

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СБОРНИК  
ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ В МЕХАНИКЕ  
ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АН СССР  
МОСКВА - 1978

*Н.Г.БУРАГО, В.Н.КУКУДЖАНОВ*

## ВЫПУЧИВАНИЕ И ЗАКРИТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

### 1. Состояние вопроса

Геометрически нелинейная задача о выпучивании оболочек заключается в отыскании форм равновесия этил оболочек в зависимости от значений некоторого параметра (например, параметра нагрузки). Исследования этой задачи для упругих оболочек освещены в работах [1-4]. Ниже представлен краткий обзор работ по выпучиванию упруго-пластических оболочек. В обзор включены лишь наиболее характерные работы, в которых можно найти дальнейшие ссылки.

Постановка задачи выпучивания определяется типом уравнений геометрически нелинейной теории оболочек и конкретной моделью материала оболочки.

В большинстве имеющихся работ [6-22] использована геометрически нелинейная теория оболочек, в уравнениях которой удержаны нелинейные члены не выше квадратичных. В то же время исследования по выпучиванию упругих оболочек [3, 4], выполненные на основе более точной теории Рейсснера [5], показали, что влияние уточняющих членов может быть существенным (более 10% при развитых деформациях). Выпучивание упругопластических оболочек с позиций теории Рейсснера анализировалось в работах [22-24].

Для описания свойств материала в работах [6-12] применялась деформационная теория пластичности, не требующая прослеживания истории нагружения. Применение этой теории не приводит, однако, к ожидаемой экономии в вычислениях при решении задач выпучивания, так как для обеспечения сходимости итерационных процессов решения и получения диаграмм выпучивания (нагрузка - характерное перемещение) приходится вводить шаговое прослеживание процесса деформирования.

В работах [13-24] предпочтение отдано теории упругопластического течения, учитывающей историю нагружения. Развиваемый в этих работах подход опирается на шаговые методы, использующие квазилинеаризацию исходных нелинейных уравнений на каждом шаге по параметру выпучивания. При этом значительно облегчается построение диаграмм выпучивания и становится очень простой операция смены параметра, необходимость которой обусловлена неоднозначностью диаграмм выпучивания.

Кроме того, к преимуществам такого подхода следует отнести возможность по единому алгоритму и, более того, по одной и той же программе вести расчеты на основе различных математических моделей материала, например, определяемых законом Гука, деформационной теорией, теорией течения, дифференциальной теорией ползучести и различными их модификациями [23].

Имеется два основных пути к построению шаговых методов решения задач выпучивания.

Первый - вариационный путь основан на использовании принципа возможных перемещений. При этом либо исходная задача минимизации функционала общего вида по перемещениям на каждом шаге аппроксимируется соответствующей задачей минимизации квадратичного функционала по приращениям перемещений (аналогия квазилинеаризации по методу Ньютона-Канторовича, см. [2,5]), либо осуществляется переход от исходного вариационного принципа для виртуальных перемещений к соответствующему принципу для виртуальных “скоростей” перемещений (т.е. производных от перемещений по параметру выпучивания см. [13]), позволяющему по заданным функциям напряженно-деформированного состояния (включая параметр нагрузки) находить соответствующие “скорости” их изменения и, таким образом, строить шаговый процесс решения по аналогии с методом дифференцирования по параметру [25]. Иллюстрацией вариационного пути решения являются работы [13-17].

Второй подход опирается на дифференциальные уравнения равновесия оболочек. Квазилинеаризация и построение шагового процесса решения в этом случае осуществляется либо по методу Ньютона-Канторовича [28], либо по методу дифференцирования по параметру [27]. Первая возможность использована в работе [21], вторая - в работах [18-20, 22-24]. При таком подходе на каждом шаге по параметру возникают линейные краевые задачи эллиптического типа, а в случае осевой симметрии, к которому относятся рассматриваемые работы [13-24], соответственно линейные двухточечные краевые задачи.

Вариационный путь решения обладает преимуществом универсальности и перспективен при дальнейшем развитии методов решения несимметричных задач выпучивания для оболочек общего вида. Определенные трудности, связанные с формированием, хранением в памяти ЭВМ и решением больших систем алгебраических уравнений, возникающих при использовании конечно-разностной [13] или конечно-элементной [14-17] аппроксимации, могут быть обойдены путем применения методов прямой минимизации (см. [25]).

Такие же системы алгебраических уравнений приходится решать на каждом шаге по параметру выпучивания и при построении конечно-разностных схем в рамках второго пути, использующего дифференциальные уравнения равновесия.

При расчете непологих оболочек ухудшается обусловленность этих систем алгебраических уравнений, что требует привлечения для их решения специальных и довольно трудоемких методов решения [28].

При осесимметричном выпучивании наиболее оптимальным путем решения возникающих на каждом шаге линейных двухточечных краевых задач является применение методов [29-30], использующих непосредственное численное интегрирование и позволяющих избежать неприятностей, связанных с плохой обусловленностью разрешающих систем алгебраических уравнений. Эти методы применялись в работах [3, 11, 12, 20, 23, 34].

В работах [24, 32] было показано, что для умеренно непологих оболочек решение линейных двухточечных краевых задач целесообразно проводить методом сплайнов [31], который в этом случае дает заметную экономию в вычислениях по сравнению с методами непосредственного интегрирования.

## 2. Постановка задачи

Кинематические соотношения и уравнения равновесия примем в соответствии с геометрически нелинейной теорией оболочек Рейсснера:

$$\beta = \varphi_0 - \varphi, \quad u = r - r_0, \quad w = z - z_0, \quad r' = \alpha \cos \varphi, \quad z' = \alpha \sin \varphi$$

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_{\xi 0} + \eta \kappa_\xi, \quad \varepsilon_{\xi 0} = \alpha / \alpha_0 - 1, \quad \kappa_\xi = \beta' / \alpha_0,$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta 0} + \eta \kappa_\theta, \quad \varepsilon_{\theta 0} = r / r_0 - 1, \quad \kappa_\theta = (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) / r_0,$$

$$(rV)' + \alpha r p_V = 0, \quad (rH)' - \alpha N_\theta + \alpha r p_H = 0,$$

$$(rM_\xi)' - \alpha M_\theta \cos \varphi - \alpha r Q = 0, \quad V = N_\xi \sin \varphi + Q \cos \varphi,$$

$$H = N_\xi \cos \varphi - Q \sin \varphi,$$

$$p_V = p_V(r, \varphi, z, \xi, p), \quad p_H = p_H(r, \varphi, z, \xi, p),$$

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i d\eta, \quad M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i \eta d\eta, \quad i = \xi, \theta.$$

здесь штрих означает дифференцирование по пространственному параметру  $\xi$  ( $\xi_a \leq \xi \leq \xi_b$ ). Величины  $r_0, z_0, \varphi_0, \alpha_0$  являются заданными функциями от  $\xi$  и характеризуют начальную геометрию оболочки (см, рис. 1). Аналогичные геометрические характеристики для деформированного состояния оболочки обозначены через  $r, z, \varphi, \alpha$ , где  $\alpha_0, \alpha$  - коэффициенты Ламэ вдоль образующей,  $\eta$  - координата, отсчитываемая от срединной поверхности вдоль нормали. Через  $h$  обозначена толщина оболочки

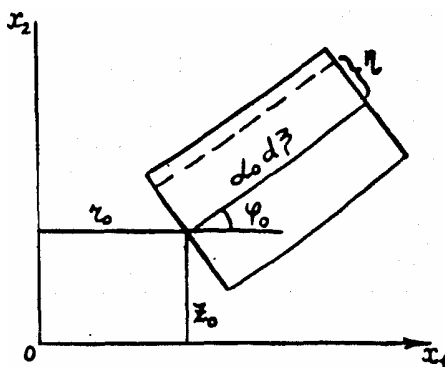


Рис. 1

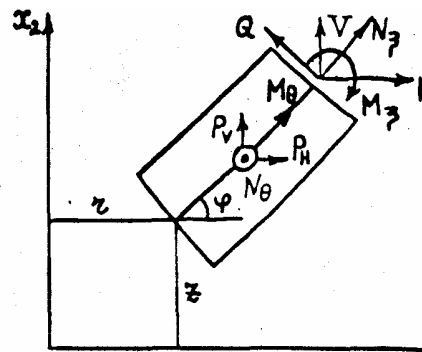


Рис. 2

$(-h/2 \leq \eta \leq h/2)$ ,  $\beta$  - угол поворота нормали,  $u$  и  $w$  - проекции вектора перемещения точек срединной поверхности,  $H$  и  $V$  - проекции главного вектора сил в меридиональной плоскости,

$p_H$  и  $p_V$  - проекции вектора распределенной нагрузки на оси  $x_1$  и  $x_2$ , соответственно. Полагаем, что в общем случае  $p_H$  и  $p_V$  могут зависеть от параметров текущей геометрии срединной поверхности, пространственного параметра  $\xi$  и параметра нагрузки  $p$ . Остальные обозначения являются общепринятыми (см. также рис. 2).

Приведенные уравнения базируются на гипотезах Кирхгофа-Лява и не содержат каких-либо ограничений на углы поворота нормалей и перемещения, однако для их справедливости необходимо, чтобы деформации были малы.

Соотношения связи между напряжениями и деформациями примем в следующем общем дифференциальном виде (в приращениях):

$$\Delta\sigma_\xi = g_{10} + g_{11}\Delta\varepsilon_\xi + g_{12}\Delta\varepsilon_\theta, \quad \Delta\sigma_\theta = g_{20} + g_{21}\Delta\varepsilon_\xi + g_{22}\Delta\varepsilon_\theta$$

где коэффициенты  $g_{ij}$  в общем случае являются функциями напряжений, деформаций и параметров упрочнения, а также времени (в случае дифференциальной теории ползучести), вид которых определяется выбором математической модели материала (см. [23]).

Параметр выпучивания  $t$ , монотонное независимое изменение которого определяет развитие процесса выпучивания, в общем случае определим как функционал от решения

$$t = T(\bar{y}, \sigma_\xi, \sigma_\theta, p) \tag{3}$$

где  $\bar{y} = (w, \beta, u, V, H, M_\xi)$ . Величины  $\bar{\Gamma} = (\bar{y}, \sigma_\xi, \sigma_\theta, p)$  примем за основные, остальные искомые величины можно выразить через основные, используя соотношения (1). Вид функционала (3) в конкретных задачах определяется из физических соображений и может быть различным для различных этапов процесса выпучивания.

Система уравнений (1-3) дополняется начальными и граничными условиями

$$\bar{\Gamma}|_{t=t_0} = \bar{\Gamma}_0(\xi) \tag{4}$$

$$U_a \bar{y}|_{\xi=\xi_a} = \bar{V}_a(t), \quad U_b \bar{y}|_{\xi=\xi_b} = \bar{V}_b(t) \tag{5}$$

Полагаем, что граничные условия (5) удовлетворяют известным ограничениям, вытекающим из принципа виртуальной работы [5].

Векторы  $\bar{V}_a$  и  $\bar{V}_b$  могут зависеть от параметра нагрузки (действие на оболочку краевых сил и моментов).

### 3. Метод решения

Пусть при значении параметра выпучивания  $t = t_n$  состояние оболочки известно. Найдем состояние оболочки для следующего значения параметра  $t = t_{n+1}$ . В пределах малого шага по параметру выпучивания  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  квазилинеаризуем исходные уравнения (1), (3), (4) по методу Ньютона-Канторовича. Полученные квазилинейные уравнения "в приращениях" дополним соотношениями (2) и преобразуем полученную систему уравнений так, чтобы она содержала только приращения основных искомых величин  $\bar{\Gamma}$ . Система квазилинейных уравнений на шаге  $\Delta t_n$  имеет вид (индекс  $n$  опущен)

$$\Delta \bar{y}' = A \Delta \bar{y} + \bar{F}^{(2)} \Delta p + \bar{F}^{(1)}, U_a \bar{y}|_{\xi=\xi_a} = \bar{V}_a^{(2)} \Delta p + \bar{V}_a^{(1)}, U_b \bar{y}|_{\xi=\xi_b} = \bar{V}_b^{(2)} \Delta p + \bar{V}_b^{(1)} \quad (6)$$

$$\Delta \sigma_\xi = g_{10} + (g_{11} \bar{E}^{(1)} + g_{12} \bar{E}^{(2)}) \Delta \bar{y}, \Delta \sigma_\theta = g_{20} + (g_{21} \bar{E}^{(1)} + g_{22} \bar{E}^{(2)}) \Delta \bar{y} \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial T}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial T}{\partial \sigma_\xi} \Delta \sigma_\xi + \frac{\partial T}{\partial \sigma_\theta} \Delta \sigma_\theta + \frac{\partial T}{\partial p} \Delta p = \Delta t \quad (8)$$

Коэффициенты и правые части этих уравнений приведены в Приложении.

Решение краевой задачи (6) представим в виде

$$\Delta \bar{y} = \Delta \bar{y}_{(1)} + \Delta \bar{y}_{(2)} \Delta p \quad (9)$$

где векторы  $\Delta \bar{y}_{(1)}$  и  $\Delta \bar{y}_{(2)}$  являются решениями следующих краевых задач

$$\Delta \bar{y}'_{(i)} = A \Delta \bar{y}_{(i)} + \bar{F}^{(i)}, U_a \Delta \bar{y}_{(i)}|_{\xi=\xi_a} = \bar{V}_a^{(i)}, U_b \Delta \bar{y}_{(i)}|_{\xi=\xi_b} = \bar{V}_b^{(i)} \quad (10)$$

где  $i=1,2$ . В силу соотношений (7) представление (9) влечет аналогичное представление для приращений напряжений

$$\Delta \sigma_\xi = \Delta \sigma_\xi^{(1)} + \Delta \sigma_\xi^{(2)} \Delta p, \Delta \sigma_\theta = \Delta \sigma_\theta^{(1)} + \Delta \sigma_\theta^{(2)} \Delta p \quad (11)$$

где величины  $\Delta \sigma_\xi^{(i)}, \Delta \sigma_\theta^{(i)}$  определяются через векторы  $\Delta \bar{y}_{(i)}$  соотношениями (7).

Подставляя (9) и (11) в соотношение (8), получим уравнение для определения  $\Delta p$  ( $\Delta t$  задано) и найдем, что

$$\Delta p = \frac{\Delta t - \sum_{i=1}^6 \frac{\partial T}{\partial y_i} \Delta y_i^{(1)} - \frac{\partial T}{\partial \sigma_\xi} \Delta \sigma_\xi^{(1)} - \frac{\partial T}{\partial \sigma_\theta} \Delta \sigma_\theta^{(1)}}{\frac{\partial T}{\partial p} - \sum_{i=1}^6 \frac{\partial T}{\partial y_i} \Delta y_i^{(2)} - \frac{\partial T}{\partial \sigma_\xi} \Delta \sigma_\xi^{(2)} - \frac{\partial T}{\partial \sigma_\theta} \Delta \sigma_\theta^{(2)}} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11) и (9), находим приращения остальных основных искомым величин на шаге  $\Delta t$ . Окончательно решение при  $t = t_{n+1}$  находим по формуле

$$\bar{\Gamma}_{n+1} = \bar{\Gamma}_n + \Delta \bar{\Gamma}_n \quad (13)$$

Описанная шаговая процедура имеет второй порядок точности по  $\Delta t$ , как и процедуры типа предиктор-корректор [23, 24], основанные на квазилинеаризации путем дифференцирования по параметру. Однако процедура (13) более экономична, поскольку краевые задачи (10) отличаются только правыми свободными членами, что позволяет сократить время счета при их решении.

При численной реализации описанной шаговой процедуры напряжения  $\sigma_\xi$ ,  $\sigma_\theta$  аппроксимировались сеточными функциями на двумерной сетке (разбиение вводилось по толщине и меридиану оболочки). Аппроксимация функций  $\bar{u}$  и решение краевых задач (10) проводились двумя различными путями: а) использовалась конечно-разностная аппроксимация и метод ортогональной прогонки [30]; б) применялась сплайн-аппроксимация [31] и метод сплайнов в форме, описанной в работах [24,32].

#### 4. Результаты численных расчётов

**Проверка метода.** Представленные варианты метода решения задач выпучивания упруго-пластических оболочек при осевой симметрии реализованы в виде универсальных для задач данного класса программ для ЭВМ БЭСМ-6.

Работа метода и программ была проверена путем решения следующих известных задач: а) линейная задача изгиба цилиндрической оболочки с жестко заделанными краями под действием внутреннего давления; б) линейная задача изгиба круговой тороидальной оболочки внутренним давлением (сравнение с численным решением [28]), в) геометрически нелинейная задача изгиба упругопластических круглых пластин (сравнение с численным. решением [33]);



г) задача о выпучивании непологих упругих сферических куполов под действием внешнего давления (сравнение с численными решениями [4, 34]).

Расчеты проводились по различным программам, в которых использовались:

- а) два способа решения двухточечных краевых задач на шаге;
- б) два типа шаговых процедур, о которых говорилось выше.

Сходимость решений контролировалась путем просчетов вариантов при последовательном дроблении шага как по пространственным переменным, так и по параметру выпучивания. Согласование результатов, полученных по различным программам, между собой и с упомянутыми известными решениями хорошее. Это дает определенную уверенность в том, что приближенные решения задач, полученные с помощью данного метода и составленных на его основе программ, достаточно близки к соответствующим точным решениям.

#### Выпучивание жестко защемленных упруго-пластических сферических куполов под действием внешнего давления

Эта задача рассматривалась в работах [9, 12] с позиций деформационной теории и в работах [14, 19, 21 24] с позиций теории течения.

В работе [35] представлены результаты экспериментов по осесимметричному выпучиванию жестко защемленных сферических куполов под действием внешнего давления. По мнению авторов этой работы в проведенных ими экспериментах влияние пластических эффектов пренебрежимо мало. Покажем, что учет этих эффектов в этом случае позволяет значительно улучшить согласование теории и | эксперимента. Исходные данные для испытывавшихся образцов приведены в табл. 1, 2 (материал 7075-T6, амер. стандарт). Расчеты проведены по деформационной теории с нелинейным изотропным упрочнением, (гипотеза “единой кривой”) без учета разгрузки. Результаты сравнения теоретических и экспериментальных верхних критических нагрузок приведены в табл. 2 и на рис. 3. Сплошной линией на рис. 3 показаны теоретические значения верхних критических нагрузок выпучивания для упругого материала [4, 34]. Наши результаты для упругопластического материала показаны квадратами.

Экспериментальные результаты [35] нанесены точками. Для пяти образцов получено хорошее соответствие физически нелинейной теории и эксперимента (пределах 10%).

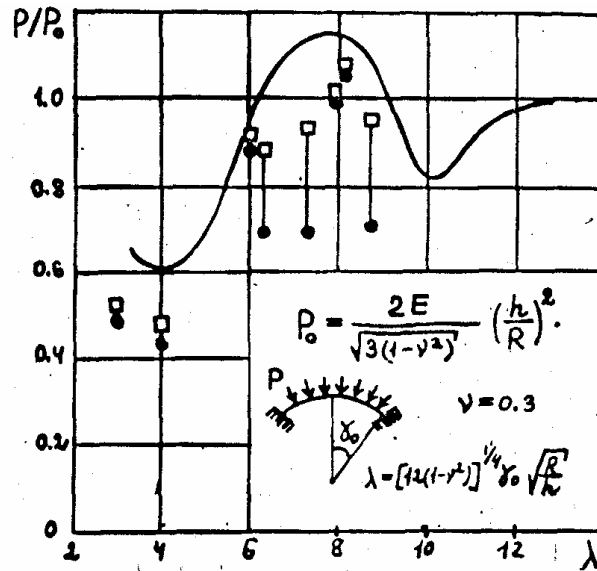


Рис. 3

Таблица 1

кг	0.	3780	4340	4650	4800	5050	5350	5560	5900
см <sup>2</sup>									
Е%	0	0.5	0.625	0.75	0.875	1	1.5	2	3

Таблица 2

Номер образца	$\frac{R}{h}$	$\gamma_0$ (рад)	$\lambda$	$P_{кр}$ эксперимент	$P_{кр}$ теория
SS-59	101	0.175	3.2	0.48	0.51
SS-61	99.2	0.225	4.0	0.43	0.47
SS-65	244	0.212	6.0	0.87	0.91
SS-fl6	244	0.283	8.0	1.00	1.01
SS-67	248	0.283	8.0	1.06	1.07
SS-68	200	0.245	6.0	0.68	0.88
5S-68	208	0.333	8.5	0.70	0.95
SS-73	192	0.306	7.2	0.69	0.93

Для трех образцов экспериментальные верхние критические нагрузки сказались на 25-35% ниже теоретических. Можно предположить, что для этих образцов заделка краев при проведении экспериментов не была достаточно жесткой, что и могло вызвать снижение верхних критических нагрузок выпучивания.

Во всех восьми рассчитанных случаях учет пластических эффектов привел к улучшению согласия теории и эксперимента. Появление пластического состояния материала может произойти за счет моментности напряженного состояния оболочки еще на докритических стадиях деформирования. Оценки по безмоментной теории в этом случае могут привести к ошибочному заключению об упругом состоянии материала оболочки при потере устойчивости (см. [24]).

К такому же неверному заключению может привести и известный экспериментальный прием оценки наличия пластических эффектов при потере устойчивости, заключающийся в нагружении оболочки до 90-95% предполагаемой верхней критической нагрузки с последующим разгружением и изучением остаточных явлений. Выполненные по такой программе нагружения расчеты показали, что остаточные прогибы в этом случае могут быть малыми (сотые доли толщины оболочки), в то время как влияние пластических эффектов на верхние критические нагрузки выпучивания является существенным.

#### Выпучивание упругопластических цилиндрических оболочек при осевом сжатии

Эта задача исследовалась ранее с позиций деформационной теории в работе [12] и с позиций теории течения в работе [19].

В работе [36] были проведены эксперименты по осесимметричному выпучиванию неупругих цилиндрических оболочек под действием осевого сжатия. Исходные данные для этих оболочек приведены в табл. 3, 4 (материал 2024-T4, амер. стандарт). Полученные в экспериментах диаграммы выпучивания показаны на рис. 4-6 пунктирными линиями. На этих рисунках приняты обозначения;  $L$  - длина оболочки,  $\Delta L$  — сближение концов оболочки при выпучивании,  $p = N(Eh^2 / R)^{-1}$  - безразмерный параметр нагрузки,  $N$  - осевая сжимающая сила.

Расчеты были проведены по деформационной теории и по теории течения, соответствующие диаграммы выпучивания показаны на рис. 4-6 сплошными линиями (ДТ - деформационная теория, ТТ - теория течения).

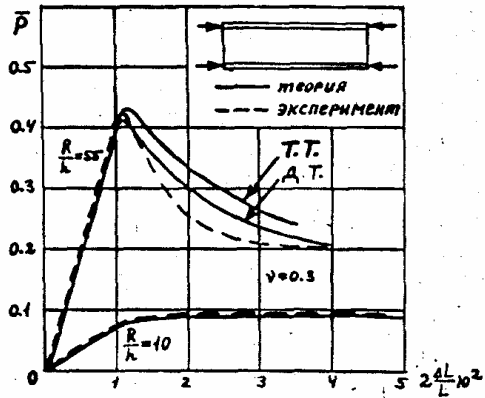


Рис. 4

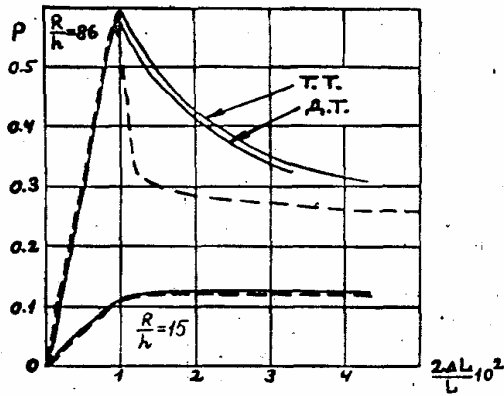


Рис. 5

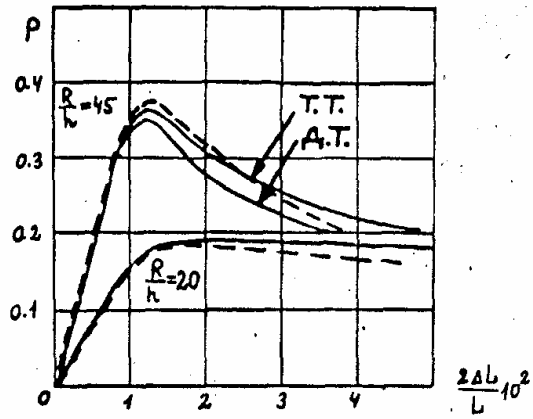


Рис. 6

Величины верхних критических нагрузок выпучивания приведены в табл. 4. В рассмотренных примерах обе теории хорошо согласуются с экспериментом и дают близкие результаты, формально не позволяющие отдать предпочтение какой-либо из них. Это можно объяснить тем, что в этих случаях процесс нагружения был весьма близок к простому, а зоны сложного нагружения, как показали расчеты, были малы.

Таблица 3

$\sigma \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$	0	1890	3024	3500	3970	4150	4520	4760
e% .	0	0.25	0.40	0.50	0.75	1.00	2.00	4.00

Таблица 4

Номер	R/h	L/R	P <sub>кр</sub>		
			Эксперимент	ТТ	ДТ
1	54.93	1.47	0.42	0.43	0.41
2	9.70	2.92	0.10	0.094	
3	85.95	0.74	0.58	0.59	0.59
4	14.19	0.73	0.12	0.13	
5	44.69	1.47	0.38	0.36	0.35
6	19.71	0.72	0.18	0.19	

Полученная по обеим теориям картина выпучивания характеризуется образованием и ростом кольцевой выпучины вблизи края оболочки, что вполне согласуется с наблюдениями в экспериментах [36].

Аналогичные расчеты для случая упругого материала дают форму выпучивания, близкую к синусоиде, верхняя критическая нагрузка выпучивания при этом согласуется с известным результатом линейного бифуркационного анализа  $p = 0.6$ .

#### Осесимметричное выпучивание пологой упругопластической конической оболочки, нагруженной внешним давлением

Приближенное решение данной задачи по геометрически нелинейной теории пологих упругих оболочек было получено в работе [37]. В этой работе использовался метод Бубнова-Галеркина, функция прогиба аппроксимировалась квадратичной параболой (пунктир на рис. 8). Полученная в этой работе диаграмма

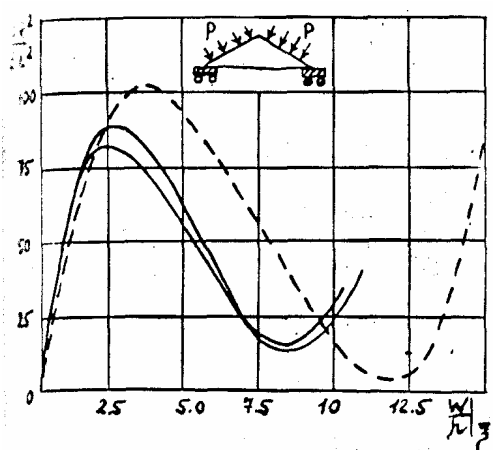


Рис. 7

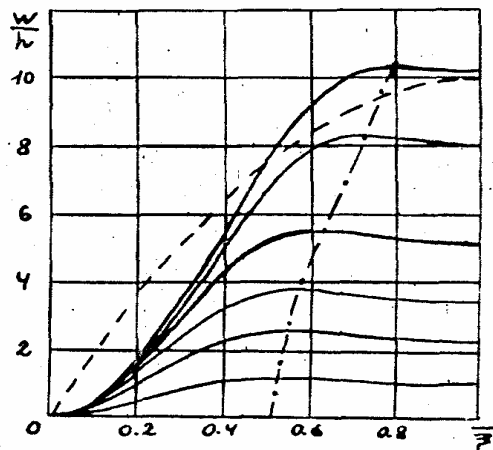


Рис. 8

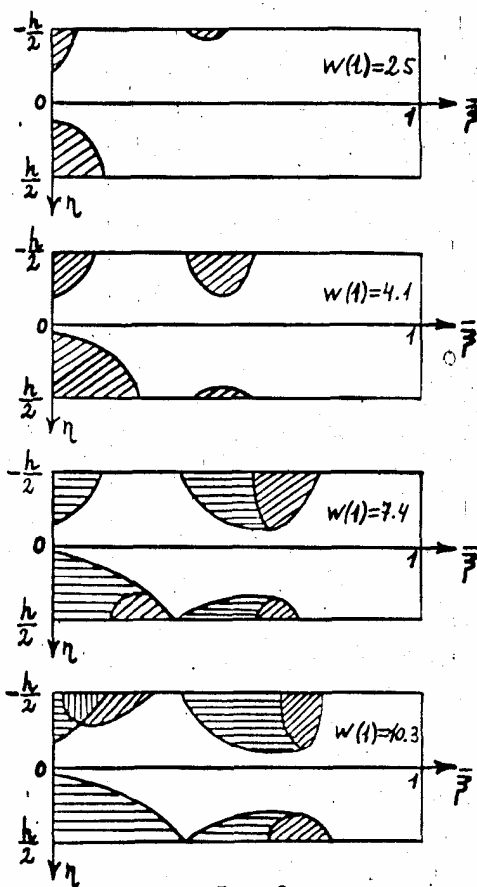


Рис. 9

равновесных состояний показана пунктиром на рис. 7. Исходные данные для этого примера были следующие:  $R/h = 100$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.3$ , где  $R$  - радиус основания,  $\gamma$  - угол подъема,  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Ниже приводим численное решение этой задачи по геометрически нелинейной теории непологих оболочек Рейсснера для случаев упругого и упруго-пластического материалов (теория течения, с нелинейным изотропным упрочнением, диаграмма деформирования материала дана в табл. 5).

Таблица 5

$\sigma / \sigma_s$	0	1	1.13	1.20	1.29	1.34	1.37
$\varepsilon / \varepsilon_c$	0	1	1.25	1.50	2.00	3.00	8.00

Результаты настоящей работы показаны на рис. 7, 8 сплошными линиями. Форма прогибов в процессе выпучивания меняется — положение максимального прогиба постепенно смещается к оси симметрии (штрихпунктирная линия на рис. 8). Зоны состояний материала для различных значений параметра выпучивания показаны на рис. 9 (упругое состояние - отсутствие штриховки, пластическое состояние - косая штриховка, зоны разгрузки - горизонтальная штриховка, зоны повторного пластического деформирования — вертикальная штриховка). Обращает на себя внимание явление движущихся вслед за положением максимального прогиба пластических зон, оставляющих за собой след в виде зон разгрузки. Расчет был прекращен поскольку в оболочке появились большие деформации порядка 5%.

#### Выпучивание круговой упруго-пластической тороидальной оболочки под действием внешнего давления

В представленном ниже конкретном примере приняты следующие исходные данные:

$$\frac{R_1}{R_2} = 3, \quad \frac{R_2}{h} = 30, \quad \nu = 0.3$$

Диаграмма деформирования материала оболочки показана в табл. 5.

Полученные в результате решения задачи диаграммы равновесных состояний приведены на рис. 10, где цифрой “1” помечено решение для упругого

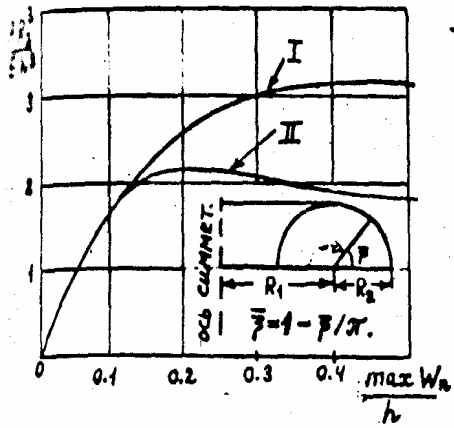


Рис. 10

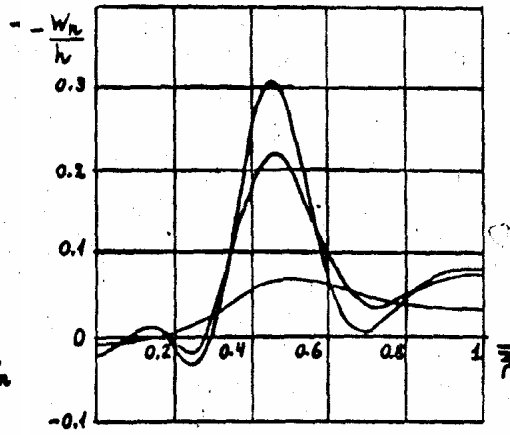


Рис. 11

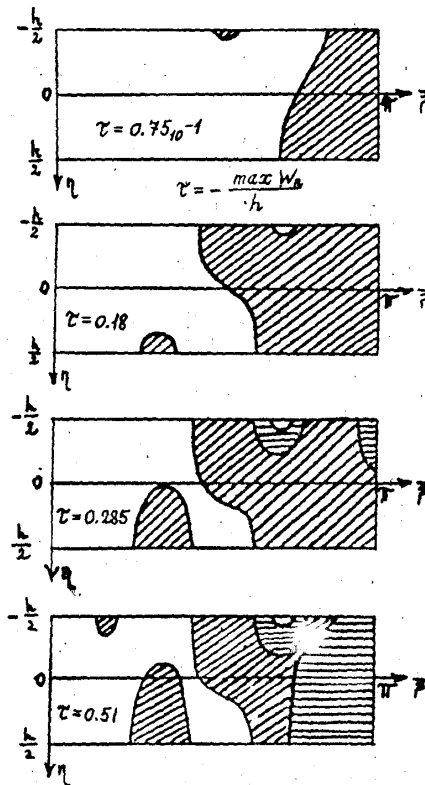


Рис. 12



материала и цифрой “2” - решение для упруго-пластического материала (теория течения, изотропное упрочнение).

Изменение форм прогибов для упруго—пластической оболочки в процессе выпучивания показано на рис. 11. Формы выпучивания упругой оболочки имеют такой же вид. Пластические деформации в данном случае оказывают лишь количественное влияние на характер выпучивания. Эволюция зон упругого и пластического состояний материала показана на рис. 12. Впервые пластическое состояние материала возникает в ближайших к оси симметрии областях материала оболочки. При достижении верхней критической нагрузки выпучивания (первый максимум диаграммы равновесных состояний) в оболочке образуются небольшие зоны разгрузки, которые затем охватывают значительную часть материала оболочки. Зоны вторичного пластического нагружения в рассмотренном примере не наблюдались. Расчет прекращен, поскольку в оболочке появились большие деформации порядка 5%.

Приложение Коэффициенты квазилинейной системы уравнений в приращениях

Матрица  $A$ , векторы  $\bar{F}^{(1)}$ ,  $\bar{F}^{(2)}$ ,  $\bar{E}^{(1)}$ ,  $\bar{E}^{(2)}$  и коэффициенты  $\tilde{g}_{10}$  и  $\tilde{g}_{20}$  определяются следующими соотношениями:

$$a_{ij} = b_{ij} + \sum_{k=1}^{12} c_{ik} d_{kj}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6); \quad A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^6,$$

$$\bar{F}^{(j)} = \{F_i^{(j)}\}_{i=1}^6, \quad (j = 1, 2),$$

$$F_i^{(1)} = \sum_{k=1}^{12} c_{ik} q_k^{(1)} + F_i^{(3)}, \quad F_i^{(2)} = \sum_{k=1}^{12} c_{ik} q_k^{(2)}, \quad \bar{E}^{(1)} = \{d_{7,i} + \eta d_{6,i}\}_{i=1}^6,$$

$$\bar{E}^{(2)} = \{d_{1,i} + \eta d_{2,i}\}_{i=1}^6, \quad \tilde{g}_{10} = g_{10} + g_{11}(q_7^{(1)} + \eta q_6^{(1)}), \quad \tilde{g}_{20} = g_{20} + g_{21}(q_7^{(1)} + \eta q_6^{(1)})$$

где среди элементов  $b_{ij}$ ,  $c_{ik}$ ,  $d_{kj}$ ,  $q_k^{(j)}$ ,  $q_k^{(2)}$ ,  $F_i^{(3)}$  отличны от нуля следующие:

$$b_{4,3} = -V'/r - p_V \alpha / r, \quad b_{4,4} = b_{5,5} = b_{6,6} = -r'/r, \quad b_{5,3} = -H'/r - p_H \alpha / r,$$

$$b_{6,3} = -M'_\xi / r + Q \alpha / r, \quad c_{1,5} = \alpha \cos \varphi, \quad c_{1,8} = \sin \varphi, \quad c_{2,6} = \alpha_0, \quad c_{3,5} = -\alpha \sin \varphi,$$

$$c_{3,8} = \cos \varphi, \quad c_{4,5} = -c_{3,5} V / r, \quad c_{4,8} = -c_{3,8} V / r - p_V$$

$$\begin{aligned}
c_{4,11} &= -\alpha, \quad c_{5,5} = -c_{3,5}H/r, \quad c_{5,8} = -c_{3,8}H/r - p_H + N_\theta / r, \quad c_{5,12} = -\alpha, \quad c_{5,10} = \alpha / r, \\
c_{6,4} &= \alpha, \quad c_{6,8} = -c_{3,8}M_\xi / r + Q + M_\theta \cos\varphi / r, \quad c_{6,5} = -c_{3,5}M_\xi / r - \alpha \sin\varphi M_\theta / r, \\
c_{6,9} &= \alpha \cos\varphi / r, \quad d_{1,3} = 1/r_0, \quad d_{2,2} = \cos\varphi / r_0, \quad d_{3,2} = -Q, \quad d_{3,4} = \sin\varphi, \quad d_{3,5} = \cos\varphi, \\
d_{4,2} &= N_\xi, \quad d_{5,2} = -1, \quad d_{4,4} = \cos\varphi, \quad d_{4,5} = -\sin\varphi, \quad d_{6,3} = (L_{11}K_{12} - L_{12}K_{11})d_{1,3} / \delta, \\
d_{6,4} &= -L_{11}d_{3,4} / \delta, \quad d_{6,2} = -L_{11}d_{3,2} / \delta + (L_{11}L_{12} - K_{11}M_{12})d_{2,2} / \delta, \quad d_{6,5} = -L_{11}d_{3,5} / \delta, \\
d_{6,6} &= K_{11} / \delta, \quad d_{7,2} = (d_{3,2} - L_{11}d_{6,2} - L_{12}d_{2,2}) / K_{11}, \quad d_{7,3} = (-K_{12}d_{1,3} - L_{11}d_{6,3}) / K_{11}, \\
d_{7,4} &= (d_{3,4} - L_{11}d_{6,4}) / K_{11}, \quad d_{7,5} = (d_{3,5} - L_{11}d_{6,5}) / K_{11}, \quad d_{7,6} = -L_{11}d_{6,6} / K_{11}, \\
d_{8,i} &= d_{7,i}\alpha_0, \quad (i = 2,3,4,5,6), \quad d_{9,i} = L_{21}d_{7,i} + L_{22}d_{1,i} + M_{21}d_{6,i} + M_{22}d_{2,i}, \quad (i = 2,3,4,5,6), \\
d_{10,i} &= K_{21}d_{7,i} + K_{22}d_{1,i} + L_{11}d_{6,i} + L_{12}d_{2,i}, \quad (i = 2,3,4,5,6), \quad d_{11,1} = \frac{\partial p_V}{\partial z}, \quad d_{11,2} = -\frac{\partial p_V}{\partial \varphi}, \\
d_{11,3} &= \frac{\partial p_V}{\partial r}, \quad d_{12,1} = \frac{\partial p_H}{\partial z}, \quad d_{12,2} = -\frac{\partial p_H}{\partial \varphi}, \quad d_{12,3} = \frac{\partial p_H}{\partial r}, \quad q_6^{(1)} = (L_{11}N_{11} - K_{11}N_{12}) / \delta, \\
q_7^{(1)} &= -(N_{11} + L_{11}q_6^{(1)}) / K_{11}, \quad q_8^{(1)} = \alpha_0 q_7^{(1)}, \quad q_{11}^{(2)} = \frac{\partial p_V}{\partial p}, \quad q_9^{(1)} = L_{21}q_7^{(1)} + M_{21}q_6^{(1)} + N_{22}, \\
q_{10}^{(1)} &= K_{21}q_7^{(1)} + L_{21}q_6^{(1)} + N_{12}, \quad q_{12}^{(2)} = \frac{\partial p_H}{\partial p}, \quad F_1^{(3)} = \alpha \sin\varphi - z', \quad F_3^{(3)} = \alpha \cos\varphi - r', \\
F_4^{(3)} &= -(r'V + rV' + \alpha r p_V) / r - F_3^{(3)}V / r, \quad F_5^{(3)} = -(r'H + rH' + \alpha r p_H - \alpha N_\theta + F_3^{(3)}H) / r, \\
F_6^{(3)} &= -(r'M_\xi + rM'_\xi - \alpha M_\theta \cos\varphi - \alpha r Q + F_3^{(3)}M_\xi) / r,
\end{aligned}$$

где  $\delta = M_{11}K_{11} - L_{11}^2$ . Коэффициенты  $K_{ij}$ ,  $L_{ij}$ ,  $M_{ij}$ ,  $N_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) определяются по формулам

$$K_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} g_{ij} d\eta, \quad L_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} g_{ij} \eta d\eta, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} g_{ij} \eta^2 d\eta, \quad N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} g_{i0} \eta^{j-1} d\eta \quad (14)$$

При численной реализации интегралы (14) вычислялись по методу Симпсона.

## Л и т е р а т у р а

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Изд-во Наука, 1967.
2. Ворович И. И., Минакова Н.И. Проблема устойчивости в теории сферических оболочек. В сб.: “Механика твердого деформируемого тела”, 7 (Итоги науки и техники, ВИНТИ АН СССР). М., ВИНТИ. 1974.
3. Григолюк Э. И., Мамай В. И., Фролов А.Н. Исследование непологих сферических оболочек при конечных перемещениях на основе различных уравнений теории оболочек. Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1972. №5.
4. Валишвили Н. В. О пределах применимости нелинейных уравнений пологих оболочек. Изв. ВУЗов, маш., 1972. № 5.
5. Reissner E. Axisymmetrical Defomations of Thin Shells of Revolution. Proc. of Symp. on Appl. Math., Amer. Math. Soc., 1950, 3.
6. Курдюмов А. А. К теории физически и геометрически нелинейного изгиба и устойчивости пластин и оболочек. Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1961, 34.
7. Лукаш П. А. Расчет пологих оболочек и плит с учетом геометрической и физической нелинейности. Тр. Центр, научно-исслед. ин-та строительных конструкции. 1961. 34.
8. Сорокин В. В. Приближенный метод исследования больших прогибов и несущей способности упруго-пластических оболочек. Инж. ж. Механ. твердого тела. 1966. № 4.
9. Кантор Б. Я. Упруго-пластические деформации гибкого сферического купола; В сб.: "Теория пластин и оболочек". М.» Изд-во “Наука”. 1971.
10. Корнишин М.С., Дедов Н.И., Столяров Н.Н. Средний упруго—пластический изгиб прямоугольных в плане пластин и пологих оболочек с учетом разгрузки и сжимаемости материала. Тр. семинара по теории оболочек. Казанск. физ.-техн. ин-т АН СССР. Вып. 3. Казань. 1973.
11. Фролов А.Н. Нелинейная деформация оболочек вращения. Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1973. №1.
12. Корнейчук Л.Г. Конечные перемещения упруго-пластических оболочек вращения. Докл. АН СССР. 1975. 225. № 3.

13. Hayes Y.C., Lee L. H. N. Inelastic buckling of axisymmetrical shells. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., Eng. Mech. Div., 1970, 96, № 6.
14. Ando Y., Iida K., Kawai T., Yagawa G., Kikuchi F. Finite element large deflection analysis of elastic-plastic shells of revolution subjected to axisymmetric loading. Bull. JSME, 1972, 15, № 85.
15. Khojasteh-Bakht M., Popov E.P. Elastic-plastic analysis of shells of revolution. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., Eng. Mech. Div., 1970, 96, № 3.
16. Марко л. Большие прогибы упруго-пластических оболочек. Ракетная техн. и космонавтика, 1970, 8, № 6.
17. Waszhiszin Z. Archives of Mechanics, 1974, № 5.
18. Волчков Ю.М., Павлов А. В. Упруго-пластическое деформирование цилиндрической оболочки с поперечными ребрами под действием гидростатического давления. Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М., Изд-во "Наука", 1970.
19. Emerton H. K. .Morris N.I". Symmetric buckling of inelastic spherical shells. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., Eng. Mech. Div., 1972, 98, № 6.
20. Гердин, Симонен, Хантер. Анализ больших прогибов упруго-пластических оболочек вращения при осесимметричном нагружении. Ракетная техн. и космонавтика, 1971, 9, № 6.
21. Wilkinson M.T., Fulton H.F. Axisymmetrical bucking of uniformly loaded spherical «hells undergoing plastic deformations, AIAA J., 1972, 9, № 12.
22. Hamada M., Tanaka M. A numerical method for solving elastic—plastic problems of rotationally symmetric shells. Bull.J.S. M.E., 1971, 11, №74.
23. Ширко И.В. Якушев В.Л. Физически и геометрически нелинейные деформации оболочек вращения. Изв. АН СССР. Механ. твердого тела, 1975, №6.
24. Бурого Н.Г. Кукуджанов В.Н. Численный метод решения геометрически нелинейных осесимметричных задач для упруго-пластических оболочек. Строительная механ. и теория сооружений, 1976, № 3.
25. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнении со многими неизвестными, М., Изд-во "Мир", 1975.
26. Канторович Л.В. О методе Ньютона. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1947, 28.
27. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе решения систем нелинейных уравнений; Докл. АН СССР, 1953. 88.

28. Форсайт Дж. Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М., Изд-во “Мир”, 1969.
  29. Калнинс А. Исследование, оболочек вращения при действии симметричной .и несимметричной нагрузок. Прикл. механ., сер. Е, 1964, 31, № 3.
  30. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1961, 16, № 3.
  31. Алберг Дж. Нильсон Э., Уолш Дж. Теория. сплайнов и их приложения. М., Изд-во “Мир”, 1972.
  32. Бурого Н.Г. Численное решение линейных двухточечных краевых задач моментной теории оболочек методом сплайнов. ВИНТИ АН СССР, № 428-76Деп.
  33. Горлач Б. А. Упругопластическое состояние круглой пластины при конечных прогибах. В сб.: “Исследования по теории оболочек и пластин”. Вып. 6-7. Казань, Изд-во Казанск. госуд. ун-та, 1970.
  34. Radhamohan S.K., Setlur A.U., Goldberg J.E. Stability of shells by parametric differentiation. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. J. Struct. Div. 1971, 97, № 6.
  35. Krienzkie M. A., Kiernan T. J. Elastic Stability of Near Perfect Shallow spherical shells. A1AA J., 1963, 1, № 12.
  36. Batterman S. C. Plastic buckling of Axisymmetrically Compressed Cylindrical Shells. A1AA J., 1965, 3, № 2.
  37. Трапезин И. И. Конечные деформации конической оболочки с малым углом подъема, нагруженной равномерным гидростатическим давлением. “Расчеты на прочность”. Вып. 3. М., Машгиз, 1958.
-