ЯВНО-НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД[1]

И.С. Никитин[1], Н.Г. Бураго[2], А.Д. Никитин[1]
[1]Институт автоматизации проектирования РАН, Москва
[2]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Для расчета динамических задач теории упругости и упругопластичности по явным схемам существует большое количество хорошо разработанных и проверенных методов [1,2]. Однако в определяющие соотношения модели упруговязкопластической среды входят уравнения с нелинейным свободным членом и малым временем релаксации напряжений. Для устойчивого численного решения системы дифференциальных уравнений предложен явно-неявный метод с явной аппроксимацией уравнений движения и неявной аппроксимацией определяющих соотношений, содержащих малый параметр в знаменателе свободного члена. При этом для эффективного применения этого метода нелинейные алгебраические уравнения неявной аппроксимации желательно решить аналитически.

Идеальная вязкопластичность. Стандартные определяющие уравнения для девиаторов напряжений в изотропной упруговязкопластической среде имеют следующий вид:

$$\dot{s}_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) - \mu < \sqrt{J_2} / \tau_s - 1 >^q s_{ij} / \eta$$

Здесь v_i - компоненты вектора скорости, σ_{ij}– компоненты тензора напряжений, $\sigma_m = \sigma_{k,k} / 3$ - среднее напряжение, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$ - компоненты девиатора напряжений, $J_2 = s_{kl} s_{kl} / 2$ – второй инвариант девиатора напряжений, τ_s – статический предел текучести, η – вязкость при динамическом нагружении, q – показатель степени в выражении для функции релаксации напряжений. Уравнения движения и уравнение для среднего напряжения не выписываем, так как они не содержат малых параметров в знаменателе свободного члена и их можно аппроксимировать по стандартным явным схемам.

При численном решении системы уравнений для девиаторов по явной разностной схеме с шагом Δt при соблюдении условия Куранта параметр $\xi = \eta / (\mu \Delta t)$ все равно остается малым ($\xi \ll 1$) из-за малости динамической вязкости η. Этот малый параметр находится в знаменателе вязкого члена, поэтому интегрирование определяющих уравнений по явной разностной схеме с курантовским шагом по времени приводит к неустойчивости. Предположим, что значения

---

[1] Материалы XXI международной конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2019) - М.: Изд-во МАИ, 2019. С. 303-305. ISBN 978-5-4316-0589-5.

компонент вектора скорости на n+1-м временном слое уже найдены из уравнений движения. Неявная схема первого порядка для определения девиаторов имеет вид:

$$(s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{n}) / \Delta t = \mu(v_{i,j}^{n+1} + v_{j,i}^{n+1}) - \mu\left(\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1} / 2} / \tau_s - 1\right)^q s_{ij}^{n+1} / \eta$$

или $\qquad \xi s_{ij}^{n+1} + \left(\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1} / 2} / \tau_s - 1\right)^q s_{ij}^{n+1} = \xi s_{ij}^{e}$, где $s_{ij}^{e} = s_{ij}^{n} + \mu(v_{i,j}^{n+1} + v_{j,i}^{n+1})\Delta t$.

Этот шаг также можно истолковать как вспомогательный “упругий” шаг расчета.

При q=1 система неявных алгебраических уравнений для девиаторов решается точно:

$$s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{e}\left[(1-\xi)/2 + \sqrt{(1-\xi)^2/4 + \xi S_1}\right] / S_1, \quad S_1 = S^e / \tau_s, \quad S^e = \sqrt{s_{kl}^{e} s_{kl}^{e} / 2}$$

Для произвольного значения q систему неявных алгебраических уравнений для девиаторов можно решить приближенно для малых значений $\xi \ll 1$, используя разложение искомых значений s_{ij}^{n+1} по малому параметру $\xi^{1/q}$: $s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{e}\left[1 + (S_1 - 1)^q \xi^{1/q}\right] / S_1$.

В полученных формулах можно явно перейти к пределу $\xi \to 0$, что соответствует переходу от упруговязкопластической к упругопластической модели, и получить известную корректировочную формулу Уилкинса «посадки» на круг текучести: $s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{e} \tau_s / S^e$.

Неявная схема второго порядка по времени получается при использовании средних значений девиатора напряжений $(s_{ij}^{n+1} + s_{ij}^{n}) / 2$ в правой части неявной аппроксимации:

$$(s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{n}) / \Delta t = \mu(v_{i,j}^{n+1} + v_{j,i}^{n+1}) - \mu\left(\sqrt{(s_{kl}^{n+1} + s_{kl}^{n})(s_{kl}^{n+1} + s_{kl}^{n}) / 8} / \tau_s - 1\right)^q (s_{ij}^{n+1} + s_{ij}^{n}) / (2\eta)$$

Для решения этой нелинейной разностной системы также можно использовать метод разложения по малому параметру $\xi = \eta / (\mu \Delta t)$ и получить результат:

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{s_{ij}^{e} - \left[S_2 / (1 + (2(S_2 - 1)\xi)^{1/q}) - 1\right] s_{ij}^{n}}{S_2 / (1 + (2(S_2 - 1)\xi)^{1/q})}, \quad S_2 = \sqrt{(s_{kl}^{n} + s_{kl}^{e})(s_{kl}^{n} + s_{kl}^{e}) / 8} / \tau_s$$

В этой формуле также можно положить $\xi = 0$ и получить корректировку, соответствующую упругопластическому решению («посадке на круг текучести»):

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{(s_{ij}^{e} + s_{ij}^{n}) / 2}{\sqrt{(s_{kl}^{n} + s_{kl}^{e})(s_{kl}^{n} + s_{kl}^{e}) / 8}} \tau_s + \left[\frac{(s_{ij}^{e} + s_{ij}^{n}) / 2}{\sqrt{(s_{kl}^{n} + s_{kl}^{e})(s_{kl}^{n} + s_{kl}^{e}) / 8}} \tau_s - s_{ij}^{n}\right]$$

Таким образом, при использовании неявной схемы второго порядка точности сначала на круг текучести “сажается” средний девиатор, а затем “точка посадки” смещается на величину разницы между средним девиатором и значением девиатора на старом временном слое.

Вязкопластичность с упрочнением. Рассмотрим определяющие уравнения упруговязкопластической модели с упрочнением:

$$\dot{s}_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) - \mu < \sqrt{J_2} / \tau_s(\chi) - 1 >^q s_{ij} / \eta$$

$$\dot{\chi} = \sqrt{d_{kl} d_{kl} / 2}\,,\;\; d_{ij} =< \sqrt{J_2} / \tau_s(\chi) - 1 >^q s_{ij} / \eta\,,\;\; \tau_s(\chi) = \tau_0 + k(\chi)\,,$$

χ - параметр упрочнения, d_{ij} - компоненты тензора скорости вязкопластической деформации.

Неявная схема первого порядка для определения девиаторов имеет вид:

$$(s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{n}) / \Delta t = \mu(v_{i,j}^{n+1} + v_{j,i}^{n+1}) - \mu\left(\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1} / 2} / (\tau^n + k_\chi^{/} \sqrt{d_{kl}^{n+1} d_{kl}^{n+1} / 2}^{\,n+1} \Delta t) - 1 \right)^q s_{ij}^{n+1} / \eta$$

$$d_{ij}^{n+1} = \left(\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1} / 2} / (\tau^n + k_\chi^{/} \sqrt{d_{kl}^{n+1} d_{kl}^{n+1} / 2} \Delta t) - 1 \right)^q s_{ij}^{n+1} / \eta\,,\;\; \tau^n = \tau_0 + k(\chi^n)$$

Решая эту нелинейную алгебраическую систему методом разложения по малому параметру $\xi = \eta / (\mu \Delta t)$, получим корректировочную формулу с учетом упрочнения:

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{s_{ij}^{e}(\tau_n + S^e k_\chi^{/} / \mu)}{S^e(1 + k_\chi^{/} / \mu)}\,,\;\; S^e = \sqrt{s_{kl}^{e} s_{kl}^{e} / 2}$$

Таким образом, получены различные эффективные формулы корректировки компонент напряжений на «упругом» шаге расчета первого и второго порядка точности для расчета классических соотношений упруговязкопластичности при различных условиях текучести, в том числе с учетом упрочнения. Формулы допускают предельный переход к нулевому значению малого параметра исходной дифференциальной системы уравнений, что соответствует предельному переходу от упруговязкопластической модели сплошной среды к упругопластической. Эти корректировочные формулы были использованы для численного решения различных динамических задач нагружения упруговязкопластических и упругопластических тел и элементов конструкций [3].

Литература

1. Бураго Н.Г., Никитин И.С., Якушев В. Л. Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток// ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 6. С. 1082-1092.
2. Иванов В.Д., Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами// Математическое моделирование. 1990. Т. 2. № 11. С. 10-29.
3. Бураго Н.Г., Никитин И.С. Алгоритмы сквозного счета для процессов разрушения// Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т.10. №5. С.645-666.