ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им А.Ю.ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Н.Г. Бураго, И.С. Никитин, П.А. Юшковский

УТОЧНЕННАЯ КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ НА МЕЖСЛОЙНЫХ ГРАНИЦАХ

Препринт № 1096

Москва 2015

АННОТАЦИЯ

На основе асимптотического метода осреднения получены континуальные уравнения слоистой среды с проскальзыванием с учетом членов второго порядка по малому параметру толщины слоя. Использовано линейное условие проскальзывания, связывающее скачки касательных смещений на контактных границах и касательные напряжения. Полученные в данной работе уравнения также являются асимптотически полным обобщением некоторых моделей слоистых сред, основанных на инженерных подходах или приближенных гипотезах о характере деформирования слоев. Такого рода модели необходимы при изучении статического деформирования горных массивов и при решении динамических задач геофизики. Исследованы волновые свойства полученной системы уравнений, получены дисперсионные соотношения для гармонических волн. Построено решение задачи о поверхностной волне типа Рэлея на границе упругого слоистого полупространства.

Работа выполнена по проекту РФФИ № 15-08-02392-а.

ISBN 978-5-91741-140-8

Оглавление

Введение

Интерес к проблеме распространения и трансформации волн в слоистых средах связан с задачами сейсмологии и инженерной геофизики. Как правило, сейсмичность связана с горными районами, в которых скальные породы выходят на земную поверхность. Зачастую эти породы содержат регулярные сетки трещин, позволяющие рассматривать их как слоистые структуры. Классические исследования волновых полей в таких средах обычно исходят из непрерывности поля смещений. Однако для достаточно сильных сейсмических воздействий следует учитывать возможность касательных подвижек на границах слоев. Для протяженных воздействий необходимо использовать «осредненные», континуальные модели сплошных сред со структурой, так как невозможно следить за деформацией каждого элемента структуры.

В данной работе на основе асимптотического метода [1,2] получены осредненные уравнения слоистой среды с проскальзыванием с учетом членов второго порядка по малому параметру толщины слоя. Использовано линейное условие проскальзывания, связывающее скачки касательных смещений на контактных границах и касательные напряжения. Уравнения нулевого приближения были выведены ранее [3,4]. Полученные в данной работе уравнения также являются асимптотически полным обобщением моделей [5-6] слоистых сред, основанных на инженерных подходах или приближенных гипотезах о характере деформирования слоев. Такого рода модели необходимы при изучении статического деформирования горных массивов и при решении динамических (волновых) задач геофизики.

Также можно отметить, что теория слоистых сред с проскальзыванием на контактных границах может быть полезна при описании композитных материалов с дополнительными мягкими прослойками (скажем, резиновыми) между слоями из основного, достаточно жесткого упругого материала.

Исследованы волновые свойства полученной системы уравнений, получены дисперсионные соотношения. Построено решение задачи о поверхностной волне типа Рэлея на границе упругого слоистого полупространства.

1. **Построение уточненной модели**

В декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим безграничную слоистую среду. Ось x_3 перпендикулярна плоскопараллельным границам раздела слоев.

Границы раздела имеют координаты $x_3 = x^{(s)} = s\varepsilon$, s=0, $\pm 1, \pm 2 \ldots$, где постоянная толщина слоя ε <<1 является малым параметром. Если говорить точнее, то должно выполняться соотношение $\varepsilon / l \ll 1$, где l - характерный размер распределенных нагрузок, скажем, характерная длина волны в исследуемом динамическом процессе. При этом все линейные величины должны быть обезразмерены на этот масштаб l.

На границах слоев выполняются следующие условия скольжения в предположении, что межслойная граница всегда поджата:

$\sigma_{33} < 0$ $[u_3]$ = $[\sigma_{\gamma 3}]$ = $[\sigma_{33}]$=0

$[\sigma_{\gamma 3}] = k_* [u_\gamma]$ - линейное проскальзывание винклеровского типа

$k_* \varepsilon = k = O(1)$

Квадратные скобки $[f] = f\big|_{x^{(s)}+0} - f\big|_{x^{(s)}-0}$ обозначают скачок величины f на межслойной границе.

Как сказано во введении, такого рода условия приближенно выполняются, если между слоями присутствуют мягкие прослойки толщины δ, $\delta / \varepsilon \ll 1$, с малым модулем сдвига μ_δ. При этом, очевидно:

$$[\sigma_{\gamma 3}] = k[u_\gamma] / \varepsilon = \frac{k\delta}{\varepsilon}\frac{[u_\gamma]}{\delta} = \mu_\delta \frac{[u_\gamma]}{\delta}$$

где $[u_\gamma] / \delta$ - сдвиговая деформация мягкой прослойки. При этом $\mu_\delta = k\delta / \varepsilon$, или, наоборот, $k = \mu_\delta \varepsilon / \delta$. Можно сказать, что k - коэффициент сдвиговой связи слоев. Сами слои являются изотропными упругими и подчиняются закону Гука:

$x_3 \neq x^{(s)}$

$$\sigma_{ij,j} - \rho u_{i,tt} = 0$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}$$

Выражение для тензора модулей упругости имеет вид:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Введем в соответствии с методом асимптотического осреднения [1] «быструю» переменную $\xi = x_3/\varepsilon$. Будем считать, следуя [1], что $u_k = u_k(x_l, \xi, t)$ - функция, гладкая по «медленным» переменным x_l и гладкая по «быстрой» переменной ξ, за исключением точек $\xi^{(s)} = x^{(s)}/\varepsilon$, где она может терпеть разрывы первого рода. Кроме того, по ξ она является 1-периодической: $[[u_i]] = u_i\big|_{\xi^{(s)}+1/2} - u_i\big|_{\xi^{(s)}-1/2} = 0$. С учетом такого выбора аргументов и правила дифференцирования сложной функции, перепишем систему на ячейке периодичности $x^{(s)} - 1/2 \le x_3 \le x^{(s)} + 1/2$, $-1/2 \le \xi \le 1/2$:

Уравнения при $x_3 \ne x^{(s)}$, $\xi \ne 0$:

$$\varepsilon^{-2}C_{i3k3}u_{k,\xi\xi} + \varepsilon^{-1}(C_{ijk3}u_{k,j\xi} + C_{i3kl}u_{k,l\xi}) + C_{ijkl}u_{k,lj} - \rho u_{i,tt} = 0$$

Контактные условия при $x_3 = x^{(s)}$, $\xi = 0$:

$$\varepsilon^{-1}C_{33k3}u_{k,\xi} + C_{33kl}u_{k,l} < 0$$

$$[u_3]=0, \qquad [\varepsilon^{-1}C_{i3k3}u_{k,\xi} + C_{i3kl}u_{k,l}] = 0$$

$$\varepsilon^{-1}C_{\gamma 3k3}u_{k,\xi} + C_{\gamma 3kl}u_{k,l} = k_*[u_\gamma]$$

Условия 1-периодичности:

$$[[u_i]] = u_i\big|_{\xi+1/2} - u_i\big|_{\xi-1/2} = 0$$

Здесь и далее греческие индексы (β, γ) принимают значения 1 и 2, латинские индексы – значения 1,2,3. Представим смещения среды в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε:

$$u_i = u_i^{(0)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^3 u_i^{(3)}(x_k, \xi, t) + \ldots$$

Введем операцию «осреднения» $\langle f \rangle$ для функции «быстрой» переменной ξ, которая будет часто использоваться в дальнейшем: $\langle f \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f d\xi$. Приближения смещений должны удовлетворять дополнительному условию $\langle u_k^{(n)} \rangle = 0$ [1].

Подставим это представление в систему уравнений теории упругости. Приравнивая к нулю член при отрицательной степени ε^{-2} получим, что нулевое приближение $u_i^{(0)}$ не зависит от «быстрой» переменной ξ: $u_i^{(0)} = w_i(x_k, t)$. Приравнивая к нулю член при отрицательной степени ε^{-1} получим, что первое приближение $u_i^{(1)}$ удовлетворяет уравнению: $C_{i3k3}u_{k,\xi\xi}^{(1)} = 0$. Дифференциальная система уравнений после этого примет вид:

$$C_{ijkl}w_{k,jl} + C_{ijk3}u_{k,j\xi}^{(1)} + (C_{i3kl}u_{k,l}^{(1)} + C_{i3k3}u_{k,\xi}^{(2)})_{,\xi} +$$

$$+\varepsilon\left[C_{ijkl}u_{k,jl}^{(1)} + C_{ijk3}u_{k,j\xi}^{(2)} + (C_{i3kl}u_{k,l}^{(2)} + C_{i3k3}u_{k,\xi}^{(3)})_{,\xi}\right] +$$

$$+\varepsilon^2\left[C_{ijkl}u_{k,jl}^{(2)} + C_{ijk3}u_{k,j\xi}^{(3)} + (C_{i3kl}u_{k,l}^{(3)} + C_{i3k3}u_{k,\xi}^{(4)})_{,\xi}\right] + \ldots = \rho w_{i,tt} + \varepsilon\rho u_{i,tt}^{(1)} + \varepsilon^2\rho u_{i,tt}^{(2)} + \ldots$$

Разложению компонент смещений соответствует разложение компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{ij}^{(2)} + \ldots$$

где $\sigma_{ij}^{(\mathrm{n})} = C_{ijkl}u_{k,l}^{(\mathrm{n})} + C_{ijk3}u_{k,\xi}^{(\mathrm{n+1})}$.

Все приближения напряжений являются 1-периодическими функциями ξ. В частности, $\sigma_{i3}^{(\mathrm{n})} = C_{i3kl}u_{k,l}^{(\mathrm{n})} + C_{i3k3}u_{k,\xi}^{(\mathrm{n+1})}$ и выполняются условия $[\sigma_{i3}^{(\mathrm{n})}] = 0$, $[[\sigma_{i3}^{(\mathrm{n})}]] = 0$. Легко видеть, что $\left\langle \sigma_{i3\ ,\xi}^{(\mathrm{n})} \right\rangle = 0$.

Оставляя в системе уравнений члены определенного порядка по ε, применяя к ней операцию осреднения $\langle f \rangle$ и избавляясь тем самым от «быстрой» переменной ξ, получим эффективную осредненную модель слоистой среды с проскальзыванием винклеровского типа.

Выведем уточненную теорию второго порядка, для этого в системе уравнений удержим члены порядка ε^2. Применяя операцию осреднения по ячейке периодичности $\langle\ \rangle$ к системе уравнений, получим следующий результат:

$$C_{ijkl}w_{k,jl} + C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(1)}\right\rangle_{,j} + \varepsilon C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(2)}\right\rangle_{,j} + \varepsilon^2 C_{ijk3}\left\langle u_{k,\xi}^{(3)}\right\rangle_{,j} = \rho w_{i,tt}$$

Это и есть искомая осредненная система уравнений для слоистой среды с проскальзыванием, для полной формулировки необходимо найти функции $\left\langle u_{k,\xi}^{(\mathrm{n})}\right\rangle$ (*n=1,2,3)*, входящие в эту систему.

Каждая из функций $u_i^{(n)}(x_k, \xi, t)$ (*n=1,2,3),* находится из соответствующей «задачи на ячейке периодичности» при $-1/2 \le \xi \le 1/2$ [1], которая получается приравниванием нулю членов с одинаковыми степенями ε^{n-1} в асимптотической системе уравнений. Дополнительные условия для определения этих функций получаются переформулированием для каждой из них контактных условий на границе слоев, условия 1-периодичности $[[u_i^{(n)}]] = 0$ и условия $\langle u_i^{(n)} \rangle = 0$.

Сформулируем эти три задачи на ячейке $-1/2 \le \xi \le 1/2$.

Задача на ячейке 1

При $|\xi| < 1/2$

$C_{i3k3} u_{k,\xi\xi}^{(1)} = 0$

При $\xi = 0$

$[C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(1)}] = 0$, $[u_3^{(1)}] = 0$

$k[u_\gamma^{(1)}] = C_{\gamma 3kl} w_{k,l} + C_{\gamma 3k3} u_{k,\xi}^{(1)}$

Дополнительные условия:

$[[u_i^{(1)}]] = 0$, $\langle u_i^{(1)} \rangle = 0$

Решение задачи 1

а) $i = \gamma$

$C_{\gamma 3k3} = \mu \delta_{\gamma k}$

$u_{\gamma,\xi\xi}^{(1)} = 0$ при $|\xi| < 1/2$

При $\xi = 0$

$[u_{\gamma,\xi}^{(1)}] = 0$, $k[u_\gamma^{(1)}] = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}) + \mu u_{\gamma,\xi}^{(1)}$, $[[u_\gamma^{(1)}]] = 0$, $\langle u_\gamma^{(1)} \rangle = 0$

Решением дифференциального уравнения будет функция $u_\gamma^{(1)} = \varphi_\gamma \xi + c_\gamma^{\pm}$. Далее: из условия $[[u_\gamma^{(1)}]] = 0$ вытекает $\varphi_\gamma / 2 + c_\gamma^{+} = -\varphi_\gamma / 2 + c_\gamma^{-}$. Отсюда следует, что

$[u_\gamma^{(1)}] = c_\gamma^{\ +} - c_\gamma^{\ -} = -\varphi_\gamma$. Из условия $\left\langle u_\gamma^{(1)} \right\rangle = 0$ следует $c_\gamma^{\ +} + c_\gamma^{\ -} = 0$, или $c_\gamma^{\ \pm} = \mp\varphi_\gamma / 2$, или $u_\gamma^{(1)} = \varphi_\gamma(\xi \mp 1/2)$.

Условие на скачок касательных смещений принимает вид: $-k\varphi_\gamma = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}) + \mu\varphi_\gamma$, отсюда следует, что $\varphi_\gamma = -\tau_\gamma / (k+\mu)$, $\tau_\gamma = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma})$.

б) $i = 3$

$C_{33k3} = (\lambda + 2\mu)\delta_{3k}$

$u_{3,\xi\xi}^{(1)} = 0$ при $|\xi| < 1/2$

При $\xi = 0$

$[u_{3,\xi}^{(1)}] = 0$, $[u_3^{(1)}] = 0$, $[[u_3^{(1)}]] = 0$, $\left\langle u_3^{(1)} \right\rangle = 0$

Решение этой задачи тривиально: $u_3^{(1)} = 0$.

Таким образом, решением задачи1 на ячейке периодичности являются следующие функции:

$u_\gamma^{(1)} = \varphi_\gamma(\xi \mp 1/2)$

$u_3^{(1)} = 0$

Здесь и далее в формулах верхний знак в символе $\mp$ соответствует значениям $0 < \xi < 1/2$, а нижний знак соответствует значениям $-1/2 < \xi < 0$. При этом $\varphi_\gamma = -\tau_\gamma / (k+\mu)$, $\tau_\gamma = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma})$. Соответственно, производные, необходимые для вывода осредненной системы, имеют выражения:

$u_{3,\xi}^{(1)} = 0$, $u_{\gamma,\xi}^{(1)} = \varphi_\gamma$, $\left\langle u_{3,\xi}^{(1)} \right\rangle = 0$, $\left\langle u_{\gamma,\xi}^{(1)} \right\rangle = \varphi_\gamma$

<u>*Задача на ячейке 2*</u>

При $|\xi| < 1/2$:

$C_{ijkl} w_{k,jl} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(1)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(1)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(2)})_{,\xi} = \rho w_{i,tt}$

Применяя к этому дифференциальному уравнению операцию $\langle\ \rangle$ и учитывая, что $\left\langle (C_{i3kl}u_{k,l}^{(1)} + C_{i3k3}u_{k,\xi}^{(2)})_{,\xi} \right\rangle = 0$, а остальные члены этого уравнения не зависят от ξ, получаем его более простое следствие:

$$C_{i3k3}u_{k,\xi\xi}^{(2)} = -C_{i3kl}u_{k,\xi l}^{(1)}$$

При $\xi = 0$:

$$[C_{i3k3}u_{k,\xi}^{(2)}] = -[C_{i3kl}u_{k,l}^{(1)}], \qquad [u_3^{(2)}] = 0$$

$$k[u_\gamma^{(2)}] = C_{\gamma 3kl}u_{k,l}^{(1)} + C_{\gamma 3k3}u_{k,\xi}^{(2)}$$

Дополнительные условия:

$[[u_i^{(2)}]] = 0$, $\left\langle u_i^{(2)} \right\rangle = 0$

<u>Решение задачи 2</u>

а) $i = \gamma$

$u_{\gamma,\xi\xi}^{(2)} = -\psi_\gamma$, $\psi_\gamma = \varphi_{\gamma,3}$ при $|\xi| < 1/2$

При $\xi = 0$

$[u_{\gamma,\xi}^{(2)}] = -[u_{\gamma,3}^{(1)}] = \psi_\gamma$, $k[u_\gamma^{(2)}] = \mu(u_{\gamma,3}^{(1)} + u_{\gamma,\xi}^{(2)}) = \mu(-\psi_\gamma / 2 + b_\gamma^+)$, $[[u_\gamma^{(2)}]] = 0$, $\left\langle u_\gamma^{(2)} \right\rangle = 0$

Решением дифференциального уравнения будет функция $u_\gamma^{(2)} = -\psi_\gamma \xi^2 / 2 + b_\gamma^\pm \xi + c_\gamma{}^\pm$.

Из условия $[[u_\gamma^{(2)}]] = 0$ вытекает $-\psi_\gamma / 8 + b_\gamma^+ / 2 + c_\gamma{}^+ = -\psi_\gamma / 8 - b_\gamma^- / 2 + c_\gamma{}^-$.

Отсюда следует, что $[u_\gamma^{(2)}] = c_\gamma{}^+ - c_\gamma{}^- = -(b_\gamma^+ + b_\gamma^-) / 2$.

Из условия $[u_{\gamma,\xi}^{(2)}] = -[u_{\gamma,3}^{(1)}] = \psi_\gamma$ следует $b_\gamma^+ - b_\gamma^- = \psi_\gamma$.

Далее, $-k(b_\gamma^+ + b_\gamma^-) / 2 = \mu(-\psi_\gamma / 2 + b_\gamma^+)$, и, как следствие, $-k(2b_\gamma^+ - \psi_\gamma) / 2 = \mu(-\psi_\gamma / 2 + b_\gamma^+)$,

$b_\gamma^\pm = \pm\psi_\gamma / 2$, $[u_\gamma^{(2)}] = 0$, $c_\gamma{}^+ = c_\gamma{}^- = c_\gamma$.

Новое выражение для решения имеет вид: $u_\gamma^{(2)} = -\psi_\gamma(\xi^2 \mp \xi + c_\gamma) / 2$.

Условие $\left\langle u_\gamma^{(2)} \right\rangle = 0$ дает: $\xi^3 / 3\Big|_{-1/2}^{1/2} + \xi^2 / 2\Big|_{-1/2}^{0} - \xi^2 / 2\Big|_{0}^{1/2} + c_\gamma\, \xi\Big|_{-1/2}^{1/2} = 0$ или $c_\gamma = 1/6$.

Окончательно $u_\gamma^{(2)} = -\psi_\gamma(\xi^2 \mp \xi + 1/6)/2$.

б) $i = 3$

$u_{3,\xi\xi}^{(2)} = -\lambda u_{\beta,\xi\beta}^{(1)}/(\lambda+2\mu) = -\psi_3$, $\quad \psi_3 = \lambda\varphi_{\beta,\beta}/(\lambda+2\mu)$ при $|\xi| < 1/2$

При $\quad \xi = 0$

$[u_{3,\xi}^{(2)}] = -[\lambda u_{\beta,\beta}^{(1)}/(\lambda+2\mu)] = \psi_3$, $[u_3^{(2)}] = 0$, $[[u_3^{(2)}]] = 0$, $\left\langle u_3^{(2)} \right\rangle = 0$

Решение этой задачи аналогично предыдущей и имеет вид:

$u_3^{(2)} = -\psi_3(\xi^2 \mp \xi + 1/6)/2$

Таким образом, окончательным решением этой задачи на ячейке периодичности являются следующие функции:

$u_\gamma^{(2)} = -\psi_\gamma(\xi^2 \mp \xi + 1/6)/2$

$u_3^{(2)} = -\psi_3(\xi^2 \mp \xi + 1/6)/2$

где $\quad \psi_\gamma = \varphi_{\gamma,3}$, $\quad \psi_3 = \lambda\varphi_{\beta,\beta}/(\lambda+2\mu)$

Производные, необходимые для вывода осредненной системы, имеют выражения:

$u_{\gamma,\xi}^{(2)} = -\psi_\gamma(\xi \mp 1/2)$, $u_{3,\xi}^{(2)} = -\psi_3(\xi \mp 1/2)$, $\left\langle u_{3,\xi}^{(2)} \right\rangle = 0$, $\left\langle u_{\gamma,\xi}^{(2)} \right\rangle = 0$

Отсюда следует, что второе приближение смещений вклада в осредненную систему не дает.

<u>Задача на ячейке 3</u>

При $|\xi| < 1/2$

$C_{i3k3}u_{k,\xi\xi}^{(3)} = -C_{ijkl}u_{k,jl}^{(1)} - C_{i3kl}u_{k,\xi l}^{(2)} - C_{ijk3}u_{k,\xi j}^{(2)} + \rho u_{i,tt}^{(1)}$

При $\quad \xi = 0$

$[C_{i3k3}u_{k,\xi}^{(3)}] = -[C_{i3kl}u_{k,l}^{(2)}]$, $\qquad [u_3^{(3)}] = 0$

$k[u_\gamma^{(3)}] = C_{\gamma 3kl}u_{k,l}^{(2)} + C_{\gamma 3k3}u_{k,\xi}^{(3)}$

Дополнительные условия:

$[[u_i^{(3)}]] = 0$, $\quad \left\langle u_i^{(3)} \right\rangle = 0$

Решение задачи 3

а) $i = \gamma$

Раскроем выражения для тензора модулей упругости:

$$C_{ijkl}u^{(1)}_{k,jl} = C_{\gamma j\beta l}u^{(1)}_{\beta,jl} = (\lambda\delta_{\gamma j}\delta_{\beta l} + \mu\delta_{\gamma\beta}\delta_{jl} + \mu\delta_{\gamma l}\delta_{j\beta})u^{(1)}_{\beta,jl} = (\lambda+\mu)u^{(1)}_{\beta,\beta\gamma} + \mu u^{(1)}_{\gamma,ll}$$

$$(C_{\gamma 3kl} + C_{\gamma lk3})u^{(2)}_{k,\xi l} = \left((\lambda+\mu)\delta_{\gamma l}\delta_{3k} + 2\mu\delta_{\gamma k}\delta_{3l}\right)u^{(2)}_{k,\xi l} = (\lambda+\mu)u^{(2)}_{3,\xi\gamma} + 2\mu u^{(2)}_{\gamma,\xi 3}$$

Уравнение задачи на ячейке:

$$u^{(3)}_{\gamma,\xi\xi} = u^{(1)}_{\gamma,ll} - (\lambda+\mu)u^{(1)}_{\beta,\beta\gamma}/\mu - 2u^{(2)}_{\gamma,\xi 3} - (\lambda+\mu)u^{(2)}_{3,\xi\gamma}/\mu + \rho u^{(1)}_{i,tt}/\mu \qquad \text{при } |\xi| < 1/2$$

При $\xi = 0$

$[u^{(3)}_{\gamma,\xi}] = -[u^{(2)}_{\gamma,3} + u^{(2)}_{3,\gamma}] = 0$, $k[u^{(3)}_{\gamma}] = \mu(u^{(2)}_{\gamma,3} + u^{(2)}_{3,\gamma} + u^{(3)}_{\gamma,\xi})$, $[[u^{(3)}_{\gamma}]] = 0$, $\langle u^{(3)}_{\gamma}\rangle = 0$

Уравнение можно переписать в виде:

$$u^{(3)}_{\gamma,\xi\xi} = \chi_\gamma\left(\xi \mp 1/2\right)$$

где $\chi_\gamma = -\varphi_{\gamma,ll} - (\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/\mu + 2\psi_{\gamma,3} + (\lambda+\mu)\psi_{3,\gamma}/\mu + \rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu$

Интегрируя с учетом условия $[u^{(3)}_{\gamma,\xi}] = 0$, получим:

$$u^{(3)}_{\gamma} = \chi_\gamma\left(\xi^3/6 \mp \xi^2/4 + b_\gamma\xi + c^{\pm}_{\gamma}\right)$$

Из условия $[[u^{(3)}_{\gamma}]] = 0$ следует: $-1/48 + 1/16 - b_\gamma/2 + c^{-}_{\gamma} = 1/48 - 1/16 + b_\gamma/2 + c^{+}_{\gamma}$.

Отсюда вытекает:

$$[u^{(3)}_{\gamma}] = \chi_\gamma\left(c^{+}_{\gamma} - c^{-}_{\gamma}\right) = \chi_\gamma\left(1/12 - b_\gamma\right).$$

Далее:

$$k[u^{(3)}_{\gamma}] = k\chi_\gamma\left(1/12 - b_\gamma\right) = \mu(\chi_\gamma b_\gamma - \psi_{\gamma,3}/12 - \psi_{3,\gamma}/12)$$

$$\chi_\gamma b_\gamma = \left(k\chi_\gamma + \mu\psi_{\gamma,3} + \mu\psi_{3,\gamma}\right)/(k+\mu)/12$$

Искомое выражение имеет вид:

$$u^{(3)}_{\gamma,\xi} = \chi_\gamma\left(\xi^2 \mp \xi\right)/2 + \left(k\chi_\gamma + \mu\psi_{\gamma,3} + \mu\psi_{3,\gamma}\right)/(k+\mu)/12$$

Для осредненной производной получим:

$$\left\langle u^{(3)}_{\gamma,\xi}\right\rangle = \mu\left(\psi_{\gamma,3} + \psi_{3,\gamma} - \chi_\gamma\right)/(k+\mu)/12$$

Окончательно, после выкладок имеем:

$$\left\langle u^{(3)}_{\gamma,\xi} \right\rangle = \mu\left(\varphi_{\gamma,\beta\beta} + (3\lambda+2\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma} / (\lambda+2\mu) - \rho\varphi_{\gamma,tt} / \mu\right) / (k+\mu) / 12$$

б) $i = 3$

Раскроем выражения для тензора модулей упругости:

$$C_{3jkl}u^{(1)}_{k,jl} = C_{3j\beta l}u^{(1)}_{\beta,jl} = (\lambda\delta_{3j}\delta_{\beta l} + \mu\delta_{3\beta}\delta_{jl} + \mu\delta_{3l}\delta_{j\beta})u^{(1)}_{\beta,jl} = (\lambda+\mu)u^{(1)}_{\beta,\beta 3}$$

$$(C_{33kl} + C_{3lk3})u^{(2)}_{k,\xi l} = \left((\lambda+3\mu)\delta_{3l}\delta_{3k} + (\lambda+\mu)\delta_{kl}\right)u^{(2)}_{k,\xi l} = 2(\lambda+2\mu)u^{(2)}_{3,\xi 3} + (\lambda+\mu)u^{(2)}_{\beta,\xi\beta}$$

Уравнение задачи на ячейке:

$$u^{(3)}_{3,\xi\xi} = -(\lambda+\mu)u^{(1)}_{\beta,\beta 3} / (\lambda+2\mu) - 2u^{(2)}_{3,\xi 3} - (\lambda+\mu)u^{(2)}_{\beta,\xi\beta} / (\lambda+2\mu) \text{ при } |\xi| < 1/2$$

При $\xi = 0$

$$[u^{(3)}_{3,\xi}] = -[u^{(2)}_{3,3}] - \lambda[u^{(2)}_{\beta,\beta}] / (\lambda+2\mu) = 0,\ [u^{(3)}_3] = 0,\ [[u^{(3)}_3]] = 0,\ \left\langle u^{(3)}_3 \right\rangle = 0$$

Уравнение можно переписать в виде:

$$u^{(3)}_{3,\xi\xi} = \chi_3\left(\xi \mp 1/2\right)$$

где $\chi_3 = (\lambda+\mu)\psi_{\beta,\beta} / (\lambda+2\mu) + 2\psi_{3,3} - (\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta 3} / (\lambda+2\mu)$

С учетом $[u^{(3)}_3] = 0$ и $[u^{(3)}_{3,\xi}] = 0$ получим:

$$u^{(3)}_3 = \chi_3\left(\xi^3 / 6 \mp \xi^2 / 4 + b_3\xi + c_3\right)$$

Из условия $[[u^{(3)}_3]] = 0$ следует:

$$-1/48 + 1/16 - b_3/2 + c_3 = 1/48 - 1/16 + b_3/2 + c_3 \quad \text{или} \quad b_3 = 1/12$$

Отсюда получим:

$$u^{(3)}_{3,\xi} = \chi_3\left(\xi^2 / 2 \mp \xi / 2 + 1/12\right)$$

Несложно видеть, что

$$\left\langle u^{(3)}_{3,\xi} \right\rangle = \chi_3\left(\xi^3 / 6 \mp \xi^2 / 4 + \xi / 12\right)\Big|_{-1/2}^{1/2} = \chi_3(1/24 + 1/12 - 1/16 - 1/16) = 0$$

Таким образом, решением этой задачи на ячейке периодичности являются следующие функции (выпишем только необходимые нам производные по быстрой переменной):

$$u^{(3)}_{\gamma,\xi} = \chi_\gamma(\xi^2 \mp \xi) / 2 + (\mu\psi_{\gamma,3} + \mu\psi_{3,\gamma} + k\chi_\gamma) / (k+\mu) / 12$$

$$u^{(3)}_{3,\xi} = \chi_3(\xi^2 \mp \xi + 1/6) / 2,$$

где

$$\chi_\gamma = 2\psi_{\gamma,3} + (\lambda+\mu)\psi_{3,\gamma}/\mu - \varphi_{\gamma,kk} - (\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/\mu + \rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu$$
$$\chi_3 = (\lambda+\mu)\psi_{\beta,\beta}/(\lambda+2\mu) + 2\psi_{3,3} - (\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta 3}/(\lambda+2\mu)$$

Выражения для усредненных производных имеют вид:

$$\left\langle u^{(3)}_{\gamma,\xi}\right\rangle = \frac{1}{12}\frac{\mu}{(k+\mu)}\left(\psi_{\gamma,3}+\psi_{3,\gamma}-\chi_\gamma\right), \qquad \left\langle u^{(3)}_{3,\xi}\right\rangle = 0$$

Окончательное выражение $\left\langle u^{(3)}_{\gamma,\xi}\right\rangle$ приводится к формуле:

$$\left\langle u^{(3)}_{\gamma,\xi}\right\rangle = \frac{1}{12}\frac{\mu}{(k+\mu)}\left(\varphi_{\gamma,\beta\beta} + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\varphi_{\beta,\beta\gamma} - \frac{\rho}{\mu}\varphi_{\gamma,tt}\right)$$

2. Различные варианты осредненной системы уравнений

С использованием полученных результатов сформулируем искомую систему уравнений (латинские индексы i,j,k,l =1,2,3, греческие индексы β,γ=1,2):

$$C_{\gamma jkl}w_{k,jl} + C_{\gamma jk3}\left\langle u^{(1)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} + \varepsilon^2 C_{\gamma jk3}\left\langle u^{(3)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} = \rho w_{\gamma,tt}$$

$$C_{3jkl}w_{k,jl} + C_{3jk3}\left\langle u^{(1)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} + \varepsilon^2 C_{3jk3}\left\langle u^{(3)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} = \rho w_{3,tt}$$

С учетом выражения для тензора модулей упругости, слагаемые члены этой системы будут иметь вид:

$$C_{\gamma jkl}w_{k,jl} = (\lambda+\mu)w_{k,k\gamma} + \mu w_{\gamma,kk}, \qquad C_{3jkl}w_{k,jl} = (\lambda+\mu)w_{k,k3} + \mu w_{3,kk}$$

$$C_{\gamma jk3}\left\langle u^{(1)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} = C_{\gamma j\beta 3}\left\langle u^{(1)}_{\beta,\xi}\right\rangle_{,j} = \mu\varphi_{\gamma,3}, \qquad C_{3jk3}\left\langle u^{(1)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} = C_{3j\beta 3}\left\langle u^{(1)}_{\beta,\xi}\right\rangle_{,j} = \mu\varphi_{\beta,\beta}$$

$$C_{\gamma jk3}\left\langle u^{(3)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} = \mu\left\langle u^{(3)}_{\gamma,\xi}\right\rangle_{,3} = \mu^2\left(\varphi_{\gamma,\beta\beta 3} + (3\lambda+2\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma 3}/(\lambda+2\mu) - \rho\varphi_{\gamma,tt3}/\mu\right)/(k+\mu)/12$$

$$C_{3jk3}\left\langle u^{(3)}_{k,\xi}\right\rangle_{,j} = \left\langle u^{(3)}_{\beta,\xi}\right\rangle_{,\beta} = \mu^2\left(4(\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\alpha\alpha}/(\lambda+2\mu) - \rho\varphi_{\beta,\beta tt}/\mu\right)/(k+\mu)/12$$

Окончательно уточненная система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$(\lambda+\mu)w_{k,k\gamma} + \mu w_{\gamma,kk} + \mu\varphi_{\gamma,3} + \varepsilon^2\mu^2\left(\varphi_{\gamma,\beta\beta 3} + (3\lambda+2\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma 3}/(\lambda+2\mu) - \rho\varphi_{\gamma,tt3}/\mu\right)/(k+\mu)/12 = \rho w_{\gamma,tt}$$

$$(\lambda+\mu)w_{k,k3} + \mu w_{3,kk} + \mu\varphi_{\beta,\beta} + \varepsilon^2\mu^2\left(4(\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\alpha\alpha}/(\lambda+2\mu) - \rho\varphi_{\beta,\beta tt}/\mu\right)/(k+\mu)/12 = \rho w_{3,tt}$$

Напомним, что $\varphi_\gamma = -\mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma})/(k+\mu)$. В общую систему не будем подставлять выражение для φ_γ из-за громоздкости последующего результата. Ясно, что возникнет система четвертого порядка для поля смещений w_k по пространственным координатам, содержащая также смешанные производные по времени.

Система упрощается для случая идеально скользящего контакта между слоями $k = 0$.

$$(\lambda+\mu)w_{k,k\gamma} + \mu w_{\gamma,kk} + \mu\varphi_{\gamma,3} + \varepsilon^2\mu\left(\varphi_{\gamma,\beta\beta3} + (3\lambda+2\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma3}/(\lambda+2\mu) - \rho\varphi_{\gamma,tt3}/\mu\right)/12 = \rho w_{\gamma,tt}$$

$$(\lambda+\mu)w_{k,k3} + \mu w_{3,kk} + \mu\varphi_{\beta,\beta} + \varepsilon^2\mu\left(4(\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\alpha\alpha}/(\lambda+2\mu) - \rho\varphi_{\beta,\beta tt}/\mu\right)/12 = \rho w_{3,tt}$$

$$\varphi_\gamma = -(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma})$$

Квазистатический случай для общей системы получается удалением членов с временными производными:

$$(\lambda+\mu)w_{k,k\gamma} + \mu w_{\gamma,kk} + \mu\varphi_{\gamma,3} + \varepsilon^2\mu^2\left(\varphi_{\gamma,\beta\beta3} + (3\lambda+2\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma3}/(\lambda+2\mu)\right)/(k+\mu)/12 = 0$$

$$(\lambda+\mu)w_{k,k3} + \mu w_{3,kk} + \mu\varphi_{\beta,\beta} + \varepsilon^2\mu^2(\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\alpha\alpha}/(\lambda+2\mu)/(k+\mu)/3 = 0$$

$$\varphi_\gamma = -\mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma})/(k+\mu)$$

Квазистатический случай для системы с идеальным межслойным скольжением:

$$(\lambda+\mu)w_{k,k\gamma} + \mu w_{\gamma,kk} + \mu\varphi_{\gamma,3} + \varepsilon^2\mu\left(\varphi_{\gamma,\beta\beta3} + (3\lambda+2\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma3}/(\lambda+2\mu)\right)/12 = 0$$

$$(\lambda+\mu)w_{k,k3} + \mu w_{3,kk} + \mu\varphi_{\beta,\beta} + \varepsilon^2\mu(\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\alpha\alpha}/(\lambda+2\mu)/3 = 0$$

$$\varphi_\gamma = -(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma})$$

Отдельно сформулируем плоскую (двумерную) динамическую систему уравнений:

$$(\lambda+2\mu)w_{1,11} + \left(\lambda + \frac{k\mu}{k+\mu}\right)w_{3,13} + \frac{k\mu}{k+\mu}w_{1,33} - \frac{\varepsilon^2\mu^3}{3(k+\mu)^2}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\left(w_{1,1133} + w_{3,3111}\right) + \rho\frac{\varepsilon^2\mu^2}{12(k+\mu)^2}\left(w_{1,33tt} + w_{3,31tt}\right) = \rho w_{1,tt}$$

$$(\lambda+2\mu)w_{3,33} + \left(\lambda + \frac{k\mu}{k+\mu}\right)w_{1,13} + \frac{k\mu}{k+\mu}w_{3,11} - \frac{\varepsilon^2\mu^3}{3(k+\mu)^2}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\left(w_{1,1113} + w_{3,1111}\right) + \rho\frac{\varepsilon^2\mu^2}{12(k+\mu)^2}\left(w_{1,13tt} + w_{3,11tt}\right) = \rho w_{3,tt}$$

Квазистатическая система уравнений имеет вид:

$$(\lambda+2\mu)w_{1,11}+\left(\lambda+\frac{k\mu}{k+\mu}\right)w_{3,13}+\frac{k\mu}{k+\mu}w_{1,33}-\frac{\varepsilon^2\mu^3}{3(k+\mu)^2}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\left(w_{1,1133}+w_{3,3111}\right)=0$$

$$(\lambda+2\mu)w_{3,33}+\left(\lambda+\frac{k\mu}{k+\mu}\right)w_{1,13}+\frac{k\mu}{k+\mu}w_{3,11}-\frac{\varepsilon^2\mu^3}{3(k+\mu)^2}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\left(w_{1,1113}+w_{3,1111}\right)=0$$

И, наконец, одномерные нестационарное и квазистатическое уравнения для изгиба слоистого пакета (случай $w_1=0$, $w_3=w_3(x_1,t)$) принимает вид:

$$\frac{\varepsilon^2\mu^3}{3(k+\mu)^2}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}w_{3,1111}-\frac{k\mu}{k+\mu}w_{3,11}-\rho\frac{\varepsilon^2\mu^2}{12(k+\mu)^2}w_{3,11tt}+\rho w_{3,tt}=0 \quad \text{(динамика)}$$

$$\frac{\varepsilon^2\mu^3}{3(k+\mu)^2}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}w_{3,1111}-\frac{k\mu}{k+\mu}w_{3,11}=0 \quad \text{(квазистатика)}$$

Формулы для компонент тензора напряжений выглядят так:

$$\sigma_{ij}^{(0)}=C_{ijkl}w_{k,l}+C_{ijk3}u_{k,\xi}^{(1)}, \quad \sigma_{ij}^{(0)}=\lambda\delta_{ij}w_{k,k}+\mu(w_{i,j}+w_{j.i})+\mu(\varphi_i\delta_{j3}+\varphi_j\delta_{i3})$$

$$\sigma_{ij}^{(1)}=C_{ijkl}u_{k,l}^{(1)}+C_{ijk3}u_{k,\xi}^{(2)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)}=\left(\lambda\delta_{ij}\varphi_{k,k}+\mu(\varphi_{i,j}+\varphi_{j.i})-\lambda\delta_{ij}\psi_3-\mu(\psi_i\delta_{j3}+\psi_j\delta_{i3})\right)(\xi\mp 1/2)$$

где $\quad \varphi_3=0$, $\quad \varphi_\gamma=-\mu(w_{\gamma,3}+w_{3,\gamma})/(k+\mu)$, $\quad \psi_\gamma=\varphi_{\gamma,3}$, $\quad \psi_3=\lambda\varphi_{\beta,\beta}/(\lambda+2\mu)$

Граничные условия для нагруженной поверхности записываются в виде:

$\sigma_{ij}^{(0)}\cdot n_j=P_i \quad , \quad \sigma_{ij}^{(1)}\cdot n_j=0$

В некоторых задачах при определенных ориентациях нормали к границе граничное условие первого порядка превращается в тождество. В этом случае следует использовать условие второго порядка: $\sigma_{ij}^{(2)}\cdot n_j=0$.

3. Исследование волновых свойств модели слоистой среды с проскальзыванием на межслойных границах.

3.1. Плоские гармонические волны.

Определим свойства гармонических волн, распространяющихся в произвольном направлении по отношению к ориентации слоев, при произвольном коэффициенте связи слоев k. Двумерная динамическая система уравнений для рассматриваемой слоистой среды имеет вид:

$$(\lambda+2\mu)w_{1,11}+\left(\lambda+\frac{k\mu}{k+\mu}\right)w_{3,13}+\frac{k\mu}{k+\mu}w_{1,33}-\frac{\varepsilon^2\mu^3}{3(k+\mu)^2}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\left(w_{1,1133}+w_{3,3111}\right)+\rho\frac{\varepsilon^2\mu^2}{12(k+\mu)^2}\left(w_{1,33tt}+w_{3,31tt}\right)=\rho w_{1,tt}$$

$$(\lambda+2\mu)w_{3,33}+\left(\lambda+\frac{k\mu}{k+\mu}\right)w_{1,13}+\frac{k\mu}{k+\mu}w_{3,11}-\frac{\varepsilon^2\mu^3}{3(k+\mu)^2}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\left(w_{1,1113}+w_{3,1111}\right)+\rho\frac{\varepsilon^2\mu^2}{12(k+\mu)^2}\left(w_{1,13tt}+w_{3,11tt}\right)=\rho w_{3,tt}$$

Эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$(\lambda+2\mu)w_{1,11}+\lambda w_{3,13}+\tilde{\mu}(w_{1,3}+w_{3,1})_{,3}-\varepsilon^2\mu\beta_1\left(w_{1,3}+w_{3,1}\right)_{,113}+\rho\varepsilon^2\beta_2\left(w_{1,3}+w_{3,1}\right)_{,3tt}=\rho w_{1,tt}$$
$$(\lambda+2\mu)w_{3,33}+\lambda w_{1,13}+\tilde{\mu}(w_{1,3}+w_{3,1})_{,1}-\varepsilon^2\mu\beta_1\left(w_{1,3}+w_{3,1}\right)_{,111}+\rho\varepsilon^2\beta_2\left(w_{1,3}+w_{3,1}\right)_{,1tt}=\rho w_{3,tt}$$

Введем дополнительные переменные:

$$U=w_{1,3}+w_{3,1}$$

$$V=\tilde{\mu}u-\varepsilon^2\mu\beta_1u_{,11}+\rho\varepsilon^2\beta_2u_{,tt}$$

Тогда система примет следующую форму:

$$\left((\lambda+2\mu)w_{1,11}-\rho w_{1,tt}\right)+\lambda w_{3,13}+V_{,3}=0$$

$$\lambda w_{1,13}+\left((\lambda+2\mu)w_{3,33}-\rho w_{3,tt}\right)+V_{,1}=0$$

$$w_{1,3}+w_{3,1}-U=0$$

$$\tilde{\mu}u-\varepsilon^2\beta_2(\mu_* u_{,11}+\rho u_{,tt})-V=0$$

Здесь введены обозначения:

$$\tilde{\mu} = \mu \frac{k}{k+\mu}, \quad \beta = \frac{\mu}{k+\mu}, \quad \beta_1 = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\beta^2/3, \quad \beta_2 = \beta^2/12, \quad \mu_* = \mu\beta_1/\beta_2$$

Будем искать решение этой системы в виде гармонических волн, распространяющихся в направлении $\mathbf{n} = (n_1, n_3)$ с частотой ω и волновым числом $\boldsymbol{\kappa} = \kappa\mathbf{n} = (\kappa_1, \kappa_3)$, $\kappa_1 = \kappa n_1$, $\kappa_3 = \kappa n_3$, $|\boldsymbol{\kappa}| = \kappa$, $|\mathbf{n}| = 1$:

$$w_1 = Ae^{i(\kappa_1 x_1 + \kappa_3 x_3 - \omega t)}, \quad w_3 = Be^{i(\kappa_1 x_1 + \kappa_3 x_3 - \omega t)}$$

$$U = Ce^{i(\kappa_1 x_1 + \kappa_3 x_3 - \omega t)}, \quad V = De^{i(\kappa_1 x_1 + \kappa_3 x_3 - \omega t)}$$

Волновое число $\kappa = 2\pi / l$, где l - длина гармонической волны. При этом $\varepsilon\kappa = 2\pi(\varepsilon / l)$, $\varepsilon^2\kappa^2 = 4\pi^2(\varepsilon / l)^2$. Малым параметром должна являться величина ε / l <1.

В результате после выкладок получим соответствующую однородную алгебраическую систему:

$$\left((\lambda+2\mu)\kappa_1^2 + \mu_\varepsilon\kappa_3^2 - \rho\omega^2\right)A + (\lambda+\mu_\varepsilon)\kappa_1\kappa_3 B = 0$$

$$(\lambda+\mu_\varepsilon)\kappa_1\kappa_3 A + \left((\lambda+2\mu)\kappa_3^2 + \mu_\varepsilon\kappa_1^2 - \rho\omega^2\right)B = 0$$

где обозначено $\mu_\varepsilon = \tilde{\mu} + \varepsilon^2\beta_2(\mu_*\kappa_1^2 - \rho\omega^2)$.

Условие разрешимости этой алгебраической системы дает уравнение для скоростей распространения гармонических волн в исследуемой слоистой среде:

$$\zeta^4 - \left(1 + \frac{\mu_\varepsilon}{(\lambda+2\mu)}\right)\zeta^2 + \frac{\mu_\varepsilon}{(\lambda+2\mu)} + 4\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\frac{(\mu-\mu_\varepsilon)}{(\lambda+2\mu)}n_1^2 n_3^2 = 0$$

где $\zeta^2 = \rho c^2 / (\lambda+2\mu) = c^2 / c_1^2$, $c = \omega / \kappa$ - фазовая скорость распространения волн в слоистой среде, $c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ и $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ - скорости распространения упругих продольных и поперечных волн в однородной упругой среде.

Зададим направление волны с помощью угла α, $n_1 = \sin\alpha$.

Для некоторых значений α биквадратное уравнение имеет точные решения.

При $\alpha = 0$:

Квазипродольная волна $\zeta_1 = 1$, квазипоперечная волна $\zeta_2 = \sqrt{\tilde{\mu}} \Big/ \sqrt{(\lambda + 2\mu)(1 + \varepsilon^2 \kappa^2 \beta_2)}$.

При $\alpha = \pi / 4$:

Квазипродольная волна $\zeta_1 = \sqrt{(\lambda + \mu + \tilde{\mu} + \varepsilon^2 \kappa^2 \beta_2 \mu_* / 2)} \Big/ \sqrt{(\lambda + 2\mu)(1 + \varepsilon^2 \kappa^2 \beta_2)}$,

квазипоперечная волна $\zeta_2 = \sqrt{\mu} \Big/ \sqrt{(\lambda + 2\mu)}$.

При $\alpha = \pi / 2$:

Квазипродольная волна $\zeta_1 = 1$,

квазипоперечная волна $\zeta_2 = \sqrt{(\tilde{\mu} + \varepsilon^2 \kappa^2 \beta_2 \mu_*)} \Big/ \sqrt{(\lambda + 2\mu)(1 + \varepsilon^2 \kappa^2 \beta_2)}$.

При любых α решение этого уравнения будем искать в принятом приближении $\sim \varepsilon^2$: $\zeta^2 = \zeta_0{}^2 + \zeta_*{}^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$

Нулевое по ε приближение $\zeta_0{}^2$ находится из уравнения:

$$\zeta_0{}^4 - \left(1 + \frac{\tilde{\mu}}{(\lambda + 2\mu)}\right)\zeta_0{}^2 + \frac{\tilde{\mu}}{(\lambda + 2\mu)} + \frac{(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{(\mu - \tilde{\mu})}{(\lambda + 2\mu)} \sin^2 2\alpha = 0$$

Значения $\zeta_0{}^2$, соответствующие квазипродольным и квазипоперечным волнам в слоистой среде равны:

$$\zeta_0{}^2 = 0.5\left(1 + \frac{\tilde{\mu}}{(\lambda + 2\mu)} \pm \sqrt{\frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda + 2\mu)^2} + 2\frac{(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{(\mu - \tilde{\mu})}{(\lambda + 2\mu)} \cos 4\alpha + \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{(\lambda + 2\mu)^2}}\right)$$

Коэффициент поправки $\zeta_*{}^2$ равен:

$$\zeta_*{}^2 = \beta_2 \kappa^2 (\zeta_0{}^2 - \cos^2 2\alpha)\left(\frac{\mu_*}{(\lambda + 2\mu)} \sin^2 \alpha - \zeta_0{}^2\right) / \left(2\zeta_0{}^2 - \left(1 + \frac{\tilde{\mu}}{(\lambda + 2\mu)}\right)\right)$$

С учетом выражения для $\zeta_0{}^2$ получим значения искомых величин:

$$\zeta^2 \approx \zeta_0{}^2 \pm \kappa^2 \varepsilon^2 \beta_2 (\zeta_0{}^2 - \cos^2 2\alpha)\left(\zeta_0{}^2 - \frac{\mu_*}{(\lambda + 2\mu)} \sin^2 \alpha\right) / \sqrt{\frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda + 2\mu)^2} + 2\frac{(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{(\mu - \tilde{\mu})}{(\lambda + 2\mu)} \cos 4\alpha + \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{(\lambda + 2\mu)^2}}$$

$$\zeta \approx \zeta_0 \left(1 \pm \kappa^2 \varepsilon^2 \beta_2 (\zeta_0{}^2 - \cos^2 2\alpha) \left(\zeta_0{}^2 - \frac{\mu_*}{(\lambda+2\mu)} \sin^2 \alpha \right) / 2\zeta_0{}^2 \sqrt{\frac{(\lambda+\mu)^2}{(\lambda+2\mu)^2} + 2\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)} \frac{(\mu-\tilde{\mu})}{(\lambda+2\mu)} \cos 4\alpha + \frac{(\mu-\tilde{\mu})^2}{(\lambda+2\mu)^2}} \right)$$

Из этих формул видно, что скорости гармонических волн имеют малую дисперсию (член $\sim \kappa^2\varepsilon^2$) и зависимость от направления распространения α.

Исследуем предельные случаи этих формул $\varepsilon \to 0$ ($\mu_\varepsilon \to \tilde{\mu}$), случай полного сцепления слоев (однородной упругой среды) $k \to \infty$ ($\tilde{\mu} \to \mu$) и случай идеального проскальзывания слоев $k \to 0$ ($\tilde{\mu} \to 0$).

Квазипродольные волны (знак + в формулах для ζ_0 и ζ).

В этом случае $\zeta \to \zeta_0$ при $\varepsilon \to 0$.

При $k \to \infty$ $\zeta \to 1$ ($c \to c_1$) – упругая продольная волна в изотропной среде.

При $k \to 0$

$$\zeta_0{}^2 \to 0.5 \left(1 + \sqrt{\frac{(\lambda+\mu)^2}{(\lambda+2\mu)^2} + \frac{2(\lambda+\mu)\mu}{(\lambda+2\mu)^2} \cos 4\alpha + \frac{\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}} \right)$$

При $\alpha = 0, \pi/2$ (волны вдоль и поперек слоев)

$\zeta_0 \to 1$, $c \to c_1$

При $\alpha = \pi/4$ (волны под углом к направлению слоев, минимальная скорость)

$$\zeta_0 \to \sqrt{\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}}, \quad c \to \sqrt{\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}} c_1$$

Квазипоперечные волны (знак - в формулах для ζ_0 и ζ).

В этом случае $\zeta \to \zeta_0$ при $\varepsilon \to 0$.

При $k \to \infty$ $\zeta \to c_2 / c_1$ ($c \to c_2$) – упругая поперечная волна в изотропной среде.

При $k \to 0$

$$\zeta_0{}^2 \to 0.5 \left(1 - \sqrt{\frac{(\lambda+\mu)^2}{(\lambda+2\mu)^2} + \frac{2(\lambda+\mu)\mu}{(\lambda+2\mu)^2} \cos 4\alpha + \frac{\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}} \right)$$

При $\alpha = 0, \pi/2$ (волны вдоль и поперек слоев)

$\zeta_0 \to 0$, $c \to 0$

При $\alpha = \pi/4$ (волны под углом к направлению слоев, максимальная скорость)

$\zeta_0 \to c_2 / c_1$, $c \to c_2$

Зависимость скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн от коэффициентов связи слоев k показаны на Рис. 1-5. Верхние серии кривых на этих рисунках соответствуют квазипродольным волнам, а нижние серии соответствуют квазипоперечным волнам при различных значениях параметра ε / l =0.5, 0.3, 0.1. Безразмерные модули упругости слоев заданы значениями $\lambda / (\lambda + 2\mu) = \mu / (\lambda + 2\mu) = 1/3$.

Над каждым рисунком указано значение угла α =0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, задающего направление распространения волны. При α =0, 45^0, 90^0 кривые на Рис. 1,3,6 описываются точными формулами, приведенными выше. При иных значениях α биквадратное уравнение для $\zeta = c / c_1$ конечной формулы для решения не имеет, только графическое представление (Рис. 2, 4).

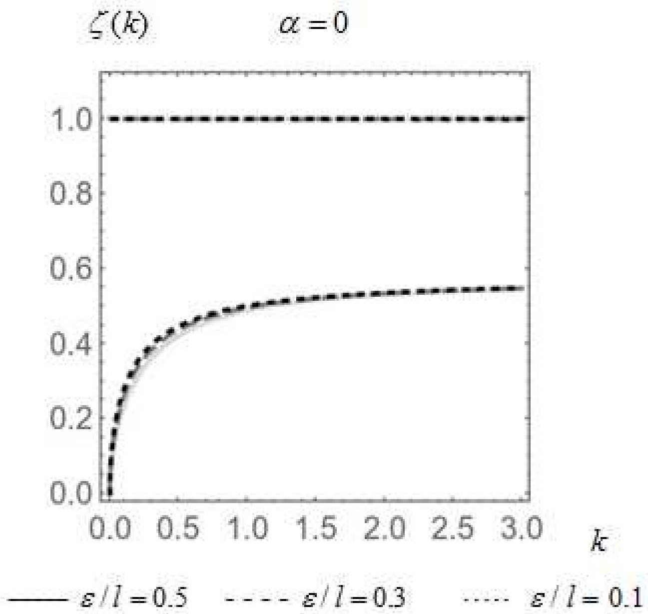
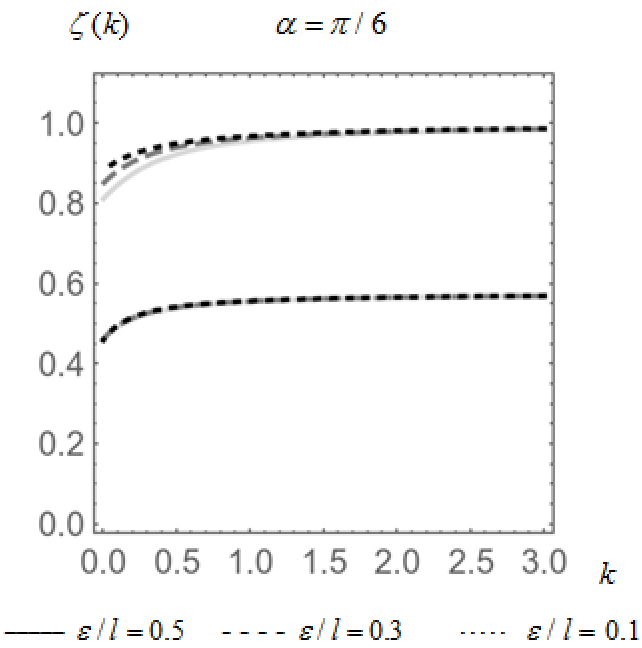
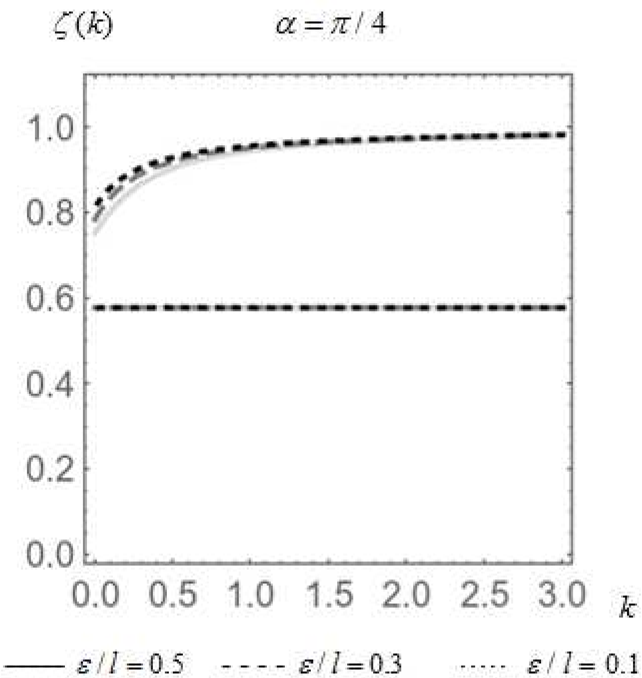


Рис.1



$\zeta(k)$
$\alpha = \pi / 6$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
k
$\varepsilon / l = 0.5$
$\varepsilon / l = 0.3$
$\varepsilon / l = 0.1$

Рис. 2



$\zeta(k)$
$\alpha = \pi / 4$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
k
$\varepsilon / l = 0.5$
$\varepsilon / l = 0.3$
$\varepsilon / l = 0.1$

Рис. 3

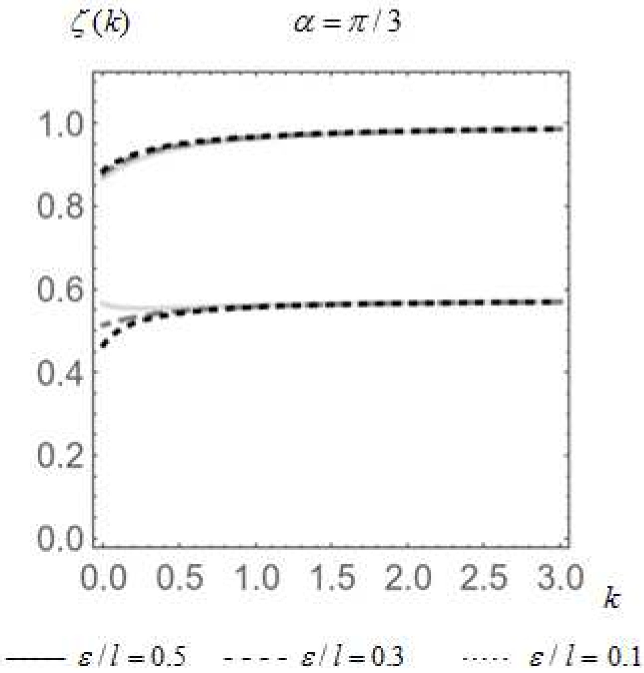

ζ(k)
α = π / 3
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
k
ε / l = 0.5
ε / l = 0.3
ε / l = 0.1

Рис. 4

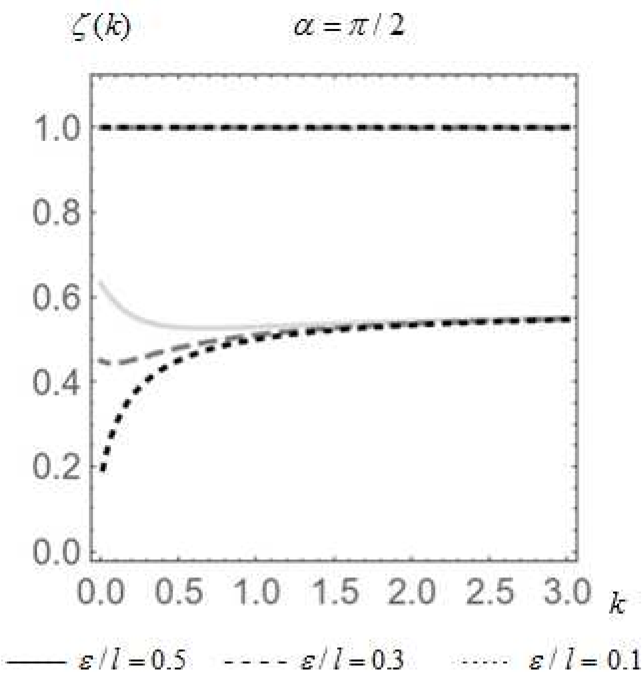

ζ(k)
α = π / 2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
k
ε / l = 0.5
ε / l = 0.3
ε / l = 0.1

Рис. 5

Из этих графиков виден уровень дисперсии плоских волн в среде (при небольших значениях коэффициентах связи слоев) для разных направлений распространения и ее зависимость от отношения толщины слоя к длине волны ε / l. Можно сказать, что дисперсия проявляется только для безразмерных коэффициентов связи $k/(\lambda+2\mu)$<0.7. Она наиболее выражена для направлений α=90^0 (вдоль слоев) для квазипоперечных волн - Рис. 5, нижние серии кривых.

3.2. Поверхностные волны Рэлея.

Будем искать поверхностные волны на границе слоистого полупространства $-\infty < x_3 \le 0$, $-\infty < x_1 < \infty$ (плоская задача). Система уравнений для смещений слоистой среды с проскальзыванием на межслойных границах выписана ранее:

$$\left((\lambda+2\mu)w_{1,11}-\rho w_{1,tt}\right)+\lambda w_{3,13}+V_{,3}=0$$

$$\lambda w_{1,13}+\left((\lambda+2\mu)w_{3,33}-\rho w_{3,tt}\right)+V_{,1}=0$$

$$w_{1,3}+w_{3,1}-U=0$$

$$\tilde{\mu}u-\varepsilon^2\beta_2(\mu_* u_{,11}+\rho u_{,tt})-V=0$$

Граничные условия при $x_3=0$:

$$\sigma_{33}=(\lambda+2\mu)w_{3,3}+\lambda w_{1,1}=0$$

$$\sigma_{13}=\mu(w_{1,3}+w_{3,1})=0$$

При $x_3 \to -\infty$ $\quad w_1 \to 0$, $w_3 \to 0$.

Представим решения поставленной задачи в виде поверхностной волны, γ>0 :

$$w_1 = Ae^{\gamma x_3}e^{i(\kappa_1 x_1-\omega t)}$$

$$w_3 = Be^{\gamma x_3}e^{i(\kappa_1 x_1-\omega t)}$$

Подставляя в систему дифференциальных уравнений, получим алгебраическую однородную систему:

$$\left(\mu_\varepsilon\gamma^2-\kappa_1^2\Delta_1\right)A+(\lambda+\mu_\varepsilon)\gamma i\kappa_1 B=0$$

$$-\kappa_1^2(\lambda+\mu_\varepsilon)\gamma A+\left((\lambda+2\mu)\gamma^2-\kappa_1^2\Delta_{2\varepsilon}\right)i\kappa_1 B=0$$

Здесь приняты обозначения:

$$\mu_\varepsilon = \tilde{\mu} + \varepsilon^2 \beta_2 \kappa_1^2 \Delta_* , \quad \Delta_* = \mu_* - \rho c^2 , \quad \Delta_1 = \lambda + 2\mu - \rho c^2$$

$$\Delta_{2\varepsilon} = \Delta_2 + \varepsilon^2 \beta_2 \kappa_1^2 \Delta_* , \quad \Delta_2 = \tilde{\mu} - \rho c^2 ,$$

где $c = \omega / \kappa_1$ - фазовая скорость искомой поверхностной волны.

Условие разрешимости этой системы дает биквадратное уравнение для определения показателя γ:

$$(\lambda + 2\mu)\mu_\varepsilon \gamma^4 - \kappa_1^2 \gamma^2 \left(\mu_\varepsilon \Delta_{2\varepsilon} + (\lambda + 2\mu)\Delta_1 - (\lambda + \mu_\varepsilon)^2 \right) + \kappa_1^4 \Delta_1 \Delta_{2\varepsilon} = 0$$

Из этого уравнения находим два положительных решения $\gamma_{1,2} > 0$:

$$\gamma_{1,2}{}^2 = \frac{\kappa_1^2 \left\{ \left(\mu_\varepsilon \Delta_{2\varepsilon} + (\lambda + 2\mu)\Delta_1 - (\lambda + \mu_\varepsilon)^2 \right) \pm \sqrt{\left(\mu_\varepsilon \Delta_{2\varepsilon} + (\lambda + 2\mu)\Delta_1 - (\lambda + \mu_\varepsilon)^2 \right)^2 - 4(\lambda + 2\mu)\mu_\varepsilon \Delta_1 \Delta_{2\varepsilon}} \right\}}{2(\lambda + 2\mu)\mu_\varepsilon}$$

Таким образом, с учетом этого факта, решения поставленной задачи имеют вид:

$$w_1 = A_1 e^{\gamma_1 x_3} e^{i(\kappa_1 x_1 - \omega t)} + A_2 e^{\gamma_2 x_3} e^{i(\kappa_1 x_1 - \omega t)}$$

$$w_3 = B_1 e^{\gamma_1 x_3} e^{i(\kappa_1 x_1 - \omega t)} + B_2 e^{\gamma_2 x_3} e^{i(\kappa_1 x_1 - \omega t)}$$

$$i\kappa_1 B_{1,2} = \kappa_1^2 \frac{(\lambda + \mu_\varepsilon)\gamma_{1,2} A_{1,2}}{\left((\lambda + 2\mu)\gamma_{1,2}{}^2 - \kappa_1^2 \Delta_{2\varepsilon} \right)}$$

Подставим эти решения в граничные условия при $x_3 = 0$ и получим систему уравнений:

$$\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + i\kappa_1 B_1 + i\kappa_1 B_2 = 0$$

$$-\lambda \kappa_1{}^2 A_1 - \lambda \kappa_1{}^2 A_2 + (\lambda + 2\mu)\gamma_1 i\kappa_1 B_1 + (\lambda + 2\mu)\gamma_2 i\kappa_1 B_2 = 0$$

Из этой системы можно исключить амплитуды B_1 и B_2, тогда останутся два однородных уравнения относительно амплитуд A_1 и A_2. Для упрощения выражений вместо показателей $\gamma_{1,2} > 0$ введем величины $\eta_{1,2}$ из соотношений $\eta_{1,2} = \gamma_{1,2} / \kappa_1$. Эти величины определяются формулами:

$$\eta_{1,2}{}^2 = \frac{\mu_\varepsilon \Delta_{2\varepsilon} + (\lambda+2\mu)\Delta_1 - (\lambda+\mu_\varepsilon)^2 \pm \sqrt{\left(\mu_\varepsilon \Delta_{2\varepsilon} + (\lambda+2\mu)\Delta_1 - (\lambda+\mu_\varepsilon)^2\right)^2 - 4(\lambda+2\mu)\mu_\varepsilon \Delta_1 \Delta_{2\varepsilon}}}{2(\lambda+2\mu)\mu_\varepsilon}$$

Однородная система для амплитуд A_1 и A_2 имеет вид:

$$\eta_1\left(1+\frac{(\lambda+\mu_\varepsilon)}{\left((\lambda+2\mu)\eta_1{}^2-\Delta_{2\varepsilon}\right)}\right)A_1+\eta_2\left(1+\frac{(\lambda+\mu_\varepsilon)}{\left((\lambda+2\mu)\eta_2{}^2-\Delta_{2\varepsilon}\right)}\right)A_2=0$$

$$\left(\frac{(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu_\varepsilon)\eta_1^2}{\left((\lambda+2\mu)\eta_1{}^2-\Delta_{2\varepsilon}\right)}-\lambda\right)A_1+\left(\frac{(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu_\varepsilon)\eta_2^2}{\left((\lambda+2\mu)\eta_2{}^2-\Delta_{2\varepsilon}\right)}-\lambda\right)A_2=0$$

Для разрешимости детерминант этой системы надо приравнять нулю. Это и будет уравнение для неизвестной фазовой скорости поверхностной волны $c=\omega/\kappa_1$:

$$4(\lambda+\mu)\eta_1\eta_2{}^2-\eta_2(1+\eta_2{}^2)\left((\lambda+2\mu)\eta_1{}^2+\lambda\eta_2{}^2\right)-$$

$$-\frac{\Delta\mu_\varepsilon}{\mu}\left\{\eta_1\left((\lambda+2\mu)\eta_2{}^2+\lambda\right)+\eta_2(1+\eta_2{}^2)\left((\lambda+2\mu)\eta_1{}^2+\lambda\right)\right\}=0$$

Здесь принято обозначение $\Delta\mu_\varepsilon=\mu-\mu_\varepsilon$.

Опять исследуем предельные случаи этих формул при $\varepsilon\to 0$ ($\mu_\varepsilon\to\tilde{\mu}$).
В этих случаях:

$$\eta_{1,2}{}^2 = \frac{\tilde{\mu}\Delta_2 + (\lambda+2\mu)\Delta_1 - (\lambda+\tilde{\mu})^2 \pm \sqrt{\left(\tilde{\mu}\Delta_2 + (\lambda+2\mu)\Delta_1 - (\lambda+\tilde{\mu})^2\right)^2 - 4(\lambda+2\mu)\tilde{\mu}\Delta_1\Delta_2}}{2(\lambda+2\mu)\tilde{\mu}}$$

Уравнение для скорости поверхностной волны будет таким:

$$4(\lambda+\mu)\eta_1\eta_2{}^2-\eta_2(1+\eta_2{}^2)\left((\lambda+2\mu)\eta_1{}^2+\lambda\eta_2{}^2\right)-$$

$$-\frac{\mu}{(k+\mu)}\left\{\eta_1\left((\lambda+2\mu)\eta_2{}^2+\lambda\right)+\eta_2(1+\eta_2{}^2)\left((\lambda+2\mu)\eta_1{}^2+\lambda\right)\right\}=0$$

Случай полного сцепления слоев (однородной упругой среды) $k \to \infty \ (\tilde{\mu} \to \mu)$

В этом случае:

$$\eta_1^2 = 1 - c^2 / c_1^2, \quad \eta_2^2 = 1 - c^2 / c_2^2$$

$$4(\lambda+\mu)\eta_1\eta_2 - (1+\eta_2^2)\left((\lambda+2\mu)\eta_1^2 + \lambda\eta_2^2\right) = 0$$

После коротких выкладок приходим к классической волне Рэлея:

$$4\sqrt{1 - c^2 / c_1^2}\sqrt{1 - c^2 / c_2^2} - (2 - c^2 / c_2^2)^2 = 0$$

Случай идеального проскальзывания слоев $k \to 0 \ (\tilde{\mu} \to 0)$

В этом случае, считая μ_ε малым параметром, получаем:

$$\eta_1^2 \sim \frac{4\mu(\lambda+\mu) - (\lambda+2\mu)\rho c^2}{(\lambda+2\mu)\mu_\varepsilon}$$

$$\eta_2^2 \sim \frac{(\lambda+2\mu-\rho c^2)(\mu_\varepsilon - \rho c^2)}{4\mu(\lambda+\mu) - (\lambda+2\mu)\rho c^2}$$

$$(3\lambda+2\mu)\eta_1\eta_2^2 - 2(\lambda+2\mu)\eta_1^2\eta_2(1+\eta_2^2) - \lambda\eta_2(1+\eta_2^2)^2 - \lambda\eta_1 = 0$$

Графики зависимости безразмерной скорости поверхностной волны c / c_2 от коэффициентов связи слоев k показаны на Рис. 6 для различных значений параметра толщины слоя к длине волны ε / l =0.5, 0.3, 0.1. Как и в предыдущем случае, волновое число $\kappa_1 = 2\pi / l$, где l- длина гармонической поверхностной волны. При этом $\varepsilon\kappa_1 = 2\pi(\varepsilon / l)$, $\varepsilon^2\kappa_1^2 = 4\pi^2(\varepsilon / l)^2$. Выход на асимптотику классического корня Рэлея происходит для значений безразмерного коэффициента $k / (\lambda+2\mu) > 1.5 \div 2$.

Поведение этих кривых очень похоже на поведение нижней серии кривых с Рис.5 (квазипоперечные волны) для волн, распространяющихся вдоль направления слоев (α =90^0) и близки к ним. Для классических волн Рэлея, как известно, $c_R / c_2 \approx 0.9$, такое же соотношение соблюдается и в данном случае для отношения скорости поверхностных волн в исследуемой слоистой среде к скорости квазипоперечных волн.

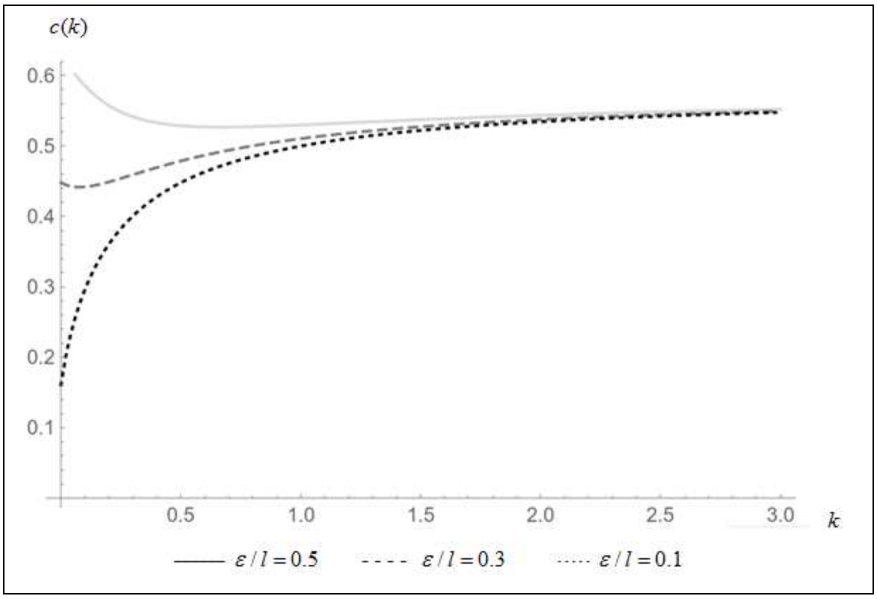


Рис. 6

В заключение отметим, что граница применимости полученной асимптотической теории точно не определена. Достаточно условно при расчетах была принята верхняя граница малого параметра ε / l =0.5. Тем не менее, для коэффициентов связи слоев, начиная со значений $k/(\lambda+2\mu)>0.7$, расчеты дают близкие значения скоростей распространения квазипродольных, квазипоперечных и поверхностных волн для всего диапазона длин волн ε / l <0.5.

Полагаем, что полученную уточненную модель можно использовать для исследования трансформации сейсмических волн при их выходе на земную поверхность в горных массивах, содержащих регулярные параллельные сетки трещин, с учетом возможных сдвиговых подвижек на контактных границах. Также эта теория может быть полезна при описании деформирования композитных материалов с дополнительными мягкими прослойками между слоями из основного, достаточно жесткого упругого материала.

Авторы выражают признательность А.В. Ганьшину за помощь в проведении расчетов.

Выводы

На основе асимптотического метода осреднения получены континуальные уравнения слоистой среды с проскальзыванием с учетом членов второго порядка по малому параметру толщины слоя. Использовано линейное условие проскальзывания, связывающее скачки касательных смещений на контактных границах и касательные напряжения. Исследованы волновые свойства полученной системы уравнений, получены дисперсионные соотношения для гармонических волн. Построено решение задачи о поверхностной волне типа Рэлея на границе упругого слоистого полупространства.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352с.
2. Sanchez-Palencia E. Non homogeneous media and vibration theory. Springer. Berlin. 1980. 398 p.
3. Никитин И.С. Осредненные уравнения слоистой среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах.// Изв. АН СССР. МТТ. 1987. №5. С.80-86.
4. Никитин И.С. Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением. //Изв. РАН. МТТ. 2008. № 4. С.154-165.
5. Зволинский Н.В., Шхинек К.Н. Континуальная модель слоистой среды. Изв. РАН МТТ. 1984. № 1. С.5-14.
6. Салганик Р.Л. Приближение сплошной среды для описания деформирования слоистого массива. Изв. РАН. МТТ. 1987. № 3. С.48-56.

Николай Георгиевич Бураго

Илья Степанович Никитин

Павел Анатольевич Юшковский

УТОЧНЕННАЯ КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ НА МЕЖСЛОЙНЫХ ГРАНИЦАХ

ISBN 978-5-91741-140-8

9 785917 411408

Подписано к печати 19 февраля 2015 г. Заказ № 9-2015 Тираж 40 экз.

Отпечатано в УЧРЕЖДЕНИИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ИНСТИТУТЕ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю.ИШЛИНСКОГО РАН

119526 Москва, пр-т Вернадского, 101-1