

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ¹

Бураго Н.Г., Никитин И.С., Юшковский П.А.

Целью исследования является расчет напряженно-деформированного состояния упругого диска переменной толщины при вибрации лопаток. Для этого разработан численно-аналитический метод решения трехмерных уравнений теории упругости. Решение представляется с помощью разложения в ряд Фурье, и коэффициенты находятся из краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль радиальной координаты. Полученные результаты могут быть использованы для расчета усталостного разрушения дисков газотурбинного двигателя.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, диск переменной толщины, высокочастотное нагружение, неявный конечно-разностный метод, ряды Фурье

Введение

Для определения сроков безопасной эксплуатации деталей и зон возможного разрушения с помощью критериев усталостной прочности необходим расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) деталей [1]. Диски турбинных двигателей на протяжении многих лет эксплуатации подвергаются циклическим нагружениям двух основных типов – полетным циклам (взлет-полет-посадка) и вибрациям. Расчет НДС дисков для полетных циклов рассмотрен в [2,3] с учетом переменной толщины дисков, центробежных и аэродинамических нагрузок. В данной работе описывается метод расчета НДС от вибрационных нагрузок.

Напряжения в дисках, обусловленные полетными циклами и вибрациями, существенно ниже пределов прочности и текучести, поэтому по классическим представлениям вообще не должны представлять опасности. Тем не менее, усталостное разрушение происходит даже при работе конструкции в пределах упругости до разрушения, если эта работа длится многие годы [1]. По указанным причинам для расчета долговечности по критериям усталостного разрушения вполне достаточно определять НДС диска по уравнениям теории упругости.

Полное НДС диска складывается из НДС полетных циклов (действие центробежных сил и аэродинамических давлений от набегающего на лопатки потока) и НДС вибраций (крутильные колебания лопаток). В принятой постановке мы не рассматриваем причины вибраций такие, как действие пульсаций давления, возбуждение собственных форм

¹ <P>Бураго Н.Г., Никитин И.С., Юшковский П.А. Численно-аналитический метод расчета колебаний упругого диска переменной толщины. Актуальные проблемы механики. 50 лет ИППМех РАН им. А.Ю. Ишлинского. Сборник статей. Москва. Академиздатцентр <Наука>. 2015г. С.489-497.</P>

колебаний лопаток, переходные режимы работы двигателя и так далее, а считаем вибрации заданными. Амплитуды и частоты вибраций приведены в [1].

В силу линейности задачи теории упругости НДС полетных циклов и НДС вибраций можно рассчитывать отдельно и затем суммированием получать полное НДС. Полные (суммарные) НДС от полетных циклов и вибраций для двух крайних положений лопатки при вибрационном кручении являются границами изучаемого циклического процесса, используемыми в критериях усталостной прочности.

1. Приближенная система уравнений для диска переменной толщины под действием периодической системы нагрузок на внешнем контуре.

В цилиндрической системе координат r, ϑ, z кольцевой диск $a \leq r \leq b$ имеет переменную толщину $2h(r)$, координата по толщине меняется в пределах $-h(r) \leq z \leq h(r)$. Система уравнений динамической теории упругости в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\vartheta z} = 2\mu\varepsilon_{\vartheta z}$$

Связь деформаций и смещений имеет вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\vartheta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} \right)$$

где λ, μ - упругие модули Ламе, ρ - плотность материала диска. В дальнейшем используются безразмерные напряжения, отнесенные к $\lambda + 2\mu$, и безразмерные пространственные переменные, отнесенные к внутреннему радиусу диска a .

Граничные условия на свободных поверхностях при $z = \pm h(r)$ имеют вид:

$$z = \pm h(r): \quad \sigma_{rz} - h' \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{g_z} - h' \sigma_{r_g} = 0, \quad \sigma_{zz} - h' \sigma_{rz} = 0$$

Внутренний контур считается закрепленным:

$$r = a: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

На внешнем контуре приложены периодические по окружной координате g и времени нагрузки $\sigma_{r\theta_b}$ и σ_{rz_b} , обусловленные крутильными колебаниями лопаток

$$r = b: \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta_b}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rz_b}$$

В силу периодичности всех искомым функций НДС по окружной координате g смещения ищем в виде рядов Фурье:

$$u_r = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (u_n z + u_{3n} z^3) \sin n g$$

$$u_g = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (v_n z + v_{3n} z^3) \cos n g$$

$$u_z = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (w_n + w_{2n} z^2 + w_{4n} z^4) \sin n g$$

Соответствующее представление напряжений имеет вид:

$$\sigma_{rr} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n z + \sigma_{3n} z^3) \sin n g$$

$$\sigma_{g_g} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (s_n z + s_{3n} z^3) \sin n g$$

$$\sigma_{zz} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (\Sigma_n z + \Sigma_{3n} z^3) \sin n g$$

$$\sigma_{r_g} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_n z + \tau_{3n} z^3) \cos n g$$

$$\sigma_{rz} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + p_{2n} z^2 + p_{4n} z^4) \sin n g$$

$$\sigma_{g_z} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (T_n + T_{2n} z^2 + T_{4n} z^4) \cos n g$$

Коэффициенты рядов Фурье являются новыми вспомогательными искомыми функциями радиальной переменной r , множитель $e^{i\omega t}$ задает вибрации.

Подставим выражения для смещений и напряжений в исходную систему и приравняем члены при одинаковых степенях z , вплоть до z^3 . В итоге получим разрешающую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных при различных $n=0,1,2,\dots$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_n}{dr} &= \left[\left(\frac{\lambda(1+h'^2)}{(1+\lambda)} - 1 \right) \frac{1}{r} - \frac{2h'}{h} \right] \sigma_n + \frac{n}{r} \tau_n + \frac{2}{h^2} p_n + \\
&\quad + \left[\frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \frac{1}{r^2} - \rho\omega^2 \right] u_n - \frac{n(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \frac{1}{r^2} v_n \\
\frac{d\tau_n}{dr} &= -\frac{n}{r} \frac{\lambda(1+h'^2)}{(1+\lambda)} \sigma_n - 2 \left(\frac{1}{r} + \frac{h'}{h} \right) \tau_n - \\
&\quad - \frac{n}{r^2} \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} u_n + \left[\frac{n}{r^2} \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} + \frac{2\mu}{h^2} - \rho\omega^2 \right] v_n + \frac{2\mu n}{h^2 r} w_n \\
\frac{dp_n}{dr} &= -h'^2 \sigma_n - \frac{1}{r} p_n + \mu \frac{n}{r} v_n + \left(\mu \frac{n^2}{r^2} - \rho\omega^2 \right) w_n \\
\frac{du_n}{dr} &= \frac{(1-\lambda h'^2)}{(1-\lambda^2)} \sigma_n - \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{1}{r} u_n + \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{n}{r} v_n \\
\frac{dv_n}{dr} &= \frac{1}{\mu} \tau_n - \frac{n}{r} u_n + \frac{1}{r} v_n \\
\frac{dw_n}{dr} &= \frac{1}{\mu} p_n - u_n
\end{aligned} \tag{1}$$

Подчеркнем, что данная система уравнений решается отдельно для каждой гармоники n . После того, как решения системы найдены, все остальные коэффициенты рядов Фурье для напряжений $\sigma_{3n}, s_n, s_{3n}, \Sigma_n, \Sigma_{3n}, \tau_{3n}, p_{2n,4}, T_{2n}, T_{4n}$ и смещений $u_{3n}, v_{3n}, w_{2n}, w_{4n}$ определяются по формулам

$$s_n = \frac{\lambda(1+h'^2)}{(1+\lambda)} \sigma_n + \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \frac{U_n}{r}$$

$$T_n = \mu v_n + \mu n w_n / r$$

$$w_{2n} = (\Sigma_n - \lambda u_n' - \lambda U_n / r) / 2$$

$$\Sigma_n = h'^2 \sigma_n + \Delta \Sigma_n, \quad \Delta \Sigma_n = h'^2 h^2 \sigma_{3n} - h^2 \Sigma_{3n}$$

$$T_{2n} = h' \tau_n / h - T_n / h^2 + \Delta T_{2n}, \quad \Delta T_{2n} = h' h \tau_{3n} - h^2 T_{4n}$$

$$p_{2n} = h' \sigma_n / h - p_n / h^2 + \Delta p_{2n}, \quad \Delta p_{2n} = h' h \sigma_{3n} - h^2 p_{4n}$$

$$u_{3n} = (p_{2n} / \mu - w_{2n}') / 3$$

$$v_{3n} = (T_{2n}' / \mu - n w_{2n}' / r) / 3$$

$$\tau_{3n} = \mu v_{3n}' - \mu V_{3n}' / r$$

$$\Sigma_{3n} = -\left(p_{2n}' - n T_{2n}' / r + p_{2n}' / r + \rho \omega^2 w_{2n}'\right) / 3$$

$$w_{4n} = (\Sigma_{3n} - \lambda u_{3n}' - \lambda U_{3n}' / r) / 4$$

$$\sigma_{3n} = u_{3n}' + \lambda U_{3n}' / r + 4 \lambda w_{4n}$$

$$s_{3n} = \lambda u_{3n}' + U_{3n}' / r + 4 \lambda w_{4n}$$

$$p_{4n} = -\left(\sigma_{3n}' - n \tau_{3n}' / r + (\sigma_{3n} - s_{3n}) / r + \rho \omega^2 u_{3n}'\right) / 4$$

$$T_{4n} = -\left(\tau_{3n}' + n s_{3n}' / r + 2 \tau_{3n}' / r + \rho \omega^2 v_{3n}'\right) / 4$$

где $U_n = -n v_n + u_n$, $V_n = -n u_n + v_n$, $U_{3n} = -n v_{3n} + u_{3n}$, $V_{3n} = -n u_{3n} + v_{3n}$

Отметим, что для того, чтобы получить замкнутую систему уравнений для вспомогательных искомых функций при каждом значении n в граничных условиях при $z = \pm h(r)$ пришлось пренебречь членами малого порядка по толщине h следующего вида:

$$\Delta \Sigma_n = h'^2 h^2 \sigma_{3n} - h^2 \Sigma_{3n}, \quad \Delta T_{2n} = h' h \tau_{3n} - h^2 T_{4n}, \quad \Delta p_{2n} = h' h \sigma_{3n} - h^2 p_{4n}.$$

В дальнейшем, прямыми численными расчетами была подтверждена малость этих отброшенных членов по сравнению с учтенными.

В работе [2] аналогичная система уравнений была выведена для расчета основного НДС диска переменной толщины для полетных циклов нагружения квазистатическими центробежными и аэродинамическими нагрузками.

2. Граничные условия для крутильных колебаний

Для расчета НДС диска, обусловленного крутильными колебаниями лопаток, краевые условия для вспомогательных переменных (коэффициентов Фурье) на радиальных границах $r = a$ и $r = b$ имеют вид

$$r = a: \quad u_n = 0, \quad v_n = 0, \quad w_n = 0$$

$$r = b: \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_n = \tau_{bn}, \quad p_n = p_{bn} \tag{2}$$

где τ_{bn} и p_{bn} заданные значения коэффициентов Фурье, учитывающие касательные к ободу диска напряжения в корневых сечениях лопаток при их кручении. Для определения значений τ_{bn} и p_{bn} будем считать каждую лопатку пластиной прямоугольного сечения ширины d и используем решение известной задачи о кручении пластин прямоугольного поперечного сечения [4].

На Рис. 1 приведено распределение касательных напряжений в прямоугольном корневом сечении пластины при ее кручении с погонной круткой γ из [5].

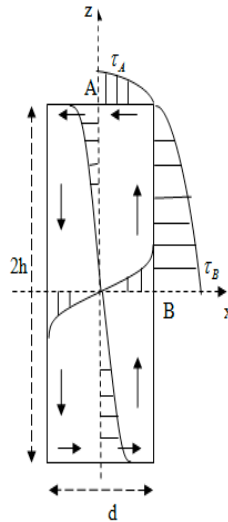


Рис. 1. Распределение касательных напряжений в корне лопатки.

Максимальное касательное напряжение τ_{rz} достигается в точках А и В (Рис. 1)

$$\tau_B = \tau_{\max} = \frac{K_1}{K_2} \mu \gamma d, \quad \tau_A = k \tau_B$$

где

$$K_1 \approx \frac{1}{3 + 2(d/h + d^2/h^2)}, \quad K_2 \approx \frac{1}{3 + 1.8d/h}$$

При рассматриваемых в дальнейшем значениях $d/h \ll 1$ коэффициент $k \approx 0.8$. Следовательно, можно принять, что $\tau_B = \mu \gamma d$, $\tau_A = 0.8 \tau_B$.

Точное решение для касательных напряжений в корневом сечении [4] упрощено

$$\sigma_{r\theta} = -\tau_A \frac{z}{h} \left[1 - \frac{4x^2}{d^2} \right], \quad |x| \leq d/2$$

$$\sigma_{rz} = \tau_B \frac{2x}{d} \left[1 - \frac{z^2}{h^2} \right], \quad |z| \leq h$$

где $x = b(\theta - \theta_*)$ - локальная окружная координата, θ_* отмечает положение срединной плоскости лопатки. Правые части граничных условий тогда принимают вид

$$\sigma_{r\theta_b} = Q_0 \left(1 - \vartheta^2 / \delta^2\right), \quad Q_0 = -0.8\mu\gamma d / h, \quad |\vartheta| \leq \delta$$

$$\sigma_{rz_b} = T_0 \vartheta / \delta, \quad T_0 = \mu\gamma d, \quad |\vartheta| \leq \delta$$

где полагается $|\vartheta| \leq \delta$, $\delta = d / (2b) \ll 1$.

Пусть число лопаток на диске равно N_0 . Разложим периодические функции распределения тангенциального напряжения $\sigma_{r\theta_b}$ и осевого касательного напряжения σ_{rz_b} на внешнем контуре (при $r = b$) в ряды Фурье (один период $-\pi / N_0 < \vartheta < \pi / N_0$)

$$\sigma_{r\theta_b} = e^{i\omega t} \sum_n \tau_{bn} \cos(n\vartheta)$$

$$\sigma_{rz_b} = e^{i\omega t} \sum_n p_{bn} \sin(n\vartheta) \quad (3)$$

где $n = 0, N_0, 2N_0, 3N_0, \dots$

$$\tau_{b0} = 2Q_0 N_0 \delta / (3\pi), \quad \tau_{bn} = \frac{4Q_0 N_0}{\pi n^2 \delta} \left(\frac{\sin(n\delta)}{n\delta} - \cos(n\delta) \right)$$

$$p_{b0} = 0, \quad p_{bn} = \frac{2N_0}{n\pi} T_0 \left(\frac{\sin(n\delta)}{n\delta} - \cos(n\delta) \right)$$

Таким образом, для различных n необходимо решать двухточечные краевые задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) с граничными условиями (2) с учетом выражений (3) для коэффициентов разложения нагрузок в ряд Фурье по угловой координате. Решение этих краевых задач определялось численно конечно-разностным методом по неявной схеме. После этого компоненты напряжений определялись суммированием рядов Фурье. Количество членов рядов Фурье при суммировании для практической сходимости не превышало 20.

3. Примеры расчетов.

Для расчетов были выбрана форма диска, сечение которого показано на Рис. 2, значения параметров $a = 0.05$ м, $b = 0.4$ м, $d = 0.01$ м, $\gamma = 0.1$ рад/м, $\omega = 628$ 1/с, $\lambda = 78$ ГПа, $\mu = 44$ ГПа, $\rho = 4370$ кг/м³ (титановый сплав).

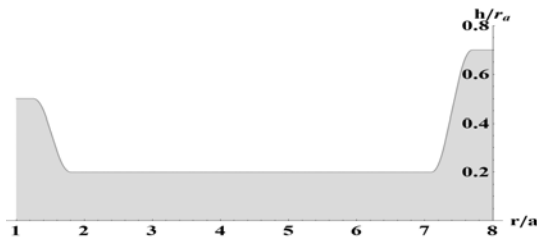


Рис. 2 - Форма сечения диска.

На Рис. 3 показаны радиальные распределения амплитуд компонент напряжений в диске под лопаткой, быстро затухающие при удалении от внешнего обода диска.

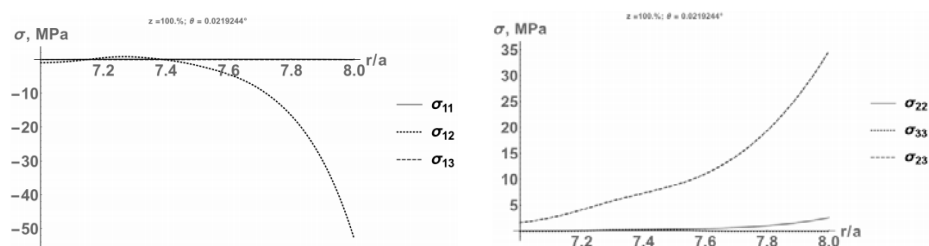


Рис. 3 - Радиальные распределения амплитуд компонент напряжений.

Из этих графиков видно, что максимальные значения компонент напряжений на ободе диска имеют порядок 30-50 МПа, следовательно, размах их колебаний за цикл кручения лопатки равен 60-100 МПа.

Ранее, как упомянуто во введении, в [2] была решена задача определения напряженно-деформированного состояния вращающегося диска переменной толщины в полетном цикле нагружения под действием центробежных сил в диске и с учетом периодической системы лопаток на внешнем контуре. Также были определены дополнительные напряжения в диске, возникающие при изгибе лопаток под действием аэродинамических нагрузок.

Для исследования циклического режима, связанного с процессом СВМУ, необходимо наложить полученные значения амплитуд напряжений при крутильных колебаниях лопаток со знаками + и - на основное НДС, связанное с полетным циклом нагружения диска с учетом дополнительных аэродинамических нагрузок.

Радиальные распределения суммарных шести компонент напряжений для крайних положений цикла крутильных колебаний лопаток в окрестности внешнего обода диска приведены на Рис. 4 и Рис. 5. В обозначениях напряжений индексы 1,2,3 соответствуют координатам r, θ, z .

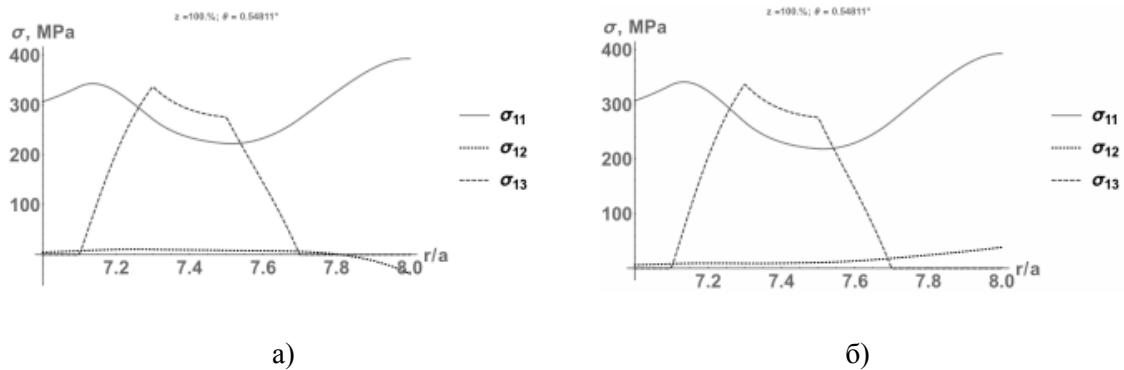


Рис. 4. Суммарные радиальные распределения напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$.

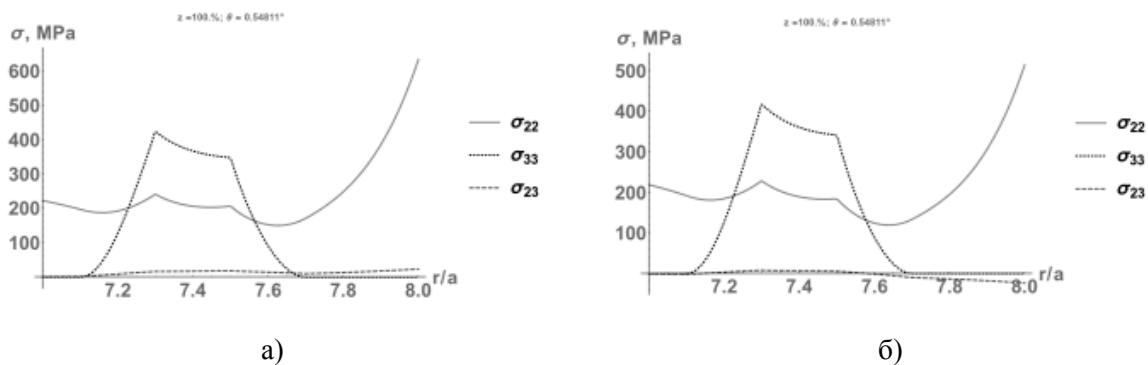


Рис. 5. Суммарные радиальные распределения напряжений $\sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}$.

Разница между значениями напряжений на левых (а) и правых (б) графиках на этих рисунках есть размах напряжений в высокочастотном цикле, связанном с крутильными колебаниями лопаток. На Рис.6 показаны вычисленные по критериям для сверхмногоциклового усталости [6] радиальные распределения логарифма долговечности (числа циклов N до разрушения) около внешнего обода диска под лопаткой для суммарного действия полетных циклов и вибраций без учета аэродинамических нагрузок на лопатки (а) и с учетом этих нагрузок (б).

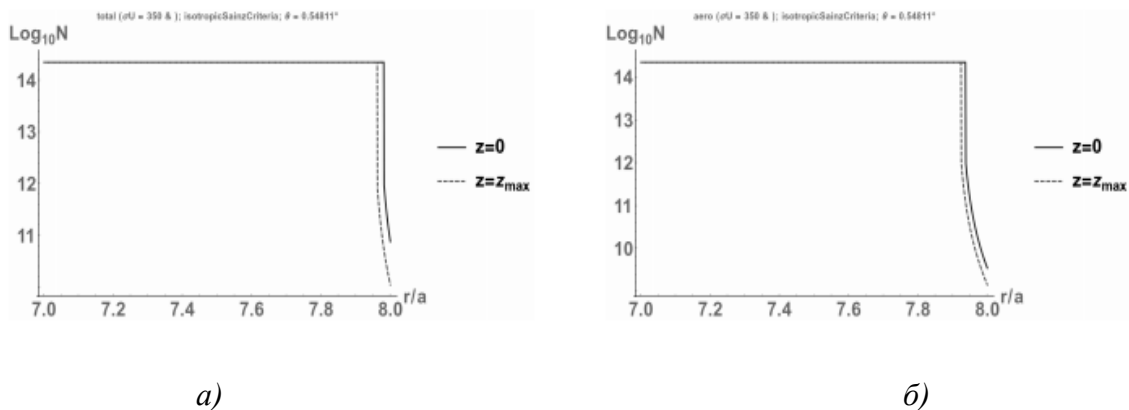


Рис. 6. Распределения логарифма долговечности по радиальной координате в окрестности внешнего обода диска

На этих графиках видно значительное (до $10^{9.5}$ – 10^{10} циклов) падение долговечности на внешнем ободе (в зоне контакта диска и лопаток). При выбранной частоте колебаний их период имеет порядок 0.01с. Поэтому реальное время до усталостного разрушения в результате вибраций лопаток может составить величину 10 000 - 30 000 часов, вполне достижимую в процессе эксплуатации.

Выводы

Предложен метод расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния упругих дисков переменной толщины под действием циклических нагрузок от крутильных вибраций лопаток в компрессорах газотурбинных двигателей. Метод основан на приближенном представлении решения рядами Фурье по координатам по толщине диска и в окружном направлении. Для определения коэффициентов Фурье, зависящих от радиальной координаты, выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений, краевые задачи для которой решены с использованием неявной разностной схемы. Рассчитанное НДС от вибраций было наложено на НДС в полетных циклах и использовано для оценок долговечности безопасной эксплуатации рассматриваемых дисков на основе обобщенного критерия сверхмногоциклового усталостного разрушения. Выявлено значительное падение долговечности на внешнем ободе (в зоне контакта диска и лопаток).

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 15-08-02392.

Список литературы

1. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. Уфа. Изд-во научно-технической литературы «Монография». 2007. 498с.
2. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С., Юшковский П.А. Влияние анизотропии усталостных свойств титанового сплава на долговечность элементов конструкций. Препринт ИПМех РАН № 1064. Москва.2014. 35с.
3. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций. // Известия РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 22-33.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука. 1979. 744с.
5. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Соппротивление материалов. - М: Наука. 1986. 500с.
6. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Сверхмногоцикловое усталостное разрушение титановых дисков компрессора. Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. N1. С. 52-67.