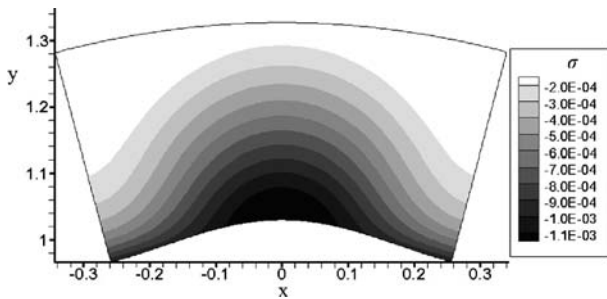


Рисунок 7 — Интенсивность  $\sqrt{I_2}$

определяющего начало процесса пластического течения. Показан сектор поперечного сечения цилиндра для  $0 \leq |\theta| \leq \pi/N$  и  $1 \leq r \leq 1,33$ . В окрестности линии излома внутреннего контура хорошо видна зона концентрации напряжений, особенно для  $\tau$ ,  $s$  и  $\sqrt{I_2}$ .

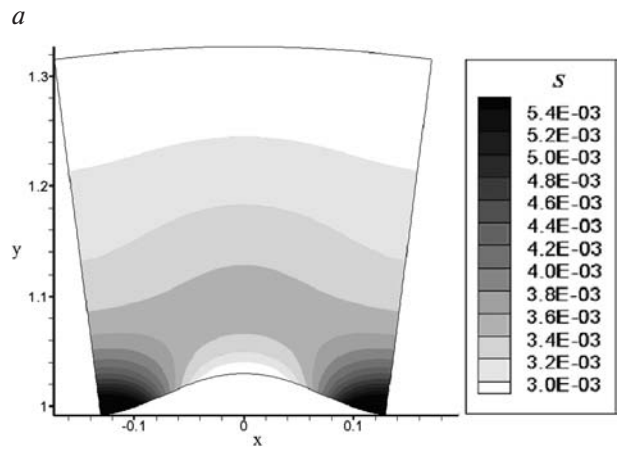
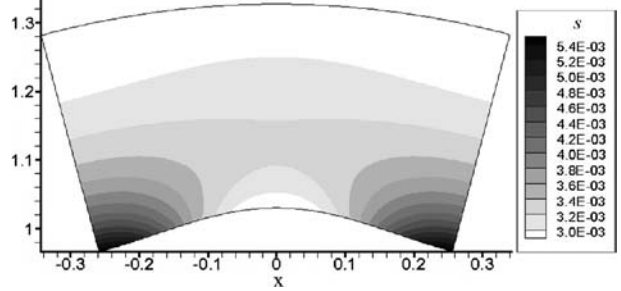
На рисунках 8–10 показаны примеры расчетов полей напряжений для внутренней поверхности цилиндра, представляющей собой чистую косинусоиду  $\theta_0 = \pi / (2N)$ ,  $\delta = \theta_0$ . Показаны результаты для  $N = 12$  и  $N = 24$ .



б

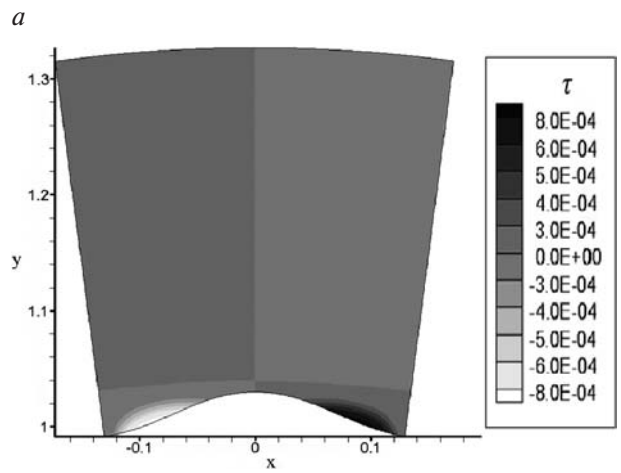
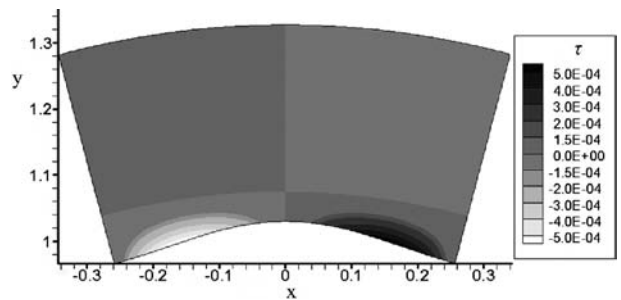
Рисунок 8 — Распределение  $\sigma$  для  $N = 12$  (а) и  $N = 24$  (б)

Во всех рассмотренных случаях особый интерес представляют компоненты касательных напряжений  $\tau$  и их максимальный уровень в зонах резкого изменения кривизны внутреннего контура



б

Рисунок 9 — Распределение  $s$  для  $N = 12$  (а) и  $N = 24$  (б)



б

Рисунок 10 — Распределение  $\tau$  для  $N = 12$  (а) и  $N = 24$  (б)

ра. Сравнивая эти значения с пределом прочности материала, можно оценить допустимый уровень внутреннего давления на внутреннюю поверхность цилиндра.

**Выводы.** В работе с использованием метода возмущений предложено простое решение задачи о квазистатическом напряженно-деформированном состоянии толстых цилиндров (труб) переменной толщины под действием внутреннего давления. Исследован случай, соответствующий многим прикладным задачам, когда внутренний контур цилиндра немного отличается от окружности. Определено напряженно-деформированное состояние и концентрация напряжений в окрестности участков относительно малого радиуса кривизны внутреннего контура упругого цилиндра. Решение получено в виде относительно простых формул для быстро сходящихся рядов, представляющих двумерные распределения компонент напряжений.

Предложенный метод значительно облегчает проведение параметрических расчетов по определению оптимальных условий эксплуатации и получению оценки квазистатической или циклической (усталостной) прочности элемента конструкции.

*Работа поддержана грантом РФФИ 15-08-02392-а.*

#### Список литературы

1. Прочность, устойчивость, колебания / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. — М.: Машиностроение, 1968. — Т. 2. — 463 с.
2. Биргер, И.А. Стержни, пластины, оболочки / И.А. Биргер. — М.: Физматлит, 1992. — 392 с.
3. Адрианов, И.В. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек / И.В. Адрианов, В.А. Лесничая, Л.И. Маневич. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
4. Карпов, В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. / В.В. Карпов. — М.: Физматлит, 2010. — Ч. 1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. — 286 с.
5. Карпов, В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. / В.В. Карпов. — М.: Физматлит, 2011. — Ч. 2: Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. — 248 с.
6. Бурого, Н.Г. Численное решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет программ АСТРА/Н.Г. Бурого // Вычислительная механика твердого деформируемого тела / Н.Г. Бурого, В.Н. Кукуджанов. — М.: Наука, 1991. — С. 78–122.
7. SolidWorks. Компьютерное моделирование в инженерной практике / А.А. Алямовский [и др.]. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
8. Бурого, Н.Г. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций / Н.Г. Бурого, А.Б. Журавлев, И.С. Никитин // Изв. РАН. МТТ. — 2011. — № 6. — С. 22–33.
9. Иноземцев, А.А. Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок / А.А. Иноземцев, М.А. Нихамкин, В.Л. Сандрацкий. — М.: Машиностроение, 2008. — 204 с.
10. Найфэ, А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ. — М.: Мир, 1984. — 535 с.
11. Демьянушко, И.В. Расчет на прочность вращающихся дисков / И.В. Демьянушко, И.А. Биргер. — М.: Машиностроение, 1978. — 247 с.
12. Бурого, Н.Г. Долговечность дисков переменной толщины с учетом анизотропии усталостных свойств / Н.Г. Бурого, И.С. Никитин, П.А. Юшковский // Изв. РАН. МТТ. — 2015. — № 5. — С. 84–98.
13. Бурого, Н.Г. Численно-аналитический метод расчета колебаний упругого диска переменной толщины / Н.Г. Бурого, И.С. Никитин, П.А. Юшковский // Актуальные проблемы механики. 50 лет ИПМех РАН им А.Ю. Ишлинского: сб. статей. — М.: Наука, 2015. — С. 489–497.
14. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1975. — 872 с.

BURAGO Nikolay G., D. Sc. in Phys.-Math.

Leading Researcher

E-mail: buragong@yandex.ru

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

NIKITIN Ilya S., D. Sc. in Phys.-Math.

Director

E-mail: i\_nikitin@list.ru

Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Received 19 June 2017.*

## ECONOMICAL NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD FOR CALCULATING THREE-DIMENSIONAL DEFORMATIONS OF ELASTIC PIPES OF VARIABLE CROSS SECTION

*In this paper it is shown that the problem of quasistatic three-dimensional stress-strain state of elastic pipes of a variable cross-section under the influence of internal pressure can be solved economically and quickly by a numerical-analytical rapid analysis method based on perturbation theory and the expansion of the solution with respect to a small parameter.*

**Keywords:** elastic pipes, variable cross-section, internal pressure, perturbation theory, series, small parameter

## References

1. Birger I.A., Panovko Ya.G. *Prochnost, ustoichivost, kolebaniya* [Strength, Stability, Vibrations]. Moscow, Mashinostroenie. 1968. 463 p.
2. Birger I.A. *Sterzhni, plasty, obolochki* [Rods, plates, shells]. Moscow, Fizmatlit, 1992. 392 p.
3. Adrianov I.V., Lesnichaya V.A., Manevich L.I. *Metod usredneniya v statike i dinamike rebristyh obolochek* [Method of Averaging in the Statics and Dynamics of Ribbed Shells]. Moscow, Nauka, 1985. 224 p.
4. Karpov V.V. *Prochnost i ustoichivost podkreplennykh obolochek vrascheniya: v 2 ch. Ch.1: Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoichivosti podkreplennykh obolochek vrascheniya* [Strength and stability of reinforced shells of rotation: in 2 parts. Part 1: Models and algorithms for studying the strength and stability of reinforced shells of revolution]. Moscow, Fizmatlit. 2010. 286 p.
5. Karpov V.V. *Prochnost i ustoichivost podkreplennykh obolochek vrascheniya: v 2 ch. Ch. 2: Vychislitelnyi eksperiment pri staticheskom mehanicheskom vozdeistvii* [Strength and stability of reinforced shells of rotation: in 2 parts. Part 2: Computational experiment with static mechanical action]. Moscow, Fizmatlit. 2011. 248 p.
6. Burago N.G., Kukudzhyanov V.N. *Chislennoe reshenie uprugoplasticheskikh zadach metodom konechnykh elementov. Paket programm ASTRA* [Numerical solution of elastic plastic problems by FEM. Application code ASTRA]. *Vychislitel'naya mehanika tverdogo deformiruемого tela* [Computer mechanics of Solids]. Moscow, Nauka. 1991, pp. 78–122.
7. Alyamovskiy A.A., Sobachkin A.A., Odincov E.V., Haritonovich A.I., Ponomarev N.B. *Kompyuternoe modelirovanie v inzhenernoi praktike* [Computer modeling in Engineering]. Saint-Petersburg, BHV-Peterburg. 2006.
8. Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. *Modeli mnogosloynnogo ustalostnogo razrusheniya i ozenka dolgovechnosti elementov konstruktsiy* [Models of multiaxial fatigue and life time estimation of structural elements]. *Izvestiya RAN. Mehanika tverdykh tel* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 2011, no. 6, pp. 22–33.
9. Inozemcev A.A., Nihamkin M.A., Sandrackiy V.L. *Dinamika i prochnost aviacionnykh dvigateley i energeticheskikh ustanovok* [Design principles for aviation engines and power plants]. Moscow, Mashinostroenie. 2008. 204 p.
10. Naife A. *Vvedenie v metody vozmushcheniy* [Introduction to the perturbation theory methods]. Moscow, Mir. 1984. 535 p.
11. Demyanushko I.V., Birger I.A. *Raschet na prochnost vraschayuschihysya diskov* [Calculation of the strength of rotating discs]. Moscow, Mashinostroenie. 1978. 247 p.
12. Burago N.G., Nikitin I.S., Yushkovskiy P.A. *Dolgovechnost diskov peremennoi tolschiny s uchedom anizotropii ustalostnykh svoystv* [Lifetime of disks of variable thickness with anisotropy of fatigue properties taken into account]. *Izvestiya RAN. Mehanika tverdykh tel* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 2015, no. 5, pp 84–98.
13. Burago N.G., Nikitin I.S., Yushkovskiy P.A. *Chislenno-analiticheskiy metod rascheta kolebaniy uprugogo diska peremennoi tolschiny* [Numerical-analytical method for calculation of vibrations of disks of variable thickness]. *Aktualnye problemy mehaniki* [Actual problems of mechanics], Moscow, Akademizdatcentr, 2015, pp. 489–497.
14. Novackiy W. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p.