УДК 534.121

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ[1]

© 2005 С.А. Лычев, Ю.Н. Сайфутдинов[2]

В работе получены дифференциальные уравнения движения и краевые условия для трехслойной вязкоупругой сферической оболочки с несимметричной структурой пакета слоев в предположении, что толщина среднего слоя значительно превышает толщины внешних слоев. Материал среднего слоя — вязкоупругий, его деформирование рассматривается в постановке теории Миндлина–Тимошенко, внешние слои — упругие и испытывают мембранное напряженно–деформированное состояние. Краевые условия соответствуют наиболее общим (упругим) способам опирания оболочки.

1. Свободные колебания сферических оболочек впервые были исследованы лордом Релеем (Rayleigh) в 1881 г [1]. Релей, используя энергетический метод и полагая, что срединная поверхность нерастяжима, рассмотрел чисто изгибные колебания без учета граничных условий.

В работах Г. Лэмба (H. Lamb) [2] уравнения движения были получены на основе кинематических гипотез деформирования сечения оболочки (1882 г.)

Первая попытка разработки общей теории моментных колебаний тонких оболочек была предпринята А. Лявом (A.E.H. Love) и имела целью исследование колебаний колоколов [3]. Распространяя теорию пластин Г. Кирхгофа на оболочки, А. Ляв допускал одновременно изгиб и растяжение срединной поверхности, причем, пользуясь принципом возможных перемещений, он получил в 1888 г. как уравнения движения, так и граничные условия.

Дальнейшее развитие теория малых осесимметричных деформаций оболочек получила в работах Х. Рейснера (H. Reissner) и Э. Мейснера (E. Meissner). Х. Рейснеру удалось получить два симметричных дифференциальных уравнения второго порядка для замкнутой сферической оболочки, имеющей постоянную толщину и загруженную симметричной нагрузкой [4]. Эту систему Х. Рейснер решил при помощи предложенного Отто фон Блюменталем (O. Blumenthal) способа асимптотического интегрирования.

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Лычев Сергей Александрович (lychev@ssu.samara.ru), Сайфутдинов Юсуп Назипович (jusufsay@mail.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

В 1937 г. К. Федергофер в рамках технической теории (теории Кирхгофа–Лява) впервые получил систему дифференциальных уравнений колебаний непологой сферической оболочки в перемещениях [5]. Не приводя замкнутого решения, он указал, что решение этой системы может быть найдено в присоединенных функциях Лежандра комплексной степени.

Дифференциальные уравнения теории пологих сферических оболочек, учитывающие деформации сдвига и инерцию вращения, были сформулированы П. Нагди [6] и А. Калнисом [7] (1960 г.), а соответствующие уравнения движения непологой сферической оболочки — К. Прасадом (C. Prasad) [8]. Точное решение осесимметричной задачи о собственных и вынужденных колебаниях жестко защемленной пологой сферической оболочки в уточненной постановке без учета тангенциальных сил инерции приведено П. Цулковским (P.M. Culkowski) и Г. Райзманом (H. Reismann) [9].

Б. Копликом (B. Koplik) и Ю Ви Юанем (Yu Yi-Yuan) (1967 г.) были изучены несимметричные колебания трехслойной сферической оболочки симметричного строения на основе полной системы дифференциальных уравнений движения в напряжениях [10]. Учитывались сдвиги и инерция вращения сечений, изменением длины нормали и изгибной жесткостью наружных слоев пренебрегали.

Уравнения осесимметричного движения в перемещениях для непологой трехслойной сферической оболочки симметричной структуры были получены П. Цулковским (P.M. Culkowski) и Х. Райзманом (H. Reismann) на основе принципа Остроградского–Гамильтона [9] (1971 г.)

С. Мирза (S. Mirza) и А. Сингх (A. Singh) исследовали свободные колебания непологих сферических оболочек с легким заполнителем и мембранными симметричными внешними слоями [11]. Точные решения уравнений движения были получены в функциях Лежандра произвольной комплексной степени.

Колебания трехслойных сферических оболочек с несимметричной структурой пакета слоев исследованы в меньшей степени. Вместе с тем непологие сферические оболочки с несимметричной структурой являются конструкциями наибольшей жесткости[3] и представляют интерес в технических приложениях.

2. В работе рассматриваются сферические оболочки, образованные двумя тонкими наружными слоями с различными толщинами h_2, h_3 и внутренним слоем толщиной $h_1 \gg h_2, h_3$. Предполагается, что способы соединения слоев в единый пакет гарантируют отсутствие их смещения относительно друг друга (проскальзывания). Кроме того, будем полагать, следующее:

1. Перемещения оболочки малы по сравнению с толщиной конструкции.

---

[3]При фиксированной удельной массе пакета слоев от соотношения тощин слоев зависит изгибная жесткость оболочки; при определенных соотношениях этих параметров жесткость оказывается наибольшей, конструкция при заданной нагрузке испытывает наименьший прогиб и в этом смысле является оптимальной [12].

2. Нормальными напряжениями на площадках, касательных срединной поверхности, можно пренебречь.

3. Слои оболочки изотропные. Внешние слои испытывают мембранное напряженно–деформированное состояние.

4. Нормальный элемент среднего слоя после деформирования не остается перпендикулярным к срединной поверхности, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины (кинематические гипотезы Миндлина).

Воспользуемся географической системой координат $\{\theta, \varphi, z\}$, связанной с прямоугольными координатами $\{X, Y, Z\}$ соотношениями:

$$X = (R + z)\sin\theta\sin\varphi, \quad Y = (R + z)\sin\theta\cos\varphi, \quad Z = (R + z)\cos\theta.$$

Здесь R — радиус кривизны срединной поверхности $\boldsymbol{\Omega}$, которая представляет собой участок сферической поверхности, ограниченной контуром оболочки и эксидистантный ее лицевым поверхностям ω_+, ω_-, но не равноудаленной от них.

В соответствии с кинематическими гипотезами (4), вектор перемещений $\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^k(\theta, \varphi, z)$ $(k = 1, 2, 3)$ произвольной точки k-го слоя может быть выражен через перемещения срединной поверхности $\mathbf{u} = (u(\theta, \varphi), v(\theta, \varphi), w(\theta, \varphi))$ и вектор углов поворота нормалей к ней $\mathbf{y} = (\psi(\theta, \varphi), \gamma(\theta, \varphi), 0)$, т.е.:

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u} + z\mathbf{y}, \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{u} - h_-\mathbf{y}, \quad \mathbf{u}^3 = \mathbf{u} + h_+\mathbf{y}, \quad h_+ + h_- = h_1. \tag{1}$$

Индекс "1" относится к среднему слою, индексы "2" и "3" — соответственно к внутреннему и наружному внешним слоям оболочки; h_+, h_- — расстояния от $\boldsymbol{\Omega}$ до внешней и внутренней лицевых поверхностей ω_+, ω_-.

Согласно гипотезе (1), деформации в слоях оболочки определяются тензором малых деформаций; его физические компоненты в координатах $\{\theta,\varphi,z\}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^k_{\theta\theta} = \frac{1}{R+z}\left(\frac{\partial u^k}{\partial\theta} + w^k\right), &&\varepsilon^k_{\theta\varphi} = \frac{1}{2(R+z)}\left(\frac{\partial v^k}{\partial\theta} - v^k \operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u^k}{\partial\varphi}\right),\\
&\varepsilon^k_{z\theta} = \frac{1}{2(R+z)}\left(\frac{\partial w^k}{\partial\theta} + (R+z)\frac{\partial u^k}{\partial z} - u^k\right), &&\varepsilon^k_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R+z}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v^k}{\partial\varphi} + w^k + \operatorname{ctg}\theta\, u^k\right),\\
&\varepsilon^k_{z\varphi} = \frac{1}{2(R+z)}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w^k}{\partial\varphi} + (R+z)\frac{\partial v^k}{\partial z} - v^k\right), &&\varepsilon^k_{zz} = \frac{\partial w^k}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2}$$

В результате подстановки аппроксимирующих формул (1) в выражения (2) получим геометрические соотношения, определяющие деформации в слоях оболочки

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{1}_{\theta\theta}=\frac{1}{R+z}\left(e_{\theta\theta}+z\chi_{\theta\theta}\right), && \varepsilon^{1}_{\theta\varphi}=\frac{1}{2(R+z)}\left(e_{\theta\varphi}+z\chi_{\theta\varphi}\right),\\
&\varepsilon^{1}_{z\theta}=\frac{1}{2(R+z)}e_{z\theta}, && \varepsilon^{1}_{\varphi\varphi}=\frac{1}{R+z}\left(e_{\varphi\varphi}+z\chi_{\varphi\varphi}\right),\\
&\varepsilon^{1}_{z\varphi}=\frac{1}{2(R+z)}e_{z\varphi}, && \varepsilon^{1}_{zz}=0,\\
&\varepsilon^{2,3}_{\theta\theta}=\frac{1}{R+z}\left(e_{\theta\theta}\mp h_{\mp}\chi_{\theta\theta}\right), && \varepsilon^{2,3}_{\theta\varphi}=\frac{1}{2(R+z)}\left(e_{\theta\varphi}\mp h_{\mp}\chi_{\theta\varphi}\right),\\
&\varepsilon^{2,3}_{z\theta}=0,\ \ \varepsilon^{1}_{zz}=0,\ \ \varepsilon^{2,3}_{z\varphi}=0, && \varepsilon^{2,3}_{\varphi\varphi}=\frac{1}{R+z}\left(e_{\varphi\varphi}\mp h_{\mp}\chi_{\varphi\varphi}\right)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

через следующие поверхностные меры деформаций:

$$
\begin{aligned}
&e_{z\theta}=\frac{\partial w}{\partial\theta}+R\psi-u, && e_{\varphi\varphi}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\operatorname{ctg}\theta u+w, && e_{\theta\theta}=\frac{\partial u}{\partial\theta}+w,\\
&e_{z\varphi}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+R\gamma-v, && e_{\theta\varphi}=\frac{\partial v}{\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta v+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}, &&\\
&\chi_{\theta\varphi}=\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta\gamma+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, && \chi_{\varphi\varphi}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}+\operatorname{ctg}\theta\psi, && \chi_{\theta\theta}=\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

3. Вывод дифференциальных уравнений движения и краевых условий осуществляется на основании вариационного принципа Онзагера (принцип наименьшего рассеяния энергии) который, как отмечается в [13], эквивалентен принципу максимальной скорости производства энтропии и может быть сформулирован в виде:

$$
\delta_J\left(\mathcal{T}(\mathbf{X},\mathbf{J})-\frac{1}{2}\mathcal{D}(\mathbf{J},\mathbf{J})\right)_{\mathbf{X}}=0,
\tag{5}
$$

где $\mathcal{T}$ — полное внутреннее производство энтропии, $\mathcal{D}$ — полная диссипация, $\mathbf{X}$ — термодинамические силы, $\mathbf{J}$ — сопряженные им потоки.[4]

Воспользуемся следующим выражением для $\mathcal{T}$:

$$
\mathcal{T}=\mathcal{P}_{\text{ext}}-\dot{\mathcal{K}}-\dot{\mathcal{W}}.
\tag{6}
$$

[4]Формулировка принципа максимальной скорости производства энтропии $\mathcal{T}$ состоит в утверждении, что функционал

$$
\{\mathcal{T}(\mathbf{J},\mathbf{X})-\lambda\mathcal{Q}(\mathbf{J},\mathbf{X})\}_{\mathbf{X}}
$$

имеет экстремум при варьировании по потокам $\mathbf{J}$ при фиксированных термодинамических силах $\mathbf{X}$, т.е.:

$$
\delta_J\{\mathcal{T}(\mathbf{J},\mathbf{X})-\lambda\mathcal{Q}(\mathbf{J},\mathbf{X})\}_{\mathbf{X}}=0
$$

и дополнительном условии

$$
\mathcal{Q}=\mathcal{D}(\mathbf{J},\mathbf{J})-\mathcal{T}(\mathbf{J},\mathbf{X})=0.
$$

Здесь λ — неопределенный множитель Лагранжа. Исключая его, приходим к вариационному уравнению (5), где варьируемое выражение представляет собой половину мощности рассеяния энергии.

Здесь точка означает производную по времени, $\mathcal{P}_{\text{ext}}$ — мощность внешних сил, $\mathcal{K}$ — кинетическая энергия, $\mathcal{W}$ — свободная энергия:

$$\mathcal{K}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\mathcal{V}_k}\rho_k\dot{\mathbf{u}}^k\cdot\dot{\mathbf{u}}^k\,dv,\qquad \mathcal{W}=\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\mathcal{V}_k}w^k\,dv,$$

$\mathcal{V}_k$ — пересечение объема k–го слоя оболочки и контрольного объема, ρ_k — плотность материала k–го слоя, w^k — плотность свободной энергии в слое k.

Будем полагать, что неупругие деформации развиваются в среднем слое, в то время как внешние слои деформируются упруго. Тогда плотность свободной энергии среднего слоя w^1 зависит от тензора деформации $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1$ и тензора скрытых переменных состояния $\hat{\boldsymbol{\eta}}$, а свободная энергия внешних слоев определяется соответствующими тензорами $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1,2}$, т.е.

$$w^1=w^1(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1,\hat{\boldsymbol{\eta}}),\quad w^{2,3}=w^{2,3}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{2,3}).$$

Поскольку средний слой рассматривается в рамках теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью, то выражение для w^1 может быть сформулированно в следующем специальном виде, позволяющим учесть поправку к распределению касательных ("поперечных") напряжений по толщине оболочки посредством коэффициента поперечного сдвига $\varkappa$ [14]:

$$\begin{aligned}w^1=\mu_1^\infty\Big[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1D}:\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1D}+(\varkappa-1)\,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1D}:\hat{\boldsymbol{I}}:\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1D}\Big]+\frac{1}{2}K_1^\infty\left(\hat{\boldsymbol{E}}:\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1\right)^2+\\+\mu_1^0\Big[\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1D}-\hat{\boldsymbol{\eta}}^D\right):\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1D}-\hat{\boldsymbol{\eta}}^D\right)+(\varkappa-1)\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1D}-\hat{\boldsymbol{\eta}}^D\right):\hat{\boldsymbol{I}}:\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1D}-\hat{\boldsymbol{\eta}}^D\right)\Big]+\\+\frac{K_1^0}{2}\left(\hat{\boldsymbol{E}}:\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1-\eta\right)^2.\end{aligned}\tag{7}$$

Здесь $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)D}=\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k-\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{E}}:\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k$ — девиаторная часть тензора деформаций k–го слоя, $\hat{\boldsymbol{\eta}}^D$ — девиаторная часть, а $\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{E}}\eta$ — шаровая часть тензора скрытых переменных состояния; тензоры $\hat{\boldsymbol{E}}$ и $\hat{\boldsymbol{I}}$ имеют следующую структуру:[5]

$$\hat{\boldsymbol{E}}=\mathbf{e}_\theta\otimes\mathbf{e}_\theta+\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_\varphi;\ \hat{\boldsymbol{I}}=\hat{\boldsymbol{I}}_0+\hat{\boldsymbol{I}}_0^{(2143)},\ \hat{\boldsymbol{I}}_0=\mathbf{e}_\theta\otimes\mathbf{e}_z\otimes\mathbf{e}_\theta\otimes\mathbf{e}_z+\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_z\otimes\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_z;$$

μ_1^∞, K_1^∞ — длительные упругие модули сдвига и всестороннего расширения, а μ_1^0, K_1^0 — модули сдвиговой и дилатационной вязкости материала среднего слоя, $\varkappa$ — коэффициент поперечного сдвига, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по толщине среднего слоя и вычисляемый из соотношения (ν_1 — коэффициент Пуассона материала среднего слоя):

$$\varkappa=\frac{3}{2}-\frac{3}{10\,(1-\nu_1)}-\frac{3\nu_1}{4\,(1-\nu_1)}.$$

Плотность распределения свободной энергии во внешних упругих мембранных слоях определяется выражением:

$$w^{(2,3)}=\mu_{2,3}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2,3)D}:\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2,3)D}+\frac{1}{2}K_{2,3}\left(\hat{\boldsymbol{E}}:\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2,3)}\right)^2,\tag{8}$$

[5] Тензор $\hat{\boldsymbol{E}}$ играет роль единичного тензора на нейтральной поверхности Ω, а тензор $\hat{\boldsymbol{I}}$ выделяет "поперечные" компоненты тензораов $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}$.

где $\mu_{2,3}$, $K_{2,3}$ — соответственно модуль сдвига и всестороннего расширения материалов внешних слоев.

В географической системе координат выражения (7), (8) принимают вид

$$\begin{aligned} w^1 = &\frac{1}{2}\mu_1^\infty\left[\left(\varepsilon^1_{\theta\theta}-\varepsilon^1_{\varphi\varphi}\right)^2+4\left(\varepsilon^1_{\theta\varphi}\right)^2\right]+\frac{1}{2}K_1^\infty\left[\varepsilon^1_{\theta\theta}+\varepsilon^1_{\varphi\varphi}\right]^2+2\mu_1^\infty\varkappa\left[\left(\varepsilon^1_{z\theta}\right)^2+\left(\varepsilon^1_{z\varphi}\right)^2\right]+\\ &+\frac{1}{2}\mu_1^0\left[\left(\varepsilon^1_{\theta\theta}-\varepsilon^1_{\varphi\varphi}-\eta_1\right)^2+4\left(\varepsilon^1_{\theta\varphi}-\eta_2\right)^2\right]+\frac{1}{2}K_1^0\left[\varepsilon^1_{\theta\theta}+\varepsilon^1_{\varphi\varphi}-\eta_3\right]^2+\\ &+2\mu_1^0\varkappa\left[\left(\varepsilon^1_{z\theta}-\eta_4\right)^2+\left(\varepsilon^1_{z\varphi}-\eta_5\right)^2\right],\\ w^{2,3} = &\frac{1}{2}\mu_{2,3}\left[\left(\varepsilon^{(2,3)}_{\theta\theta}-\varepsilon^{(2,3)}_{\varphi\varphi}\right)^2+4\left(\varepsilon^{(2,3)}_{\theta\varphi}\right)^2\right]+\frac{1}{2}K_{2,3}\left[\varepsilon^{(2,3)}_{\theta\theta}+\varepsilon^{(2,3)}_{\varphi\varphi}\right]^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\eta_1=\eta_1(\theta,\varphi),\ldots,\eta_5=\eta_5(\theta,\varphi)$ — скрытые переменные состояния, определенные на нейтральной поверхности Ω и связанные с компонентами тензора $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\eta_{\theta\theta}=\frac{1}{2(R+z)}(\eta_3+\eta_1), && \eta_{\theta\varphi}=\frac{1}{2(R+z)}\eta_2,\\ &\eta_{z\theta}=\frac{1}{2(R+z)}\eta_4, && \eta_{\varphi\varphi}=\frac{1}{2(R+z)}(\eta_3-\eta_1),\\ &\eta_{z\varphi}=\frac{1}{2(R+z)}\eta_5, && \eta_{zz}=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Диссипация $\mathcal{D}$ в линейном приближении может быть представлена квадратичной формой:

$$\mathcal{D}=\int\limits_{V_1} d\ \mathrm{dv};$$

$$\begin{aligned} d = &2\mu_1^0\tau_1\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}^D:\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}^D+K_1^0\tau_2\left(\hat{\boldsymbol{E}}:\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}\right)^2+2\mu_1^0(\tau_3\varkappa-\tau_1)\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}^D:\hat{\boldsymbol{I}}:\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}^D=\\ &=2\mu_1^0\tau_1\left(\dot\eta_1^2+\dot\eta_2^2\right)+K_1^0\tau_2\dot\eta_3^2+2\mu_1^0\tau_3\varkappa\left(\dot\eta_4^2+\dot\eta_5^2\right), \end{aligned} \tag{11}$$

где τ_1 — время релаксации при сдвиге в касательной плоскости, τ_2 — время релаксации при всестороннем растяжении, τ_3 — время релаксации при поперечном сдвиге.

Выражения для свободной энергии (9) с учетом соотношений (3) могут быть представлены в форме разложений по степеням z и h_-, h_+:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 = &\iiint\limits_{\mathcal{V}_1}\frac{E_1}{2\left(1-\nu_1^2\right)}\Big(e_1+\nu_1e_2+2z\left[e_3+\nu_1e_4\right]+z^2\left[e_5+nu_1e_6\right]+\frac{1}{2}(1-\nu_1)\varkappa e_7\Big)+\\ &+\mu_1^0\left(e_8+ze_9+\varkappa e_{12}\right)+K_1^0\left(e_{10}+ze_{11}\right)\sin\theta\,dzd\theta d\varphi,\\ \mathcal{W}_2 = &\frac{E_2}{2(1-\nu_2^2)}\iiint\limits_{\mathcal{V}_2}\Big(e_1+\nu_2e_2-2h^-{}_1\left[e_3+\nu_2e_4\right]+(h^-{}_1)^2\left[e_5+\nu_2e_6\right]\Big)\sin\theta\,dzd\theta d\varphi,\\ \mathcal{W}_3 = &\frac{E_3}{2\left(1-\nu_3^2\right)}\iiint\limits_{\mathcal{V}_3}\Big(e_1+\nu_3e_2+2h^+{}_1\left[e_3+\nu_3e_4\right]+\left(h_1^+\right)^2\left[e_5+\nu_3e_6\right]\Big)\sin\theta\,dzd\theta d\varphi, \end{aligned} \tag{12}$$

где использованы упругие постоянные

$$E_k = \frac{4\mu_k K_k}{\mu_k + K_k}, \quad \nu_k = \frac{K_k - \mu_k}{K_k + \mu_k} \quad (k = 1, 2, 3).$$

(использование модулей E_k, ν_k позволяет опоставить частный вариант получаемых уравнений для упругих оболочек с симметричной структурой слоев с уравнениями, полученными в работах [9, 10, 11]), а также обобщенные переменные $e_1 = e_1(\theta, \varphi), ..., e_{12} = e_{12}(\theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned}
&e_1 = e_{\theta\theta}^2 + e_{\varphi\varphi}^2 + \frac{1}{2}e_{\theta\varphi}^2, && e_2 = 2e_{\theta\theta}e_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}e_{\theta\varphi}^2,\\
&e_3 = e_{\theta\theta}\chi_{\theta\theta} + e_{\varphi\varphi}\chi_{\varphi\varphi} + \frac{1}{2}e_{\theta\varphi}\chi_{\theta\varphi}, && e_4 = e_{\theta\theta}\chi_{\varphi\varphi} + e_{\varphi\varphi}\chi_{\theta\theta} - \frac{1}{2}e_{\theta\varphi}\chi_{\theta\varphi},\\
&e_5 = \chi_{\theta\theta}^2 + \chi_{\varphi\varphi}^2 + \frac{1}{2}\chi_{\theta\varphi}^2, && e_6 = 2\chi_{\theta\theta}\chi_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}\chi_{\theta\varphi}^2,\\
&e_7 = e_{z\varphi}^2 + e_{z\theta}^2, && e_8 = \frac{1}{2}\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right) - \left(e_{\theta\theta} - e_{\varphi\varphi}\right)\eta_1 - e_{\theta\varphi}\eta_2,\\
&e_9 = -\left(\chi_{\theta\theta} - \chi_{\varphi\varphi}\right)\eta_1 - \chi_{\theta\varphi}\eta_2, && e_{10} = \frac{1}{2}\eta_3^2 - \left(e_{\theta\theta} + e_{\varphi\varphi}\right)\eta_3,\\
&e_{11} = -\left(\chi_{\theta\theta} + \chi_{\varphi\varphi}\right)\eta_3, && e_{12} = \frac{1}{2}\left(\eta_4^2 + \eta_5^2\right) - e_{z\theta}\eta_4 - e_{z\varphi}\eta_5.
\end{aligned} \tag{13}$$

Величины $e_1, \ldots, e_{12}$ не зависят от переменной z, что позволяет привести объемные интегралы к интегралам на срединной поверхности Ω. Интегрируем $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_3$ в пределах $\{-h_-, h_+\}$, $\{-h_- - h_2, -h_-\}$, $\{h_+, h_+ + h_3\}$ соответственно:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1 = &\iint\limits_{\Omega} \frac{E_1}{2\left(1-\nu_1^2\right)}\Biggl(h_1\left[e_1+\nu_1 e_2\right]+\left(h_+^2-h_-^2\right)\left[e_3+\nu_1 e_4\right]+\frac{h_+^3+h_-^3}{3}\left[e_5+\nu_1 e_6\right]+\\
&+h_1\frac{1-\nu_1}{2}\varkappa e_7\Biggr)+\mu_1^0\left(h_1 e_8+\frac{h_+^2-h_-^2}{2}e_9+\varkappa h_1 e_{12}\right)+K_1^0\left(h_1 e_{10}+\frac{h_+^2-h_-^2}{2}e_{11}\right)\sin\theta\, d\theta d\varphi,\\
\mathcal{W}_2 = &\frac{E_2}{2\left(1-\nu_2^2\right)}\iint\limits_{\Omega}\left(h_2\left[e_1+\nu_2 e_2\right] - 2h_-\left[e_3+\nu_2 e_4\right] + h_-^2\left[e_5 + nu_2 e_6\right]\right)\sin\theta\, d\theta d\varphi,\\
\mathcal{W}_3 = &\frac{E_3}{2\left(1-\nu_3^2\right)}\iint\limits_{\Omega}\left(h_3\left[e_1+\nu_3 e_2\right] + 2h_+\left[e_3+\nu_3 e_4\right] + h_+^2\left[e_5 + nu_3 e_6\right]\right)\sin\theta\, d\theta d\varphi.
\end{aligned} \tag{14}$$

Полная свободная энергия оболочки $\mathcal{W}$ определяется суммой:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{12} a_i e_i \sin\theta\, d\theta d\varphi. \tag{15}$$

Здесь a_i — константы, определяемые геометрическими и физическими характеристиками слоев оболочки; в соответствии с (14), (15) они имеют вид:

$$a_1 = \frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} + \frac{E_3 h_3}{1-\nu_3^2}, \qquad a_7 = \frac{E_1 h_1}{2(1-\nu_1)}\varkappa,$$

$$a_2 = \frac{E_1 h_1 \nu_1}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2 \nu_2}{1-\nu_2^2} + \frac{E_3 h_3 \nu_3}{1-\nu_3^2}, \qquad a_8 = 2\mu_1^0 h_1,$$

$$a_3 = \frac{\left(h_+^2 - h_-^2\right)E_1}{1-\nu_1^2} - \frac{2E_2 h_2 h_-}{1-\nu_2^2} + \frac{2E_3 h_3 h_+}{1-\nu_3^2}, \qquad a_9 = \left(h_+^2 - h_-^2\right)\mu_1^0,$$

$$a_4 = \frac{\left(h_+^2 - h_-^2\right)\nu_1 E_1}{1-\nu_1^2} - \frac{2E_2 h_2 \nu_2 h_-}{1-\nu_2^2} + \frac{2E_3 h_3 \nu_3 h_+}{1-\nu_3^2}, \qquad a_{10} = 2K_1^0 h_1,$$

$$a_5 = \frac{1}{3}\frac{\left(h_+^3 + h_-^3\right)E_1}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2 h_-^2}{1-\nu_2^2} + \frac{E_3 h_3 h_+^2}{1-\nu_3^2}, \qquad a_{11} = \left(h_+^2 - h_-^2\right)K_1^0,$$

$$a_6 = \frac{1}{3}\frac{\left(h_+^3 + h_-^3\right)E_1 \nu_1}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2 \nu_2 h_-^2}{1-\nu_2^2} + \frac{E_3 h_3 \nu_3 h_+^2}{1-\nu_3^2}, \qquad a_{12} = 2\mu_1^0 \varkappa h_1. \tag{16}$$

При выборе определенных положений нейтральной поверхности Ω один из коэффициентов a_3, a_4 обращается в ноль, что ведет к сокращению числа слагаемых в выражении (15) и упрощению структуры получаемых впоследствии дифференциальных уравнений движения. В дальнейшем будем полагать, что $a_3 = 0$. Для этого величины h_+, h_- следует определять из условий:

$$a_3 = \frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left(h_+^2 - h_-^2\right) - \frac{2E_2 h_2}{1-\nu_2^2}h_- + \frac{2E_3 h_3}{1-\nu_3^2}h_+ = 0, \quad h_+ - h_- = h_1,$$

т.е. из условий

$$h_+ = \frac{h_1}{2}\left[\frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} + 2\frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2}\right]\left[\frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} + \frac{E_3 h_3}{1-\nu_3^2}\right]^{-1}, \quad h_- = h_1 - h_+. \tag{17}$$

Если положение нейтральной поверхности выбрано в соответствии с (17), то коэффициент a_4 может быть вычислен по формуле:

$$a_4 = (\nu_1 - \nu_3)\frac{2E_3 h_3}{1-\nu_3^2}h_+ - (\nu_1 - \nu_2)\frac{2E_2 h_2}{1-\nu_2^2}h_-.$$

Заметим, что в случае оболочки симметричного строения $h_+ = h_- = \frac{h_1}{2}$, и соотношения (16) принимают вид, совпадающий с известными результатами [9]:

$$a_1 = \frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} + 2\frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2}, \qquad a_2 = \frac{E_1 h_1 \nu_1}{1-\nu_1^2} + 2\frac{E_2 h_2 \nu_2}{1-\nu_2^2}, \qquad a_3 = a_4 = 0,$$

$$a_5 = \frac{1}{12}\frac{E_1 h_1^3}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2 h_1^2}{1-\nu_2^2}, \qquad a_6 = \frac{1}{12}\frac{E_1 h_1^3 \nu_1}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2 h_1^2 \nu_2}{1-\nu_2^2}, \qquad a_7 = \frac{E_1 h_1}{1+\nu_1^2}\varkappa.$$

Располагая выражением (15) и соотношениями между компонентами тензора деформации и перемещениями (4), (13), определим свободную энергию деформированной оболочки как квадратичную функцию перемещений срединной поверхности и углов поворота нормалей к ней (u, v, w, ψ, γ), а также скрытых переменных состояния $(\eta_1, \ldots, \eta_5)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W} = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} \Bigg\{ & a_1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)^2 + u^2\operatorname{ctg}^2\theta + 2\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}u\right] + \\
& +2(a_1+a_2)\left[w^2 + \frac{\partial u}{\partial\theta}w + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}w + \operatorname{ctg}\theta\, uw\right] + \\
& +2a_2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}u\right] + \\
& +\frac{a_1-a_2}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)^2 + v^2\operatorname{ctg}^2\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2 - 2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}v - 2\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}v + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right] + \\
& +a_4\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}w + \frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\right) + \operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\psi + \psi w\; + \right.\right. \\
& \qquad \left.\left. +u\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial\theta}\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}v\right) + w\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} - \frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{2}v\gamma - \frac{1}{2\sin^2\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right] + \\
& +a_5\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\right)^2 + \operatorname{ctg}^2\theta\,\psi^2 + 2\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\psi\right] + \\
& +2a_6\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\,\psi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right] + \\
& +\frac{a_5-a_6}{2}\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\right)^2 + \operatorname{ctg}^2\theta\,\gamma^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2 - 2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\gamma - 2\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\gamma + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right] + \\
& +a_7\left[\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2 + R^2\left(\psi^2+\gamma^2\right) + 2R\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\psi - \psi u - \gamma v\right) + \right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}(R\gamma - v) + u^2 + v^2 - 2R\frac{\partial w}{\partial\theta}u\right] - \\
& -a_8\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi} - \operatorname{ctg}\theta\, u\right)\eta_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial\theta} - v\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\eta_2\right] - \\
& -a_9\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\,\gamma + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\eta_2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} - \operatorname{ctg}\theta\,\psi\right)\eta_1\right] - \\
& -a_{10}\left[\frac{\partial u}{\partial\theta} + 2w + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\theta\, u\right]\eta_3 - \\
& -a_{11}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\theta\,\psi\right]\eta_3 - \\
& -a_{12}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial\theta} + R\psi - u\right)\eta_4 + \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + R\gamma - v\right)\eta_5\right] + \\
& + \frac{a_8}{2}\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right) + \frac{a_{10}}{2}\eta_3^2 + \frac{a_{12}}{2}\left(\eta_4^2+\eta_5^2\right)\Bigg\}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Для вычисления кинетической энергии $\mathcal{K}$ также воспользуемся аппроксимирующими соотношениями (1):

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} \Big\{\rho_1 \int\limits_{-h_-}^{h_+} (\mathbf{u} + z\mathbf{y})^2 (R+z)^2 dz \; + \rho_2 \int\limits_{-h_- - h_2}^{h_+} (\mathbf{u} - h_-\mathbf{y})^2 (R+z)^2 dz +$$
$$+ \rho_3 \int\limits_{-h_+}^{h_+ + h_3} (\mathbf{u} + h_+\mathbf{y})^2 (R+z)^2 dz \Big\} \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Интегрируя полученное выражение по z, преобразуем объемный интеграл в поверхностный:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\iint\limits_{\omega} \Big\{ b_1 \mathbf{u}^2 \; + \; 2\, b_2 \; \mathbf{u}\cdot\mathbf{y} \; + \; b_3\, \mathbf{y}^2 \Big\} \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{19}$$

Здесь b_1, b_2, b_3 — инерционные константы, определяемые геометрическими размерами и объемной массой материала слоев оболочки:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \rho_1 \Big[R^2 h_1 + R\left(h_+^2 - h_-^2\right) + \frac{1}{3}\left(h_+^3 + h_-^3\right)\Big] + b_- + b_+,\\
b_2 &= \rho_1 \Big[\frac{1}{2} R^2 \left(h_+^2 - h_-^2\right) + \frac{2}{3} R \left(h_+^3 + h_-^3\right) + \frac{1}{4} R \left(h_+^4 + h_-^4\right)\Big] - h_- b_- + h_+ b_+,\\
b_3 &= \rho_1 \Big[\frac{1}{3} R^2 \left(h_+^3 + h_-^3\right) + \frac{1}{2} R \left(h_+^4 - h_-^4\right) + \frac{1}{5} (h_+^5 h_-^5)\Big] + h_-^2 b_- + h_+^2 b_+,\\
b_- &= \rho_2 h_2 \Big[R^2 - R\,(2\,h_- + h_2) + {h_-}^2 + \; h_- h_2 + \frac{1}{3}\, h_2^2 \Big],\\
b_+ &= \rho_3 h_3 \Big[R^2 + R\;(2\,h_+ + h_3) + {h_+}^2 + h_+ h_3 + \frac{1}{3}\, h_3^2 \Big].
\end{aligned} \tag{20}$$

Мощность объемных сил $\mathcal{F}$ определяется выражением[6]:

$$\mathcal{F} = \sum_{k=1}^{3} \iiint\limits_{V_k} \rho_k\, \mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{u}}^k dv. \tag{21}$$

Подстановка равенств (1) в выражение (21) и последующее интегрирование по переменной z приводит к поверхностному интегралу:

$$\mathcal{F} = \iint\limits_{\Omega} \Big\{ b_1 \mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{u}} + b_2 \mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{y}} \Big\} \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{22}$$

Мощность внешних сил $\mathcal{P}_{\text{ext}}$ может быть вычислена как сумма мощностей, развиваемых распределенными силами $\mathbf{f}_+$, $\mathbf{f}_-$ на соответствующих лицевых

---

[6] В случае, когда условия закрепления оболочки обеспечивают неподвижность конструкции в целом, вектор **g** равен вектору ускорения свободного падения. Если, помимо деформирования, оболочка совершает движение как твердое тело, **g** равен векторной сумме ускорения свободного падения и ускорения переносного движения конструкции.

(сферических, эквидистантных Ω) поверхностях ω_+, ω_- и реактивными силами $\mathbf{f}^k$, приложенными к торцевым (линейчатым, ортогональным к Ω) поверхностям π_k, а также мощности объемных сил $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{P}_{\text{ex}} = \mathcal{F} + \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} = \iint\limits_{\omega_+} \mathbf{f}_+ \cdot \dot{\mathbf{u}}^3 d\omega_+ + \iint\limits_{\omega_-} \mathbf{f}_- \cdot \dot{\mathbf{u}}^2 d\omega_- + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \iint\limits_{\Pi_k} \mathbf{f}^k \cdot \dot{\mathbf{u}}^k d\Pi_k. \tag{23}$$

Подставляя в (23) соотношения (1) и приводя интегралы на поверхностях ω_+, ω_- к интегралам на Ω, получим:

$$\mathcal{P} = \iint\limits_{\Omega} \Big\{ (\dot{\mathbf{u}}+h_+\dot{\mathbf{y}})\cdot\mathbf{f}_+ (R+h_+ +h_3)^2 + (\dot{\mathbf{u}}-h_-\dot{\mathbf{y}})\cdot\mathbf{f}_- (R-h_- -h_2)^2 \Big\} \sin\theta \, d\theta d\varphi +$$
$$+ \oint\limits_{\Gamma} \left\{ \int\limits_{-h_-}^{h_+} (\dot{\mathbf{u}} + z\dot{\mathbf{y}})\cdot\mathbf{f}^1 \frac{R+z}{R} dz + \int\limits_{-h_- -h_2}^{h_-} (\dot{\mathbf{u}}-h_-\dot{\mathbf{y}})\cdot\mathbf{f}^2 \frac{R+z}{R} dz + \int\limits_{-h_+}^{h_+ +h_3} (\dot{\mathbf{u}}+h_+\dot{\mathbf{y}})\cdot\mathbf{f}^3 \frac{R+z}{R} dz \right\} ds. \tag{24}$$

Здесь Γ — пространственная кривая, образуемая пересечением поверхностей Ω и π_1; ds — элемент Γ . Интегрируем по z выражение (25) и преобразуем его к виду:

$$\mathcal{P} = \iint\limits_{\Omega} \Big\{ \mathbf{F}_\Omega \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}_\Omega \cdot \dot{\mathbf{y}} \Big\} R^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi + \frac{1}{2} \oint\limits_{\Gamma} \Big\{ \mathbf{F}_\Gamma \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}_\Gamma \cdot \dot{\mathbf{y}} \Big\} ds, \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_\Omega &= \frac{(R+h_+ +h_3)^2}{R^2}\mathbf{f}_+ + \frac{(R-h_- -h_2)^2}{R^2}\mathbf{f}_-, \\
\mathbf{F}_\Gamma &= \int\limits_{-h_-}^{h_+} \mathbf{f}^1 \frac{R+z}{R} dz + \int\limits_{-h_- -h_2}^{-h_-} \mathbf{f}^2 \frac{R+z}{R} dz + \int\limits_{h_+}^{h_+ +h_3} \mathbf{f}^3 \frac{R+z}{R} dz, \\
\mathbf{M}_\Omega &= \frac{(R+h_+ +h_3)^2}{R^2} h_+ \mathbf{f}_+ - \frac{(R-h_- -h_2)^2}{R^2} h_- \mathbf{f}_-, \\
\mathbf{M}_\Gamma &= \int\limits_{-h_-}^{h_+} \mathbf{f}^1 \frac{R+z}{R} z \, dz - \int\limits_{-h_- -h_2}^{-h_-} \mathbf{f}^2 \frac{R+z}{R} h_- \, dz + \int\limits_{h_+}^{h_+ +h_1} \mathbf{f}^3 \frac{R+z}{R} h_+ \, dz.
\end{aligned} \tag{26}$$

В настоящей работе рассматривается случай упругого закрепления слоев оболочки на контуре Γ. Возникающие при таком закреплении реактивные силы $\mathbf{f}^k$ $(k = 1, 2, 3)$ могут быть заданы в наиболее общей форме (в соответствии с кинематической гипотезой деформирования сечения (4)) следующими линейными соотношениями:

$$\mathbf{f}^1(z) = \frac{R}{R+z}\boldsymbol{\Theta}_1(z)(\mathbf{u} + z\mathbf{y}), \quad \mathbf{f}^2 = \frac{R}{R-h_-}\boldsymbol{\Theta}_2(\mathbf{u} - h_-\mathbf{y}), \quad \mathbf{f}^3 = \frac{R}{R+h_+}\boldsymbol{\Theta}_3(\mathbf{u} + h_+\mathbf{y}), \tag{27}$$

где $\mathbf{\Theta}_{1,2,3}$ — диагональные матрицы жесткостных характеристик упругой заделки слоев. Подставим в (26) выражения (27) и вычислим соответствующие интегралы:

$$\mathbf{F}_\Gamma = \mathbf{\Theta u} + \hat{\mathbf{\Theta}}\mathbf{y}, \ \ \mathbf{M}_\Gamma = \mathbf{\Xi y} + \hat{\mathbf{\Xi}}\mathbf{u}; \tag{28}$$

$$\mathbf{\Theta} = \int_{-h_-}^{h_+} \Theta_1(z)dz + \Theta_2 + \Theta_3, \qquad \hat{\mathbf{\Theta}} = \int_{-h_-}^{h_+} z\Theta_1 dz - \Theta_2 h_- + \Theta_3 h_+,$$

$$\mathbf{\Xi} = \int_{-h_-}^{h_+} z^2\Theta_1(z)dz - \Theta_2 {h_-}^2 + \Theta_3 h_+^2. \tag{29}$$

4. Вычисляя производные $\dot{\mathcal{W}}$, $\dot{\mathcal{K}}$ в выражении (6) и преобразуя соответствующие интегралы по формуле Грина, приходим к следующему выражению для производства энтропии:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{X},\mathbf{J}) = \oint_\Gamma \left\{ \dot{u}\mathcal{B}_u + \dot{v}\mathcal{B}_v + \dot{w}\mathcal{B}_w + \dot{\psi}\mathcal{B}_\psi + \dot{\gamma}\mathcal{B}_\gamma \right\} d\Gamma +$$
$$+ \iint_\Omega \left\{ \dot{u}\mathcal{L}_u + \dot{v}\mathcal{L}_v + \dot{w}\mathcal{L}_w + \dot{\psi}\mathcal{L}_\psi + \dot{\gamma}\mathcal{L}_\gamma + \sum_{i=1}^{5} \dot{\eta}_i\mathcal{L}_i \right\} \sin\theta\, d\theta d\varphi, \tag{30}$$

где $\dot{u}, \ldots, \dot{\eta}_5$ — скорости независимых кинематических и скрытых переменных, имеющие смысл потоков $\mathbf{J}$, а через $\mathcal{L}_{\ldots}$, $\mathcal{B}_{\ldots}$ обозначены дифференциальные выражения, имеющие смысл обобщенных сил $\mathbf{X}$:

$$\mathcal{L}_u = a_1\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}u\right] + (a_1 - a_2)\,u + (a_1 + a_2)\,\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{a_7}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial\theta} + R\psi - u\right] +$$
$$+ \frac{a_1 - a_2}{2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \frac{3a_1 - a_2}{2}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{a_1 + a_2}{2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi\partial\theta} -$$
$$- \frac{a_4}{2}\left[\psi - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\gamma}{\partial\theta\partial\varphi} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right)\right] -$$
$$- a_8\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial\theta} + 2\eta_1\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\eta_2}{\partial\varphi}\right) - a_{10}\frac{\partial\eta_3}{\partial\theta} - a_{12}\eta_4 + b_1\left[g_\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] - b_2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + R^2F_\theta,$$

$$\mathcal{L}_v = \frac{a_1 - a_2}{2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}v\right] + a_1\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \frac{3a_1 - a_2}{2}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi} +$$
$$+ \frac{a_1 + a_2}{2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\varphi} + (a_1 + a_2)\,\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \frac{a_7}{2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + R\gamma - v\right] -$$
$$- \frac{a_4}{4}\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\gamma - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\varphi} - 2\gamma\right] -$$
$$- a_8\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial\theta} + 2\eta_2\operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\eta_1}{\partial\varphi}\right) - a_{10}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\eta_3}{\partial\varphi} - a_{12}\eta_5 + b_1\left[g_\varphi - \frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}\right] - b_2\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} + R^2F_\varphi,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_w = {}& \frac{a_7}{2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+R\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\partial u}{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}+R\psi-u\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-R\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\right)\right]- \\ &-(a_1+a_2)\left[\frac{\partial u}{\partial\theta}+2w+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\operatorname{ctg}\theta u\right]-\frac{a_4}{2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}+\operatorname{ctg}\theta\psi+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]- \\ &-a_{12}\left(\frac{\partial\eta_4}{\partial\theta}+\eta_4\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\eta_5}{\partial\varphi}\right)+2a_{10}\eta_3+b_1\left[g_z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]+R^2F_z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\psi = {}& a_5\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\psi\right]+(a_5-a_6)\,\psi-\frac{a_7R}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial\theta}+R\psi-u\right]+ \\ &+\frac{a_5-a_6}{2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}-\frac{3a_5-a_6}{2}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}- \\ &-\frac{a_4}{2}\left[u-\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)\right]+\frac{a_5+a_6}{2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\gamma}{\partial\varphi\partial\theta}+ \\ &-a_9\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial\theta}+\eta_1\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\eta_2}{\partial\varphi}\right)-a_{11}\frac{\partial\eta_3}{\partial\theta}+a_{12}R\eta_4+b_2\left[g_\theta-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]-b_3\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+R^2M_\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\gamma = {}& \frac{a_5-a_6}{2}\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\gamma\right]+a_5\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\gamma}{\partial\varphi^2}+\frac{3a_5-a_6}{2}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+ \\ &+\frac{a_5+a_6}{2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{a_7R}{2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+R\gamma-v\right]- \\ &-\frac{a_4}{4}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{1}{\sin^2\theta}v-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\varphi}-2v-\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right]+ \\ &-a_9\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial\theta}+2\eta_2\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\eta_1}{\partial\varphi}\right)-a_{11}\frac{1}{\sin}\frac{\partial\eta_3}{\partial\varphi}+a_{12}R\eta_5+b_2\left[g_\varphi-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]-b_3\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}+R^2M_\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= -a_8\eta_1-a_9\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}-\operatorname{ctg}\theta\psi\right)-a_8\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-u\operatorname{ctg}\theta\right), \\ \mathcal{L}_2 &= -a_8\eta_2-a_9\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta\gamma+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)-a_8\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}-v\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right), \\ \mathcal{L}_3 &= a_{10}\left(\eta_3+\frac{\partial u}{\partial\theta}+2w+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}+u\operatorname{ctg}\theta\right), \\ \mathcal{L}_4 &= a_{12}\left(-\eta_4-\frac{\partial w}{\partial\theta}+R\psi+u\right),\quad \mathcal{L}_5 = a_{12}\left(-\eta_5-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-R\gamma+v\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_u = {}& \left[\frac{a_1-a_2}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial\theta}-v\operatorname{ctg}\theta\right)-\frac{a_4}{4}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}-\gamma\operatorname{ctg}\theta\right)-a_8\frac{1}{\sin\theta}\eta_2\right]\sin\alpha- \\ &-\left[a_2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\operatorname{ctg}\theta\right)+a_1\frac{\partial u}{\partial\theta}+a_1w+\frac{a_4}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}+\psi\operatorname{ctg}\theta\right)-a_8\eta_1-a_{10}\eta_3\right]\cos\alpha+ \\ &+\Theta_{11}u+\hat{\Theta}_{11}\psi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_v = {}& \left[a_1\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\operatorname{ctg}\theta\right)+a_2\frac{\partial u}{\partial\theta}\,(a_1+a_2)\,w+\frac{a_4}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-a_{10}\frac{1}{\sin\theta}\eta_3-a_8\frac{1}{\sin\theta}\eta_1\right]\sin\alpha- \\ &-\left[\frac{a_1-a_2}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial\theta}-v\operatorname{ctg}\theta\right)-\frac{a_4}{4}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}-\gamma\operatorname{ctg}\theta\right)-a_8\eta_2\right]\cos\alpha+ \\ &+\Theta_{22}v+\hat{\Theta}_{22}\gamma,\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_w = \left[\frac{a_7}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+R\gamma-v\right)-a_{12}\frac{1}{\sin\theta}\eta_5\right]\sin\alpha-\left[\frac{a_7}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}+R\psi-u\right)-a_{12}\eta_4\right]\cos\alpha+\Theta_{33}w,$$

$$\mathcal{B}_\psi = \left[\frac{a_5-a_6}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}-\gamma\operatorname{ctg}\theta\right)-\frac{a_4}{4}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial\theta}-v\operatorname{ctg}\theta\right)-a_9\frac{1}{\sin\theta}\eta_2\right]\sin\alpha-$$
$$-\left[a_6\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}+\psi\operatorname{ctg}\theta\right)+a_5\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\frac{a_4}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\operatorname{ctg}\theta u+w\right)-a_9\eta_1-a_{11}\eta_3\right]\cos\alpha+$$
$$+\Xi_{11}\psi+\hat{\Xi}_{11}u,$$

$$\mathcal{B}_\gamma = \left[a_5\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}+\psi\operatorname{ctg}\theta\right)+a_6\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{a_4}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+w\right)-a_{11}\frac{1}{\sin\theta}\eta_3-a_9\frac{1}{\sin\theta}\eta_1\right]\sin\alpha-$$
$$-\left[a_3\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}-\gamma\operatorname{ctg}\theta\right)-\frac{a_4}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial\theta}-v\operatorname{ctg}\theta\right)-a_9\eta_2\right]\cos\alpha+$$
$$+\Xi_{22}\gamma+\hat{\Xi}_{22}v.$$

В силу независимости обобщенных скоростей $\dot{u},\ldots,\dot{\eta}_5$ вариационный принцип Онзагера теперь может быть сформулирован следующим образом

$$\oint\limits_\Gamma\left\{\mathcal{B}_u\delta\dot{u}+\mathcal{B}_v\delta\dot{v}+\mathcal{B}_w\delta\dot{w}+\mathcal{B}_\psi\delta\dot{\psi}+\mathcal{B}_\gamma\delta\dot{\varphi}\right\}d\Gamma+$$
$$+\iint\limits_\Omega\left\{\mathcal{L}_u\delta\dot{u}+\mathcal{L}_v\delta\dot{v}+\mathcal{L}_w\delta\dot{w}+\mathcal{L}_\psi\delta\dot{\psi}+\mathcal{L}_\gamma\delta\dot{\gamma}+\sum_{i=1}^{5}\left(\mathcal{L}_i-\frac{\partial d}{\partial\dot{\eta}_i}\right)\delta\dot{\eta}_i\right\}\sin\theta d\theta d\varphi=0,$$

который выполняется, если на нейтральной поверхности Ω имеют место равенства:

$$\mathcal{L}_u=0,\ \mathcal{L}_v=0,\ \mathcal{L}_w=0,\ \mathcal{L}_\psi=0,\ \mathcal{L}_\gamma=0, \tag{31}$$

$$\mathcal{L}_1=\frac{\partial d}{\partial\dot{\eta}_1},\ldots,\mathcal{L}_5=\frac{\partial d}{\partial\dot{\eta}_5}, \tag{32}$$

а на ее границе справедливы соотношения

$$\mathcal{B}_u=0,\ \mathcal{B}_v=0,\ \mathcal{B}_w=0,\ \mathcal{B}_\psi=0,\ \mathcal{B}_\gamma=0. \tag{33}$$

Уравнения (31) являются дифференциальными уравнениями движения оболочки, (32) — уравнения эволюции скрытых переменных состояния, а (33) — краевыми условиями, определяющими закрепление конструкции на опорном контуре; все эти соотношения вместе с соответствующими начальными условиями представляют математическую формулировку начально–краевой задачи о нестационарных колебаниях трехслойной вязкоупругой сферической оболочки несимметричной структуры.

5. Приведем выражения (31) и (32) к безразмерной форме. С этой целью введем безразмерные параметры: $E_*, E^*, h_*, h^*, \rho_*, \rho^*, R^*$:

$$E_*=\frac{E_2h_2}{E_1h_1},\ E^*=\frac{E_3h_3}{E_1h_1},\ \rho_*=\frac{\rho_2h_2}{\rho_1h_1},\ \rho^*=\frac{\rho_3h_3}{\rho_1h_1},\ R^*=\frac{R}{h_1};$$

безразмерные перемещения $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, $\tilde{v}$:

$$\tilde{u} = \frac{u}{R},\ \tilde{w} = \frac{w}{R},\ \tilde{v} = \frac{v}{R};$$

безразмерные усилия $\tilde{F}_\theta$, $\tilde{F}_\varphi$, $\tilde{F}_z, \tilde{M}_\theta$, $\tilde{M}_\varphi$:

$$\tilde{F}_\theta = \frac{F_\theta}{R}\beta,\ \tilde{F}_\varphi = \frac{F_\varphi}{R}\beta,\ \tilde{F}_z = \frac{F_z}{R}\beta,\ \tilde{M}_\theta = M_\theta\beta,\ \tilde{F}_\varphi = M_\varphi\beta,\ \beta = \frac{1-\nu_1^2}{E_1 h_1};$$

и безразмерное время $\tilde{t}$:

$$\tilde{t} = t[R\sqrt{h_1\rho_1\beta}]^{-1}.$$

В новых переменных дифференциальные уравнения движения (31), краевые условия (32) и соответствующие начальные данные $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ определяют задачу Коши с операторными коэффициентами:

$$\mathcal{A}_1\mathbf{x} + \mathcal{A}_2\dot{\mathbf{x}} + \mathcal{A}_3\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}\Big|_{t=0} = \mathbf{x}_0,\ \dot{\mathbf{x}}\Big|_{t=0} = \mathbf{x}_1, \tag{34}$$

где $\mathbf{x} = (u, v, w, \psi, \gamma, \eta_1, \dots, \eta_5)$ — искомая вектор-функция (перемещения и скрытые переменные), $\mathbf{y} = \left(-\tilde{F}_\theta, -\tilde{F}_\varphi, -\tilde{F}_z, -\tilde{M}_\theta, -\tilde{M}_\gamma, 0, \dots, 0\right)$ — заданная вектор–функция.

Операторные коэффициенты в (34) могут быть представлены в следующей матричной форме:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{E} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} -\mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Здесь $\mathcal{E}$ — единичный оператор, A_{11} — оператор, определяющий упругое деформирование оболочки

$$\mathcal{A}_{11} = \begin{pmatrix} A\Delta_1\Delta_3+\frac{C}{2}\Delta_2^2-K+C & \left(A+\frac{C}{2}\right)(\Delta_2\Delta_1-\Delta_1\Delta_2)+\frac{B}{2}\Delta_2\Delta_1 & (B+K)\Delta_1 & K-H-\frac{H}{2}\Delta_2^2 & \frac{H}{2}(2\Delta_2\Delta_1-\Delta_1\Delta_2) \\ \left(A+\frac{C}{2}\right)(\Delta_2\Delta_1-\Delta_1\Delta_2)+\frac{B}{2}\Delta_2\Delta_1 & \frac{C}{2}\Delta_1\Delta_3+A\Delta_2^2-K & (B+K)\Delta_2 & \frac{H}{2}\Delta_2\Delta_1 & K+H-\frac{C}{2}-\frac{H}{2}\Delta_1\Delta_3 \\ -(K+B)\Delta_3 & -(B+K)\Delta_2 & K\left(\Delta_3\Delta_1+\Delta_2^2\right)-2B & (K-H)\Delta_3 & (K-H)\Delta_2 \\ K-H-\frac{H}{2}\Delta_2^2 & \frac{H}{2}(2\Delta_2\Delta_1-\Delta_1\Delta_2) & (H-K)\Delta_1 & D\Delta_1\Delta_3+F-K+\frac{F}{2}\Delta_2^2 & -\left(D+\frac{F}{2}\right)(\Delta_2\Delta_1-\Delta_1\Delta_2)+\frac{G}{2}\Delta_2\Delta_1 \\ \frac{H}{2}(\Delta_1-\Delta_3\Delta_2) & \frac{H}{2}\Delta_1\Delta_3-(H+K) & (K-H)\Delta_2 & \left(D+\frac{F}{2}\right)(\Delta_2\Delta_1-\Delta_1\Delta_2)+\frac{G}{2}\Delta_2\Delta_1 & \frac{F}{2}\Delta_1\Delta_3+D\Delta_2^2+K \end{pmatrix},$$

порождаемый скалярными операторами

$$\Delta_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \Delta_3 = \frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta;$$

A_{12}, A_{21} — операторы, действующие на скрытые переменные $\eta_1, \dots, \eta_5$

$$\mathcal{A}_{12} = \begin{pmatrix} L(\Delta_1+\Delta_3) & L\Delta_2 & P\Delta_1 & S & 0 \\ -L\Delta_2 & L(\Delta_1+\Delta_3) & P\Delta_2 & 0 & S \\ 0 & 0 & -2P & S\Delta_3 & S\Delta_2 \\ M(\Delta_1+\Delta_3) & M\Delta_2 & Q\Delta_1 & -S & 0 \\ -M\Delta_2 & M(\Delta_1+\Delta_3) & Q\Delta_2 & 0 & -S \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{21} = \begin{pmatrix} L(\Delta_3-2\Delta_1) & L\Delta_2 & 0 & M(\Delta_3-2\Delta_1) & M\Delta_2 \\ L(\Delta_3-2\Delta_1) & -L\Delta_2 & 0 & M(\Delta_3-2\Delta_1) & -M\Delta_2 \\ -P\Delta_3 & -P\Delta_2 & -2P & 0 & 0 \\ S & 0 & -S\Delta_2 & -S\Delta_1 & 0 \\ 0 & -S & -S\Delta_2 & 0 & -S \end{pmatrix};$$

$\mathcal{R}$, $\mathcal{I}$ — матрицы времен релаксации материала среднего слоя и инерционных характеристик сечений пакета слоев:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Общая область определения операторов $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ задается операторами краевых условий $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \sin\alpha\mathcal{B}_1 - \cos\alpha\mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3,$$

где α — угол, образуемый касательной к границе и прямой параллельной оси OX, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ — следующие операторы:

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{C}{2}\Delta_2 & \frac{C}{2}(2\Delta_1-\Delta_3) & 0 & -\frac{H}{2}\Delta_2 & -\frac{H}{2}(2\Delta_1-\Delta_3) \\ A(\Delta_3-\Delta_1)+(A-C)\Delta_1 & A\Delta_2 & B & H\Delta_1 & 0 \\ 0 & -K & K\Delta_2 & 0 & K \\ -\frac{H}{2}\Delta_2 & -\frac{H}{2}(2\Delta_1-\Delta_3) & 0 & \frac{F}{2}\Delta_2 & \frac{F}{2}(2\Delta_1-\Delta_3) \\ H\Delta_1 & 0 & H & D(\Delta_3-\Delta_1)+(D-F)\Delta_1 & D\Delta_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} -(A-C)(\Delta_3-\Delta_1)+A\Delta_1 & -(A-C)\Delta_2 & -2B & -H(\Delta_3-\Delta_1) & -H\Delta_2 \\ -\frac{C}{2}\Delta_2 & -\frac{C}{2}(2\Delta_1-\Delta_3) & 0 & \frac{H}{2}\Delta_2 & \frac{H}{2}(2\Delta_1-\Delta_3) \\ K & 0 & -K\Delta_1 & -K & 0 \\ H(\Delta_3-\Delta_1) & -H\Delta_2 & -H & -(D-F)(\Delta_3-\Delta_1)-D\Delta_1 & -(D-F)\Delta_2 \\ \frac{H}{2}\Delta_2 & \frac{H}{2}(2\Delta_1-\Delta_3) & 0 & -\frac{F}{2}\Delta_2 & -\frac{F}{2}(2\Delta_1-\Delta_3) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_3 = \begin{pmatrix} \Theta_{11}^* & 0 & 0 & \hat{\Theta}_{11}^* & 0 \\ 0 & \Theta_{22}^* & 0 & 0 & \hat{\Theta}_{22}^* \\ 0 & 0 & \Theta_{33}^* & 0 & 0 \\ \hat{\Xi}_{11}^* & 0 & 0 & \Xi_{11}^* & 0 \\ 0 & \Xi_{22}^* & 0 & 0 & \hat{\Xi}_{22}^* \end{pmatrix}.$$

В операторной записи использованы коэффициенты, зависящие от безразмерных параметров E_*, E^*, h_*, h^*, ρ_*, ρ^*, R^* и коэффициентов Пуассона материалов слоев ν_1, ν_2, ν_3:

$$A = 1 + E_* h_* \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2} + E^* h^* \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_3^2}, \quad B = (1+\nu_1)\left[1+E_* \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2} + E^* \frac{1-\nu_1}{1-\nu_3}\right],$$

$$C = (1-\nu_1)\left[1 + E_* \frac{1+\nu_1}{1+\nu_2} + E^* \frac{1+\nu_1}{1+\nu_3}\right],$$

$$D = \frac{1}{4R^{*2}}\left[\frac{1}{3} + \left(1-\hat{h}\right)^2 + E_* h_* \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\left(2-\hat{h}\right) + E^* h^* \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_3^2}\hat{h}\right],$$

$$F = \frac{1-\nu_1}{4R^{*2}}\left[\frac{1}{3} + \left(1-\hat{h}\right)^2 + E_* \frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\left(2-\hat{h}\right) + E^* \frac{1+\nu_1}{1+\nu_3}\hat{h}\right],$$

$$G = \frac{1+\nu_1}{4R^{*2}}\left[\frac{1}{3} + \left(1-\hat{h}\right)^2 + E_* \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}\left(2-\hat{h}\right) + E^* \frac{1-\nu_1}{1-\nu_3}\hat{h}\right],$$

$$H = \frac{\hat{h}}{R^*}\left[(\nu_1-\nu_3)\, E^* \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_3^2} - (\nu_1-\nu_2)\, E_* \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\right],$$

$$K = \frac{k^2}{2}(1-\nu_1), \quad \hat{h} = \frac{1}{A}\left[1+2E_* \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\right],$$

$$I_1 = 1 + \frac{\hat{h}-1}{R^*} + \frac{\left(\hat{h}-1\right)^2 + \frac{1}{3}}{4R^{*2}} + \rho_*\left(1-\frac{2-\hat{h}}{2R^*}\right)^2 + \rho^*\left(1+\frac{\hat{h}}{2R^*}\right)^2,$$

$$I_2 = \frac{1}{2R^*}\left[\hat{h}-1+\frac{\left(\hat{h}-1\right)^2+\frac{1}{3}}{R^*} + \frac{\left(\hat{h}-1\right)^3 + \hat{h} - 1}{4R^{*2}} - \rho_*\left(1-\frac{2-\hat{h}}{2R^*}\right)^2\left(2-\hat{h}\right) + \rho^*\left(1+\frac{\hat{h}}{2R^*}\right)^2\hat{h}\right],$$

$$I_3 = \frac{1}{4R^{*2}}\left[\left(\hat{h}-1\right)^2 + \frac{1}{3} + \frac{\left(\hat{h}-1\right)^3+\hat{h}-1}{R^*} + \frac{\left(\hat{h}-1\right)^4+\left(\hat{h}-1\right)^2+\frac{1}{10}}{2R^{*2}} + \right.$$
$$\left. \rho_*\left(1-\frac{2-\hat{h}}{2R^*}\right)^2\left(2-\hat{h}\right) + \rho^*\left(1+\frac{\hat{h}}{2R^*}\right)^2\hat{h}\right].$$

Таким образом, динамическая реакция трехслойной вязкоупругой сферической оболочки при нестационарных воздействиях определяется решениями задачи Коши с операторными коэффициентами (34), которые могут быть представлены в форме спектральных разложений по полной системе собственных и присоединенных функций пучка дифференциальных операторов, порождаемых задачей (34) [15].

Литература

[1] Релей. Теория звука Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955.

[2] Lamb H. On the vibration of an elastic sphere // Proceedings of London Mathematical Society. 1882. V. 13. P. 189–212.

[3] Ляв А. Математическая теория упругости. М.,Л.: ОНТИ, 1935. 647 с.

[4] Reissner H. Graphical statics. Providence. R. I. 1942. 450 p.

[5] Federhofer K. Zur Berechnung der Eigenscwingungen der Kugelshale Sitzungsber // Akad. der Wissenschaften Wien, 1937. B. 146. No. 2A. P. 57–69, 505–514.

[6] Naghdi P.M., Kalnis A. Axisymmetric vibration of shallow spherical shell // J. Acoust. Soc. America. 1960. V. 32. No. 3. P. 342–347.

[7] Kalnis A. On vibration of shallow spherical shells // J. Acoust. Soc. America. 1961. V. 33. P. 1102–1107.

[8] Prasad C. On vibration of spherical shells // J. Acoust. Soc. America. 1964, V. 36. No. 3. P. 489–494.

[9] Culkovski P.M., Reismann H. The spherical sandwich shell under axisymmetric static and dynamic loading // J. of Sound and Vibration, 1971, V. 14, No. 2. P. 229–240.

[10] Koplik B., Yu Yi-Yuan. Axisymmetric vibration of homogenious and sandwich spherical caps // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1967. V. E34, No. 3. P. 667–673.

[11] Mirza S., Singh A.V. Free vibrations of deep spherical shells J. Eng. Math., 1974. V. 8. No. 1. P. 71–79.

[12] Лычев С.А. Сидоров Ю.А. Нестационарные колебания трехслойных сферических оболочек с кратным спектром // Изв. вузов. Строительство. 2001. №4. С. 31–39.

[13] Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М.: Мир, 1966. 136 с.

[14] Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наукова думка. 1973. 248 с.

[15] Лычев С.А. Сеницкий Ю.Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2002. Специальный выпуск. С. 16–38.

Поступила в редакцию 20/X/2005;
в окончательном варианте 20/X/2005.

MOTION EQUATIONS OF A 3-LAYERED SPHERICAL VISCOELASTIC SHELL[7]

© 2005 S.A. Lychev, Yu.N. Saifutdinov[8]

In the present study the differential motion equations of a 3-layered spherical viscoelastic shell with asymmetrical layer structure and corresponding boundary conditions are obtained. The thickness of inner layer is much grater then outer ones. Kinematic relations of inner layer are given in the form of Mindlin shell theory, of outer layers — in the form of membrane theory. The material of outer layers are supposed to be isotropic elastic, whereas that of inner one being isotropic viscoelastic. The boundary conditions are taken in the general form of elastic fixing.

Paper received 20/X/2005.
Paper accepted 20/X/2005.

[7]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

[8]Lychev Sergey Alexandrovitch (`lychev@ssu.samara.ru`), Saifutdinov Yusuph Nazipovich (`jusufsay@ssu.samara.ru`), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.