



---

Южный федеральный университет  
(ЮФУ, г. Ростов-на-Дону)  
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша  
Российской академии наук  
(ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва)

## **СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

*Сборник трудов*

XVII Всероссийской конференции-школы  
молодых исследователей  
(пос. Абрау-Дюрсо, 11–16 сентября 2017 г.)

Ответственные редакторы:  
Г. В. Муратова, И. Н. Шабас

Ростов-на-Дону – Таганрог  
2017

УДК 519.6(063)  
ББК 22.19я43  
С568

**С568**        **Современные проблемы математического моделирования :**  
сборник трудов XVII Всероссийской конференции-школы  
молодых исследователей (пос. Абрау-Дюрсо, 11–16 сентября 2017 г.)  
/ Южный федеральный университет ; Институт прикладной  
математики им. М. В. Келдыша РАН ; отв. ред.: Г. В. Муратова, И.  
Н. Шабас. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного  
федерального университета, 2017. – 192 с.  
ISBN 978-5-9275-2634-5

В сборнике представлены доклады участников XVII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей «Современные проблемы математического моделирования», организованной Институтом прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН и Институтом математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, проходившей с 11 по 16 сентября 2017 года в поселке Абрау-Дюрсо, Новороссийск, Россия. В работе школы приняли участие представители научных центров Новосибирска, Москвы, Уфы, Сарова, Ростова-на-Дону и других городов.

*Публикуется в авторской редакции.*

УДК 519.6(063)  
ББК 22.19я43

ISBN 978-5-9275-2634-5

© Южный федеральный университет, 2017

# ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ КРИТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ <sup>1</sup>

Бураго Н.Г. \*, Никитин А.Д. \*\*,\*\*\*, Никитин И.С. \*\*,\*\*\*, Якушев В.Л. \*\*

\* *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

\*\* *Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

\*\*\* *МАИ – Национальный Исследовательский Университет, Москва*

## Введение

В настоящее время установлено, что относительно небольшие циклические напряжения (меньшие классического предела усталости материала), действующие с высокой частотой (порядка 1 кГц и выше) могут приводить к разрушению конструкций [1]. Высокочастотное нагружение приводит к значительным наработкам ( $N \approx 10^9 - 10^{10}$ ) циклов) за время расчетного срока службы изделия. Указанный диапазон долговечностей  $N > 10^8$  известен в литературе как сверхмногоцикловая усталость (СВМУ).

В последние годы разработаны и реализованы методики СВМУ испытаний для весьма ограниченного набора циклических нагружений, в первую очередь для реверсивного и пульсирующего растяжения-сжатия, а также кручения образцов. Однако для оценок долговечности различных элементов конструкций, подверженных высокочастотным длительным воздействиям в условиях сложного нагружения, необходимы критерии многоосного СВМУ разрушения. В данной работе предлагается простая и естественная форма такого рода критериев, основанная на обобщении известных многоосных моделей для классических усталостных режимов. Ранее в [2] была предложена процедура определения параметров классических многоосных критериев Сайнса и Кроссланда в диапазоне малоциклового и многоциклового усталости (МЦУ и МНЦУ) по результатам одноосных испытаний с двумя разными коэффициентами асимметрии цикла (левая ветвь бимодальной одноосной усталостной кривой, Рис.1).

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ проект № 15-08-02392-а

## I Обобщение многоосного критерия усталостного разрушения в режиме СВМУ

Современные подходы к построению многоосных критериев усталостного разрушения часто используют понятие критической плоскости. Первый критерий с определением критической плоскости был предложен Финдли [3]. Согласно этому критерию разрушение в циклическом процессе нагружения происходит по плоскости с нормалью  $\mathbf{n}$  с компонентами  $n_k$  (критической плоскости) при выполнении условия:

$$(\Delta\tau_n/2 + \alpha_F\sigma_n)_{MAX_n} = S_F + A_F N^{\beta_F}, \quad \sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad \tau_n = |\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|$$

где  $\beta_F < 0$ ,  $\alpha_F$ ,  $S_F$ ,  $A_F$  – параметры, определяемые по данным эксперимента,  $N$  – число циклов до разрушения,  $\Delta\tau_n$  – размах касательного напряжения в цикле,  $\sigma_n$  – нормальное напряжение на критической плоскости.

В главных осях тензора напряжений можно получить формулы:

$$\Delta\tau_n = \sqrt{(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2}$$

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

Для одноосного нагружения с коэффициентом асимметрии цикла критерий будет выглядеть так:

$$\sigma_{\max}(\alpha_F + \sqrt{(1-R)^2 + 4\alpha_F^2}/2) = S_F + A_F N^{\beta_F}$$

при

$$n_1 = 1/2 + \alpha_F / \sqrt{(1-R)^2 + 4\alpha_F^2}$$

Сравнивая с представлением Баскина одноосной усталостной кривой

$$\sigma_{\max}(1-R)/2 = \sigma_R + \sigma_{CR} N^{\beta_F}$$

и имея данные испытаний при  $R = -1$  и  $R_0$ , получаем:

$$S_F = \sigma_{-1}(\alpha_F + \sqrt{1 + \alpha_F^2})/2, \quad A_F = (\sigma_B - \sigma_{-1})(\alpha_F + \sqrt{1 + \alpha_F^2})10^{-3\beta_F}/2$$

$$\alpha_F = \left( \sqrt{(2\kappa/(1-R_0) - 1)^2 + \kappa^2} - 1 - 2\kappa/(1-R_0) + \kappa^2 \right) / (4\kappa/(1-R_0) - \kappa^2)$$

где  $\sigma_{-1}$  и  $\sigma_{R_0}$  обозначают классические пределы усталости по усталостным кривым при коэффициентах асимметрии цикла  $-1$  и  $R_0$  соответственно,  $\sigma_B$  обозначает статический предел прочности,  $\kappa = \sigma_{-1}/\sigma_{R_0}$ .

Анализ критерия Финдли для реверсного режима чистого кручения дает формулы:

$$\tau_{-1} = \sigma_{-1}(1 + \alpha_F / \sqrt{1 + \alpha_F^2})/2, \quad \tau_c = (\sigma_B - \sigma_{-1})(1 + \alpha_F / \sqrt{1 + \alpha_F^2})10^{-3\beta_F}/2$$

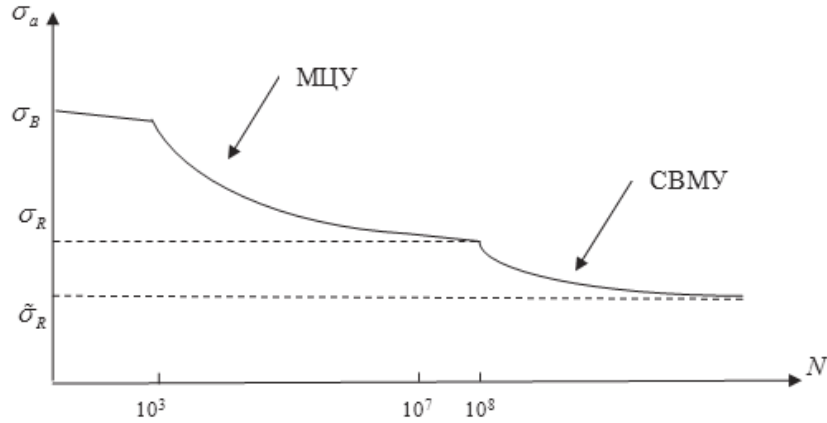


Рис. 1. Бимодальная усталостная кривая для режимов МЦУ и СВМУ

Рассмотрим схему обобщения многоосного критерия разрушения на режим СВМУ (см. Рис. 1, правая ветвь одноосной бимодальной усталостной кривой при  $N > 10^8$ ).

В основе обобщенного многоосного критерия типа Финдли лежит подобие поведения левой и правой ветвей бимодальной усталостной кривой. Это обобщение заключается в замене параметров левой ветви бимодальной усталостной кривой на параметры правой ветви:  $\sigma_B \rightarrow \sigma_{-1}$ ,  $\sigma_{-1} \rightarrow \tilde{\sigma}_{-1}$ ,  $\sigma_R \rightarrow \tilde{\sigma}_R$ ,  $3\beta_F \rightarrow 8\tilde{\beta}_F$ , где  $\tilde{\sigma}_{-1}$  и  $\tilde{\sigma}_R$  это "новые" пределы усталости на правой ветви усталостной кривой для коэффициентов асимметрии  $-1$  и  $R_0$ .

Для режима СВМУ имеем (все параметры отмечены знаком  $\tilde{\phantom{x}}$ ):

$$\tilde{S}_F = \frac{\tilde{\sigma}_{-1}}{2}(\tilde{\alpha}_F + \sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2}), \quad \tilde{A}_F = \frac{\sigma_{-1} - \tilde{\sigma}_{-1}}{2}(\tilde{\alpha}_F + \sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2})10^{-8\tilde{\beta}_F}$$

$$\tilde{\alpha}_F = \left( \sqrt{\left(\frac{2\tilde{\kappa}}{1 - R_0} - 1\right)^2 + \tilde{\kappa}^2} - 1 - \frac{2\tilde{\kappa}}{1 - R_0} + \tilde{\kappa}^2 \right) / \left( \frac{4\tilde{\kappa}}{1 - R_0} - \tilde{\kappa}^2 \right)$$

Здесь  $\tilde{\kappa} = \frac{\tilde{\sigma}_{-1}}{\tilde{\sigma}_{R_0}}$ .

Для реверсного режима чистого кручения  $\tilde{\tau}_a = \tilde{\tau}_{-1} + \tilde{\tau}_C N^{\tilde{\beta}_F}$  получаем:

$$\tilde{\tau}_{-1} = \frac{\tilde{\sigma}_{-1}}{2}(1 + \tilde{\alpha}_F/\sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2}), \quad \tilde{\tau}_C = \frac{\sigma_{-1} - \tilde{\sigma}_{-1}}{2}(1 + \tilde{\alpha}_F/\sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2})10^{-8\tilde{\beta}_F}$$

Были определены параметры обобщенного критерия СВМУ разрушения по результатам испытаний титановых образцов:  $\sigma_B = 1100 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{-1} = 400 \text{ МПа}$ ,  $\tilde{\sigma}_{-1} = 365 \text{ МПа}$ ,  $\tilde{\sigma}_{0.1} = 215 \text{ МПа}$ ,  $\tilde{\beta} = -0.24$  (Рис. 2-а). Полученные значения параметров были использованы для расчетной оценки долговечности образцов при СВМУ испытаниях на реверсное кручение. Сравнение показало близость расчетных и экспериментальных результатов (Рис. 2-б). Тем самым подтверждена возможность использования обобщенного критерия многоосного усталостного разрушения в режиме СВМУ и

предложенной схемы определения его параметров для приближенной оценки долговечности элементов конструкций.

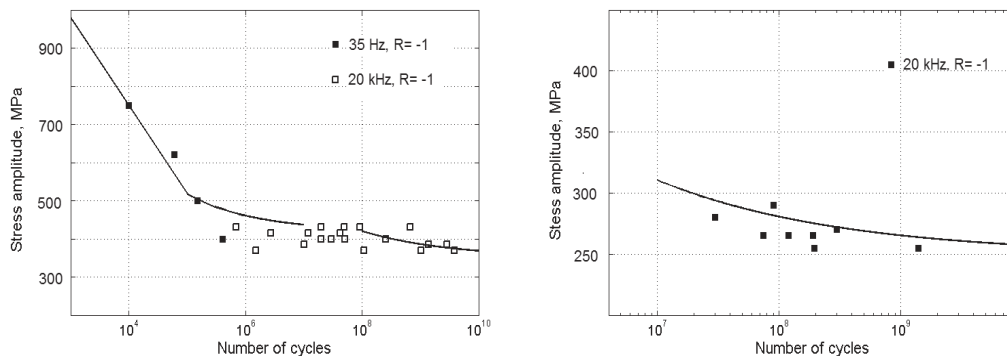


Рис. 2. СВМУ экспериментальные данные для сплава ВТЗ-1 для растяжения-сжатия (слева) и для кручения (справа)

## II Определение критической плоскости для многоосного напряженного состояния

Расчет усталостной долговечности по критерию Финдли требует определения ориентации плоскости, проходящей через заданную материальную точку, на которой достигается максимальное выражение функции Финдли. Для многоосного напряженного состояния это не простая задача, которая, как правило, решается численно. Построим ее аналитическое решение.

Рассмотрим трехосное синфазное циклическое нагружение в системе координат, связанной с главными осями тензора напряжений. Предполагаем, что эти оси не меняются в течение цикла и выбраны так, что максимумы главных напряжений удовлетворяют неравенствам  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Введем следующие обозначения:

$$\Sigma_{12} = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \Sigma_{13} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \Sigma_{23} = \sigma_2 - \sigma_3$$

$$\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2, \quad \Delta\sigma_{13} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3, \quad \Delta\sigma_{23} = \Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3$$

где  $\Delta\sigma_1$ ,  $\Delta\sigma_2$ ,  $\Delta\sigma_3$  обозначают размах главных напряжений в цикле.

Определим ориентацию критической плоскости с компонентами нормали:

$$x_1 = n_1^2 \geq 0, \quad x_2 = n_2^2 \geq 0, \quad x_3 = n_3^2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Можно показать, что задача определения критической плоскости для трехосного напряженного состояния сводится к определению максимума функции

$$F(x_2, x_3) = \sqrt{\Delta\sigma_{12}^2 x_2 + \Delta\sigma_{13}^2 x_3 - (\Delta\sigma_{12} x_2 + \Delta\sigma_{13} x_3)^2} +$$

$$+2\alpha_F\sigma_1 - 2\alpha_F(\Sigma_{12}x_2 + \Sigma_{13}x_3)$$

при ограничениях  $0 \leq x_2 + x_3 \leq 1$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ .

Приведем результаты решения этой задачи для всевозможных значений максимумов и размахов главных напряжений.

**Случай I:**  $\Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12} \neq \Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}$ ,  $\Delta\sigma_{12} \neq 0$ ,  $\Delta\sigma_{13} \neq 0$

Примем обозначения:

$$\beta_{12} = 4\alpha_F\Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12}, \quad \beta_{13} = 4\alpha_F\Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}, \quad \Delta = 2(\beta_{13} - \beta_{12})$$

$$\Delta_S = \Delta\sigma_{12}\beta_{13} - \Delta\sigma_{13}\beta_{12}, \quad \Delta_T = 2(\Delta\sigma_{13} - \Delta\sigma_{12})$$

$$\Delta_2 = \Delta\sigma_{13}\Delta_S/\Delta - (\Delta_S^2 + \Delta_T^2)/\Delta^2, \quad \Delta_3 = (\Delta_S^2 + \Delta_T^2)/\Delta^2 - \Delta\sigma_{12}\Delta_S/\Delta$$

I-а. Для случая  $\Delta\sigma_{12} \neq \Delta\sigma_{13}$  условия экстремума  $F(x_2, x_3)$ :

$$x_2 = \Delta_2/(\Delta\sigma_{12}\Delta\sigma_{23}), \quad x_3 = \Delta_3/(\Delta\sigma_{13}\Delta\sigma_{23})$$

I-б. Для случая  $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_{13} \neq 0$  условия экстремума  $F(x_2, x_3)$ :

$$x_2 + x_3 = \Delta_S/(\Delta\sigma_{12}\Delta)$$

**Случай II:**  $\Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12} = \Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}$ , при этом необходимо  $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_{13} \neq 0$ ,  $\Sigma_{12} = \Sigma_{13}$ . Условия экстремума  $F(x_2, x_3)$ :

$$x_2 + x_3 = \left(1 - \beta_{12}/\sqrt{4 + \beta_{12}^2}\right)/2$$

Найденные значения  $x_2$ ,  $x_3$  должны удовлетворять условиям  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ ,  $x_2 + x_3 < 1$  и условиям максимума  $F(x_2, x_3)$ :

$$\Delta\sigma_{12}^2 + 4\Delta\sigma_{13}\Delta\sigma_{23}x_3 > 0$$

$$\Delta\sigma_{13}^2 - 4\Delta\sigma_{12}\Delta\sigma_{23}x_2 > 0$$

Если таких значений не существует, то необходимо искать максимум  $F(x_2, x_3)$  на границах: либо  $x_2 = 0$ , либо  $x_3 = 0$ , либо  $x_2 + x_3 = 1$ .

**Случай III:** В этом случае максимум  $F(x_2, x_3)$  достигается при следующих значениях  $x_2$ ,  $x_3$ :

$$x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \beta_{13}/\sqrt{4 + \beta_{13}^2}\right)$$

$$x_3 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \beta_{12}/\sqrt{4 + \beta_{12}^2}\right)$$

$$x_2 + x_3 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \beta_{23}/\sqrt{4 + \beta_{23}^2}\right), \quad x_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \beta_{23}/\sqrt{4 + \beta_{23}^2}\right)$$

Из этих трех пар  $x_2$ ,  $x_3$  выбираем ту, где функция  $F(x_2, x_3)$  принимает наибольшее значение.

Таким образом, для случая многоосного напряженного состояния получено аналитическое решение задачи определения ориентации критической плоскости. Определив компоненты нормали к этой плоскости, можно вычислить значение функции Финдли и соответствующее ему число  $N$ , т.е. усталостную долговечность элемента конструкции, находящегося в многоосном напряженном состоянии [4].

**Выводы.** Построено обобщение многоосного критерия усталостного разрушения на случай сверхмногоциклового усталости, предложена процедура определения параметров этого обобщенного критерия по результатам одноосных экспериментов для двух коэффициентов асимметрии цикла, определена критическая плоскость развития усталостных повреждений для многоосного напряженного состояния.

## Литература

1. *Bathias C., Paris P.C.* Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. New York. Dekker, 2005.
2. *N. G. Bourago, A. B. Zhuravlev, I. S. Nikitin.* Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46. N 6. P. 828–838. DOI: 10.3103/S0025654411060033
3. *Findley W.* A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // J. of Eng. for Indust. 1959. P. 301–306.
4. *Burago N., Nikitin I.* Multiaxial Fatigue Criteria and Durability of Titanium Compressor Disks in low- and giga- Cycle Fatigue Modes. Chapter 8 in Special Volume Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures, Springer, Series: Computational Methods in Applied Sciences, Vol. 40. P. Neittaanmaki, S. Repin, T. Tuovinen (eds.) 2016. P. 117-130. DOI: 10.1007/978-3-319-23564-6\_8.