ВСЕРОССИЙСКАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ
МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

УДК: 539.374

КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ НА МЕЖСЛОЙНЫХ ГРАНИЦАХ

CONTINUUM MODEL OF THE LAYERED MEDIUM WITH VISCOUS FRICTION ON THE INTERLAYER BOUNDARIES

Н. Г. БУРАГО, И. С. НИКИТИН

N. G. BURAGO, I. S. NIKITIN

ИПМех РАН им. А Ю. Ишлинского, г. Москва

ИАП РАН, г. Москва

МГТУ им. Н Э. Баумана, г. Москва

Аннотация. В данной работе на основе асимптотического метода осреднения получены уравнения слоистой среды с проскальзыванием с учетом членов второго порядка по малому параметру толщины слоя. Использованы линейное и нелинейное условия проскальзывания, связывающие скачки касательных скоростей на контактных границах и касательные напряжения (линейное и нелинейное вязкое трение).

Abstract. In this paper the equations of the layered medium with the terms of the second order of the layer thickness small parameter are obtained taking into account the slippage and based on the asymptotic method of homogenization. The linear and nonlinear conditions of slippage are used connecting jumps of the tangential velocities at the contact boundary and shear stresses (linear and nonlinear viscous friction).

Ключевые слова: слоистая среда, метод осреднения, вязкое трение.

Keywords: layered medium, homogenization method, viscous friction.

1. Уточненная модель с линейной вязкостью

В декартовой прямоугольной системе координат $x_1,\ x_2,\ x_3$ рассмотрим безграничную слоистую среду. Ось x_3 перпендикулярна плоскопараллельным границам раздела слоев. Границы раздела имеют координаты $x_3 = x^{(s)} = s\varepsilon$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где постоянная толщина слоя $\varepsilon << 1$ является малым параметром.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-08-02392-а).

Полагаем, что на границах слоев выполняются условия скольжения, межслойная граница всегда поджата и выполнено линейное условие вязкого трения

$$\sigma_{33} < 0, \quad [u_3] = [\sigma_{\gamma 3}] = [\sigma_{33}] = 0, \quad \sigma_{\gamma 3} = \eta [v_\gamma]/\varepsilon$$

Здесь u_k - компоненты вектора смещений, v_k - компоненты вектора скорости, $v_k = u_{k,t}$, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, η - коэффициент эффективной вязкости на границе слоев. Квадратные скобки $[f] = f|_{x^{(s)}+0} - f|_{x^{(s)}-0}$ обозначают скачок величины f на межслойной границе. Здесь и далее греческие индексы $(\beta,\ \gamma)$ принимают значения 1 и 2, латинские индексы – значения 1,2,3. Для компактности формул дифференцирование обозначено следующим образом

$$\partial(...)/\partial x_j = (...)_{,j}, \quad \partial(...)/\partial t = (...)_{,t} \quad \partial(...)/\partial \xi = (...)_{,\xi}$$

Слои изотропны, упруги и подчинены закону Гука (при $x_3 \neq x^{(s)}$)

$$\sigma_{ij,j} - \rho u_{i,tt} = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}$$

где $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ - тензор модулей упругости. Начальные условия имеют вид: $u_k|_{t=0} = v_k|_{t=0} = 0$.

Введем в соответствии с методом асимптотического осреднения [1] «быструю» переменную $\xi = x_3/\varepsilon$. Считаем, что функция $u_k = u_k(x_l, \xi, t)$ является гладкой и по «медленным» переменным x_l, и по «быстрой» переменной ξ, а в точках $\xi^{(s)} = x^{(s)}/\varepsilon$ может терпеть разрывы первого рода. Кроме того, по ξ она является 1-периодической: $[[u_i]] = u_i|_{\xi^{(s)}+1/2} - u_i|_{\xi^{(s)}-1/2} = 0$. С учетом такого выбора аргументов и правила дифференцирования сложной функции, перепишем систему на ячейке периодичности $x^{(s)} - 1/2 \leq x_3 \leq x^{(s)} + 1/2$, $-1/2 \leq \xi \leq 1/2$. При $x_3 \neq x^{(s)}$, $\xi \neq 0$ уравнения имеют вид

$$\varepsilon^{-2} C_{i3k3} u_{k,\xi\xi} + \varepsilon^{-1}(C_{ijk3} u_{k,j\xi} + C_{i3kl} u_{k,l\xi}) + C_{ijkl} u_{k,lj} - \rho u_{i,tt} = 0$$

Имеем также контактные условия при $x_3 = x^{(s)}$, $\xi = 0$: $\varepsilon^{-1} C_{33k3} u_{k,\xi} + C_{33kl} u_{k,l} < 0$, $[u_3] = 0$, $[\varepsilon^{-1} C_{i3k3} u_{k,\xi} + C_{i3kl} u_{k,l}] = 0$, $\varepsilon^{-1} C_{\gamma 3k3} u_{k,\xi} + C_{\gamma 3kl} u_{k,l} = \varepsilon^{-1} \eta [u_{\gamma,t}]$ и условия 1-периодичности: $[[u_i]] = u_i|_{\xi+1/2} - u_i|_{\xi-1/2} = 0$. Представим смещения среды в виде ряда по степеням малого параметра ε: $u_i = w_i(x_k, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^3 u_i^{(3)}(x_k, \xi, t) + ...$

Введем операцию «осреднения» $\langle f \rangle$ для функции «быстрой» переменной ξ, которая будет часто использоваться в дальнейшем: $\langle f \rangle = \int\limits_{-1/2}^{1/2} f d\xi$. Приближения смещений должны удовлетворять дополнительному условию $\left\langle u_k^{(n)} \right\rangle = 0$ [1].

Подставляя это представление в уравнения теории упругости и приравнивая к нулю член при отрицательной степени ε^{-1}, получим, что в первом приближении $C_{i3k3} u_{k,\xi\xi}^{(1)} = 0$ и система уравнений примет вид:

$$C_{ijkl} w_{k,jl} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(1)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(1)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(2)})_{,\xi} +$$

$$+ \varepsilon \left[C_{ijkl} u_{k,jl}^{(1)} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(2)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(2)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(3)})_{,\xi} \right] +$$

$$+\varepsilon^2\left[C_{ijkl}u^{(2)}_{k,jl}+C_{ijk3}u^{(3)}_{k,j\xi}+\left(C_{i3kl}u^{(3)}_{k,l}+C_{i3k3}u^{(4)}_{k,\xi}\right)_{,\xi}\right]+...=$$
$$=\rho w_{i,tt}+\varepsilon\rho u^{(1)}_{i,tt}+\varepsilon^2\rho u^{(2)}_{i,tt}+...$$

Разложению компонент смещений соответствует разложение компонент тензора напряжений: $\sigma_{ij}=\sigma^{(0)}_{ij}+\varepsilon\sigma^{(1)}_{ij}+\varepsilon^2\sigma^{(2)}_{ij}+...$, где $\sigma^{(n)}_{ij}=C_{ijkl}u^{(n)}_{k,l}+C_{ijk3}u^{(n+1)}_{k,\xi}$ $(n=0,1,2,..)$. Все приближения напряжений являются 1-периодическими функциями ξ. В частности, выполняются условия $[\sigma^{(n)}_{i3}]=0$, $[[\sigma^{(n)}_{i3}]]=0$. Легко видеть, что $\left\langle \sigma^{(n)}_{i3}{}_{,\xi}\right\rangle=0$.

Выведем уточненную теорию второго порядка, для этого в системе уравнений удержим члены порядка ε^2. Применяя операцию осреднения по ячейке периодичности $\langle\ \rangle$ к системе уравнений, получим искомый результат:

$$C_{ijkl}w_{k,jl}+C_{ijk3}\left\langle u^{(1)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j}+\varepsilon C_{ijk3}\left\langle u^{(2)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j}+\varepsilon^2 C_{ijk3}\left\langle u^{(3)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j}=\rho w_{i,tt}$$

Каждая из функций $u^{(n)}_i(x_k,\xi,t)$ $(n=1,2,3)$, находится из соответствующей «задачи на ячейке периодичности» при $-1/2\le\xi\le 1/2$ [1,2]. Эти задачи сформулированы и в общем виде решены в [2] с точностью до некоторых функций, которые определяются из условий проскальзывания. Определим эти функции для условий линейного вязкого трения.

Решение задачи на ячейке 1

Решение для первого приближения касательных смещений будет выглядеть следующим образом [2]: $u^{(1)}_\gamma=\varphi_\gamma(\xi-sign\xi/2)$. Функции φ_γ определяются из условия на скачок касательных скоростей $\eta[u^{(1)}_{\gamma,t}]=\mu(w_{\gamma,3}+w_{3,\gamma})+\mu u^{(1)}_{\gamma,\xi}$, из которого следует дифференциальное уравнение для φ_γ: $\eta\varphi_{\gamma,t}+\mu\varphi_\gamma=-\tau_\gamma$, где $\tau_\gamma=\mu(w_{\gamma,3}+w_{3,\gamma})$. Учитывая начальные условия, находим $\varphi_\gamma=-\int\limits_0^t\tau_\gamma e^{-\mu(t-t_1)/\eta}dt_1/\eta$. Усредненные производные имеют вид: $\left\langle u^{(1)}_{3,\xi}\right\rangle=0$, $\left\langle u^{(1)}_{\gamma,\xi}\right\rangle=\varphi_\gamma$.

Решение задачи на ячейке 2

Для выбранного условия проскальзывания, как и в [2], можно показать, что решение для второго приближения касательных смещений будет выглядеть следующим образом: $u^{(2)}_\gamma=-\psi_\gamma(\xi^2-\xi sign\xi+1/6)/2$, $\quad\psi_\gamma=\varphi_{\gamma,3}$. Усредненные производные равны нулю: $\left\langle u^{(2)}_{3,\xi}\right\rangle=\left\langle u^{(2)}_{\gamma,\xi}\right\rangle=0$.

Решение задачи на ячейке 3

Решение для третьего приближения касательных смещений будет выглядеть следующим образом [2]:

$u^{(3)}_\gamma=\chi_\gamma\left(\xi^3/6-\xi^2 sign\xi/4+b_\gamma\xi+c^\pm_\gamma\right)$,

$[u^{(3)}_\gamma]=\chi_\gamma\left(1/12-b_\gamma\right)$, $\quad c^+_\gamma-c^-_\gamma=1/12-b_\gamma$

$\chi_\gamma=-\varphi_{\gamma,ll}-(\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/\mu+2\psi_{\gamma,3}+(\lambda+\mu)\psi_{3,\gamma}/\mu+\rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu$

Функции b_γ определяются из условия на скачок касательных скоростей $\eta[u^{(3)}_{\gamma,t}]=\eta\Omega_{\gamma,t}=\mu(\chi_\gamma b_\gamma-\psi_{\gamma,3}/12-\psi_{3,\gamma}/12)$, где $\Omega_\gamma=\chi_\gamma\left(1/12-b_\gamma\right)$. Отсюда следует дифференциальное уравнение для Ω_γ: $\eta\Omega_{\gamma,t}+\mu\Omega_\gamma=\mu g_\gamma$, где $g_\gamma=(\chi_\gamma-\psi_{\gamma,3}-\psi_{3,\gamma})/12$.

Для нулевых начальных условий $\Omega_\gamma = \int\limits_0^t \mu g_\gamma e^{-\mu(t-t_1)/\eta} dt_1/\eta$. Усредненные производные имеют вид: $\left\langle u^{(3)}_{3,\xi} \right\rangle = 0$, $\left\langle u^{(3)}_{\gamma,\xi} \right\rangle = -\Omega_\gamma$.

В результате уточненная система уравнений запишется так:

$$(\lambda+\mu) w_{k,k\gamma} + \mu w_{\gamma,kk} + \mu \varphi_{\gamma,3} - \varepsilon^2 \mu \Omega_{\gamma,3} = \rho w_{\gamma,tt}$$

$$(\lambda+\mu) w_{k,k3} + \mu w_{3,kk} + \mu \varphi_{\beta,\beta} - \varepsilon^2 \mu \Omega_{\beta,\beta} = \rho w_{3,tt}$$

$$\varphi_\gamma = -\int\limits_0^t \tau_\gamma e^{-\mu(t-t_1)/\eta} dt_1/\eta, \quad \tau_\gamma = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}), \quad \psi_\gamma = \varphi_{\gamma,3}$$

$$\chi_\gamma = -\varphi_{\gamma,ll} - (\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/\mu + 2\psi_{\gamma,3} + (\lambda+\mu)\psi_{3,\gamma}/\mu + \rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu$$

$$\Omega_\gamma = \int\limits_0^t \mu g_\gamma e^{-\mu(t-t_1)/\eta} dt_1/\eta, \quad g_\gamma = (\chi_\gamma - \psi_{\gamma,3} - \psi_{3,\gamma})/12$$

2. Уточненная модель с нелинейной вязкостью

Рассмотрим случай проскальзывания между слоями с условиями нелинейной вязкости. Эти условия можно сформулировать различными способами. Выберем условия, моделирующие явление вязкопластичности. При этом предполагается, что до какого-то предельного уровня касательных напряжений σ_s на межслойных границах проскальзывания не происходит, а при превышении этого уровня появляется возможность вязкого проскальзывания. Чтобы избежать громоздких выкладок выберем относительно простую форму такого условия проскальзывания: $\eta[v_\gamma]/\varepsilon = \sigma_{\gamma 3} H\left(\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3}/{\sigma_s}^2 - 1\right)$. Здесь $H(y)$ - функция Хэвисайда, $H(y) = 0$ при $y < 0$, $H(y) = 1$ при $y \geq 0$. Однако процедура подстановки асимптотических разложений скоростей и напряжений в сильно нелинейное (разрывное) условие проскальзывания не является корректной. Поэтому видоизменим это условие, «размазав» функцию Хэвисайда $H(y)$ на некоторую «эффективную» ширину d: $\eta[v_\gamma]/\varepsilon = \sigma_{\gamma 3} H_d\left(\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3}/{\sigma_s}^2 - 1\right)$ Здесь $H_d(y)$ - гладкая функция, $H_d(y) \to H(y)$ при $d \to 0$. Для определенности примем конкретное (одно из возможных) выражение для этой функции:

$$H_d(y) = 1/2 + arctg\,(y/d)\,/\pi, \quad H_d'(y) = \frac{1}{\pi\kappa}, \quad H_d''(y) = -\frac{y}{\pi\kappa^3}, \quad \kappa = \sqrt{d^2+y^2}$$

Подставим разложения скоростей и напряжений в условие проскальзывания:

$$\eta\left([v^{(1)}_\gamma] + \varepsilon[v^{(2)}_\gamma] + \varepsilon^2[v^{(3)}_\gamma] + ...\right) = \left(\sigma^{(0)}_{\gamma 3} + \varepsilon\sigma^{(1)}_{\gamma 3} + \varepsilon^2\sigma^{(2)}_{\gamma 3} + ...\right) H_1$$

где

$$H_1 = H_d\left(\left((\sigma^{(0)}_{\beta 3} + \varepsilon\sigma^{(1)}_{\beta 3} + \varepsilon^2\sigma^{(2)}_{\beta 3})(\sigma^{(0)}_{\beta 3} + \varepsilon\sigma^{(1)}_{\beta 3} + \varepsilon^2\sigma^{(2)}_{\beta 3})/\sigma_s^2 - 1\right)/d\right)$$

Аргумент функции H_d с точностью до членов порядка ε^2 имеет вид:

$$y = \Delta_0 + \varepsilon\left(2\sigma^{(0)}_{\beta 3}\sigma^{(1)}_{\beta 3}/\sigma_s^2\right) + \varepsilon^2\left(2\sigma^{(0)}_{\beta 3}\sigma^{(2)}_{\beta 3} + \sigma^{(1)}_{\beta 3}\sigma^{(1)}_{\beta 3}\right)/\sigma_s^2$$

где $\Delta_0 = \sigma^{(0)}_{\beta 3}\sigma^{(0)}_{\beta 3}/\sigma_s^2 - 1$. Функцию $H_d(y/d)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности значения Δ_0, ограничиваясь членами порядка ε^2:

$$H_d = H_d\left(\Delta_0/d\right) + \varepsilon \frac{2\sigma^{(0)}_{\beta 3}\sigma^{(1)}_{\beta 3}/\sigma_s^2}{\pi\sqrt{d^2+{\Delta_0}^2}} + \varepsilon^2\left(\frac{\left(2\sigma^{(0)}_{\beta 3}\sigma^{(2)}_{\beta 3} + \sigma^{(1)}_{\beta 3}\sigma^{(1)}_{\beta 3}\right)}{\sigma_s^2\left(\pi\sqrt{d^2+{\Delta_0}^2}\right)} - \frac{2\Delta_0\left(\sigma^{(0)}_{\beta 3}\sigma^{(1)}_{\beta 3}/\sigma_s^2\right)^2}{\pi\sqrt{(d^2+{\Delta_0}^2)^3}}\right)$$

Из этого ряда видно, что для сохранения порядков членов асимптотического разложения в зоне перехода к вязкопластичности $\Delta_0 \sim \varepsilon$, нельзя допускать малых значений параметра d, $d \sim O(1)$. С учетом этих представлений условия проскальзывания различного порядка по ε запишутся в виде

$$\eta[u^{(1)}_{\gamma,t}] = \sigma^{(0)}_{\gamma 3} H_d\left(\Delta_0/d\right)$$

$$\eta[u^{(2)}_{\gamma,t}] = \sigma^{(1)}_{\gamma 3} H_d\left(\Delta_0/d\right) + \sigma^{(0)}_{\gamma 3}\left(2\sigma^{(0)}_{\beta 3}\sigma^{(1)}_{\beta 3}/\sigma_s^2\right) / \left(\pi\sqrt{d^2+{\Delta_0}^2}\right)$$

$$\eta[u^{(3)}_{\gamma,t}] = \sigma^{(2)}_{\gamma 3} H_d\left(\Delta_0/d\right) + \sigma^{(1)}_{\gamma 3}\left(2\sigma^{(0)}_{\beta 3}\sigma^{(1)}_{\beta 3}/\sigma_s^2\right) / \left(\pi\sqrt{d^2+{\Delta_0}^2}\right) +$$

$$+\sigma^{(0)}_{\gamma 3}\left(\left(2\sigma^{(0)}_{\beta 3}\sigma^{(2)}_{\beta 3}/\sigma_s^2\right) / \left(\pi\sqrt{d^2+{\Delta_0}^2}\right) - 2\Delta_0\left(\sigma^{(0)}_{\beta 3}\sigma^{(1)}_{\beta 3}/\sigma_s^2\right)^2 / \left(\pi\sqrt{(d^2+{\Delta_0}^2)^3}\right)\right)$$

Эти условия надо ввести в задачи на ячейке 1,2,3 из п. 1 вместо условий линейной вязкости, остальные соотношения в этих задачах останутся неизменными.

Решение задачи на ячейке 1

Уравнение для φ_γ (см. п.1) имеет вид: $\varphi_{\gamma,t} = -\sigma^{(0)}_{\gamma 3} H_d(\Delta_0/d)/\eta$, $\sigma^{(0)}_{\gamma 3} = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}) + \mu\varphi_\gamma$. Усредненные производные таковы: $\left\langle u^{(1)}_{\gamma,\xi}\right\rangle = \varphi_\gamma$, $\left\langle u^{(1)}_{3,\xi}\right\rangle = 0$.

Решение задачи на ячейке 2

Как и в п.1, можно показать, что усредненные производные равны нулю, $\left\langle u^{(2)}_{3,\xi}\right\rangle = 0$, $\left\langle u^{(2)}_{\gamma,\xi}\right\rangle = 0$. Также можно отметить, что при $\xi = 0$ $\sigma^{(1)}_{\gamma 3} = 0$.

Решение задачи на ячейке 3

Система уравнений для Ω_γ имеет вид:

$$\begin{aligned}&\eta\Omega_{\gamma,t} + \mu\Omega_\gamma H_d\left(\Delta_0/d\right) + \sigma^{(0)}_{\gamma 3}\left(2\mu\sigma^{(0)}_{\beta 3}\Omega_\beta/\sigma_s^2\right) / \left(\pi\sqrt{d^2+{\Delta_0}^2}\right) = \\ &= \mu g_\gamma H_d\left(\Delta_0/d\right) + \sigma^{(0)}_{\gamma 3}\left(2\mu\sigma^{(0)}_{\beta 3} g_\beta/\sigma_s^2\right) / \left(\pi\sqrt{d^2+{\Delta_0}^2}\right)\end{aligned}$$

Усредненные производные имеют вид: $\left\langle u^{(3)}_{\gamma,\xi}\right\rangle = -\Omega_\gamma$, $\left\langle u^{(3)}_{3,\xi}\right\rangle = 0$. Окончательно уточненная система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$(\lambda+\mu)w_{k,k\gamma} + \mu w_{\gamma,kk} + \mu\varphi_{\gamma,3} - \varepsilon^2\mu\Omega_{\gamma,3} = \rho w_{\gamma,tt}$$

$$(\lambda+\mu)w_{k,k3} + \mu w_{3,kk} + \mu\varphi_{\beta,\beta} - \varepsilon^2\mu\Omega_{\beta,\beta} = \rho w_{3,tt}$$

$$\varphi_{\gamma,t} = -\sigma^{(0)}_{\gamma 3} H_d(\Delta_0/d)/\eta, \quad \sigma^{(0)}_{\gamma 3} = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}) + \mu\varphi_\gamma$$

$$\begin{aligned}&\eta\Omega_{\gamma,t} + \mu\Omega_\gamma H_d\left(\Delta_0/d\right) + \sigma^{(0)}_{\gamma 3}\left(2\mu\sigma^{(0)}_{\beta 3}\Omega_\beta/\sigma_s^2\right) / \left(\pi\sqrt{d^2+{\Delta_0}^2}\right) = \\ &= \mu g_\gamma H_d\left(\Delta_0/d\right) + \sigma^{(0)}_{\gamma 3}\left(2\mu\sigma^{(0)}_{\beta 3} g_\beta/\sigma_s^2\right) / \left(\pi\sqrt{d^2+{\Delta_0}^2}\right)\end{aligned}$$

$$\Delta_0 = \sigma^{(0)}_{\beta 3}\sigma^{(0)}_{\beta 3}/\sigma_s^2 - 1, \quad \psi_\gamma = \varphi_{\gamma,3}, \quad g_\gamma = (\chi_\gamma - \psi_{\gamma,3} - \psi_{3,\gamma})/12$$
$$\chi_\gamma = -\varphi_{\gamma,ll} - (\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/\mu + 2\psi_{\gamma,3} + (\lambda+\mu)\psi_{3,\gamma}/\mu + \rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu$$

Таким образом, и для модели с нелинейной вязкостью в систему уравнений для смещений $w_i(x_k,t)$ вошли дополнительные функции φ_γ и Ω_γ. Для этих функций получены нелинейные дифференциальные уравнения. Вид этих уравнений напрямую связан с выбором условий на контактных границах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М. : Наука, 1984. – 352 с.

[2] *Бураго Н. Г., Никитин И. С., Юшковский П. А.* Уточненная континуальная модель слоистой среды с проскальзыванием на межслойных границах. – М. : Препринт № 1096: Институт Проблем Механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, 2015. – 30 с.

АВТОР:

Бураго Николай Георгиевич,

Ведущий научный сотрудник, д.ф.м.н., Институт Проблем Механики РАН им. А. Ю. Ишлинского, г. Москва; профессор, Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва.

e-mail: burago@ipmnet.ru

AUTHOR:

Burago, Nikolay Georgievich

Leading scientist, D.Sc., A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow; professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow.

АВТОР:

Никитин Илья Степанович,

ведущий научный сотрудник, д.ф.м.н., Институт Автоматизации Проектирования РАН, г. Москва; профессор, Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва.

e-mail: i_nikitin@list.ru

AUTHOR:

Nikitin, Ilia Stepanovich

Leading scientist, D.Sc., Institute for Computer Aided Design RAS, Moscow; professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow.