Южный федеральный университет
(ЮФУ, г. Ростов-на-Дону)
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской академии наук
(ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва)

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сборник трудов

XVII Всероссийской конференции-школы
молодых исследователей
(пос. Абрау-Дюрсо, 11–16 сентября 2017 г.)

Ответственные редакторы:
Г. В. Муратова, И. Н. Шабас

Ростов-на-Дону – Таганрог
2017

УДК 519.6(063)
ББК 22.19я43
С568

С568 **Современные проблемы математического моделирования** : сборник трудов XVII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей (пос. Абрау-Дюрсо, 11–16 сентября 2017 г.) / Южный федеральный университет ; Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН ; отв. ред.: Г. В. Муратова, И. Н. Шабас. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2017. – 192 с.

ISBN 978-5-9275-2634-5

В сборнике представлены доклады участников XVII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей «Современные проблемы математического моделирования», организованной Институтом прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН и Институтом математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, проходившей с 11 по 16 сентября 2017 года в поселке Абрау-Дюрсо, Новороссийск, Россия. В работе школы приняли участие представители научных центров Новосибирска, Москвы, Уфы, Сарова, Ростова-на-Дону и других городов.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 519.6(063)
ББК 22.19я43

ISBN 978-5-9275-2634-5

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМИ ПРОСЛОЙКАМИ[1]

Бураго Н.Г.*, Журавлев А.Б.*, Никитин И.С.,*****

** Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*** Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

**** МАИ – Национальный Исследовательский Университет, Москва*

Введение

Методом асимптотического осреднения построена уточненная модель слоистой среды с нелинейными вязкопластическими условиями проскальзывания на межслойных границах. Подобные модели могут быть полезными при решении динамических задач сейсморазведки и интерпретации волновых картин, полученных в процессе ее проведения.

I Описание модели слоистой среды

В данной работе методом асимптотического осреднения [1] строится уточненная модель слоистой среды с нелинейными вязкопластическими условиями проскальзывания на межслойных границах. Физическим объектом, обладающим подобными свойствами, является, например, флюидосодержащий слоистый пакет в упругом геологическом массиве. Предполагается, что в тонких прослойках между упругими слоями находится очень вязкая жидкость (нефть), или вязкопластическая масса (песок, пропитанный нефтью). Подобные модели могут быть полезными при решении динамических задач сейсморазведки и интерпретации волновых картин, полученных в процессе ее проведения.

В декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим безграничную слоистую среду. Ось x_3 перпендикулярна плоскопараллельным границам раздела слоев. Границы раздела имеют координаты $x_3 = x^{(s)} = s\varepsilon,\ s = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, где постоянная толщина слоя $\varepsilon << 1$ является малым параметром. Предполагается, что физически между упругими слоями имеются тонкие вязкие или вязкопластические прослойки толщины $\delta << \varepsilon$, однако мы пренебрегаем толщиной этих прослоек и заменяем их условием скольжения на поджатых границах слоев:

$$\sigma_{33} < 0, \quad [u_3] = [\sigma_{y3}] = [\sigma_{33}] = 0$$

[1]Работа выполнена по Программе Президиума РАН

либо линейным условием вязкого скольжения:

$$[u_{\gamma,t}]/\varepsilon = \kappa\sigma_{\gamma 3}$$

либо нелинейным условием вязкопластического скольжения

$$[u_{\gamma,t}]/\varepsilon = \kappa\sigma_{\gamma 3} < F\left(\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3}/{\tau_s}^2 - 1\right) >$$

где $\kappa = \delta/(\varepsilon\eta)$, η обозначает коэффициент вязкости. Здесь квадратные скобки обозначают скачок величины f на межслойной границе, $< F(y) >= F(y)H(y)$ – нелинейная функция, отличная от нуля за пределом текучести τ_s, $H(y)$ – функция Хэвисайда, $H(y) = 0$ при $y < 0$, $H(y) = 1$ при $y \geq 0$. Нелинейное условие вязкопластического скольжения переходит в линейное условие вязкого скольжения, если заменить $< F(\ldots) >$ на единицу. Греческие индексы β, γ принимают значения 1 и 2, латинские индексы – значения 1,2,3, u_k – компоненты вектора смещений, $u_{k,t}$ – компоненты вектора скорости, $\sigma_{i,j}$ – компоненты тензора напряжений.

Для компактности формул дифференцирование обозначено следующим образом:

$$\partial(...)/\partial x_j = (...)_{,j}, \quad \partial(...)/\partial t = (...)_{,t}, \quad \partial(...)/\partial\xi = (...)_{,\xi}$$

Сами слои считаются изотропными линейно-упругими (при $x_3 \neq x^{(s)}$):

$$\sigma_{ij,j} - \rho u_{i,tt} = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}$$

где ρ – плотность, тензор модулей упругости имеет вид:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Будем считать, что искомые функции $u_k = u_k(x_l, \xi, t)$ являются гладкими по медленным переменным x_l и гладкими по быстрой переменной $\xi = x_3/\varepsilon$, за исключением точек $\xi^{(s)} = x^{(s)}/\varepsilon$, где они могут терпеть разрывы первого рода. Смещения среды представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε :

$$u_i = w_i(x_k, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^3 u_i^{(3)}(x_k, \xi, t) + ...$$

Разложению компонент смещений соответствует разложение компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{ij}^{(2)} + ...$$

где

$$\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}u_{k,l}^{(n)} + C_{ijk3}u_{k,\xi}^{(n+1)}$$

Процедура получения асимптотической системы уравнений в случае линейных условий для скачков касательных смещений (скольжений) на межслойных границах описана в [2].

Аналогично, уточненная теория второго порядка получается, если в асимптотической системе уравнений удержать члены порядка ε^2 и применить операцию осреднения по ячейке периодичности.

С использованием этого метода осреднения была получена уточненная система уравнений с контактными условиями выбранного типа:

$$\rho v_{\gamma,t} = s_{\gamma j,j} + \varepsilon^2 \mu \Omega_{\gamma,3}$$

$$\rho v_{3,t} = s_{3j,j} + \varepsilon^2 \mu \Omega_{\beta,\beta}$$

$$\tau_{ij,t} = \lambda \delta_{ij} v_{k,k} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i})$$

$$\varphi_{\gamma,t} = -\kappa s_{\gamma 3} < F(\Delta) >$$

$$\Omega_{\gamma,t} = -\kappa \mu \left((g_\gamma + \Omega_\gamma) < F(\Delta) > + 2 s_{\gamma 3} s_{\beta 3} (g_\beta + \Omega_\beta) < F^{/}(\Delta) > / \tau_s^2 \right)$$

$$s_{ij} = \tau_{ij} + \mu(\varphi_i \delta_{j3} + \varphi_j \delta_{i3})$$

$$\Delta = s_{\beta 3} s_{\beta 3} / \tau_s^2 - 1$$

$$g_\gamma = (\rho \varphi_{\gamma,tt}/\mu - \varphi_{\gamma,\beta\beta} - (3\lambda + 2\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/(\lambda + 2\mu))/12$$

В этой нестационарной системе введены обозначения $s_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)}$, $v_k = w_{k,t}$. Для дополнительных функций φ_γ и Ω_γ , имеющих смысл распределенных скольжений первого и третьего порядков по ε , получены нелинейные дифференциальные уравнения.

II Одномерная нестационарная система уравнений

Сформулируем одномерную нестационарную систему уравнений для описания поперечных нестационарных возмущений, параллельных направлению слоев.

Введем обозначения для независимых переменных и искомых функций для данного типа возмущений: $z = x_3$, $\tau = s_{13}$, $u = v_1$, $\varphi = \varphi_1$, $\Omega = \Omega_1, g = g_1$.

Система уравнений в этом случае примет вид:

$$\rho u_{,t} = \tau_{,z} + \varepsilon^2 \mu \Omega_{,z}, \quad \tau_{,t} = \mu u_{,z} + \mu \varphi_{,t}$$

$$\varphi_{,t} = -(\tau/t_0) < F(\Delta) > /\mu$$

$$\Omega_{,t} = -(g + \Omega)(< F(\Delta) > + 2(\tau^2/\tau_s^2) < F_\Delta^{/}(\Delta) >)/t_0$$

$$g = c_g \varphi_{,tt}, \quad c_g = \rho/\mu/12, \quad \Delta = \tau^2/\tau_s^2 - 1, \quad t_0 = 1/(\kappa\mu)$$

Здесь также введен параметр t_0, который представляет собой характерное время релаксации касательных напряжений на предел текучести τ_s.

Для функции $F(\Delta)$ часто принимают степенную аппроксимацию:

$$F(\Delta) = \Delta^{1+q}, \quad q > 0$$

С учетом этой аппроксимации нелинейные уравнения для τ, φ и Ω примут вид:

$$\tau_{,t} = \mu u_{,z} - (\tau/t_0) < \Delta^{1+q} >$$

$$\varphi_{,t} = -(\tau/t_0) < \Delta^{1+q} > /\mu$$

$$\Omega_{,t} = -(g + \Omega)\Big((3 + 2q)\tau^2/\tau_s^2 - 1\Big) < \Delta^q > /t_0$$

III Численная схема решения

Для численного решения динамических задач о распространении возмущений в слоистой среде построим разностную схему для нелинейной (полулинейной) одномерной нестационарной системы с учетом малой величины реального времени релаксации .

Стандартные явные разностные схемы в этом случае будут неустойчивыми, поскольку шаг по времени Δt будет превышать значение t_0, $\Delta t > t_0$.

Схема построения численного метода такова. Вначале аппроксимируем по какой-либо известной явной схеме уравнение движения для скорости u, опустив в нем член $\varepsilon^2 \mu \Omega_{,z}$ (метод расщепления). Используя найденные значения u^{n+1} на верхнем временном слое, аппроксимируем по неявной разностной схеме уравнения для τ, φ и Ω, содержащие малый параметр в знаменателе нелинейных свободных членов [3]. Здесь и далее используем обозначение с верхними индексами $n+1$ и n для величин на верхнем и нижнем слое по времени для разностной временной аппроксимации с шагом Δt.

Полученные нелинейные разностные уравнения можно решить аналитически методом возмущений с учетом наличия малого параметра в системе уравнений и найти значения функций τ^{n+1}, φ^{n+1} и Ω^{n+1} на верхнем временном слое. Используя найденные значения Ω^{n+1} проведем расчет полного уравнения для скорости с учетом члена $\varepsilon^2 \mu \Omega_{,z}$.

Опишем реализацию этой численной методики на примере простых и наглядных аппроксимаций 1-го порядка.

Нелинейное разностное уравнение для касательного напряжения на верхнем слое по времени имеет вид:

$$\tau^{n+1} = \tau_e^{n+1} - \tau^{n+1} < (\tau^{n+1}/\tau_s)^2 - 1 >^{1+q}/\gamma$$

где малый параметр γ равен $\gamma = t_0/\Delta t \ll 1$, а $\tau_e^{n+1} = \tau^n + \mu u_{,z}^{n+1} \Delta t$ – значение касательного напряжения на верхнем слое после упругого шага по времени. Отметим, что для расчета упругого шага можно выбрать иную, более точную схему, т.к. выбор хорошо зарекомендовавших себя схем велик [4, 5]. При расчете пространственных задач со сложной геометрией и неравномерными, неструктурированными сетками для расчета упругого шага могут быть применены конечно-объемные или конечно-элементные методы [3, 4, 5].

Будем искать решение уравнения для τ^{n+1} в виде разложения по степеням малого параметра γ [6], ограничиваясь одним членом (степенной показатель ν и коэффициент T подлежат определению):

$$\tau^{n+1} = \tau_s \left(1 + \gamma^{\nu} T + o(\gamma^{\nu})\right) sign \tau_e^{n+1}$$

Решение для τ^{n+1} (корректировочная формула) с выбранной точностью будет иметь вид:

$$\tau^{n+1} = \tau_s \left(1 + \gamma^{1/(1+q)} \left(\left|\tau_e^{n+1}/\tau_s\right| - 1\right)^{1/(1+q)}/2\right) sign \tau_e^{n+1}$$

при $\left|\tau_e^{n+1}/\tau_s\right| - 1 \geq 0$ и

$$\tau^{n+1} = \tau_e^{n+1}$$

при $\left|\tau_e^{n+1}/\tau_s\right| - 1 < 0$.

Нелинейное разностное уравнение для распределенных скольжений 1-го порядка на верхнем слое по времени имеет вид:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n - (\tau^{n+1}/\mu) < (\tau^{n+1}/\tau_s)^2 - 1 >^{1+q}/\gamma$$

Его решение с выбранной точностью имеет вид:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n - (\tau_s/\mu) F_e \left(1 + \gamma^{1/(1+q)} \left(\left|\tau_e^{n+1}/\tau_s\right| - 1\right)^{1/(1+q)}/2\right) sign \tau_e^{n+1}$$

где $F_e =< \left|\tau_e^{n+1}/\tau_s\right| - 1 >$. В пределе при $\gamma \to 0$ получим компактную расчетную формулу:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n - (\tau_s/\mu) < \left|\tau_e^{n+1}/\tau_s\right| - 1 > sign \tau_e^{n+1}$$

Нелинейное разностное уравнение для распределенных скольжений 3-го порядка на верхнем слое по времени имеет вид:

$$\Omega^{n+1} = \Omega^n - (g^{n+1} + \Omega^{n+1}) \left((3+2q)(\tau^{n+1}/\tau_s)^2 - 1\right) < (\tau^{n+1}/\tau_s)^2 - 1 >^q/\gamma$$

Отсюда следует

$$\Omega^{n+1} = (\gamma^{1/(1+q)} \Omega^n - g^{n+1} Q^{n+1}) + \Omega^{n+1})/(\gamma^{1/(1+q)} + Q^{n+1})$$

где

$$Q^{n+1} = \left((3+2q)(1 + \gamma^{1/(1+q)} \left(\left|\tau_e^{n+1}/\tau_s\right| - 1\right)^{1/(1+q)} - 1\right) < \left|\tau_e^{n+1}/\tau_s\right| - 1 >^{q/(1+q)}$$

$$g^{n+1} = -c_g(\tau_s/\mu)\left(G^{n+1} - G^n\right)/\Delta t^2$$

$$G^n =< |\tau_e^n/\tau_s| - 1 > \left(1 + \gamma^{1/(1+q)}(|\tau_e^n/\tau_s| - 1)^{1/(1+q)}/2\right) sign\tau_e^n$$

В пределе $\gamma \to 0$ получим менее громоздкую расчетную формулу:

$$\Omega^{n+1} = c_g(\tau_s/\mu)\left(< \left|\tau_e^{n+1}/\tau_s\right| - 1 > sign\tau_e^{n+1} - < |\tau_e^n/\tau_s| - 1 > sign\tau_e^n\right)/\Delta t^2$$

Найденные значения Ω^{n+1} используются для вычислений новых значений скорости с учетом члена $\varepsilon^2\mu\Omega_{,z}$.

IV Примеры расчета нестационарной системы уравнений

Полученная модель была использована для исследования волновых процессов в геологических массивах с флюидосодержащей слоистой структурой и динамического деформирования некоторых классов композитов.

Численное решение полученной системы уравнений строилось по вышеописанной явно-неявной схеме, с учетом малых параметров вязкости при временных производных функций φ и Ω. Пример численного решения задачи прохождения поперечной волны (пунктир) через слоистый пакет $0.5 < x_3 < 0.7$ с вязкопластическими прослойками, расположенный в упругой среде, показан на Рис. 1.

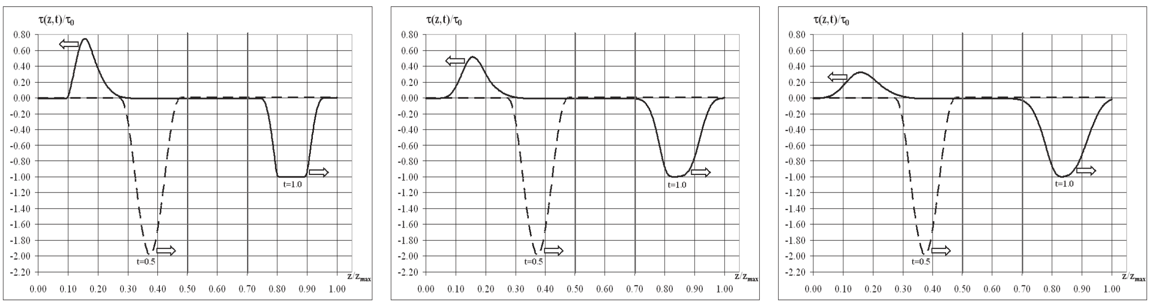

Рис. 1. Формы падающей, прошедшей через слоистый пакет и отраженной от него волн в зависимости от параметра $\varepsilon = 0.0,\ 0.05,\ 0.1$

Показана начальная форма импульса касательного напряжения (пунктиром) в упругом массиве перед его прохождением слоистого пакета, выделенного двумя вертикальными линиями, и направление движения импульса (стрелкой). Справа от слоистого пакета показан прошедший через него импульс, а самый левый импульс на Рис. 1 – (а), (б), (в) представляет собой отраженную волну. Из приведенных графиков видно, что учет членов порядка ε^2 в определяющих уравнениях модели приводит к достаточно существенному изменению амплитуд и профилей волн в процессе их прохождения через слоистый флюидосодержащий пакет.

Заключение

Методом асимптотического осреднения построена уточненная модель слоистой среды с нелинейными вязкопластическими условиями проскальзывания на межслойных границах. В уравнениях модели учтены члены вплоть до 2-го порядка по параметру толщины слоя. Предложена численная разностная схема для решения полученной нелинейной системы уравнений, основанная на явной аппроксимации уравнений движения и неявной аппроксимации остальных уравнений, содержащих малый параметр в знаменателях свободных нелинейных членов. Нелинейные неявные разностные уравнения решены аналитически с использованием метода разложения по малому параметру. Схема работает для широкого класса нелинейных функций, описывающих вязкопластическое скольжение на межслойных границах. Приведен пример численного расчета прохождения поперечной упругой волны через слоистый пакет, обладающий эффективными вязкопластическими свойствами. Подобные модели могут быть полезными при решении динамических задач сейсморазведки и интерпретации волновых картин, полученных в процессе ее проведения.

Литература

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Москва: Наука, 1984. 352 с.

2. *Бураго Н.Г., Никитин И.С.* Уточненная модель слоистой среды с проскальзыванием на контактных границах // ПММ. 2016. Т. 80. № 2. С. 230–241.

3. *Никитин И.С.* Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением // Известия РАН. МТТ. 2008. № 4. С. 154–165.

4. *Бураго Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л.* Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток // ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 6. С. 1082–1092.

5. *Кукуджанов В.Н.* Вычислительная механика сплошных сред. Москва: Физматлит. 2008. 320 с.

6. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. Москва: Мир. 1984. 535 с.