

# АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ И ПРОИЗВОДСТВАМИ

Н.Г. Бурого\*, И.С. Никитин\*\*, П.А. Юшковский\*\*\*, В.Л. Якушев\*\*

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИИ ЛОПАТОК

*Целью исследования является расчет напряженно-деформированного состояния упругого диска переменной толщины при вибрации лопаток. Для этого разработан численно-аналитический метод решения трехмерных уравнений теории упругости. Решение представляется с помощью разложения в ряд Фурье, и коэффициенты находятся из краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль радиальной координаты. Полученные результаты могут быть использованы для расчета усталостного разрушения дисков газотурбинного двигателя.*

**Напряженно-деформированное состояние, диск переменного сечения, высокочастотное нагружение, неявный конечно-разностный метод, ряды Фурье.**

### Введение

В данной работе решается модельная задача исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) диска переменного сечения (диска компрессора газотурбинного двигателя) при наблюдаемых колебаниях лопаток и связанного с ними процесса сверхмногоциклового усталости (СВМУ) [1]. Частота этих колебаний имеет порядок частоты вращения диска или кратна ей. Развитие процесса СВМУ с числом циклов до разрушения  $N > 10^8$  может привести к возникновению очагов поврежденности в окрестности контакта лопаток и внешнего обода диска.

Ранее в [2, 3] для исследования режима малоциклового усталости (МЦУ) была решена задача определения напряженно-деформированного состояния и оценки усталостной долговечности вращающегося диска переменного сечения под действием центробежных нагрузок в диске и лопатках. Циклические воздействия центробежных нагрузок соответствуют полетным циклам нагружения. При этом были учтены дополнительные напряжения в ободной части диска, связанные с изгибом лопаток под действием аэродинамических давлений. Аэродинамические давления были рассчитаны на основе гипотезы «изолированного профиля» с использованием известных решений об обтекании пластины с отрывом потока.

Однако в последние годы быстро растет интерес к исследованию процессов сверхмногоциклового усталости, так как становится понятно, что даже низкоамплитудные вибрационные нагрузки, действующие в течение длительного времени, могут вызывать разрушение конструкций. Амплитуды напряжений при этом существенно ниже предела усталости и, тем более, предела текучести, и по классическим представлениям вообще не должны представлять опасности. Тем не менее, усталостное разрушение происходит даже при работе конструкции в пределах упругости вплоть до появления зон разрушения [1]. Поэтому для расчета долговечности необходимо решить задачу теории упругости и определить напряженно-деформированное состояние диска.

Следует заметить, что основное нагружение диска осуществляется в полетных циклах под действием центробежных сил и аэродинамических давлений на лопатки от набегающего потока. На этот силовой фон накладывается вибрационное нагружение вследствие крутильных колебаний лопаток. В принятой постановке мы не рассматриваем причины вибраций — такие, как действие пульсаций давления, возбуждение собственных форм колебаний лопаток, переходные режимы работы двигателя и так далее, а будем считать вибрации заданными. Данные по амплитудам и частотам вибраций дисков приведены в [1].

Далее строится приближенное решение задачи о колебаниях диска переменной толщины при крутильных колебаниях лопаток. В силу линейности задачи построенное решение можно просуммировать с полученным ранее решением для полетных циклов нагружения без учета или с учетом аэродинамических давлений на лопатки [2]. Суммарные НДС от полетных циклов и вибраций для двух крайних положений лопатки при вибрационном кручении являются границами изучаемого циклического процесса и необходимы для дальнейших оценок усталостной долговечности.

### 1. Приближенная система уравнений для диска переменного сечения под действием периодической системы нагрузок на внешнем контуре

Для определения напряженно-деформированного состояния диска используем приближенный, численно-аналитический метод решения трехмерных уравнений теории упругости [2] и получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для напряжений и смещений кольцевого диска переменного по радиальной координате сечения. Будем считать, что на внешнем контуре (ободу) диска действуют переменные по времени и периодические по углу напряжения, которые моделируют воздействие от крутильных колебаний лопаток и согласованы с ними по амплитуде.

В цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, z$  кольцевой диск  $a \leq r \leq b$  имеет переменную толщину  $2h(r)$ , координата по толщине меняется в пределах  $-h(r) \leq z \leq h(r)$ . Система уравнений динамической теории упругости для диска в цилиндрической системе координат имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_{\vartheta}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta} \\ \sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\vartheta z} = 2\mu\varepsilon_{\vartheta z} \end{aligned}$$

Связь деформаций и смещений имеет вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} - \frac{u_{\vartheta}}{r} \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\vartheta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial z} \right)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  — упругие модули Ламе,  $\rho$  — плотность материала диска. В дальнейшем используются безразмерные напряжения, отнесенные к  $\lambda + 2\mu$ , и безразмерные пространственные переменные, отнесенные к внутреннему радиусу диска  $a$ .

Граничные условия на свободных поверхностях при  $z = \pm h(r)$  имеют вид:

$$\sigma_{rz} - h' \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\vartheta z} - h' \sigma_{r\vartheta} = 0, \quad \sigma_{zz} - h' \sigma_{rz} = 0$$

В силу периодичности нагружения по  $\vartheta$  смещения ищем в виде рядов Фурье:

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} (uz + u_3 z^3) \sin n\vartheta,$$

$$u_{\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (vz + v_3 z^3) \cos n\vartheta,$$

$$u_z = \sum_{n=1}^{\infty} (w + w_2 z^2 + w_4 z^4) \sin n\vartheta.$$

Соответствующее представление напряжений имеет вид:

$$\sigma_{rr} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma z + \sigma_3 z^3) \sin n\vartheta, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} (sz + s_3 z^3) \sin n\vartheta,$$

$$\sigma_{zz} = \sum_{n=1}^{\infty} (\Sigma z + \Sigma_3 z^3) \sin n\vartheta, \quad \sigma_{r\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau z + \tau_3 z^3) \cos n\vartheta,$$

$$\sigma_{rz} = \sum_{n=1}^{\infty} (p + p_2 z^2 + p_4 z^4) \sin n\vartheta, \quad \sigma_{\vartheta z} = \sum_{n=0}^{\infty} (T + T_2 z^2 + T_4 z^4) \cos n\vartheta.$$

В этих представлениях во избежание излишней громоздкости записи опущен индекс  $n$  у всех коэффициентов, входящих под знак суммы. Эти коэффициенты  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  являются новыми (вспомогательными) искомыми функциями радиальной переменной  $r$ .

Будем исследовать стационарные колебания диска. Все (дополнительные к НДС полетных циклов) компоненты напряжений, деформаций и смещений будут изменяться во времени по гармоническому закону, например, для смещений эта зависимость имеет вид  $ue^{i\omega t}$ ,  $ve^{i\omega t}$ ,  $we^{i\omega t}$ .

Подставляя выражения для смещений и напряжений в исходную систему и приравнявая члены при одинаковых степенях  $z$  вплоть до  $z^3$ , в итоге получим обыкновенные дифференциальные уравнения для вспомогательных переменных при различных  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\frac{d\sigma}{dr} = \left[ \left( \frac{\lambda(1+h^2)}{(1+\lambda)} - 1 \right) \frac{1}{r} - \frac{2h'}{h} \right] \sigma + \frac{n}{r} \tau + \frac{2}{h^2} p + \left[ \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \frac{1}{r^2} - \rho\omega^2 \right] u - \frac{n(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \frac{1}{r^2} v$$

$$\frac{d\tau}{dr} = -\frac{n}{r} \frac{\lambda(1+h^2)}{(1+\lambda)} \sigma - 2 \left( \frac{1}{r} + \frac{h'}{h} \right) \tau - \frac{n}{r^2} \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} u + \left[ \frac{n}{r^2} \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} + \frac{2\mu}{h^2} - \rho\omega^2 \right] v + \frac{2\mu}{h^2} \frac{n}{r} w$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dr} &= -h^2 \sigma - \frac{1}{r} p + \mu \frac{n}{r} v + \left( \mu \frac{n^2}{r^2} - \rho \omega^2 \right) w \\
\frac{du}{dr} &= \frac{(1 - \lambda h^2)}{(1 - \lambda^2)} \sigma - \frac{\lambda}{(1 + \lambda)} \frac{1}{r} u + \frac{\lambda}{(1 + \lambda)} \frac{n}{r} v \\
\frac{dv}{dr} &= \frac{1}{\mu} \tau - \frac{n}{r} u + \frac{1}{r} v \\
\frac{dw}{dr} &= \frac{1}{\mu} p - u
\end{aligned} \tag{1}$$

Подчеркнем, что данная система уравнений решается отдельно для каждой гармоники  $n$ .

Все остальные искомые компоненты напряжений  $\sigma_3, s, s_3, \Sigma, \Sigma_3, \tau_3, p_{2,4}, T_{2,4}$  и смещений  $u_3, v_3, w_{2,4}$  определяются по вспомогательным искомым функциям  $\sigma, \tau, p, u, v, w$  после решения выписанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для того, чтобы получить замкнутую краевую задачу для вспомогательных искомым функций при каждом значении  $n$ , в граничных условиях при  $z = \pm h(r)$  пришлось пренебречь членами малого порядка по  $h$  следующего вида:  $\Delta \Sigma = h'^2 h^2 \sigma_3 - h^2 \Sigma_3, \Delta T = h' h^2 \tau_3 - h^2 T_4, \Delta p = h'^2 h^2 \sigma_3 - h^2 p_3$ . В дальнейшем прямыми численными расчетами подтверждена малость этих отброшенных членов по сравнению с учтенными.

## 2. Граничные условия для крутильных колебаний и решение краевой задачи

Будем считать лопатку пластиной прямоугольного сечения ширины  $d$ . Число лопаток на диске равно  $N_0$ . Воздействие на диск от закрученной лопатки заменим граничной распределенной нагрузкой на внешнем контуре диска в ее корневом сечении. Вне этой зоны поверхностные нагрузки равны нулю.

Краевые условия на радиальных границах  $r = a$  и  $r = b$  с периодической по углу нагрузкой на внешнем ободе примем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
r = a: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \\
r = b: \quad \sigma = 0, \quad \tau = \tau_b(\vartheta), \quad p = p_b(\vartheta),
\end{aligned}$$

где  $\tau_b(\vartheta)$  и  $p_b(\vartheta)$  — заданные функции, определение которых рассмотрено ниже. Эти граничные условия соответствуют закрепленному внутреннему контуру диска, и нагруженному внешнему контуру, причем заданные компоненты напряжений должны соответствовать параметрам кручения отброшенной лопатки.

Для определения значений периодических граничных нагрузок на внешнем контуре диска при  $r = b$  используем решение известной задачи о кручении пластины прямоугольного поперечного сечения [5].

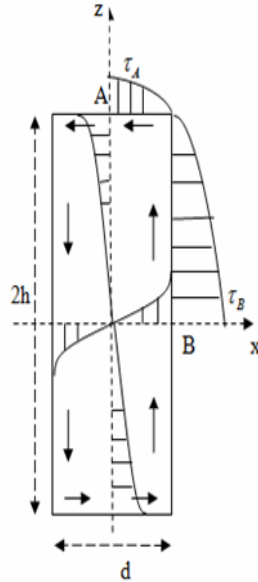
На рис. 1 приведено распределение касательных напряжений в прямоугольном корневом сечении пластины при ее кручении с погонной круткой  $\gamma$  из [6].

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{rz}$  достигается в точках В (рис. 1):

$$\tau_B = \tau_{\max} = \frac{K_1}{K_2} \mu \gamma d$$

и в точке А:  $\tau_A = k\tau_B$ , где  $K_1 \approx \frac{1}{3+2(d/h+d^2/h^2)}$ ,  $K_2 \approx \frac{1}{3+1.8d/h}$ .

При рассматриваемых в дальнейшем значениях  $d/h \ll 1$  коэффициент  $k \approx 0,8$ . Следовательно,  $\tau_B = \mu\gamma d$ ,  $\tau_A = 0,8\tau_B$ .



**Рис. 1.** Распределение касательных напряжений в корне лопадки

Точное решение для касательных напряжений в корневом сечении представляется в виде достаточно сложного выражения [5]. Примем для них приближенную аппроксимацию, линейную по одной и квадратичную по другой координате, наглядно показанную на рис. 1.

$$\tau_{rx} = \tau_{r\vartheta} = -\tau_A \frac{z}{h} \left[ 1 - \frac{x^2}{(d/2)^2} \right], \quad |x| \leq d/2.$$

$$\tau_{rz} = \tau_B \left[ 1 - \frac{z^2}{h^2} \right] \frac{x}{(d/2)}, \quad |z| \leq h.$$

Эти выражения, взятые в качестве приближенных граничных условий, по форме зависимости от  $z$  совпадают с представлениями напряжений  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{rx}$ , принятыми в данной работе. Переходя к угловой координате  $\vartheta = x/b$ ,  $|\vartheta| \leq \delta$ ,  $\delta = d/(2b) \ll 1$ , получим приближенные граничные условия при  $r = b$ , соответствующие параметрам закрученной лопадки:

$$\tau_b(\vartheta) = Q_0 (1 - \vartheta^2/\delta^2), \quad Q_0 = -0.8\mu\gamma d/h, \quad |\vartheta| \leq \delta,$$

$$p_b(\vartheta) = T_0 \vartheta/\delta, \quad T_0 = \mu\gamma d, \quad |\vartheta| \leq \delta.$$

Разложим периодическую функцию распределения тангенциального напряжения на внешнем контуре в ряд Фурье (один период  $-\pi/N_0 < \vartheta < \pi/N_0$ ):

$$\tau_b(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{(k)} \cos(kN_0\vartheta),$$

$$\tau^{(0)} = 2Q_0N_0\delta / (3\pi), \quad \tau^{(k)} = \frac{4Q_0}{\pi k^2 N_0\delta} \left( \frac{\sin(kN_0\delta)}{kN_0\delta} - \cos(kN_0\delta) \right) \quad (2)$$

Аналогично осевые касательные напряжения тоже раскладываются в ряд Фурье:

$$p_b(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)} \sin(kN_0\vartheta),$$

$$p^{(k)} = \frac{2}{k\pi} T_0 \left( \frac{\sin(kN_0\delta)}{kN_0\delta} - \cos(kN_0\delta) \right) \quad (3)$$

Таким образом, для различных  $n = kN_0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  необходимо решить систему (1) с граничными значениями  $\tau^{(k)}$  и  $p^{(k)}$  при  $r = b$ .

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1) с краевыми условиями (2) и (3) решалась численно конечно-разностным методом по неявной схеме [7].

После этого компоненты напряжений определялись суммированием рядов Фурье при  $n = kN_0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Количество членов рядов Фурье при суммировании для практической сходимости не превышало 20.

### 3. Численные результаты решения модельных задач

Для расчетов была выбрана форма диска, сечение которого показано на рис. 2, значения параметров  $a = 0,05$  м,  $b = 0,4$  м,  $d = 0,01$  м,  $\gamma = 0,1$  рад/м,  $\omega = 628$  1/с,  $\lambda = 78$  ГПа,  $\mu = 44$  ГПа,  $\rho = 4370$  кг/м<sup>3</sup> (титановый сплав).

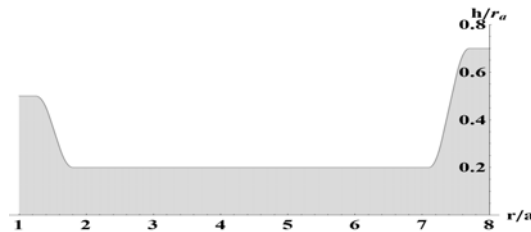


Рис. 2. Форма сечения диска

Приведем результаты численного решения задачи определения радиального распределения напряжения в диске под действием описанной выше системы касательных напряжений на внешнем контуре. На рис. 3 показаны радиальные распределения амплитуд компонент напряжений для определенной точки сечения, быстро затухающие при удалении от внешнего обода диска.

Из этих графиков видно, что максимальные значения компонент напряжений на ободу диска имеют порядок 30–50 МПа, следовательно, размах их колебаний за цикл кручения лопатки равен 60–100 МПа.

Ранее, как упомянуто во введении, в [2] была решена задача определения напряженно-деформированного состояния вращающегося диска переменного сечения в полетном цикле нагружения под действием центробежных сил в диске и периодической системе лопаток на внешнем контуре. Также были оп-

ределены дополнительные напряжения в диске, возникающие при изгибе лопаток под действием аэродинамических нагрузок.

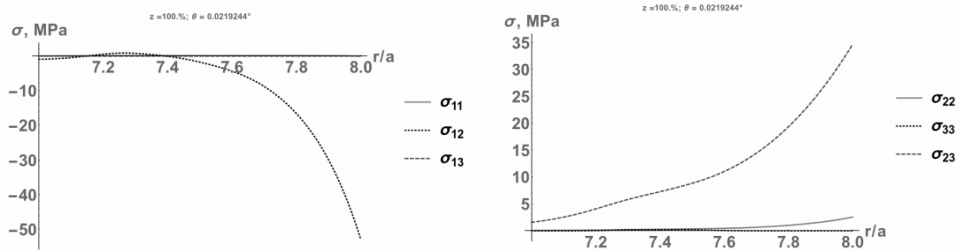


Рис. 3. Радиальные распределения амплитуд компонент напряжений

Для исследования циклического режима, связанного с процессом СВМУ, необходимо наложить полученные значения амплитуд напряжений при крутильных колебаниях лопаток со знаками + и – на основное НДС, связанное с полетным циклом нагружения диска (с учетом или без учета дополнительных аэродинамических нагрузок).

Результаты такого сложения-вычитания и радиальные распределения суммарных компонент напряжений для крайних положений цикла крутильных колебаний лопаток в окрестности внешнего обода диска приведены ниже на рис. 4, 5 (а, б) с учетом аэродинамических нагрузок на лопатки в полетном цикле нагружения.

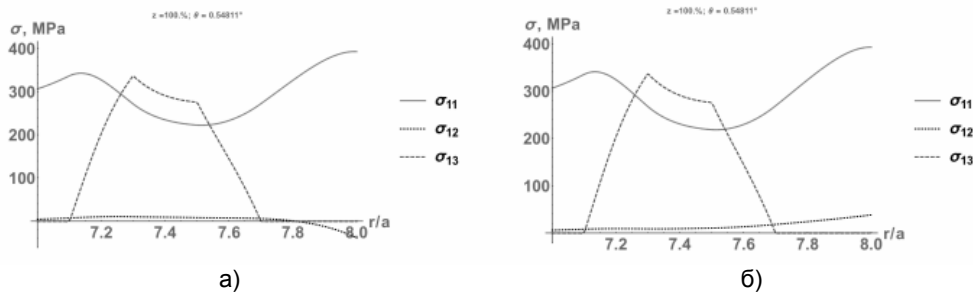


Рис. 4. Суммарные радиальные распределения напряжений

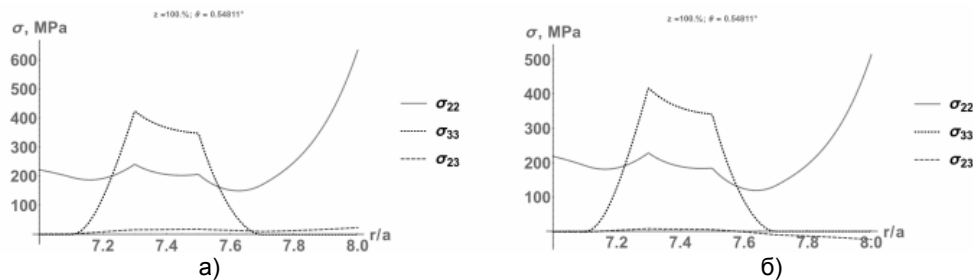


Рис. 5. Суммарные радиальные распределения напряжений

Разница между значениями напряжений на левых (а) и правых (б) графиках на этих рисунках есть размах напряжений в высокочастотном цикле, связанном с крутильными колебаниями лопаток.

Получаемые предложенным методом данные будут в дальнейшем использоваться для оценки долговечности дисков турбомашин в режиме СВМУ.

## Выводы

Предложен метод расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния упругих дисков переменного сечения под действием циклических нагрузок от крутильных вибраций лопаток в компрессорах газотурбинных двигателей.

Принято приближенное представление зависимости решения от координат по толщине диска и в окружном направлении. Для определения коэффициентов формул данного представления, зависящих от радиальной координаты, получена система дифференциальных уравнений, краевые задачи для которой решены с использованием неявной разностной схемы.

Рассчитанное НДС от вибраций было наложено на НДС в полетных циклах. Получено суммарное НДС, которое позволит оценивать долговечность безопасной эксплуатации и определять зоны локализации поврежденности в данных элементах авиационных конструкций.

Работа выполнена в рамках проектов РФФИ 15-08-02392.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. Уфа: Изд-во научно-технической литературы «Монография». 2007. 498 с.
2. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С., Юшковский П.А. Влияние анизотропии усталостных свойств титанового сплава на долговечность элементов конструкций. Препринт ИПМех РАН № 1064. М., 2014. 35 с.
3. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 22–33.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
5. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1979. 744 с.
6. Биргер И.А., Маевлютов Р.Р. Сопротивление материалов. М: Наука. 1986. 500 с.
7. Кукуджанов В.Н. Вычислительная механика сплошных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2008. 320с.

\*Москва, ИПМех РАН  
burago@ipmnet.ru

\*\*Москва, ИАП РАН  
i\_nikitin@list.ru

yakushev@icad.org.ru

\*\*\*Москва, МАТИ — Российский государственный  
технологический университет имени К.Э. Циолковского  
abrahas.23@gmail.com

Burago N.G., Nikitin I.S., Yushkovskiy P.A., Yakushev V.L.

### CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE ELASTIC DISC OF VARIABLE THICKNESS UNDER VIBRATION OF BLADES

The aim of research is the calculation of the stress-strain state of the elastic disc of variable thickness under vibration of blades. To this end, the new numerical-analytical method is developed for such problems of three-dimensional theory of elasticity. The solution is built using the Fourier series. The Fourier coefficients are found from boundary value problems for the systems of ordinary differential equations along the radial coordinate. Typical results of calculations are shown. Obtained results may be used to calculate the fatigue fracture of discs of the gas-turbine engine due to vibrations.

**Stress-strain state, disc of variable thickness, high frequency cyclic loading, implicit finite-difference scheme, Fourier series.**