УДК 539.3

© 2016 г. Н. Г. Бураго, И. С. Никитин

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ НА КОНТАКТНЫХ ГРАНИЦАХ

На основе асимптотического метода осреднения получены континуальные уравнения слоистой среды с проскальзыванием с учетом членов второго порядка по малому параметру толщины слоя. Использовано линейное условие проскальзывания, связывающее скачки касательных смещений на контактных границах и касательные напряжения. Полученные уравнения также являются асимптотически полным обобщением некоторых моделей слоистых сред, основанных на инженерных подходах или приближенных гипотезах о характере деформирования слоев. Исследованы волновые свойства полученной системы уравнений, выписаны дисперсионные соотношения для гармонических волн. Построено решение задачи о поверхностной волне типа Релея на границе упругого слоистого полупространства.

Интерес к проблеме распространения и трансформации волн в слоистых средах связан с задачами сейсмологии и инженерной геофизики. Как правило, сейсмичность связана с горными районами, в которых скальные породы выходят на земную поверхность. Зачастую эти породы содержат регулярные сетки трещин, позволяющие рассматривать их как слоистые структуры. Классические исследования волновых полей в таких средах обычно исходят из непрерывности поля смещений. Однако для достаточно сильных сейсмических воздействий следует учитывать возможность касательных подвижек на границах слоев. Для протяженных воздействий необходимо использовать «осредненные», континуальные модели сплошных сред со структурой, так как невозможно следить за деформацией каждого элемента структуры.

В данной работе на основе асимптотического метода [1, 2] получены осредненные уравнения слоистой среды с проскальзыванием с учетом членов второго порядка по малому параметру толщины слоя. Использовано линейное условие проскальзывания, связывающее скачки касательных смещений на контактных границах и касательные напряжения. Уравнения нулевого приближения были выведены ранее [3, 4]. Полученные в данной работе уравнения являются асимптотически полным обобщением моделей [5, 6] слоистых сред, основанных на инженерных подходах или приближенных гипотезах о характере деформирования слоев. Также можно отметить результаты прямого численного моделирования динамики блочной среды с учетом проскальзывания между блоками и построение эффективной модели такой среды как моментного континуума Коссера [7]. Такого рода модели необходимы при изучении статического деформирования горных массивов и при решении динамических (волновых) задач геофизики. Теория слоистых сред с проскальзыванием на контактных границах может быть полезна при описании композитных материалов с дополнительными мягкими прослойками (скажем, резиновыми) между слоями из основного, достаточно жесткого упругого материала.

1. Построение уточненной модели. В декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим безграничную слоистую среду. Ось x_3 перпендикулярна плоскопараллельным границам раздела слоев. Границы раздела имеют координаты

$$x_3 = x^{(s)} = s\,\varepsilon, \quad s = 0, \quad \pm 1, \ \pm 2\ldots$$

где постоянная толщина слоя $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Если говорить точнее, то должно выполняться соотношение $\varepsilon/l \ll 1$, где l — характерный размер распределенных нагрузок, скажем, характерная длина волны в исследуемом динамическом процессе. При этом все линейные величины должны быть отнесены к l.

На границах слоев выполняются следующие условия скольжения в предположении, что межслойная граница всегда поджата:

$$\sigma_{33} < 0, \quad [u_3] = [\sigma_{\gamma 3}] = [\sigma_{33}] = 0$$

$\sigma_{\gamma 3} = k_*[u_\gamma]$ — линейное проскальзывание винклеровского типа, $k_*\varepsilon = k = O(1)$.

Квадратные скобки $[f] = f|_{x^{(s)}+0} - f|_{x^{(s)}-0}$ обозначают скачок величины f на межслойной границе.

Контактные условия приближенно выполняются, если между слоями присутствуют мягкие прослойки толщины δ, $\delta/\varepsilon \ll 1$, с малым модулем сдвига μ_δ. Очевидно,

$$\sigma_{\gamma 3} = \frac{k}{\varepsilon}[u_\gamma] = \frac{k\delta}{\varepsilon}\frac{[u_\gamma]}{\delta} = \mu_\delta \frac{[u_\gamma]}{\delta}$$

где $[u_\gamma]/\delta$ — сдвиговая деформация мягкой прослойки. При этом $\mu_\delta = k\delta/\varepsilon$. Можно сказать, что k — это коэффициент сдвиговой связи слоев. Сами слои — изотропные, упругие и подчиняются закону Гука

$$x_3 \neq x^{(s)}: \sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}$$

Здесь и далее для компактности формул дифференцирование обозначено так:

$$\partial(\ldots)/\partial x_j = (\ldots)_{,j}, \quad \partial(\ldots)/\partial t = (\ldots)_{,t}, \quad \partial(\ldots)/\partial \xi = (\ldots)_{,\xi}$$

Выражение для компонент тензора модулей упругости имеет вид

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Введем в соответствии с методом асимптотического осреднения [1] “быструю” переменную $\xi = x_3/\varepsilon$ и будем считать, что $u_k = u_k(x_l, \xi, t)$ — функция, гладкая по «медленным» переменным x_l и по “быстрой” переменной ξ, за исключением точек $\xi^{(s)} = x^{(s)}/\varepsilon$, где она может терпеть разрывы первого рода. Кроме того, по ξ она является 1-периодической:

$$[[u_i]] = u_i|_{\xi^{(s)}+1/2} - u_i|_{\xi^{(s)}-1/2} = 0$$

С учетом такого выбора аргументов и правила дифференцирования сложной функции, перепишем систему на ячейке периодичности (ЯП)

$$x^{(s)} - 1/2 \le x_3 \le x^{(s)} + 1/2, \quad -1/2 \le \xi \le 1/2$$

Уравнения для $x_3 \neq x^{(s)}$, $\xi \neq 0$ имеют вид

$$\varepsilon^{-2} C_{i3k3} u_{k,\xi\xi} + \varepsilon^{-1}(C_{ijk3} u_{k,j\xi} + C_{i3kl} u_{k,l\xi}) + C_{ijkl} u_{k,lj} - \rho u_{i,tt} = 0$$

Контактные условия

$$x_3 = x^{(s)}, \quad \xi = 0: \varepsilon^{-1} C_{33k3} u_{k,\xi} + C_{33kl} u_{k,l} < 0$$

$$[u_3] = 0, \quad [\varepsilon^{-1} C_{i3k3} u_{k,\xi} + C_{i3kl} u_{k,l}] = 0, \quad \varepsilon^{-1} C_{\gamma 3k3} u_{k,\xi} + C_{\gamma 3kl} u_{k,l} = k_* [u_\gamma]$$

Здесь и далее греческие индексы β и γ принимают значения 1 и 2, латинские – значения 1, 2, 3, если не оговорено иное.

Представим смещения среды в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε

$$u_i = u_i^{(0)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^3 u_i^{(3)}(x_k, \xi, t) + \ldots$$

Введем операцию “осреднения” $\langle f \rangle$ для функции быстрой переменной ξ, которая будет часто использоваться в дальнейшем:

$$\langle f \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f d\xi \tag{1.1}$$

Условия 1-периодичности записываются так:

$$[[u_i]] = u_i\big|_{\xi+1/2} - u_i\big|_{\xi-1/2} = 0 \tag{1.2}$$

Приближения смещений должны удовлетворять дополнительному условию [1]

$$\left\langle u_k^{(n)} \right\rangle = 0 \tag{1.3}$$

Подставим асимптотический ряд для смещений в систему уравнений теории упругости. Приравнивая к нулю коэффициент при ε^{-2}, получим, что нулевое приближение $u_i^{(0)} = w_i(x_k, t)$ не зависит от быстрой переменной. Приравнивая к нулю коэффициент при ε^{-1}, получим, что первое приближение $u_i^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$C_{i3k3} u_{k,\xi\xi}^{(1)} = 0$$

Дифференциальная система уравнений после этого примет вид

$$\begin{aligned} &C_{ijkl} w_{k,jl} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(1)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(1)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(2)})_{,\xi} + \\ &+ \varepsilon \left[C_{ijkl} u_{k,jl}^{(1)} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(2)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(2)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(3)})_{,\xi} \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \left[C_{ijkl} u_{k,jl}^{(2)} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(3)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(3)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(4)})_{,\xi} \right] + \ldots = \rho w_{i,tt} + \varepsilon \rho u_{i,tt}^{(1)} + \varepsilon^2 \rho u_{i,tt}^{(2)} + \ldots \end{aligned}$$

Разложению компонент смещений соответствует разложение компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \ldots; \quad \sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl} u_{k,l}^{(n)} + C_{ijk3} u_{k,\xi}^{(n+1)}$$

Все приближения напряжений – 1-периодические функции ξ. В частности,

$$\sigma_{i3}^{(n)} = C_{i3kl} u_{k,l}^{(n)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(n+1)}$$

и выполняются условия

$$[\sigma_{i3}^{(n)}] = 0, \quad [[\sigma_{i3}^{(n)}]] = 0$$

Легко видеть, что

$$\left\langle \sigma_{i3}^{(n)}{}_{,\xi} \right\rangle = 0.$$

Оставляя в системе уравнений члены определенного порядка по ε, применяя к ней операцию осреднения (1.1) и избавляясь тем самым от быстрой переменной ξ, получаем осредненную модель слоистой среды с проскальзыванием винклеровского типа.

Для вывода уточненной теории второго порядка в системе уравнений удержим члены порядка ε^2. Применяя к системе уравнений операцию осреднения (1.1), получим

$$C_{ijkl} w_{k,jl} + C_{ijk3} \left\langle u_{k,\xi}^{(1)} \right\rangle_{,j} + \varepsilon C_{ijk3} \left\langle u_{k,\xi}^{(2)} \right\rangle_{,j} + \varepsilon^2 C_{ijk3} \left\langle u_{k,\xi}^{(3)} \right\rangle_{,j} = \rho w_{i,tt}$$

Это и есть искомая осредненная система уравнений для слоистой среды с проскальзыванием. Для полной формулировки необходимо найти функции $\left\langle u_{k,\xi}^{(n)} \right\rangle$ ($n = 1, 2, 3$), входящие в эту систему. Каждая из трех функций $u_i^{(n)}(x_k, \xi, t)$ ($n = 1, 2, 3$) находится из соответствующей “задачи на ЯП”, которая получается приравниванием нулю членов с одинаковыми степенями ε^{n-1} в асимптотической системе уравнений. Дополнительные условия для определения этих функций получаются переформулированием для каждой из них контактных условий на границе слоев, условия 1-периодичности (1.2) и условия (1.3).

Сформулируем эти три задачи на ЯП.

Задача 1

$$|\xi| < 1/2:\ C_{i3k3} u_{k,\xi\xi}^{(1)} = 0$$

$$\xi = 0:\ [C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(1)}] = 0, \quad [u_3^{(1)}] = 0, \quad k[u_\gamma^{(1)}] = C_{\gamma 3kl} w_{k,l} + C_{\gamma 3k3} u_{k,\xi}^{(1)}$$

при дополнительных условиях (1.2), (1.3) для $n = 1$.

Опуская выкладки[1], выпишем решение этой задачи

$$u_\gamma^{(1)} = \varphi_\gamma(\xi - \operatorname{sign}\xi/2), \quad u_3^{(1)} = 0, \quad \varphi_\gamma = -\tau_\gamma/(k+\mu), \quad \tau_\gamma = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma})$$

Соответственно, для производных, необходимых при выводе осредненной системы, имеем равенства

$$u_{\gamma,\xi}^{(1)} = \varphi_\gamma, \quad u_{3,\xi}^{(1)} = 0, \quad \left\langle u_{\gamma,\xi}^{(1)} \right\rangle = \varphi_\gamma, \quad \left\langle u_{3,\xi}^{(1)} \right\rangle = 0$$

Задача 2

$$|\xi| < 1/2:\ C_{ijkl} w_{k,jl} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(1)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(1)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(2)})_{,\xi} = \rho w_{i,tt}$$

Применяя к этому дифференциальному уравнению операцию осреднения (1.1) и учитывая, что в результате осреднения последнее слагаемое в левой части этого уравнения обращается в нуль, а остальные слагаемые не зависят от ξ, получаем простое следствие

$$C_{i3k3} u_{k,\xi\xi}^{(2)} = -C_{i3kl} u_{k,\xi l}^{(1)}$$

$$\xi = 0:\ [C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(2)}] = -[C_{i3kl} u_{k,l}^{(1)}], \quad [u_3^{(2)}] = 0, \quad k[u_\gamma^{(2)}] = C_{\gamma 3kl} u_{k,l}^{(1)} + C_{\gamma 3k3} u_{k,\xi}^{(2)}$$

[1]Здесь и далее опущенные выкладки см. Бураго Н.Г., Никитин И.С., Юшковский П.А. Уточненная континуальная модель слоистой среды с проскальзыванием на межслойных границах. Препринт № 1096. М.: ИПМех РАН, 2015. 30 с.

при дополнительных условиях (1.2) и (1.3) для $n = 2$.

Опуская выкладки, приведем решение этой задачи

$$u_k^{(2)} = -\psi_k(\xi^2 - \xi \operatorname{sign} \xi + 1/6)/2, \quad \psi_\gamma = \varphi_{\gamma,3}, \quad \psi_3 = \lambda\varphi_{\beta,\beta}/(\lambda + 2\mu)$$

Для производных, необходимых для вывода осредненной системы, имеем равенства

$$u_{k,\xi}^{(2)} = -\psi_k(\xi - \operatorname{sign} \xi/2), \quad \left\langle u_{k,\xi}^{(2)} \right\rangle = 0$$

Видно, что второе приближение вклада в осредненную систему не дает.

Задача 3

$$|\xi| < 1/2: C_{i3k3}u_{k,\xi\xi}^{(3)} = -C_{ijkl}u_{k,jl}^{(1)} - C_{i3kl}u_{k,\xi l}^{(2)} - C_{ijk3}u_{k,\xi j}^{(2)} + \rho u_{i,tt}^{(1)}$$

$$\xi = 0: [C_{i3k3}u_{k,\xi}^{(3)}] = -[C_{i3kl}u_{k,l}^{(2)}], \quad [u_3^{(3)}] = 0, \quad k[u_\gamma^{(3)}] = C_{\gamma 3kl}u_{k,l}^{(2)} + C_{\gamma 3k3}u_{k,\xi}^{(3)}$$

при дополнительных условиях (1.2) и (1.3).

Сначала построим решение для компонент смещений при $i = \gamma$. Выражения с тензором модулей упругости имеют вид

$$C_{ijkl}u_{k,jl}^{(1)} = C_{\gamma j\beta l}u_{\beta,jl}^{(1)} = (\lambda\delta_{\gamma j}\delta_{\beta l} + \mu\delta_{\gamma\beta}\delta_{jl} + \mu\delta_{\gamma l}\delta_{j\beta})u_{\beta,jl}^{(1)} = (\lambda + \mu)u_{\beta,\beta\gamma}^{(1)} + \mu u_{\gamma,ll}^{(1)}$$

$$(C_{\gamma 3kl} + C_{\gamma lk3})u_{k,\xi l}^{(2)} = \left((\lambda + \mu)\delta_{\gamma l}\delta_{3k} + 2\mu\delta_{\gamma k}\delta_{3l}\right)u_{k,\xi l}^{(2)} = (\lambda + \mu)u_{3,\xi\gamma}^{(2)} + 2\mu u_{\gamma,\xi 3}^{(2)}$$

Уравнение задачи на ЯП можно записать следующим образом:

$$|\xi| < 1/2: u_{\gamma,\xi\xi}^{(3)} = \chi_\gamma\,(\xi - \operatorname{sign} \xi/2)$$

$$\chi_\gamma = -\varphi_{\gamma,ll} - \frac{\lambda + \mu}{\mu}\varphi_{\beta,\beta\gamma} + 2\psi_{\gamma,3} + \frac{\lambda + \mu}{\mu}\psi_{3,\gamma} + \frac{1}{\mu}\rho\varphi_{\gamma,tt}$$

$$\xi = 0: [u_{\gamma,\xi}^{(3)}] = -[u_{\gamma,3}^{(2)} + u_{3,\gamma}^{(2)}] = 0, \quad k[u_\gamma^{(3)}] = \mu(u_{\gamma,3}^{(2)} + u_{3,\gamma}^{(2)} + u_{\gamma,\xi}^{(3)})$$

при дополнительных условиях (1.2) и (1.3).

Интегрируя уравнение с учетом условий при $\xi = 0$ и опуская выкладки, получим

$$u_{\gamma,\xi}^{(3)} = \frac{1}{2}\chi_\gamma(\xi^2 - \xi \operatorname{sign} \xi) + \frac{1}{12(k + \mu)}\left(k\chi_\gamma + \mu\psi_{\gamma,3} + \mu\psi_{3,\gamma}\right)$$

Аналогично при $i = 3$ получим

$$u_{3,\xi}^{(3)} = \frac{1}{2}\chi_3\left(\xi^2 - \xi \operatorname{sign} \xi + \frac{1}{6}\right); \quad \chi_3 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\psi_{\beta,\beta} + 2\psi_{3,3} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\varphi_{\beta,\beta 3}$$

Окончательные выражения для осредненных производных имеют вид

$$\left\langle u_{\gamma,\xi}^{(3)} \right\rangle = \frac{\mu}{12\left(k + \mu\right)}\left(\varphi_{\gamma,\beta\beta} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\varphi_{\beta,\beta\gamma} - \frac{\rho}{\mu}\varphi_{\gamma,tt}\right), \quad \left\langle u_{3,\xi}^{(3)} \right\rangle = 0$$

2. Варианты осредненной системы уравнений. С использованием полученных результатов сформулируем искомую систему уравнений (латинские индексы $i, j, k, l = 1, 2, 3$; греческие индексы β, $\gamma = 1, 2$)

$$C_{ijkl}w_{k,jl} + C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(1)} \right\rangle_{,j} + \varepsilon^2 C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(3)} \right\rangle_{,j} = \rho w_{i,tt}$$

Учитывая выражения для тензора модулей упругости, слагаемые в левой части этой системы запишем в виде

$$C_{ijkl}w_{k,jl} = (\lambda + \mu)w_{k,ki} + \mu w_{i,kk}, \quad C_{\gamma jk3}\left\langle u^{(1)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} = \mu\varphi_{\gamma,3}, \quad C_{3jk3}\left\langle u^{(1)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} = \mu\varphi_{\beta,\beta}$$

$$C_{\gamma jk3}\left\langle u^{(3)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} = \mu\left\langle u^{(3)}_{\gamma,\xi}\right\rangle_{,3} = \frac{\mu^2}{12(k+\mu)}\left(\varphi_{\gamma,\beta\beta3} + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\varphi_{\beta,\beta\gamma3} - \frac{1}{\mu}\rho\varphi_{\gamma,tt3}\right)$$

$$C_{3jk3}\left\langle u^{(3)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} = \mu\left\langle u^{(3)}_{\beta,\xi}\right\rangle_{,\beta} = \frac{\mu^2}{12(k+\mu)}\left(4\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\varphi_{\beta,\beta\gamma\gamma} - \frac{1}{\mu}\rho\varphi_{\beta,\beta tt}\right)$$

Окончательно уточненная система уравнений будет выглядеть следующим образом (выражения для множителей при ε^2 определены приведенными выше двумя последними равенствами):

$$(\lambda+\mu)w_{k,k\gamma} + \mu w_{\gamma,kk} + \mu\varphi_{\gamma,3} + \varepsilon^2\mu\left\langle u^{(3)}_{\gamma,\xi}\right\rangle_{,3} = \rho w_{\gamma,tt}$$

$$(\lambda+\mu)w_{k,k3} + \mu w_{3,kk} + \mu\varphi_{\beta,\beta} + \varepsilon^2\mu\left\langle u^{(3)}_{\gamma,\xi}\right\rangle_{,\beta} = \rho w_{3,tt}$$

Ясно, что система содержит производные четвертого порядка от перемещений w_k по пространственным координатам и смешанные производные по времени. В случае идеально скользящего контакта между слоями $k = 0$ и $\varphi_\gamma = -(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma})$.

Введем обозначения

$$\tilde{\mu} = \mu k/(k+\mu), \quad \beta_\mu = \mu/(k+\mu), \quad L = (\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)$$

Отдельно сформулируем двумерную динамическую систему уравнений

$$(\lambda+2\mu)w_{1,11} + (\lambda+\tilde{\mu})\,w_{3,13} + \tilde{\mu}w_{1,33} - \frac{\varepsilon^2\beta_\mu^2}{3}L\mu\left(w_{1,1133} + w_{3,3111}\right) +$$
$$+ \rho\frac{\varepsilon^2\beta_\mu^2}{12}\left(w_{1,33tt} + w_{3,31tt}\right) = \rho w_{1,tt}$$

$$(\lambda+2\mu)w_{3,33} + (\lambda+\tilde{\mu})\,w_{1,13} + \tilde{\mu}w_{3,11} - \frac{\varepsilon^2\beta_\mu^2}{3}L\mu\left(w_{1,1113} + w_{3,1111}\right) +$$
$$+ \rho\frac{\varepsilon^2\beta_\mu^2}{12}\left(w_{1,13tt} + w_{3,11tt}\right) = \rho w_{3,tt}$$

И, наконец, запишем одномерное динамическое уравнение изгиба слоистого пакета (случай $w_1 = 0,\ w_3 = w_3(x_1, t)$)

$$\frac{\varepsilon^2\beta_\mu^2}{3}L\mu w_{3,1111} - \tilde{\mu}w_{3,11} - \rho\frac{\varepsilon^2\beta_\mu^2}{12}w_{3,11tt} + \rho w_{3,tt} = 0$$

и формулы для компонент тензора напряжений

$$\sigma^{(0)}_{ij} = \lambda\delta_{ij}w_{k,k} + \mu(w_{i,j} + w_{j,i}) + \mu(\varphi_i\delta_{j3} + \varphi_j\delta_{i3})$$

$$\sigma^{(1)}_{ij} = \left(\lambda\delta_{ij}\varphi_{k,k} + \mu(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}) - \lambda\delta_{ij}\psi_3 - \mu(\psi_i\delta_{j3} + \psi_j\delta_{i3})\right)(\xi - \operatorname{sign}\xi/2)$$

Граничные условия для нагруженной поверхности записываются в виде

$$\sigma^{(0)}_{ij}n_j = P_i, \quad \sigma^{(1)}_{ij}n_j = 0$$

В некоторых задачах при определенных ориентациях нормали к границе граничное условие первого порядка превращается в тождество. В этом случае следует использовать условие второго порядка

$$\sigma_{ij}^{(2)} n_j = 0$$

3. Волны в слоистой среде с проскальзыванием на межслойных границах. ***Плоские гармонические волны.*** Определим свойства гармонических волн, распространяющихся в произвольном направлении по отношению к ориентации слоев при произвольном коэффициенте связи слоев k.

Введем обозначения

$$\beta_1 = L\beta_\mu^2/3, \quad \beta_2 = \beta_\mu^2/12, \quad \mu_* = \mu\beta_1/\beta_2$$

Двумерную динамическую систему уравнений для рассматриваемой слоистой среды можно записать в виде

$$(\lambda + 2\mu)w_{p,pp} + \lambda w_{q,qp} + \tilde{\mu}(w_{1,3} + w_{3,1})_{,q} - \varepsilon^2\mu\beta_1\left(w_{1,3} + w_{3,1}\right)_{,11q} +$$

$$+ \rho\varepsilon^2\beta_2\left(w_{1,3} + w_{3,1}\right)_{,qtt} = \rho w_{p,tt}, \quad p = 1,\ 3, \quad q = 4\ - p$$

Введем дополнительные переменные

$$U = w_{1,3} + w_{3,1}, \quad V = \tilde{\mu}U - \varepsilon^2\mu\beta_1 U_{,11} + \rho\varepsilon^2\beta_2 U_{,tt}$$

Тогда система примет следующую форму:

$$\left((\lambda + 2\mu)w_{p,pp} - \rho w_{p,tt}\right) + \lambda w_{q,qp} + V_{,q} = 0, \quad p = 1, 3, \quad q = 4 - p \tag{3.1}$$

$$w_{1,3} + w_{3,1} - U = 0, \quad \tilde{\mu}U - \varepsilon^2\beta_2(\mu_* U_{,11} - \rho U_{,tt}) - V = 0$$

Рассмотрим распространяющиеся в направлении $\mathbf{n} = (n_1, n_3)$ гармонические волны с частотой ω и волновым числом $\boldsymbol{\kappa} = \kappa\mathbf{n} = (\kappa_1, \kappa_3)$. Здесь

$$\kappa_p = \kappa n_p, \quad p = 1, 3, \quad |\boldsymbol{\kappa}| = \kappa, \quad |\mathbf{n}| = 1$$

Будем искать решение в виде

$$(w_p, U, V) = (A_p, U, V)e^{i(\kappa_1 x_1 + \kappa_3 x_3 - \omega t)}, \quad p = 1, 3$$

Волновое число $\kappa = 2\pi/l$ связано с длиной волны l. Напомним, что $\varepsilon/l \ll 1$ — малый параметр. После выкладок получим соответствующую однородную алгебраическую систему

$$((\lambda + 2\mu)\kappa_p^2 + \mu_\varepsilon\kappa_q^2 - \rho\omega^2)A_p + (\lambda + \mu_\varepsilon)\kappa_1\kappa_3 A_q = 0, \quad p = 1, 3, \quad q = 4 - p$$

$$\mu_\varepsilon = \tilde{\mu} + \varepsilon^2\beta_2(\mu_*\kappa_1^2 - \rho\omega^2)$$

Условие ее разрешимости дает уравнение для скоростей распространения гармонических волн в слоистой среде

$$\zeta^4 - \left(1 + M_\varepsilon\right)\zeta^2 + M_\varepsilon + 4L(M - M_\varepsilon)n_1^2 n_3^2 = 0 \tag{3.2}$$

Здесь

$$\zeta^2 = c^2/c_1^2, \quad M = \mu/(\lambda + 2\mu), \quad M_\varepsilon = \mu_\varepsilon/(\lambda + 2\mu)$$

$c = \omega/\kappa$ – фазовая скорость распространения волн в слоистой среде, $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости распространения продольных и поперечных волн в однородной упругой среде.

Зададим направление волны с помощью угла α:

$$n_1 = \sin\alpha$$

Для некоторых значений α биквадратное уравнение (3.2) имеет точные решения:

при $\alpha = 0$ ($\alpha = \pi/2$) для $\zeta_1 = 1$ имеем продольную волну, для $\zeta_2 = \sqrt{\tilde{M} + \delta}/\sqrt{1 + \varepsilon^2\kappa^2\beta_2}$, $\delta = 0$ ($\delta = \varepsilon^2\kappa^2\beta_2 M_*$) – квазипоперечную волну;

при $\alpha = \pi/4$ для $\zeta_1 = \sqrt{L + \tilde{M} + \varepsilon^2\kappa^2\beta_2 M_*/2}/\sqrt{1 + \varepsilon^2\kappa^2\beta_2}$ имеем квазипродольную волну, для $\zeta_2 = \sqrt{M}$ – квазипоперечную волну.

Здесь

$$\tilde{M} = \tilde{\mu}/(\lambda + 2\mu), \quad M_* = \mu_*/(\lambda + 2\mu)$$

При любых α решение уравнения (3.2) можно искать в принятом приближении $O(\varepsilon^2)$

$$\zeta^2 = \zeta_0^2 + \zeta_*^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

Нулевое приближение ζ_0^2 находится из уравнения

$$\zeta_0^4 - \left(1 + \tilde{M}\right)\zeta_0^2 + \tilde{M} + L(M - \tilde{M})\sin^2 2\alpha = 0$$

Значения ζ_0^2, соответствующие квазипродольным (знак плюс) и квазипоперечным (знак минус) волнам в слоистой среде, таковы:

$$\zeta_0^2 = \left(1 + \tilde{M} \pm D_0\right)/2; \quad D_0 = \sqrt{L^2 + 2L(M - \tilde{M})\cos 4\alpha + (M - \tilde{M})^2}$$

Коэффициент при следующем члене разложения по ε^2 равен

$$\zeta_*^2 = \beta_2\kappa^2(\zeta_0^2 - \cos^2 2\alpha)(M_*\sin^2\alpha - \zeta_0^2)/(2\zeta_0^2 - \left(1 + \tilde{M}\right))$$

Приведем приближенные значения фазовых скоростей с точностью $O(\varepsilon^2)$

$$\zeta \approx \zeta_0(1 + \kappa^2\varepsilon^2\beta_2(\zeta_0^2 - \cos^2 2\alpha)(\zeta_0^2 - M_*\sin^2\alpha)/(2\zeta_0^2 D_0))$$

Видно, что скорости гармонических волн имеют малую дисперсию (порядка $\kappa^2\varepsilon^2$) и зависят от направления распространения (от угла α). Исследуем предельные случаи этих формул:

1) для $\varepsilon \to 0$ ($\mu_\varepsilon \to \tilde{\mu}$),

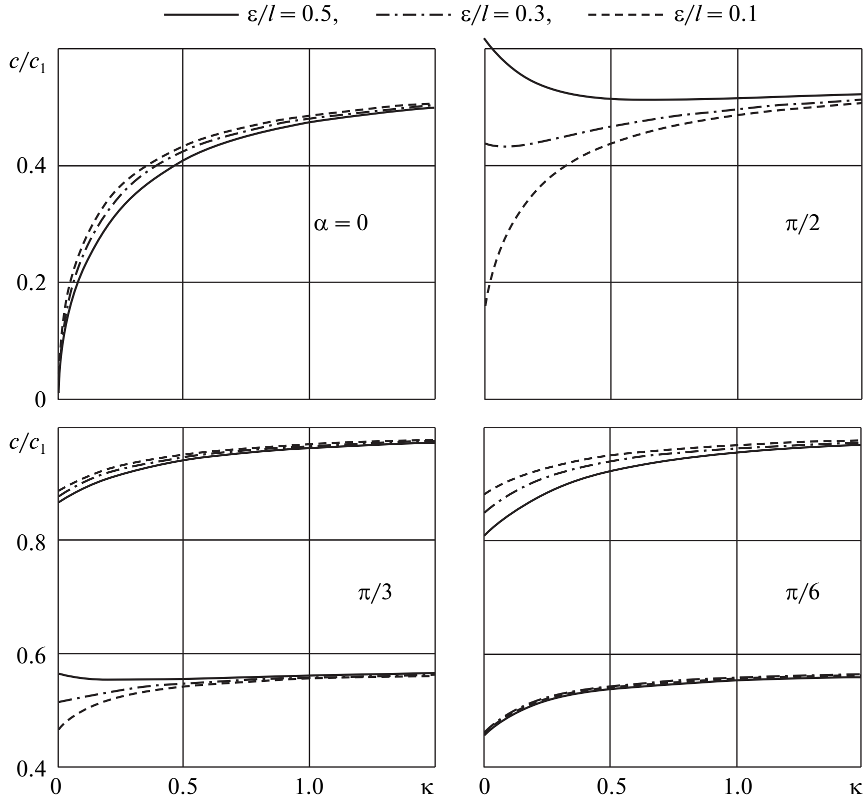
2) случай полного сцепления слоев (однородная упругая среда) $k \to \infty$ ($\tilde{\mu} \to \mu$),

3) случай идеального проскальзывания слоев $k \to 0$ ($\tilde{\mu} \to 0$).

Квазипродольные (квазипоперечные) волны соответствуют знаку плюс (минус) в формулах для определения ζ_0 и ζ. Имеем

а) если $\varepsilon \to 0$, то $\zeta \to \zeta_0$;

б) если $k \to \infty$, то $\zeta_0 \to 1$ ($\zeta \to c_2/c_1$); это упругая продольная (поперечная) волна в изотропной среде: $c \to c_1$ ($c \to c_2$);



в) если $k \to 0$, то

$$\zeta_0^2 \to (1+\sigma\sqrt{L^2+2LM\cos 4\alpha+M^2})/2, \quad \sigma = 1\ (\sigma = -1)$$

Здесь для $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$, т.е. для волн вдоль и поперек слоев, получается $\zeta_0 \to 1$, $c \to c_1$ ($\zeta_0 \to 0$, $c \to 0$). Для $\alpha = \pi/4$, т.е. для волн под углом к направлению слоев с минимальной (максимальной) скоростью распространения, получается $\zeta_0 \to \sqrt{L}$ ($\zeta_0 \to c_2/c_1$).

Зависимость скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн от коэффициента связи слоев k показаны на фигуре. Безразмерные модули упругости слоев заданы равенствами

$$\lambda/(\lambda+2\mu) = \mu/(\lambda+2\mu) = 1/3$$

На верхних фрагментах фигуры отсутствуют серии кривых, соответствующих квазипродольным волнам, поскольку для ориентаций слоев с $\alpha = 0$ и $\pi/2$ скорости продольных волн равны единице, дисперсия отсутствует. На нижних фрагментах верхние серии кривых соответствуют квазипродольным волнам с малой дисперсией. Нижние серии кривых на фигуре соответствуют квазипоперечным волнам при разных значениях малого параметра ε/l и угла α, задающего направление распространения волны. При $\alpha = 0$ (левый верхний фрагмент фигуры) и $\alpha = \pi/2$ (правый верхний фрагмент) кривые описываются точными формулами, приведенными выше. При иных значениях α аналитического решения нет, дано вычисленное графическое представление (см. два нижних фрагмента). Виден уровень дисперсии плоских волн в среде при небольших коэффициентах связи слоев для разных направлений распространения и зависимость дисперсии от отношения ε/l толщины слоя к длине волны. Можно сказать, что дисперсия проявляется только для значений коэффициента связи, удовлетворяющих условию $k/(\lambda + 2\mu) < 0.7$ Она наиболее выражена для направлений $\alpha = \pi/2$ (вдоль слоев) в случае квазипоперечных волн, что показывают нижние серии кривых на фигуре.

Поверхностные волны Релея. Будем искать поверхностные волны на границе слоистого полупространства

$$-\infty < x_3 \leq 0, \quad -\infty < x_1 < \infty \text{ (плоская задача)}$$

Система уравнений для смещений слоистой среды с проскальзыванием на межслойных границах (3.1) выписана ранее. Граничные условия имеют вид

$$x_3 = 0\colon \sigma_{13} = \mu(w_{1,3} + w_{3,1}) = 0, \quad \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)w_{3,3} + \lambda w_{1,1} = 0 \tag{3.3}$$

$$x_3 \to -\infty\colon w_1 \to 0, \quad w_3 \to 0$$

Представим решения поставленной задачи в виде поверхностной волны

$$w_p = C_p e^{\nu x_3} e^{i(\kappa_1 x_1 - \omega t)}, \quad p = 1, 3, \quad \nu > 0$$

и подставим в систему дифференциальных уравнений. Получим алгебраическую однородную систему уравнений

$$(\mu_\varepsilon \nu^2 - \kappa_1^2 \Delta_1) C_1 + (\lambda + \mu_\varepsilon)\nu i\kappa_1 C_3 = 0$$

$$-\kappa_1^2(\lambda + \mu_\varepsilon)\nu C_1 + ((\lambda + 2\mu)\nu^2 - \kappa_1^2 \Delta_{2\varepsilon}) i\kappa_1 C_3 = 0$$

Здесь приняты обозначения

$$\Delta_1 = \lambda + 2\mu - \rho c^2, \quad \Delta_{2\varepsilon} = \Delta_2 + \varepsilon^2 \beta_2 \kappa_1^2 \Delta_*, \quad \Delta_2 = \tilde{\mu} - \rho c^2$$

где $c = \omega/\kappa_1$ – фазовая скорость искомой поверхностной волны.

Условие разрешимости этой системы дает биквадратное уравнение для определения показателя ν, из которого находим два положительных корня

$$\nu_{1,2}^2 = \kappa_1^2 \frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4(\lambda + 2\mu)\mu_\varepsilon \Delta_1 \Delta_{2\varepsilon}}}{2(\lambda + 2\mu)\mu_\varepsilon}, \quad \Delta = \mu_\varepsilon \Delta_{2\varepsilon} + (\lambda + 2\mu)\Delta_1 - (\lambda + \mu_\varepsilon)^2$$

и решения задачи имеют вид

$$w_p = A_{p1} e^{\nu_1 x_3} e^{i(\kappa_1 x_1 - \omega t)} + A_{p2} e^{\nu_2 x_3} e^{i(\kappa_1 x_1 - \omega t)}, \quad p = 1, 3$$

$$i\kappa_1 A_{3r} = \kappa_1^2 \frac{(\lambda + \mu_\varepsilon)\nu_r A_{1r}}{(\lambda + 2\mu)\nu_r^2 - \kappa_1^2 \Delta_{2\varepsilon}}, \quad r = 1, 2$$

Подставляя эти решения в граничные условия (3.3), получим систему уравнений, исключая из которой амплитуды A_{31} и A_{32}, получим систему двух однородных уравнений относительно амплитуд A_{11} и A_{12}. Равенство нулю определителя этой системы приводит к уравнению для определения фазовой скорости поверхностной волны c

$$\eta_2 F(\eta_1, \eta_2) - (1 - \mu_\varepsilon/\mu) G(\eta_1, \eta_2) = 0; \quad \eta_r = \nu_r/\kappa_1, \quad r = 1, 2 \tag{3.4}$$

$$F(\eta_1, \eta_2) = 4(\lambda + \mu)\eta_1\eta_2 - ((\lambda + 2\mu)\eta_1^2 + \lambda\eta_2^2)(1 + \eta_2^2)$$

$$G(\eta_1, \eta_2) = ((\lambda + 2\mu)\eta_2^2 + \lambda)\eta_1 + ((\lambda + 2\mu)\eta_1^2 + \lambda)\eta_2(1 + \eta_2^2)$$

В предельном случае $\varepsilon \to 0$ ($\mu_\varepsilon \to \tilde{\mu}$) уравнение для скорости поверхностной волны получается из (3.4) заменой множителя $(1 - \mu_\varepsilon/\mu)$ на $(1 + k/\mu)^{-1}$.

Случай полного сцепления слоев (однородная упругая среда). При $k \to \infty$ ($\tilde{\mu} \to \mu$) получаем

$$\eta_r^2 = 1 - c^2/c_r^2, \quad r = 1, 2, \quad F(\eta_1, \eta_2) = 0$$

После коротких выкладок приходим к классической волне Релея

$$4\sqrt{1 - c^2/c_1^2}\sqrt{1 - c^2/c_2^2} - (2 - c^2/c_2^2)^2 = 0$$

Случай идеального проскальзывания слоев. При $k \to 0$ ($\tilde{\mu} \to 0$), считая μ_ε малым параметром, получаем

$$\eta_1^2 \sim \frac{4\mu(\lambda + \mu) - (\lambda + 2\mu)\rho c^2}{(\lambda + 2\mu)\mu_\varepsilon}, \quad \eta_2^2 \sim \frac{(\lambda + 2\mu - \rho c^2)(\mu_\varepsilon - \rho c^2)}{4\mu(\lambda + \mu) - (\lambda + 2\mu)\rho c^2}$$

$$(3\lambda + 2\mu)\eta_1\eta_2^2 - 2(\lambda + 2\mu)\eta_1^2\eta_2(1 + \eta_2^2) - \lambda\eta_2(1 + \eta_2^2)^2 - \lambda\eta_1 = 0$$

Анализ зависимости безразмерной скорости поверхностной волны c/c_1 от коэффициентов связи слоев k для разных значений малого параметра ε/l показывает, что дисперсионные кривые для волн Релея подобны дисперсионным кривым, изображенным на правом верхнем фрагменте фигуры для квазипоперечных волн, распространяющихся вдоль направления слоев ($\alpha = \pi/2$) и близки к ним. Для поверхностной волны волновое число равно $\kappa_1 = 2\pi/l$, где l — длина гармонической поверхностной волны. Выход на асимптотику классического корня Релея происходит для значений безразмерного коэффициента $k/(\lambda + 2\mu) > 1.5 \div 2$.

Известно, что для классических волн Релея $c_R/c_2 \approx 0.9$. Такое же отношение скоростей поверхностных и квазипоперечных волн в слоистой среде соблюдается и в данном случае.

В заключение отметим, что граница применимости полученной асимптотической теории точно не определена. Достаточно условно при расчетах была принята верхняя граница малого параметра $\varepsilon/l = 0.5$. Тем не менее для коэффициентов связи слоев, начиная со значений $k/(\lambda + 2\mu) > 0.7$, расчеты дают близкие значения скоростей распространения квазипродольных, квазипоперечных и поверхностных волн для всего диапазона длин волн при $\varepsilon/l < 0.5$.

Полученную уточненную модель можно использовать для исследования трансформации сейсмических волн при их выходе на земную поверхность в горных массивах, содержащих регулярные параллельные сетки трещин, с учетом возможных сдвиговых подвижек на контактных границах, а также при описании деформирования композитных материалов с дополнительными мягкими прослойками между слоями из основного, достаточно жесткого упругого материала.

Авторы благодарят П.А. Юшковского и А.В. Ганьшина за помощь в проведении расчетов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (15-08-02392-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. *Sanchez-Palencia E.* Non Homogeneous Media and Vibration Theory. Berlin: Springer, 1980. 398 p.
3. *Никитин И.С.* Осредненные уравнения слоистой среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 80–86.
4. *Никитин И.С.* Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 4. С. 154–165.
5. *Зволинский Н.В., Шхинек К.Н.* Континуальная модель слоистой среды // Изв. РАН. МТТ. 1984. № 1. С. 5–14.
6. *Салганик Р.Л.* Приближение сплошной среды для описания деформирования слоистого массива // Изв. РАН. МТТ. 1987. № 3. С. 48–56.
7. *Садовский В.М., Садовская О.В., Похабова М.А.* Моделирование упругих волн в блочной среде на основе уравнений континуума Коссера // Вычисл. мех. сплошных сред. 2014. Т. 7. № 1. С. 52–60.

Институт проблем механики РАН,
Институт автоматизации проектирования РАН,
Москва
e-mail: i_nikitin@list.ru

Поступила в редакцию
9.VI.2015