

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ ПРОДОЛЬНЫХ И КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

И. С. Никитин¹, Н. Г. Бураго^{1,2}, А. Д. Никитин¹

¹ *Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия*

² *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

Рассматривается задача определения частоты и формы собственных продольных или крутильных колебаний для стержня переменного сечения на основе теории возмущений. Предполагается, что упругие свойства и площадь поперечного сечения прямого стержня меняются достаточно медленно и слабо отклоняются от некоторых средних значений по продольной координате. С использованием метода асимптотических разложений по малому параметру, получены аналитические формулы для поправок к собственным частотам и формам стационарных гармонических колебаний стержня. Работоспособность формул проверена сравнением с точными решениями для некоторых зависимостей площади поперечного сечения от продольной координаты. Показано, что приближенные формулы хорошо работают даже для стержней, у которых отношение максимального и минимального радиуса сечения достигает 2.5-3. Численные расчеты ориентированы на оценку геометрических и упругих свойств образцов для проведения экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотном циклическом нагружении на растяжение-сжатие и кручение. Пьезоэлектрические установки для проведения таких высокочастотных испытаний основаны на общем принципе резонансного нагружения с частотой порядка 20 кГц. Также, на основе полученных формул, даны оценки влияния высокого уровня среднего растягивающего напряжения в цикле на резонансную частоту для того, чтобы эта частота не вышла из эксплуатационного диапазона испытательной установки.

Ключевые слова: сверхмногоцикловая усталость, колебания стержней, кручение, изгиб, растяжение-сжатие, влияние переменной геометрии, теория возмущений, аналитическое решение, сравнение с экспериментом..

1. Введение

Уравнения продольных, крутильных и поперечных колебаний стержней с переменным сечением приведены в различных учебниках и монографиях, в частности, в [1]. Задача определения собственных частот и форм продольных и крутильных колебаний стержней с переменным сечением исследовалась многими авторами [2-6]. Обзор работ по определению собственных частот и форм изгибных колебаний можно найти в [7], решение конкретных задач дано в [8-12]. Основные приложения связаны с определением поправок к резонансным частотам и формам колебаний, обусловленных дефектами поверхности – при продольных колебаниях [2-4], при крутильных колебаниях [5-6], при изгибных колебаниях [10-11], при наличии внутренних дефектов (трещин) [12].

Стержни переменного сечения используются при проведении экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотном циклическом нагружении образцов на растяжение-сжатие, кручение или трехточечный изгиб [13]. Пьезоэлектрические установки для проведения высокочастотных СВМУ испытаний осуществляют циклическое нагружение растяжением-сжатием и кручением [13]. Эти испытательные установки обладают общим принципом резонансного нагружения с частотой порядка 20 кГц. Испытания на растяжение-сжатие и кручение контролируются и

программируются с использованием одного и того же программного комплекса. Различие между машинами состоит лишь в типе пьезоэлектрического конвертера и геометрии волновода. Для реализации осевых нагружений используется конвертер, обеспечивающий продольные смещения малой амплитуды (10-50 мкм). Для крутильного нагружения используется конвертер, обеспечивающий непосредственно вращательные колебания с амплитудой 0,25-0,50 миллирадиан. Для случая кручения резонансные длины оказываются меньше, чем для осевых испытаний [13]. Базовая форма осесимметричного стержня имеет вид «песочных часов» для создания квазиоднородного напряженного состояния с повышенным уровнем напряжений в центральной, узкой части образца.

В данной работе основной интерес представляет исследование влияния геометрии стержня на первую резонансную частоту и антисимметричную форму продольных или крутильных колебаний при исследовании сверхмногоциклового усталостного разрушения (СВМУ) с числом циклов $> 10^8$.

Пьезоэлектрические установки с несущей частотой порядка 20 кГц имеют достаточно узкий частотный диапазон отклонений при эксплуатации, составляющий ± 500 Гц. Поэтому оценка и определение чувствительности и влияния геометрических параметров образца (общей длины, длины участка переменного сечения и характеристик его изменчивости) на резонансную частоту является необходимой при проектировании экспериментальных установок и образцов из различных металлических сплавов.

Для определения поправок к резонансной частоте и форме собственных продольных и крутильных колебаний для стержня переменного сечения используется теория возмущений [14]. Теория возмущений использовалась в [4] при решении обратной задачи восстановления распределения плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня переменного сечения по частотам собственных колебаний. В данной работе рассматривается прямая задача нулевого и первого приближений для упрощенного, но достаточно общего представления формы стержня, для которой удалось получить явные решения в удобной аналитической форме.

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение колебаний общего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(I(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Параметры зависят от продольной координаты.

Для продольных колебаний

$$I(x) = E(x)S(x), \quad A(x) = S(x)$$

E - модуль Юнга стержня, S - переменная площадь сечения

Для крутильных колебаний

$$I(x) = \mu(x)J(x), \quad A(x) = J(x)$$

μ - модуль сдвига стержня, J - полярный момент инерции.

Задачи для продольных и крутильных колебаний отличаются только обозначениями, поэтому, для определенности, будем вести изложение для случая продольных колебаний стержня.

Рассматриваем стационарные гармонические колебания

$$w(x,t) = u(x)e^{i\omega t}$$

Уравнение для амплитуды

$$\frac{d}{dx} \left(I \frac{du}{dx} \right) + \rho S \omega^2 u = 0 \quad (1)$$

Граничные условия для собственных колебаний

$$u=0 \quad \text{при } x=0$$

$$du/dx = 0 \quad \text{при } x = \pm l \quad (2)$$

2.1. Построение общего решения методом разложения по малому параметру

Рассмотрим случай малого изменения параметров стержня по длине.

$$I = I_0 + \varepsilon I_1(x) + \dots, \quad S = S_0 + \varepsilon S_1(x) + \dots, \quad \varepsilon \ll 1$$

Соответственно, решение для искомой функции смещений и собственной частоты также будем искать в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε

$$u = u_0 + \varepsilon u_1(x) + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots$$

Подставим разложения в уравнение (1) для u и в граничные условия (2):

$$\left((I_0 + \varepsilon I_1 + \dots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) \right)' + \rho(S_0 + \varepsilon S_1 + \dots)(\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots)^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) = 0$$

Приравнявая члены при одинаковых степенях малого параметра ε , получим задачи нулевого а) и первого б) порядков.

Введя обозначение $k^2 = \rho S_0 \omega_0^2 / I_0$ и безразмерные параметры, получим

$$\text{а) } u_0'' + k^2 u_0 = 0, \quad u_0 = 0 \quad \text{при } x=0, \quad u_0' = 0 \quad \text{при } x = \pm l$$

$$\text{б) } u_1'' + k^2 u_1 = -\left(\bar{I}_1' u_0' + k^2 (\bar{S}_1 - \bar{I}_1) u_0 + 2k^2 \bar{\omega}_1 u_0 \right), \quad u_1 = 0 \quad \text{при } x=0, \quad u_1' = 0 \quad \text{при } x = \pm l$$

$$\text{где } \bar{I}_1 = I_1 / I_0, \quad \bar{S}_1 = S_1 / S_0, \quad \bar{\omega}_1 = \omega_1 / \omega_0.$$

С учетом того, что

$$I(x) = E(x)S(x) = E_0 S_0 + \varepsilon (E_1 S_0 + E_0 S_1) + \dots, \quad I_0 = E_0 S_0, \quad I_1 = E_1 S_0 + E_0 S_1,$$

получим $\bar{S}_1 - \bar{I}_1 = S_1 / S_0 - (E_1 S_0 + E_0 S_1) / (E_0 S_0) = -\bar{E}_1$, $\bar{E}_1 = E_1 / E_0$, $\bar{I}_1 = I_1 / I_0$

2.2. Решение для антисимметричной моды

Решение задачи а) нулевого приближения имеет простой вид

$$u_0 = U \sin kx, \quad \cos kl = 0$$

Отсюда получаем значения параметра k (нулевого приближения собственных частот)

$$k_n l = \pi n / 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Далее будем подразумевать именно эту последовательность значений k_n , для простоты опуская индекс n . Также подразумеваем, но опускаем нумерацию индексом n собственных форм $u_0(x)$ и $u_1(x)$.

Отметим, что наименьшее значение k равно $k_1 = \pi / (2l)$.

С учетом решения для нулевого приближения задача б) запишется в виде неоднородного уравнения с граничными условиями

$$u_1'' + k^2 u_1 = -Uk (\bar{I}_1' \cos kx - k\bar{E}_1 \sin kx + 2k\bar{\omega}_1 \sin kx), \quad u_1 = 0 \text{ при } x=0, \quad u_1' = 0 \text{ при } x = \pm l$$

Будем решать эту задачу методом вариации постоянных:

$$u_1(x) = A_1(x) \cos kx + A_2(x) \sin kx$$

Коэффициенты находятся из стандартной системы

$$A_1' \cos kx + A_2' \sin kx = 0$$

$$A_1' (-k \sin kx) + A_2' (k \cos kx) = -Uk (\bar{I}_1' \cos kx - k\bar{E}_1 \sin kx + 2k\bar{\omega}_1 \sin kx)$$

Решение этой системы для коэффициентов имеет вид

$$A_1' = U (\bar{I}_1' \sin kx \cos kx - k\bar{E}_1 \sin^2 kx + 2k\bar{\omega}_1 \sin^2 kx)$$

$$A_2' = -U (\bar{I}_1' \cos^2 kx - k\bar{E}_1 \sin kx \cos kx + 2k\bar{\omega}_1 \sin kx \cos kx)$$

Интегрируя по x , получим выражения для коэффициентов

$$A_1 = U \left(\int_{-l}^x f(\xi) \sin k\xi d\xi + \bar{\omega}_1 (k(x+l) - \sin kx \cos kx) \right) + B_1$$

$$A_2 = -U \left(\int_{-l}^x f(\xi) \cos k\xi d\xi - \bar{\omega}_1 \cos^2 kx \right) + B_2, \quad f(\xi) = \bar{I}_1' \cos k\xi - k\bar{E}_1 \sin k\xi$$

Учитывая, что

$$u_1(x) = A_1(x) \cos kx + A_2(x) \sin kx, \quad u_1' = A_1(-k \sin kx) + A_2(k \cos kx) = 0 \text{ при } x = \pm l$$

имеем

$$A_1 \sin kx - A_2 \cos kx = 0 \text{ при } x = \pm l, \quad \cos kl = 0.$$

При $x = -l$ имеем

$$B_1 = 0$$

При $x = l$ имеем

$$A_1(l) = 0 \text{ или } \int_{-l}^l f(\xi) \sin k\xi d\xi + \pi\bar{\omega}_1 = 0$$

Для антисимметричной моды $u_1(0) = A_1(0)$,

$$\text{т.е. } \int_{-l}^0 f(\xi) \sin k\xi d\xi + \pi\bar{\omega}_1 / 2 = 0$$

Если фиксировать полную амплитуду колебаний величиной U , то необходимы условия

$$u_1(l) = u_1(-l) = 0, \text{ а отсюда следует } A_2(l) = A_2(-l) = 0, \text{ т.е. } \int_{-l}^l f(\xi) \cos k\xi d\xi = 0$$

Таким образом, полный набор условий для антисимметричной моды имеет вид

$$\text{а) } B_1 = 0, \text{ б) } B_2 = 0, \text{ в) } \int_{-l}^l f(\xi) \sin k\xi d\xi + \pi\bar{\omega}_1 = 0, \text{ г) } \int_{-l}^0 f(\xi) \sin k\xi d\xi + \pi\bar{\omega}_1 / 2 = 0, \text{ д) } \int_{-l}^l f(\xi) \cos k\xi d\xi = 0$$

Если переменные по длине стержня площадь сечения и модуль Юнга являются четными функциями пространственной координаты, то функция $f(\xi) = \bar{I}_1' \cos k\xi - k\bar{E}_1 \sin k\xi$ является нечетной. Тогда условие г) выполняется автоматически, а условия б) и в) совпадают.

В противном случае разделения на симметричную и антисимметричную моды для поправок первого порядка не существует.

Из б) следует, что поправка к собственной частоте колебаний равна

$$\bar{\omega}_1 = -\frac{2}{\pi} \int_0^l f(\xi) \sin k\xi d\xi$$

Подставляя выражение для $f(\xi)$, получим окончательно:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{2k}{\pi} \left(\int_0^l (\bar{I}_1 - \bar{E}_1 / 2) \cos 2k\xi d\xi + \int_0^l \bar{E}_1 / 2 d\xi \right)$$

Форма колебаний имеет вид

$$u_1(x) = U \left\{ \left(\int_{-l}^x f(\xi) \sin k\xi d\xi + \bar{\omega}_1 k(x+l) \right) \cos kx - \left(\int_{-l}^x f(\xi) \cos k\xi d\xi \right) \sin kx \right\},$$

или, с учетом выражения для $f(\xi)$:

$$u_1(x) = U \left\{ \left(\int_{-l}^x (\bar{I}_1' \cos k\xi \sin k\xi - k\bar{E}_1 \sin^2 k\xi) d\xi + \bar{\omega}_1 k(x+l) \right) \cos kx - \left(\int_{-l}^x (\bar{I}_1' \cos^2 k\xi - k\bar{E}_1 \sin k\xi \cos k\xi) d\xi \right) \sin kx \right\}$$

Рассмотрим случай первой антисимметричной моды, для которой $k_1 = \pi / (2l)$.

$$\text{Для нее } \bar{\omega}_1 = \frac{1}{l} \left(\int_0^l (\bar{I}_1 - \bar{E}_1 / 2) \cos(\pi\xi / l) d\xi + \int_0^l (\bar{E}_1 / 2) d\xi \right).$$

2.3. Случай однородного стержня переменного сечения

Для однородного по модулю упругости стержня $E_l = 0$, $\bar{I}_1 = \bar{S}_1$. Для этого случая

$$\bar{\omega}_1 = \frac{2k}{\pi} \left(\int_0^l \bar{S}_1 \cos 2k\xi d\xi \right)$$

$$u_1(x) = U \left\{ \left(\int_{-l}^x \bar{S}_1' \cos k\xi \sin k\xi d\xi + \bar{\omega}_1 k(x+l) \right) \cos kx - \left(\int_{-l}^x \bar{S}_1' \cos^2 k\xi d\xi \right) \sin kx \right\}$$

Проводя интегрирование по частям, в этом случае получим

$$u_1(x) = kU \left\{ \int_{-l}^l \bar{S}_1 \cos kx \cos(2k\xi) d\xi (x+l) / (2l) - \int_{-l}^x \bar{S}_1 \cos(kx - 2k\xi) d\xi \right\}$$

Для первой антисимметричной моды $k_1 = \pi / (2l)$

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \bar{S}_1 \cos(2k_1\xi) d\xi = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \bar{S}_1 \cos(2k_1\xi) d\xi,$$

$$u_1(x) = k_1 U \left\{ \int_{-l}^l \bar{S}_1 \cos k_1 x \cos(2k_1\xi) d\xi (x+l) / (2l) - \int_{-l}^x \bar{S}_1 \cos(k_1 x - 2k_1\xi) d\xi \right\}$$

3. Примеры вычисления собственной частоты и формы колебаний

3.1. Тригонометрическое представление формы стержня

Выберем представление переменного радиуса стержня и определим первую антисимметричную моду колебаний для $k_1 = \pi / (2l)$:

$$r(x) = r_0(1 - \varepsilon \cos(\pi x / l)), \quad r_1(x) = -r_0 \cos(\pi x / l)$$

Тогда

$$\bar{S}_1 = -2 \cos(\pi x / l)$$

Поправка к частоте равна

$$\bar{\omega}_1 = -\frac{2}{l} \int_0^l \cos^2(\pi\xi / l) d\xi = -\frac{2}{l} \int_0^l \frac{1 + \cos(2\pi\xi / l)}{2} d\xi = -1 - \frac{1}{l} \frac{\sin(2\pi\xi / l)}{2\pi / l} \Big|_0^l = -1$$

$$\omega = \omega_0(1 - \varepsilon + \dots), \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$$

Вычислим поправку к собственной форме по выведенной формуле

$$u_1(x) = k_1 U \left\{ \bar{\omega}_1(x+l) \cos k_1 x - \int_{-l}^x \bar{S}_1 \cos(k_1 x - 2k_1\xi) d\xi \right\}$$

Вычисляя интегралы, получим

$$u_1(x) = U \{ \sin(2\pi x / l) \cos k_1 x - \sin k_1 x \cos(2\pi x / l) + \sin k_1 x \} / 4$$

Окончательно

$$u_1(x) = \frac{U}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Полная антисимметричная форма имеет вид

$$u(x) = U \left(\sin \left(\frac{\pi x}{2l} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(\frac{2\pi x}{l} \right) \cos \left(\frac{\pi x}{l} \right) + \dots \right)$$

3.2. Экспериментальные образцы в форме «песочных часов»

Рассмотрим конкретную форму осесимметричного стержня радиуса

$$r(x) = r_0 + \varepsilon r_1(x)$$

$$S(x) = \pi(r_0^2 + \varepsilon 2\pi r_0 r_1(x) + \dots)$$

$$S_0 = \pi r_0^2, \quad S_1 = 2\pi r_0 r_1(x), \quad \bar{S}_1 = 2r_1(x) / r_0$$

Выберем следующее, часто используемое, представление переменного радиуса осесимметричного стержня [8]:

$$r(x) = R_1 \operatorname{ch}(\alpha x) \quad \text{при } |x| < l_2, \quad r(x) = R_2 \quad \text{при } l_2 \leq |x| \leq l,$$

где параметр α находится из условия $R_2 = R_1 \operatorname{ch}(\alpha l_2)$ и равен

$$\alpha = (\operatorname{arcch}(R_2 / R_1)) / l_2.$$

Также выберем срединный радиус стержня $R_0 = (R_2 + R_1) / 2$, соответствующий горизонтальной координате l_0 , такой что $R_0 = R_1 \operatorname{ch}(\alpha l_0)$. Отсюда

$$l_0 = (\operatorname{arcch}(R_0 / R_1)) / \alpha.$$

Далее считаем, что отклонение наружного и внутреннего радиусов стержня от среднего невелико с малым параметром ε

$$R_2 = R_0(1 + \varepsilon), \quad R_1 = R_0(1 - \varepsilon)$$

Определим унифицированные представления этой формы стержня с учетом малого параметра. Для этого используем разложения

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + \dots, \quad \sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \dots, \quad 1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

и формулу $\operatorname{arcch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Оценки для R_2 / R_1 , R_0 / R_1 дают

$$R_2 / R_1 = (1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon) \sim 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$R_0 / R_1 = (R_2 / R_1 + 1) / 2 = 1 / (1 - \varepsilon) \sim 1 + \varepsilon + \varepsilon^2$$

Отсюда следует

$$\alpha \sim 2\sqrt{\varepsilon}(1 - 5\varepsilon/4) / l_2$$

С учетом этих оценок

$$r(x) = R_0(1 - \varepsilon(1 - 2x^2/l_2^2) + \dots) \quad \text{при } |x| < l_2, \quad r(x) = R_0(1 + \varepsilon) \quad \text{при } l_2 \leq |x| \leq l, \quad \text{или}$$

$$r_1(x) = -(1 - 2x^2/l_2^2)R_0 \quad \text{при } |x| < l_2, \quad r_1(x) = R_0 \quad \text{при } l_2 \leq |x| \leq l.$$

С учетом того, что $\bar{S}_1 = 2r_1(x) / R_0$, имеем

$$\bar{S}_1 = -2(1-2x^2/l_2^2) \text{ при } |x| < l_2, \quad \bar{S}_1 = 2 \text{ при } l_2 \leq |x| \leq l.$$

Определим поправки к собственной частоте для первой антисимметричной моды:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \bar{S}_1 \cos(\pi\xi/l) d\xi = \frac{2}{l} \left(-\int_0^{l_2} (1-2\xi^2/l_2^2) \cos(\pi\xi/l) d\xi + \int_{l_2}^l \cos(\pi\xi/l) d\xi \right) = \frac{2}{l} \left(\frac{2}{l_2^2} \int_0^{l_2} \xi^2 \cos(\pi\xi/l) d\xi - \int_0^{l_2} \cos(\pi\xi/l) d\xi + \int_{l_2}^l \cos(\pi\xi/l) d\xi \right)$$

После взятия интегралов получим:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{8}{\pi^2} \frac{l}{l_2} \left[\cos\left(\pi \frac{l_2}{l}\right) - \frac{1}{\pi} \frac{l}{l_2} \sin\left(\pi \frac{l_2}{l}\right) \right].$$

Введем обозначение $\delta = \pi l_2 / l$ и получим окончательную компактную формулу для поправки к собственной частоте:

$$\bar{\omega}_1 = 8 \left[\cos \delta - (\sin \delta) / \delta \right] / (\pi \delta)$$

Частота первого резонанса будет вычисляться по следующей формуле:

$$\omega = \omega_0 \left[1 + 8\varepsilon \left(\cos \delta - (\sin \delta) / \delta \right) / (\pi \delta) \right], \quad \omega_0 = \pi c / (2l), \quad c = \sqrt{E/\rho}$$

Для данной формы стержня существует точная формула для первой частоты собственных колебаний [8], которая позволяет оценить точность полученной приближенной асимптотической формулы в зависимости от отношения R_2/R_1 .

Точная формула связи геометрии стержня с резонансной частотой имеет вид:

$$l = l_2 + \operatorname{arctg} \left\{ (\beta \operatorname{cth}(\beta l_2) - \alpha \operatorname{th}(\alpha l_2)) / k \right\} / k, \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - k^2}, \quad k = \omega / c$$

В безразмерных переменных это соотношение принимает вид

$$l/l_2 = 1 + \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\gamma^2 / p^2 - 1} \operatorname{cth} \left(p \sqrt{\gamma^2 / p^2 - 1} \right) - \operatorname{th}(\gamma) \gamma / p \right\} / p$$

$$\text{где } \gamma = \operatorname{arcch}(R_2 / R_1), \quad p = k l_2, \quad \alpha = \gamma / l_2, \quad \beta = k \sqrt{\gamma^2 / p^2 - 1}$$

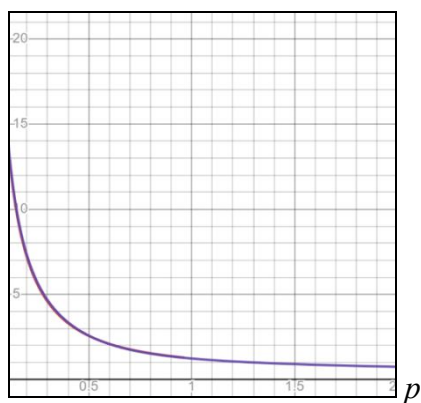
В этих же обозначениях асимптотическая формула для безразмерной частоты p

$$p = \delta \left[1 + 8\varepsilon \left(\cos \delta - (\sin \delta) / \delta \right) / (\pi \delta) \right] / 2, \quad \varepsilon = (R_2 / R_1 - 1) / (R_2 / R_1 + 1), \quad \delta = \pi l_2 / l$$

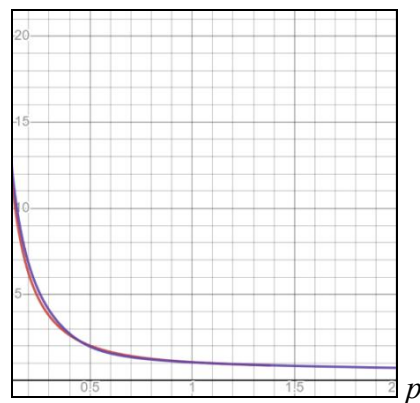
Для оценки точности асимптотических формул построим графики зависимостей $l/l_2(p)$ для точной и приближенной формул при различных значениях R_2/R_1 и ε . Эти графики попарно представлены на Рис. 1-3, где красным цветом изображены линии, соответствующие точному решению, а синим цветом – решению по асимптотическим формулам.

l/l_2

l/l_2



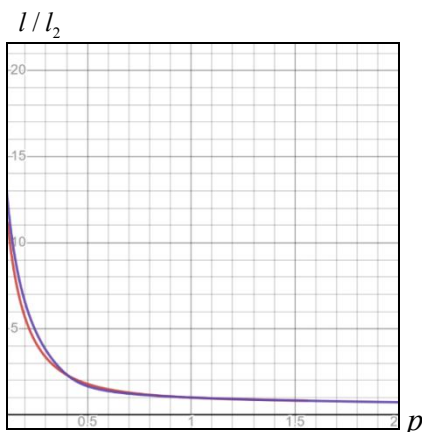
а) $R_2/R_1 = 1.5$, $\varepsilon = 0.2$, $\gamma = 0.96$



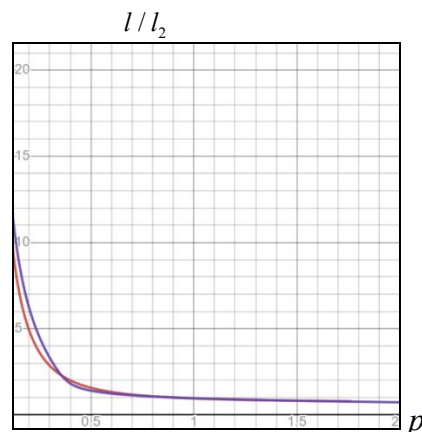
б) $R_2/R_1 = 2.1$, $\varepsilon = 0.355$, $\gamma = 1.38$

Рис. 1. Зависимость геометрических характеристик стержня от безразмерной частоты

Из Рис. 1-2 видно, что при значениях малого параметра $\varepsilon = 0.2$ решения на графике неотличимы, даже при не малых значениях $\varepsilon = 0.35-0.43$ ошибка не превышает 2.5%.



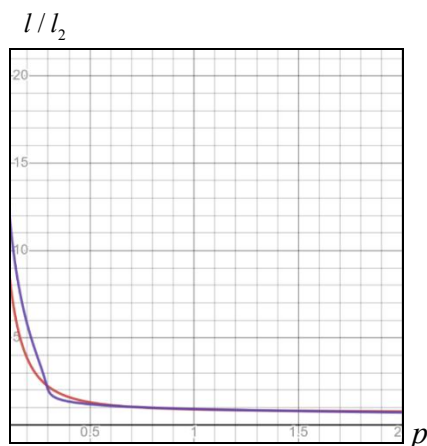
а) $R_2/R_1 = 2.5$, $\varepsilon = 0.429$, $\gamma = 1.56$



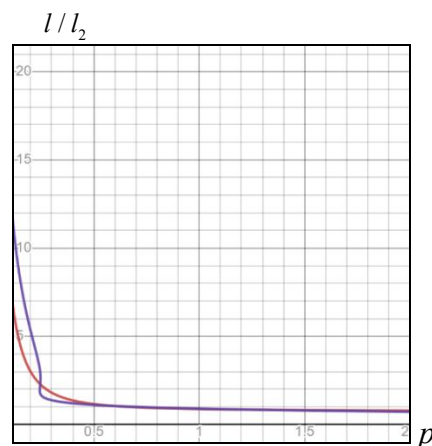
б) $R_2/R_1 = 3$, $\varepsilon = 0.5$, $\gamma = 1.76$

Рис. 2. Зависимость геометрических характеристик стержня от безразмерной частоты

Только при более высоких значениях $\varepsilon > 0.5$, когда параметр ε ни в коем случае не может считаться малым, графики серьезно расходятся в диапазоне $0 < p < 0.4$ (Рис. 3).



а) $R_2/R_1 = 4$, $\varepsilon = 0.6$, $\gamma = 2.06$



б) $R_2/R_1 = 5$, $\varepsilon = 0.67$, $\gamma = 2.30$

Рис. 3. Зависимость геометрических характеристик стержня от безразмерной частоты

Однако можно отметить такой любопытный факт. Для типичных образцов из титанового сплава, применяемых в пьезоэлектрической испытательной установке с эксплуатационной частотой 20 кГц, $E=115$ ГПа, $\rho=4500$ кг/м³, $c=5055$ м/с и геометрическим параметром $l_2=1.5$ см, величина $p=0.373$. Как видно из Рис. 1-2, в окрестности этой точки графики точного и приближенного решения пересекаются, и точность асимптотического решения резко возрастает до величин $< 0.5\%$. Поэтому использование полученных асимптотических формул при типичных значениях параметров установки и экспериментальных образцов обеспечивает высокую точность в доли процента для определения их геометрических характеристик.

4. Квазистатическая задача нагружения стержня переменного сечения

Для исследования усталостных свойств металлических сплавов кроме стандартных испытаний пульсирующим нагружением проводят испытания на высокочастотное нагружение с достаточно высоким уровнем среднего напряжения в цикле. В этом случае коэффициент асимметрии цикла $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} > 0$, при этом амплитуда нагружения $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2$, среднее напряжение $\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2$, а σ_{\max} и σ_{\min} - максимальное и минимальное напряжение в цикле нагружения. Для пульсирующего цикла $R=0$.

Для создания достаточно высокого среднего напряжения σ_m к образцу прикладывается статическое растягивающее напряжение путем подвешивания тяжелого груза с массой Δm величиной до 100 кг. Пьезоэлектрическая установка с несущей частотой 20 кГц имеет достаточно узкий допустимый частотный диапазон отклонений не более 500 Гц. Поэтому необходимо сделать оценку влияния увеличения резонансной длины за счет статического нагружения на резонансную частоту для того, чтобы эта частота не вышла из эксплуатационного диапазона.

Решим статическую задачу об удлинении стержня переменного сечения под действием приложенной растягивающей нагрузки.

Как и раньше, предполагаем малое отклонение формы и, следовательно, площади стержня, от некоторого среднего постоянного значения $S = S_0 + \varepsilon S_1(x) + \dots$.

Постановка задачи для произвольной формы стержня

$$E_0 \frac{d}{dx} \left(S(x) \frac{du}{dx} \right) = 0$$

Граничные условия

$$du/dx = p_0 \text{ при } x = -l, \quad u = 0 \text{ при } x = l,$$

$$p_0 = \frac{\sigma_0}{E_0} \quad \text{или} \quad p_0 = \frac{F_0}{E_0 S(-l)} = \frac{\Delta m F_0}{E_0 S(-l)} \quad \text{в случае приложенной силы } F_0 \text{ илб подвешенного к}$$

концу стержня $x = -l$ груза массы Δm .

Решение ищем в виде разложения

$$u = u_0 + \varepsilon u_1(x) + \dots$$

Подставляя разложения для $S(x)$ и $u(x)$ в уравнение и граничные условия, объединяя члены нулевого и первого порядка по ε , получим задачи для приближений решения $u_0(x)$ и $u_1(x)$.

$$\text{а) } u_0'' = 0, \quad u_0' = p_0|_{x=-l}, \quad u_0 = 0|_{x=l}$$

$$\text{б) } u_1'' = -(\bar{S}_1 u_0')', \quad u_1' = 0|_{x=-l}, \quad u_1 = 0|_{x=l}, \quad \bar{S}_1 = S_1 / S_0$$

Решение задачи а) имеет вид: $u_0(x) = p_0(x-l)$

С учетом этого выражения найдем решение для второй задачи б):

$$u_1 = p_0 \bar{S}_1(-l)(x-l) + p_0 \int_x^l \bar{S}_1(\xi) d\xi$$

Суммарное выражение для смещения

$$u = p_0(x-l) + \varepsilon p_0 \left[\bar{S}_1(-l)(x-l) + \int_x^l \bar{S}_1(\xi) d\xi \right]$$

Его значение при $x = -l$ равно

$$u(-l) = p_0 \left[-2l(1 + \varepsilon \bar{S}_1(-l)) + \varepsilon \int_{-l}^l \bar{S}_1(\xi) d\xi \right]$$

Формула для полной длины стержня с учетом его удлинения под действием статической нагрузки примет вид

$$L = l + \left| p_0 \left[-2l(1 + \varepsilon \bar{S}_1(-l)) + \varepsilon \int_{-l}^l \bar{S}_1(\xi) d\xi \right] \right|$$

Оценка для экспериментального образца в форме «песочных часов»

Для описанной выше формы экспериментального образца

$$r(x) = R_1 \operatorname{ch}(\alpha x) \quad \text{при } |x| < l_2, \quad r(x) = R_2 \quad \text{при } l_2 \leq |x| \leq l, \quad \alpha = \frac{1}{l_2} \operatorname{arcch} \frac{R_2}{R_1}$$

имеем в асимптотическом приближении $\varepsilon \ll 1$, $R_2 / R_1 = (1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon) \sim 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$

$$\bar{S}_1 = -2(1 - 2x^2 / l_2^2) \quad \text{при } |x| < l_2, \quad \bar{S}_1 = 2 \quad \text{при } l_2 \leq |x| \leq l.$$

Вычислим интеграл

$$\int_{-l}^l \bar{S}_1(\xi) d\xi = 2 \int_0^l \bar{S}_1(\xi) d\xi = 2 \left[\int_0^{l_2} \bar{S}_1(\xi) d\xi + \int_{l_2}^l \bar{S}_1(\xi) d\xi \right] = 4 \left[-\int_0^{l_2} (1 - 2\xi^2 / l_2^2) d\xi + \int_{l_2}^l d\xi \right] = 4 \left[-l_2 + \frac{2}{l_2^2} \frac{l_2^3}{3} + l - l_2 \right]$$

Получим

$$\int_{-l}^l \bar{S}_1(\xi) d\xi = 4 \left(l - \frac{4}{3} l_2 \right)$$

Тогда

$$u(-l) = p_0 \left[-2l(1+2\varepsilon) + 4\varepsilon \left(l - \frac{4}{3} l_2 \right) \right] = p_0 \left(-2l - \frac{16}{3} \varepsilon l_2 \right) = -2l_2 p_0 \left(\frac{l}{l_2} + \frac{8}{3} \varepsilon \right)$$

Для случая растяжения под массой Δm

$$u(-l) = -2 \frac{\Delta m g}{\pi R_2^2 E_0} \left(l + \frac{8}{3} \varepsilon l_2 \right)$$

Полная длина стержня равна

$$L = l + 2 \frac{\Delta m g}{\pi R_2^2 E_0} \left(l + \frac{8}{3} l_2 \varepsilon \right)$$

$$\text{или } \frac{L}{l_2} = \frac{l}{l_2} + 2 \frac{\Delta m g}{\pi R_2^2 E_0} \left(\frac{l}{l_2} + \frac{8}{3} \varepsilon \right) = y + \Delta y,$$

где относительное удлинение $y = l/l_2$, а добавка к нему за счет статической нагрузки

$$\Delta y = \frac{2g}{\pi R_2^2 E_0} \left(y + \frac{8}{3} \varepsilon \right) \Delta m$$

Выше была получена формул для безразмерной частоты $p = \frac{\delta}{2} \left[1 + \frac{8\varepsilon}{\pi\delta} \left(\cos \delta - \frac{\sin \delta}{\delta} \right) \right]$, $\delta = \pi / y$

Связь частоты с относительным удлинением в этих обозначениях имеет вид

$$p = \frac{\pi}{2y} \left[1 + \frac{8\varepsilon y}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi}{y} - \frac{y}{\pi} \sin \frac{\pi}{y} \right) \right]$$

Вычислим производную

$$p' = -\frac{\pi}{2y^2} + \frac{4\varepsilon}{\pi} \left(\left(\frac{\pi}{y^2} - \frac{1}{\pi} \right) \sin \frac{\pi}{y} + \frac{1}{y} \cos \frac{\pi}{y} \right)$$

и выведем связь приращения частоты в зависимости от массы груза

$$\Delta p : \left[-\frac{\pi}{2y^2} + \frac{4\varepsilon}{\pi} \left(\left(\frac{\pi}{y^2} - \frac{1}{\pi} \right) \sin \frac{\pi}{y} + \frac{1}{y} \cos \frac{\pi}{y} \right) \right] \Delta y, \quad \Delta p = \frac{2\pi l_2}{c} \Delta \nu$$

$$\Delta \nu = \frac{c}{l_2} \frac{g}{\pi^2 R_2^2 E_0} \left[-\frac{\pi}{2y^2} + \frac{4\varepsilon}{\pi} \left(\left(\frac{\pi}{y^2} - \frac{1}{\pi} \right) \sin \frac{\pi}{y} + \frac{1}{y} \cos \frac{\pi}{y} \right) \right] \left(y + \frac{8}{3} \varepsilon \right) \Delta m$$

Численные оценки для крайних значений параметров $\varepsilon=0.5$, $R_2=0.6$ см, $y_{\min}=1$, $l_2=1.5$ см,

$E=115$ ГПа, $\rho=4500$ кг/м³ дают результат:

$$\Delta \nu [\text{Гц}] \approx -5 \Delta m [\text{кг}].$$

Для средних значений масс 20-30кг сдвиг значения резонансной частоты в 100-150 Гц не является критическим и не выводит за пределы эксплуатационного диапазона.

Только для крайних значений массы груза в 100 кг сдвиг приближается к границе допустимого диапазона, но при этом нужно иметь в виду, что для оценки взято минимальное

значение $l/l_2 \approx 1$, которое для реальных образцов составляет величину 2-2.5. При таких значениях удлинения сдвиг частоты уходит от границы допустимого диапазона.

5. Заключение

Решена задача определения частоты и формы собственных продольных или крутильных колебаний для стержня переменного сечения на основе теории возмущений. В предположении, что упругие свойства и площадь поперечного сечения прямого стержня меняются достаточно медленно и слабо отклоняются от некоторых средних значений по продольной координате, получены аналитические формулы для поправок к собственным частотам и формам стационарных гармонических колебаний стержня. Работоспособность формул проверена сравнением с точными решениями для некоторых зависимостей площади поперечного сечения от продольной координаты. Показано, что приближенные формулы для первой антисимметричной моды хорошо работают даже для стержней, у которых отношение максимального и минимального радиуса сечения достигает 2.5-3.

Проведены численные расчеты геометрических и упругих свойств образцов для проведения экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотном циклическом нагружении на растяжение-сжатие или кручение. Также, на основе полученных формул, даны оценки влияния высокого уровня среднего растягивающего напряжения в цикле на резонансную частоту для того, чтобы эта частота не вышла из эксплуатационного диапазона испытательной установки.

Исследование выполнено в рамках проекта РФФИ № 19-19-00705-П.

Список литературы

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с.
2. Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В. Идентификация дефектов поперечного сечения стержня по собственным частотам и особенностям формы продольных колебаний// Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 98–107.
3. Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В. Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения// Механика твердого тела. 2017. № 6. С. 136-144.
4. Ватульян А.О., Бочарова О.В. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня// Акустический журнал. 2009. Т. 55. № 3,. С. 275–282.
5. Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р. Крутильные колебания стержня непостоянного сечения// Вестник УГАТУ. Машиностроение и Машиноведение. 2022, Т. 26, № 1 (95), С. 22-30.

6. Хакимов А.Г. О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта// Дефектоскопия. 2010. № 6. С. 93–98.
7. Гусев Б.В., В.В. Саурин В.В. О колебаниях неоднородных балок// Инженерный вестник Дона. 2017. № 3.
8. Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р. Точные решения уравнения, описывающего поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и их применение// Вестник Башкирского университета. Математика и механика. 2019. Т. 24. №4. С. 774-779.
9. Гусев Б.В., В.В. Саурин В.В. О свободных изгибных колебания бетонных балок переменного поперечного сечения// Промышленное и гражданское строительство. 2019. № 8. С. 93-98.
10. Ватульян А.О., Осипов А.В. Об одном подходе при определении параметров дефекта в балке// Дефектоскопия. 2014. № 11. С. 37-47.
11. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом// Дефектоскопия. 2009. № 6. С. 83-89.
12. Лебедев И.М., Шифрин Е.И. Идентификация поперечных трещин в стержне по собственным частотам поперечных колебаний// Механика твердого тела. 2020. № 4. С. 50–70.
13. Найфе А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
14. Batiah C., Paris P.C. Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. NY. Marcel Dekker. 2005. 328p.