

# О РАСЧЕТАХ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ<sup>1</sup>

Бураго Н.Г.

*Институт проблем механики РАН, Москва*

## Введение

Теория континуального разрушения феноменологически описывает потерю материалом свойства упругости из-за накопления микронарушений сплошности, таких как микропоры и микротрещины. Образование и накопление микроповреждений может происходить при достижении критического напряженно-деформированного состояния, критических температур, а также из-за причин и воздействий нетермомеханической природы, таких как лазерное излучение, химические реакции и тому подобных. Поэтому разрушение структурированного материала трактуется как термодинамически независимый процесс и для его описания вводится специальная зависимая переменная - повреждаемость [1, 2], равная нулю для неповрежденного материала и растущая по мере накопления микроповреждений. С ростом повреждаемости (или поврежденности) характеристики упругости материала, а таковыми являются модули упругости и предел текучести, уменьшаются вплоть до нуля, что означает полное разрушение структурированного материала с образованием новых макроповерхностей разрыва сплошности (макротрещин) или распад структурированного материала на отдельные частицы. Обзоры исследований и подробное обсуждение вариантов теории повреждаемости можно найти в работах [3]–[15].

На диаграммах деформирования явлению потери свойств упругости соответствуют участки разупрочнения, на которых рост деформации сопровождается уменьшением напряжения по абсолютной величине. Использование таких диаграмм в качестве характеристик свойств материала в рамках инкрементальных теорий упругопластичности приводит к математически некорректным краевым задачам, так как для разупрочнения матрица касательных модулей теряет свойство положительной определенности, что приводит к потере системой уравнений свойства эллиптичности в статике и гиперболичности в динамике. Краевые задачи при этом становятся некорректными по Адамару и численные методы их решения не срабатывают или дают бессмысленные результаты.

Введение повреждаемости, как причины уменьшения величины параметров упругости, устраняет проблему некорректности краевых задач при разупрочнении. В пошаговых методах решения при этом используются уравнения упругопластичности с диаграммами деформирования без участков разупрочнения, но с разным уровнем значений модулей упругости и предела текучести

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проекту 05-08-50162-а

в зависимости от поврежденности. Эффект разупрочнения не закладывается в математическую модель в виде зависимости предела текучести от деформации, а получается путем решения задачи в расширенном (поврежденностью) пространстве параметров состояния, как результат роста поврежденности и соответствующей деградации упругих свойств материала. То есть, с математической точки зрения введение поврежденности является регуляризацией краевых задач упругопластичности. В теориях повреждаемости разрушение представлено зонами пониженного упругого сопротивления материала, в которых деформации и поврежденность демонстрируют всплеск, а перемещения и скорости претерпевают скачкообразное изменение, описывающее расхождение берегов макротрещины. С появлением зон разрушения краевые задачи теории поврежденности остаются корректными, но обусловленность их ухудшается, что может приводить к патологической зависимости результатов численного моделирования от параметров дискретизации. Для улучшения обусловленности начально-краевых задач в градиентных теориях повреждаемости вводится пространственное осреднение напряжений, деформаций и поврежденности в малой окрестности каждой точки. Это эквивалентно сглаживанию решений путем введения в эволюционные уравнения теории повреждаемости дополнительных вязких членов и придания им свойств параболичности [15].

Потеря корректности задач может произойти также на режимах фрагментации, когда деформируемое тело делится зонами разрушения на не взаимодействующие части. При этом статические краевые задачи становятся некорректными для незакрепленных частей. Для того, чтобы устранить эту некорректность, надо учитывать силы инерции. При разрушении изначально квазистатический процесс деформирования нередко ускоряется и становится динамическим.

К сожалению, несмотря на обилие (тысячи!) работ, посвященных моделированию континуального разрушения, ясности с выбором математической модели и методов ее реализации пока нет и имеется больше вопросов, чем ответов. В частности, весьма неопределенными остаются до сих пор важные вопросы о критериях разрушения и кинетике накопления повреждаемости. Нет ясности даже в вопросах о том, по каким параметрам следует сравнивать результаты физических и численных экспериментов.

## I Постановка задачи

Полная система уравнений для моделирования разрушения, используемая в настоящей работе, является обычной системой уравнений теории упругопластического течения для малых деформаций, дополненной кинетическим уравнением для поврежденности и зависимостью модулей упругости и предела текучести от поврежденности. Эта система уравнений имеет вид

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{U} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\gamma) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = 1/2(\nabla \otimes \mathbf{U} + (\nabla \otimes \mathbf{U})^T)$$

$$\partial_t \varepsilon_p = \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial \sigma} H(F_p) H(\sigma : \partial_t \varepsilon), \quad F_p(\sigma) = 3/2(\sigma' : \sigma') / \sigma_p^2 - 1$$

$$\partial_t \gamma = H(F_d) \Gamma(\varepsilon, \varepsilon_p, \gamma) + r_\gamma, \quad F_d = F_d(\varepsilon, \varepsilon_p, \gamma)$$

где  $\rho$  - плотность,  $\mathbf{U}$  - вектор перемещений,  $\sigma$  - тензор напряжений,  $\sigma'$  - девиатор напряжения,  $\mathbf{E}(\gamma)$  - тензор модулей упругости, зависящий от поврежденности  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  - тензор деформации,  $\varepsilon_p$  - тензор пластической деформации,  $\lambda_p$  - коэффициент закона пластического течения, определяемый условием пластичности,  $F_p$  - функция нагружения,  $H$  - функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице в противном случае,  $\sigma_p$  - предел текучести,  $E$  - тензорная единица,  $F_d$  - функция условия разрушения,  $r_\gamma$  - нетермомеханический источник поврежденности.

Система уравнений дополняется главными граничными условиями

$$\tau_\alpha \cdot \mathbf{U}|_{\mathbf{x} \in \partial V_{u\alpha}} = U_\alpha^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}|_{\mathbf{x} \in \partial V_{un}} = U_n^*(\mathbf{x}, t)$$

естественными граничными условиями

$$\sigma : \mathbf{n} \otimes \tau_\alpha |_{\mathbf{x} \in \partial V_{p\alpha} = \partial V \setminus \partial V_{u\alpha}} = p_\alpha^*(\mathbf{x}, t), \quad \sigma : \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} |_{\mathbf{x} \in \partial V_n = \partial V \setminus \partial V_{un}} = -p_n^*(\mathbf{x}, t)$$

и начальными условиями

$$\mathbf{U}|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \mathbf{U}|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_p|_{t=0} = 0, \quad \gamma|_{t=0} = 0$$

где  $t \geq 0$  - время;  $\mathbf{n}$  и  $\tau_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) орты нормали и касательных к границе;  $\mathbf{x}$  - радиус-вектор материальной точки;  $V$  - пространственная область решения с границей  $\partial V$ ;  $\partial V_{u\alpha}$ ,  $\partial V_{un}$ ,  $\partial V_{p\alpha}$ ,  $\partial V_{pn}$  - части границы с различными типами граничных условий. Заданные функции отмечены звездочками.

## II Метод решения

Для решения задач применен метод конечных элементов. Задачи рассматриваются в пространственно двумерной постановке в условиях плоской деформации.

При разработке алгоритма за основу был принят метод решения задач упругопластичности [16], в который была введена дополнительная зависимая переменная поврежденность.

По пространственным переменным  $(x, y)$  для всех искомым функций использована конечно-элементная кусочно-линейная аппроксимация. Производные по времени аппроксимированы конечными разностями и для уравнений движения записана неявная схема Эйлера. То есть, применен обычный для задач упругопластичности вариант неявного метода конечных элементов. Хотя неявный метод интегрирования безусловно устойчив, шаг по времени ограничен условием точности с тем, чтобы поддерживать норму приращения

решения на каждом шаге по времени малой по сравнению с нормой самого решения.

На каждом шаге по времени сначала решается вспомогательная краевая задача относительно приращений перемещений на шаге по времени при неизменном уровне поврежденности, потом находятся новые значения деформаций, пластических деформаций и напряжений, и затем отдельно интегрируется кинетическое уравнение для поврежденности.

Отметим некоторые особенности метода решения, обусловленные спецификой задач континуального разрушения. Рассматриваемые процессы протекают достаточно медленно и влиянием инерции в уравнениях движения можно было бы пренебречь. Однако, с появлением зон разрушения процесс деформирования может резко ускоряться, становясь в окрестности таких зон динамическим, поэтому учет инерционных членов необходим с самого начала. Инерция позволяет сохранить корректность краевых задач в случаях, когда зоны разрушения охватывают значительную часть области решения и делят ее на части, взаимовлияние которых близко к нулю, что имитирует процесс разрушения фрагментацией или раскалыванием на части. Алгоритмы, не учитывающие силы инерции в этих условиях, теряют не только точность, но также устойчивость и корректность, поскольку фрагментация приводит к нарушению запрета на движение деформируемых тел как жесткого целого, необходимого для корректности квазистатических задач.

Обилие нелинейных членов в уравнениях и приближенное решение нелинейных задач итерациями приводят к тому, что искомые функции претерпевают нефизические мелкомасштабные осцилляции. Признаком нефизических осцилляций решения является появление в решении колебаний с длинами полуволн, равных шагам пространственно-временной сетки. Такие осцилляции можно обнаружить по смене знака вторых производных от решения в пределах одного ребра сетки. Нефизические осцилляции должны немедленно устраняться, иначе в условиях плохой обусловленности задач на режимах разрушения они могут испортить численное решение.

Монотонизация решений проводилась двумя способами. Первый способ ("физический") основывается на введении в определяющие уравнения для пластических деформаций и поврежденности сглаживающих вязких членов градиентной теории повреждающейся упругопластической среды

$$\partial_t \varepsilon_p = \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial \sigma} H(F_p) H(\sigma : \partial_t \varepsilon) + \nabla \cdot (\nu \nabla \varepsilon_p)$$

$$\partial_t \gamma = H(F_d) \Gamma(\varepsilon, \varepsilon_p, \gamma) + r_\gamma + \nabla \cdot (\nu \nabla \gamma)$$

где  $\nu$  - коэффициент вязкости. К сожалению, вопрос о выборе величины коэффициента вязкости однозначного ответа не имеет ни из теории, ни из эксперимента. Более того, даже если такой ответ будет найден, можно ожидать, что экспериментальные физические значения коэффициента вязкости

будут слишком малы для обеспечения эффективной монотонизации решения при реально используемых дискретизациях. Так или иначе, в зависимости от явной или неявной аппроксимации диффузионных членов несложно найти диапазон допустимых значений этого коэффициента, не нарушающий устойчивости численных решений.

Второй способ ("математический") заключается в устранении вновь появляющихся немонотонностей выборочным локальным сглаживанием. Для этого в конце каждого шага по времени для каждой сглаживаемой функции  $f$  определяются ее вторые производные  $f_{xx}$  по каждому координатному направлению  $x$ . Вспомогательная вариационная задача для определения вторых производных имеет вид

$$\int_V (\nabla f \cdot \nabla \delta f_{xx} + f_{xx} \delta f_{xx}) dV = 0, \quad f_{xx}|_{\partial V} = 0$$

Функции  $f$  и  $f_{xx}$  являются кусочно-линейными и представлены их узловыми значениями. При вычислении вариации функционала по квадратурным формулам с точками численного интегрирования в узлах сетки матрица системы уравнений для узловых значений вторых производных является диагональной и легко обращается. Если на некотором ребре сетки (то есть на линии соединяющей соседние узлы) величина  $f_{xx}$  меняет знак, значит в узлах, определяющих данное ребро, надо провести локальное сглаживание решения по направлению  $x$ :

$$\tilde{f}(x_i) = (f(x_i) + (f(x_i + \Delta x) + f(x_i - \Delta x))/2)/2$$

где тильда отмечает сглаженное значение функции  $f$  в узле  $i$ ,  $\Delta x$  - малое приращение координаты  $x$ , величины  $f(x_i \pm \Delta x)$  определяются интерполяцией.

Второй способ монотонизации решения в отличие от первого в зонах монотонного решения никакого сглаживания не производит и поэтому предпочтителен, если нет явных физических доводов в пользу первого способа. Отметим, что здесь признаком монотонности численного решения вдоль некоторого направления служит сохранение знака второй производной по этому направлению.

Для описания упругих свойств материала принимается упрощенная форма закона Гука, полученная в предположении начальной изотропии свойств материала:

$$\sigma = \lambda \mathbf{I}(\varepsilon - \varepsilon_p) : \mathbf{I} + 2\mu(\varepsilon - \varepsilon_p)$$

Параметры упругости Лямэ и предел текучести, определяющий границы упругого поведения материала, зависят от поврежденности следующим образом

$$\lambda = \lambda_0 e^{-1000\gamma}, \quad \mu = \mu_0 e^{-1000\gamma}, \quad \sigma_p = \sigma_{p0} e^{-1000\gamma}$$

где нуликами отмечены значения для неповрежденного материала. Критерием разрушения является достижение максимальной главной деформацией критического значения  $\varepsilon_d$  ("деформация разрушения")

$$F_d = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + ((\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2)^{1/2} \right] M - \varepsilon_d \geq 0$$

где величина

$$M = \sqrt{\frac{\min(h_x, h_y)}{\max[(x_{\max} - x_{\min}), (y_{\max} - y_{\min})]}}$$

служит безразмерным масштабным множителем, с помощью которого учтена корневая особенность, присущая концентрации деформаций у кончика трещины в упругом материале, что позволяет трактовать данный локальный критерий как аппроксимацию критерия разрушения в терминах коэффициентов концентрации деформаций.

Масштабный множитель нужен для сходимости численных значений интегральных критических нагрузок разрушения к ненулевому пределу. Иначе получается так, что чем мельче сетка, тем раньше наступает разрушение, поскольку на более мелкой сетке концентрация деформаций описывается все точнее и критические уровни деформации достигаются все раньше и раньше, при все меньших уровнях нагрузки. Конечно, зависимость нагрузок разрушения от сеточного разрешения должна быть, но она должна приводить к некоторому предельному ненулевому значению критической нагрузки.

В условиях отсутствия конкретных сведений о кинетике повреждаемости кинетическое уравнение для повреждаемости принимается в простейшей форме

$$\partial_t \gamma = 1000H(F_d)$$

обеспечивающей быстрый рост повреждаемости, при котором способность упругого сопротивления деформации при разрушении теряется за несколько временных шагов. Это позволяет рассматривать применяемую здесь математическую модель разрушения как регуляризованный вариант известной модели Маенчена-Сака [17], в которой напряженно-деформированное состояние при разрушении меняется скачком в пределах одного шага по времени. Считается, что энергия деформации, теряемая при корректировке напряжений, тратится на образование новой поверхности растущих трещин.

### III Примеры расчета

Рассчитанные зоны разрушения в растягиваемых (по вертикали) упруго-пластических образцах с круглыми вырезами, имитирующими макропоры и жесткие включения, показаны на рис 1. Подробности этого расчета и другие примеры можно найти на сайте автора <http://www.ipmnet.ru/~burago>.

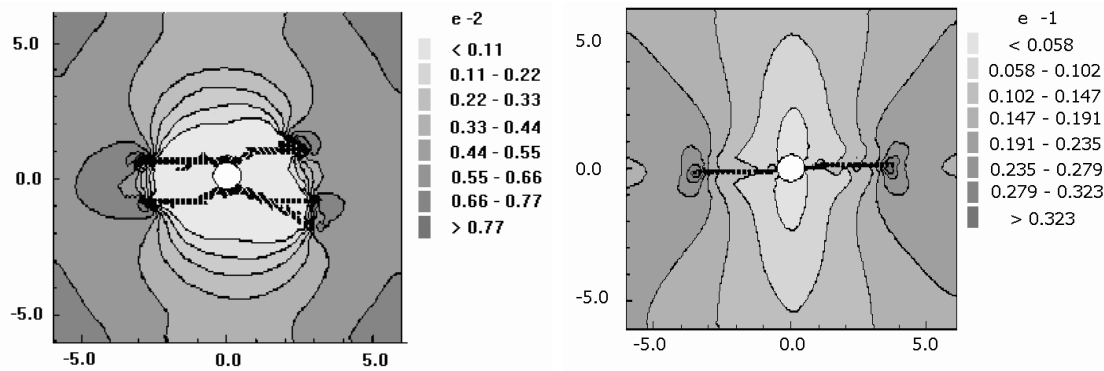


Рис. 1. Зоны разрушения около жесткого включения (слева) и поры (справа). Затемнение соответствует величине максимальной главной деформации.

#### IV Выводы

Следующие особенности математических моделей разрушающихся сред представляются важными: 1) Математическая модель явления разрушения должна допускать различные методы ее реализации (иначе получим сужение класса решаемых задач и случайное возведение частного математического метода в абсолют). 2) Критерий разрушения целесообразно формулировать в терминах интегральных характеристик напряженно-деформированного состояния (иначе получим отсутствие сходимости критических нагрузок к ненулевому пределу при увеличении размерности пространства приближенных решений). 3) Упругое сопротивление деформации с ростом поврежденности должно ослабевать достаточно быстро (иначе вместо локализации зон разрушения в виде макротрещин получим обширные зоны диффузного разрушения). 4) Мелкомасштабные осцилляции решения должны устраняться (иначе картина разрушения исказится ложными зонами локализации деформаций). 5) Разрушенный материал должен сохранять способность сопротивления объемному сжатию (иначе получим эффект счетного "выворачивания ячеек"). 6) Силы инерции надо учитывать с самого начала независимо от скорости изменения внешних нагрузок (иначе произойдет потеря корректности задач при фрагментации). 7) Норму приращений решения на шаге по времени надо ограничить (иначе потеряется точность решения при разрушении).

#### Литература

1. Качанов Л. М. О времени до разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР, ОТН. 1958. No. 8. С. 26–31.
2. Работнов Ю. Н. Механизм длительного разрушения. - В кн. Вопросы прочности материалов и конструкций. М.:Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.
3. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. - М.: Наука, 1974. С. 311.

4. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Численное решение задач континуального разрушения. - М.: ИПМех РАН, 2004. Препринт №746. С. 1-39. Интернет: <http://www.ipmnet.ru/burago/papers/prepr03.pdf>
5. *Кондауров В.И., Мухамедиев Ш.А., Никитин Л.В., Рыжаск Е.И.* Механика разрушения горных пород. - М.: Наука, 1987. 218 с.
6. *Кондауров В.И., Фортвов В.Е.* Основы термодинамики конденсированной среды. - М.: МФТИ, 2002. С. 336.
7. *Кукуджанов В.Н.* Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций // Изв. РАН, МТТ. 1999. №. 5. С. 72-86.
8. *Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др.* Высокоскоростное взаимодействие тел. - Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. С. 600.
9. *Bazant Z. P.* Reminiscences on four decades of struggle and progress in softening damage and size effect. // *Concr. J. (Japan Concr. Inst.)*, 2002. V. 40. P. 16-28.
10. *Jirasek M.* Nonlocal models for damage and fracture: Comparison of approaches. // *Intern. J. Solids Structures*. 1998. V. 35. P. 4133-4145.
11. *Krajcinovic D.* *Damage Mechanics*. - Elsevier Science, 1996. P. 774.
12. *Lemaitre J.* *A Course on Damage Mechanics*, 2nd edn. - Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1996. P. 247.
13. *Oliver J.* Continuum modeling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models // *Comput. Mech*. 1999. V. 17. P. 49-61.
14. *Voyiadjis G. Z. and Kattan P. I.* *Advances in Damage Mechanics: Metals and Metal Matrix Composites*. - Amsterdam: Elsevier, 1999. P. 541.
15. *Barenblatt G. I.* Damage accumulation: a non-local model. In book: *Structured Media-Trecop '01*. In memory of professor Ekkehart Kroner. - Poznan: Publishing House of Poznan University of Technology, 2002. P. 19-28.
16. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Численное решение упруго-пластических задач методом конечных элементов. - М.: ИПМех АН СССР. Препринт №236. 1988. С. 63. Интернет: <http://www.ipmnet.ru/burago/papers/prep1988.pdf>.
17. *Маенчен Дж., Сак С.* Метод расчета "Тензор". В кн.: *Вычислительные методы в гидродинамике* - М.: Мир, 1967. С. 185-211.