

С. Лычев

**НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ
КЛАССИЧЕСКАЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ**

20 декабря 2023 г.

© С. Лычев

Обо всех найденных опечатках и ошибках просьба сообщать Константину Койфману на почту koifman.bmstu@yandex.ru

Файл периодически обновляется, следите за обновлениями!

Оглавление

1. Классическая нелинейная теория упругости	5
1.1. Формы и деформации	5
1.2. Координаты на формах и базисы	8
1.3. Градиент деформации и меры деформации	11
1.3.1. Градиент деформации	11
1.3.2. Меры деформации	21
1.4. Условия совместности	24
1.4.1. Обзор когомологий де Рама	24
1.4.2. Необходимые и достаточные условия совместности	25
1.5. Движение	29
1.6. Напряжения	30
1.7. Нелинейная упругость как теория поля	33
1.7.1. Действие и лагранжиан	33
1.7.2. Частные и полные вариации	34
1.7.3. Уравнения поля	41
1.7.4. Условия инвариантности действия	41
1.8. Определяющие соотношения. Теория Колемана–Нолла	45
1.8.1. Принцип материальной индифферентности	45
1.8.2. Теорема Коши о полярном разложении	47
1.8.3. Простой материал	49
1.8.4. Теоремы о представлении	51
1.9. Гиперупругое тело	54
1.9.1. Выражения для напряжений	54
1.9.2. Универсальные деформации	54
1.9.3. Универсальные решения для несжимаемого матери- ала	59
Библиография	64
2. Лекция 5	69
2.1. Классическая теория малых деформаций	69

2.2. Закон Гука	74
2.3. Уравнение Навье–Коши	77
2.4. Линейно упругое тело с дислокациями	77
2.5. Линеаризованная упругость	80
2.5.1. Линеаризованная кинематика	80
2.5.2. Линеаризованное определяющее соотношение	82
2.5.3. Линеаризованные напряжения	83
2.5.4. Формула Грина–Ривлина–Шилдта–Трусделла	85
Библиография	87

Глава 1.

Классическая нелинейная теория упругости

1.1. Формы и деформации

В рамках классической механики континуума физическое пространство формализуется как трехмерное аффинно-евклидово пространство \mathcal{E} с трансляционным векторным пространством \mathcal{V} и скалярным произведением (\cdot) . Тела моделируются в виде подмножеств \mathcal{E} , наделенных специальными свойствами. Как правило, предполагается, что эти подмножества открыты в \mathcal{E} и обладают регулярной границей¹ (в смысле О. Келлога [1]). В настоящей главе такие подмножества называются **формами**. Рассмотрим их определение более детально.

Формы. Поскольку пространство \mathcal{E} предполагается евклидовым, на нем можно ввести функцию расстояния $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ в соответствии с равенством

$$d(x, y) := \sqrt{\overrightarrow{x\dot{y}} \cdot \overrightarrow{x\dot{y}}}.$$

Там самым определена структура метрического пространства (\mathcal{E}, d) , что позволяет, в частности, рассматривать открытые множества.

Регулярную границу таких множеств определим индуктивно, начиная с одномерных множеств [1]:

1) Регулярной дугой назовем множество $\mathbf{a} \subset \mathcal{E}$, которое в некоторой

¹Требование регулярности накладывается в силу того, что в дальнейшем используется теорема Стокса для получения уравнений баланса в дифференциальной форме.

системе прямоугольных координат допускает представление

$$\mathbf{a} = \{x \in \mathcal{E} \mid x^2 = f(x^1), x^3 = g(x^1), x^1 \in [a, b]\},$$

где $a < b$, а $f, g \in C^\infty([a, b])$.

- 2) Регулярная кривая — это множество $\mathbf{c} \subset \mathcal{E}$, состоящее из конечного числа упорядоченных регулярных дуг. Эти дуги примыкают друг к другу в том смысле, что конечная точка каждой дуги (отличной от последней) является начальной точкой следующей за ней дуги. Дуги не могут иметь иных общих точек, за исключением того случая, когда конечная точка последней дуги является начальной точкой первой дуги (тогда \mathbf{c} есть замкнутая регулярная кривая).
- 3) Регулярным элементом поверхности назовем непустое множество \mathbf{s} , которое при некотором выборе прямоугольных координат допускает представление

$$\mathbf{s} = \{x \in \mathcal{E} \mid x^3 = f(x^1, x^2), (x^1, x^2) \in K\},$$

где $K \subset \mathbb{R}^2$ — компактное связное множество, граница которого, $\text{Fr } K$, — замкнутая регулярная кривая, а $f \in C^\infty(K; \mathbb{R})$.

- 4) Объединение конечного числа регулярных элементов поверхности представляет регулярную поверхность, если:
- (a) пересечение любых двух элементов поверхности либо пусто, либо является точкой — вершиной для обоих, или одной регулярной кривой — общим ребром;
 - (b) пересечение любой совокупности трех и более элементов поверхности состоит, по большей части, из вершин;
 - (c) любые два элемента поверхности являются первым и последним в цепочке элементов поверхности, в которой каждый элемент имеет общее ребро с последующим;
 - (d) все элементы, имеющие общую вершину, образуют последовательность, в которой каждый элемент имеет ребро, оканчивающееся на этой вершине, общее с последующим элементом; последний элемент последовательности может иметь, или же не иметь, общее ребро с первым.

Термин «ребро» употребляется здесь для обозначения одной из (конечного числа) регулярных дуг, составляющих границу регулярно-поверхностного элемента, в то время как «вершина» есть точка,

в которой два ребра соединяются. Если все ребра регулярной поверхности принадлежат каким-то двум различным составляющим ее элементам поверхности, то исходную поверхность назовем замкнутой.

- 5) Непустое множество $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ имеет регулярную границу, если $\text{Fr } \mathcal{S}$ есть замкнутая регулярная поверхность.

Все готово для следующего определения:

Определение 1.1. *Формой* называется непустое открытое множество $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, граница которого, $\text{Fr } \mathcal{S}$, является регулярной по Келлогу.

Привилегированную форму \mathcal{B} назовем **отсчетной формой**. Ее элементы используются в качестве меток частиц для идентификации деформации тела. Любую другую форму \mathcal{S} будем в таком случае называть **актуальной формой**. В соответствии с классическими обозначениями (см., например, в [?]), точки \mathcal{B} обозначаются прописными латинскими символами $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$, а точки \mathcal{S} — строчными латинскими символами x, y, \dots

Деформация. Деформацией назовем отображение

$$\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \gamma : \mathcal{X} \mapsto x,$$

удовлетворяющее следующим постулатам [2]:

- (γ_1) **Постулат непроницаемости.** Две частицы не могут занимать одно и то же место в одно и то же время.
- (γ_2) Любая точка из \mathcal{S} есть место для некоторой точки из \mathcal{B} .
- (γ_3) **Аксиома непрерывности.** Отображение γ непрерывно дифференцируема столько раз, сколько требуется.

Таким образом, в математических терминах, эти постулаты означают, что γ есть инъективное и сюръективное C^∞ -отображение.

До сих пор форма \mathcal{B} рассматривалась в качестве недеформированной, а \mathcal{S} — как деформированная. Однако эту точку зрения можно обратить, считая, напротив, форму \mathcal{S} отсчетной, а \mathcal{B} — актуальной. Поскольку обе точки зрения равноправны, отображение $\gamma^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$ также должно быть гладким. Таким образом, в итоге необходимо предположить, что γ есть C^∞ -диффеоморфизм. Это предположение используется далее. Учитывая сказанное, приходим к следующему определению:

Определение 1.2. *Деформация* есть C^∞ -диффеоморфизм $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$. Обратный диффеоморфизм $\gamma^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$ называется *обратной деформацией*.

1.2. Координаты на формах и базисы

Поскольку формы \mathcal{B} и \mathcal{S} являются открытыми подмножествами \mathcal{E} , то они, в частности, являются открытыми трехмерными подмногообразиями \mathcal{E} . Следовательно, их точки можно параметризовать. Помимо этого, скалярное произведение (\cdot) индуцирует метрические тензоры \mathbf{G} и \mathbf{g} на \mathcal{B} и \mathcal{S} соответственно.

Картрирование прямоугольными координатами. Обозначим через $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ограничения декартова картрирования $\mathcal{D} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$ на формы \mathcal{B} и \mathcal{S} . Таким образом, $\mathcal{A}_{\mathcal{B};d} = \{(\mathcal{B}, \mathcal{D}_{\mathcal{B}})\}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{S};d} = \{(\mathcal{S}, \mathcal{D}_{\mathcal{S}})\}$ есть атласы. Координатное представление деформации γ определяется как композиция

$$\gamma_d = \mathcal{D}_{\mathcal{S}} \circ \gamma \circ \mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathcal{D} \circ \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1.1.21)$$

где $\mathcal{D} \circ \mathcal{B}$ есть открытое подмножество \mathbb{R}^3 . Соотношение между отображениями γ и γ_d иллюстрируется диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} & & \mathbb{R}^3 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \cup & & \cup \\
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{\mathcal{S}}} & \mathcal{D} \circ \mathcal{S} \\
 \uparrow \gamma & & \uparrow \gamma_d \\
 \mathcal{B} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{\mathcal{B}}} & \mathcal{D} \circ \mathcal{B} \\
 \vdots & & \vdots \\
 \cap & & \cap \\
 \mathcal{E} & & \mathbb{R}^3
 \end{array}$$

В дальнейшем тройка $(X^i)_{i=1}^3$ обозначает глобальные координаты на форме \mathcal{B} , индуцированные карттрированием $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$, а тройка $(x^i)_{i=1}^3$ обозначает глобальные координаты, индуцированные на форму \mathcal{S} отображением $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

Картирование криволинейными координатам. Предположим, что в пространстве \mathcal{E} заданы криволинейные координаты, ассоциированные с отсчетной и актуальной формами². Эти координаты порождаются атласами $\mathcal{A}_1 = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ и $\mathcal{A}_2 = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J}$ на \mathcal{E} , сужение которых на формы \mathcal{B} и \mathcal{S} приводит к атласам $\mathcal{A}_{\mathcal{B};c} = \{(\mathcal{B} \cap U_\alpha, \tilde{\sigma}_\alpha)\}_{\alpha \in I_{\mathcal{B}}}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{S};c} = \{(\mathcal{S} \cap V_\beta, \tilde{\psi}_\beta)\}_{\beta \in J_{\mathcal{S}}}$. Здесь $\tilde{\sigma}_\alpha$ и $\tilde{\psi}_\beta$ — ограничения координатных отображений σ_α и ψ_β . Рассмотрим представление деформации γ в координатах, порождаемых последними атласами. Пусть $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$.

Выберем $\alpha \in I_{\mathcal{B}}$, $\beta \in J_{\mathcal{S}}$, такие, что $\mathcal{X} \in U_\alpha$ и $\gamma(\mathcal{X}) \in V_\beta$. Обозначая $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap \gamma^{-1}(V_\beta)$, приходим к желаемому координатному представлению:

$$\gamma_c = \tilde{\psi}_\beta \circ \gamma \circ \tilde{\sigma}_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^3 \supset \sigma_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (1.1.22)$$

Соотношение между γ и γ_c показано на следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} & & \mathbb{R}^3 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \cup & & \cup \\
 \vdots & & \vdots \\
 \gamma(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\tilde{\psi}_\beta} & \psi_\beta \circ \gamma(U_{\alpha\beta}) \\
 \uparrow \gamma & & \uparrow \gamma_c \\
 U_{\alpha\beta} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\alpha} & \sigma_\alpha(U_{\alpha\beta}) \\
 \vdots & & \vdots \\
 \cap & & \cap \\
 \vdots & & \vdots \\
 \mathcal{E} & & \mathbb{R}^3
 \end{array}$$

Локальные базисы и метрики. Пусть тройка $(Q^i)_{i=1}^3$ соответствует криволинейным координатам, индуцированным на форму \mathcal{B} отображением $\tilde{\sigma}_\alpha$, а тройка $(q^i)_{i=1}^3$ — криволинейным координатам, индуцированным на форму \mathcal{S} . В соответствии с общими определениями можно записать равенства

$$\mathbf{E}_i = \frac{\partial X^k}{\partial Q^i} \mathbf{i}_k, \quad E^i = \frac{\partial Q^i}{\partial X^k} i^k, \quad (1.1.23)$$

²Например, если \mathcal{B} — открытый шар, а \mathcal{S} — открытый куб, то можно ввести сферические и прямоугольные координаты на \mathcal{E} .

для локального базиса $(\mathbf{E}_i)_{i=1}^3$ и дуального базиса $(E^i)_{i=1}^3$, ассоциированных с \mathcal{B} . Аналогично, имеем равенства

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \mathbf{i}_k, \quad e^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^k} i^k, \quad (1.1.24)$$

для локального базиса $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^3$ и дуального базиса $(e^i)_{i=1}^3$ на \mathcal{S} .

Метрический тензор \mathbf{G} и ассоциированный с ним, \mathbf{G}^* , имеют разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= G_{ij} \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^j, & G_{ij} &= \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j, \\ \mathbf{G}^* &= G^{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j, \end{aligned}$$

в то время как метрический тензор \mathbf{g} и ассоциированный с ним, \mathbf{g}^* , представлены равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= g_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, & g_{ij} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{g}^* &= g^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

Здесь $[G^{ij}] = [G_{ij}]^{-1}$ и $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$.

Связь между локальными базисами. Поскольку поля локальных базисов (\mathbf{E}_i) и (\mathbf{e}_i) в (1.1.23) и (1.1.24) принимают значения в одном и том же пространстве \mathcal{V} , то существует гладкое поле $[\Omega_j^i] : \mathcal{B} \rightarrow \text{GL}(3; \mathbb{R})$ матриц перехода:

$$\mathbf{E}_i = \Omega_i^j \mathbf{e}_j.$$

Используя определения (\mathbf{E}_i) и (\mathbf{e}_i) , можно получить явную формулу для $[\Omega_j^i]$. Действительно, поскольку

$$\frac{\partial X^k}{\partial Q^i} = \Omega_i^j \frac{\partial x^k}{\partial q^j}, \quad k = 1, 2, 3,$$

то

$$\Omega_i^j = \frac{\partial q^j}{\partial x^k} \frac{\partial X^k}{\partial Q^i}.$$

Для полей дуальных базисов (E^i) и (e^i) в (1.1.23) и (1.1.24) можно записать, что, аналогично,

$$E^i = \mathcal{U}_j^i e^j,$$

где $[\mathcal{U}_j^i] : \mathcal{B} \rightarrow \text{GL}(3; \mathbb{R})$ — гладкое поле матриц. Из соотношения $\langle E^i, \mathbf{E}_j \rangle = \delta_j^i$ получаем в итоге, что $[\mathcal{U}_j^i] = [\Omega_j^i]^{-1}$.

Связь между представлениями γ . Отображения (1.1.21) и (1.1.22) связаны между собой как

$$\gamma_d = \mathcal{D}_S \circ \tilde{\psi}_\beta^{-1} \circ \gamma_c \circ \tilde{\sigma}_\alpha \circ \mathcal{D}_B^{-1}. \quad (1.1.25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_B \circ \tilde{\sigma}_\alpha^{-1} &: (Q^i) \mapsto (X^i), \\ \mathcal{D}_S \circ \tilde{\psi}_\beta^{-1} &: (q^i) \mapsto (x^i), \end{aligned}$$

— функции замены координат.

Частный случай. Пусть $\mathcal{A}_B = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I_B}$ — гладкий атлас на B . Деформация γ позволяет определить по этому атласу такой атлас формы S , что точки $x = \gamma(\mathcal{X})$ имеют те же координаты, что и точки \mathcal{X} . Действительно, достаточно положить $\mathcal{A}_S = \{(\gamma(U_\alpha), \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I_B}$. Здесь $\psi_\alpha = \sigma_\alpha \circ \gamma^{-1}$. Координатное представление γ_c относительно таких атласов становится всего лишь тождественным отображением:

$$\gamma_c = \psi_\alpha \circ \gamma \circ \sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha^{-1} = \text{Id}.$$

Два описания. Лагранжево (отсчетное) и эйлерово (пространственное) описания являются стандартными в классической механике континуума. В случае отсчетного описания рассматривается поведение каждой частицы $\mathcal{X} \in B$. Тогда используются отображения, заданные на B . В частности, актуальная позиция точки \mathcal{X} выражается как значение функции \mathcal{X} , а именно, деформации γ . Напротив, в случае пространственного описания точки из S рассматриваются в качестве независимых переменных; тогда поля задаются на S . В частности, обратная деформация γ^{-1} может быть использована для представления точки отсчетной формы как функции точки актуальной формы.

1.3. Градиент деформации и меры деформации

1.3.1. Градиент деформации

Градиент деформации как главная линейная часть. Рассмотрим произвольную деформацию $\gamma : B \rightarrow S$ из заданной отсчетной формы B в некоторую актуальную форму S .

Определение 1.3. *Градиентом деформации γ в точке $\mathcal{X}_0 \in \mathcal{B}$ называется ее полная производная $D_{\mathcal{X}_0}\gamma \in \text{End}(\mathcal{V})$ в этой точке.*

Если ясно, о какой деформации идет речь, то используется обозначение

$$\mathbf{F}_{\mathcal{X}_0} := D_{\mathcal{X}_0}\gamma.$$

Замечание 1.1. *В классических руководствах по механике континуума (см., например, [3–5]) градиент деформации часто обозначается символом $\nabla\gamma$. В настоящей работе такое обозначение не используется в силу возможной коллизии с обозначением ковариантной производной.*

Таким образом, в соответствии с определением, $\mathbf{F}_{\mathcal{X}_0}$ является линейным отображением $\mathbf{F}_{\mathcal{X}_0} : \mathcal{V} \ni \mathbf{h} \mapsto \mathbf{F}_{\mathcal{X}_0}[\mathbf{h}] \in \mathcal{V}$ и наряду с этим справедливо равенство

$$\gamma(\mathcal{X}_0 + \mathbf{h}) = \gamma(\mathcal{X}_0) + \mathbf{F}_{\mathcal{X}_0}[\mathbf{h}] + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{при} \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}, \quad (1.1.31)$$

где $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ — произвольный вектор, для которого $\mathcal{X}_0 + \mathbf{h} \in \mathcal{B}$. Соотношение (1.1.31) означает, что аффинная функция

$$\mathcal{Y} \mapsto \gamma(\mathcal{X}_0) + \mathbf{F}_{\mathcal{X}_0}[\overrightarrow{\mathcal{X}_0\mathcal{Y}}]$$

является главной частью деформации γ в окрестности точки \mathcal{X}_0 .

Осуществляя линейризацию деформации γ в окрестности каждой точки формы \mathcal{B} , приходим к полю линейных отображений

$$\mathbf{F} : \mathcal{B} \rightarrow \text{End}(\mathcal{V}), \quad \mathcal{X} \mapsto \mathbf{F}_{\mathcal{X}},$$

которое будем называть **градиентом деформации**.

С физической точки зрения возможна следующая интерпретация градиента деформации. Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — произвольные точки \mathcal{B} . Когда точка \mathcal{Y} бесконечно близка к \mathcal{X} , вектор $\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ можно рассматривать как инфинитезимальное материальное волокно в отсчетном состоянии. После деформации оно преобразуется в волокно $\overrightarrow{\gamma(\mathcal{X})\gamma(\mathcal{Y})}$. Тогда равенство (1.1.31) означает, что деформированное волокно $\overrightarrow{\gamma(\mathcal{X})\gamma(\mathcal{Y})}$, с точностью до $\mathbf{o}(\|\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}\|)$, есть значение градиента деформации $\mathbf{F}_{\mathcal{X}}[\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}]$ на исходном волокне. Следовательно, градиент деформации определяет преобразование инфинитезимальных материальных волокон из отсчетного состояния в актуальное. По этой причине, в классических курсах по механике континуума иногда используется не вполне строгая запись

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X},$$

означающая преобразование отсчетного инфинитезимального волокна $d\mathbf{X}$ в актуальное состояние, представленное вектором $d\mathbf{x}$.

Замечание 1.2. В общем случае, предполагая отображение γ гладким вплоть до порядка r , можно использовать разложение по формуле Тейлора:

$$\gamma(\mathcal{X}_0 + \mathbf{h}) = \gamma(\mathcal{X}_0) + D_{\mathcal{X}_0}\gamma[\mathbf{h}] + \dots + \frac{D_{\mathcal{X}_0}^{(r)}\gamma[\mathbf{h}^r]}{r!} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|^r) \quad \text{при } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0},$$

где k -линейное отображение $D_{\mathcal{X}_0}^{(k)}\gamma \in \text{Lin}_k(\mathcal{V}, \dots, \mathcal{V}; \mathcal{V})$ является полной производной k -го порядка ($k = 1, \dots, r$) от γ в точке \mathcal{X}_0 , а

$$D_{\mathcal{X}_0}^{(k)}\gamma[\mathbf{h}^k] := D_{\mathcal{X}_0}^{(k)}\gamma[\mathbf{h}, \dots, \mathbf{h}].$$

Приходим к градиентам деформации высшего порядка:

$$\gamma(\mathcal{X}_0 + \mathbf{h}) = \gamma(\mathcal{X}_0) + \mathbf{F}_{\mathcal{X}_0}[\mathbf{h}] + \dots + \frac{\mathbf{F}_{\mathcal{X}_0}^{(r)}[\mathbf{h}^r]}{r!} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|^r) \quad \text{при } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0},$$

где $\mathbf{F}_{\mathcal{X}_0}^{(k)} := D_{\mathcal{X}_0}^{(k)}\gamma$ для всех $k = 1, \dots, r$.

Возвращаясь к материальным волокнам, можно теперь сказать, что деформированное волокно $\overrightarrow{\gamma(\mathcal{X})\gamma(\mathcal{Y})}$, с точностью до $\mathbf{o}(\|\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}\|^r)$, определяется выражением

$$\mathbf{F}_x[\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}] + \dots + \frac{\mathbf{F}_x^{(r)}[\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}, \dots, \overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}]}{r!}.$$

Выбор r определяет точность аппроксимации и соответствующую теорию.

Случай прямоугольных координат. В прямоугольном репере $(o, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^3)$ деформация γ имеет представление $\gamma(\mathcal{X}) = o + \gamma_d^s \circ \mathcal{D}(\mathcal{X})\mathbf{i}_s$ относительно любой точки $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, где

$$\gamma_d: \mathcal{D} \circ \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_d: (X^1, X^2, X^3) \mapsto (x^1, x^2, x^3),$$

есть отображение (1.1.21). В таком случае градиент деформации имеет следующее диадное разложение в точке \mathcal{X} :

$$\mathbf{F}_x = \frac{\partial x^s}{\partial X^k} \Big|_x \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}^k. \quad (1.1.32)$$

В нем числа

$$\left. \frac{\partial x^s}{\partial X^k} \right|_{\mathcal{X}} := \lim_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}; i_k} \ni t \rightarrow 0} \frac{\gamma_d^s(\mathcal{X} + t\mathbf{i}_k) - \gamma_d^s(\mathcal{X})}{t},$$

являются частными производными γ_d . Символ $\mathcal{B}_{\mathcal{X}; i_k}$ обозначает множество

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}; i_k} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \neq 0, \mathcal{X} + t\mathbf{i}_k \in \mathcal{B}\},$$

являющееся проколотой окрестностью точки $t = 0$. Альтернативно, (1.1.32) можно записать в виде

$$\mathbf{F} = F_k^s \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}^k, \quad \text{где} \quad F_k^s = \frac{\partial x^s}{\partial X^k}.$$

В дальнейшем мы будем иногда представлять компоненты тензоров второго ранга элементами прямоугольных матриц. Такие матрицы мы будем обозначать, заключая символ тензора в квадратные скобки. В частности, $[F_j^i]$ обозначает матрицу компонент \mathbf{F} . Чтобы установить соответствие между индексируемыми компонентами и элементами матрицы, принимается соглашение: первый индекс определяет строку, а второй — столбец матрицы. Например,

$$[F_j^i] = \begin{pmatrix} F_1^1 & F_2^1 & F_3^1 \\ F_1^2 & F_2^2 & F_3^2 \\ F_1^3 & F_2^3 & F_3^3 \end{pmatrix}. \quad (1.1.33)$$

Следует отметить, что соответствие между тензорами второго ранга и их матрицами не является взаимно однозначным, поскольку переход от тензоров к матрицам приводит к потере информации о типе тензора.

Случай криволинейных координат. Выведем представление градиента деформации в криволинейных координатах, используя для этой цели результаты раздела 1.2. Пусть $(Q^i)_{i=1}^3$ — криволинейные координаты, ассоциированные с отсчетной формой \mathcal{B} , а $(q^i)_{i=1}^3$ — криволинейные координаты, связанные с актуальной формой \mathcal{S} . Используя соотношение (1.1.25) между представлением γ_d (1.1.21) деформации γ в прямоугольных координатах и представлением γ_c (1.1.22) той же деформации γ в криволинейных координатах, цепное правило дифференцирования

$$\frac{\partial x^s}{\partial X^k} = \frac{\partial x^s}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \frac{\partial Q^j}{\partial X^k},$$

и соотношения (1.1.23), (1.1.24), получим из (1.1.32), что справедливо представление

$$\mathbf{F}x = \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \Big|_{\tilde{\sigma}_\alpha(x)} \mathbf{e}_i|_{\gamma(x)} \otimes E^j|_x. \quad (1.1.34)$$

Здесь $\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}$ — частные производные отображения $\gamma_c : (Q^1, Q^2, Q^3) \mapsto (q^1, q^2, q^3)$.

Если $\gamma_c = \text{Id}$, то $\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} = \delta_j^i$ и разложение (1.1.34) заменяется на более простое:

$$\mathbf{F}x = \mathbf{e}_i|_{\gamma(x)} \otimes E^i|_x.$$

Определитель градиента деформации. Для определителя \mathbf{F} принимается обозначение J , т.е., полагаем

$$J := \det \mathbf{F}. \quad (1.1.35)$$

В терминах поля матриц (1.1.33) имеем равенство $J = \det [F_j^i]$, что дает явную формулу вычисления определителя. Поскольку отображение γ инъективно, справедливо свойство:

$$\forall \mathcal{X} \in \mathcal{B} : J_x \neq 0.$$

Иными словами, градиент деформации \mathbf{F} может быть рассмотрен как поле $\mathbf{F} : \mathcal{B} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{V})$ линейных автоморфизмов.

Замечание 1.3. В классических курсах линейной алгебры определитель линейного преобразования вводится через определитель его матрицы в любом базисе. Далее показывается, что это определение не зависит от выбора базиса. В трехмерном случае имеет место следующее определение в инвариантной форме. Если $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ — произвольная точка, то

$$J_x = \frac{(\mathbf{F}_x[\mathbf{u}], \mathbf{F}_x[\mathbf{v}], \mathbf{F}_x[\mathbf{w}])}{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}, \quad (1.1.36)$$

для любого линейно независимого семейства векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Символ (\cdot, \cdot, \cdot) обозначает смешанное произведение в \mathcal{V} .

Далее будем полагать, что γ удовлетворяет следующему свойству:

(γ_4) **Сохранение ориентации.** Любая упорядоченная тройка некопланарных материальных волокон в \mathcal{B} под действием \mathbf{F}_x переходит в тройку некопланарных волокон с той же ориентацией.

Формально, с учетом (1.1.36), имеем

$$\forall \mathcal{X} \in \mathcal{B} : J_x > 0.$$

Обратный градиент деформации. Как уже отмечалось, наряду с прямой деформацией $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ можно рассматривать обратную деформацию $\gamma^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$. В соответствии с теоремой о дифференцировании обратного отображения, градиент $D_x(\gamma^{-1})$ последней в точке $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ совпадает с обратным отображением \mathbf{F}_x^{-1} к градиенту деформации в точке $\mathcal{X} = \gamma^{-1}(\boldsymbol{x})$. В прямоугольном репере $(o, (\mathbf{i}_s)_{s=1}^3)$ выполняется следующее разложение :

$$\mathbf{F}_x^{-1} = \left. \frac{\partial X^m}{\partial x^n} \right|_{\gamma(\boldsymbol{x})} \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}^n.$$

Градиент перемещений. С градиентом деформации тесно связано поле иного рода, не имеющее непосредственного аналога в случае гладких многообразий. Действительно, для любой точки $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ **вектор перемещений** есть вектор $\mathbf{u}(\mathcal{X}) := \gamma(\mathcal{X}) - \mathcal{X}$. Таким образом, приходим к гладкому отображению

$$\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{u} : \mathcal{X} \mapsto \gamma(\mathcal{X}) - \mathcal{X},$$

называемому **полем перемещений**.

Градиент поля перемещений есть соответствие

$$\boldsymbol{\beta} = D\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \text{End}(\mathcal{V}),$$

значения которого определяют линейаризации отображения \mathbf{u} , т.е., в точке $\mathcal{X}_0 \in \mathcal{B}$,

$$\mathbf{u}(\mathcal{X}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(\mathcal{X}_0) + \boldsymbol{\beta}_{\mathcal{X}_0}[\mathbf{h}] + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{при} \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Из этого определения непосредственно вытекает, что

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\beta}, \tag{1.1.37}$$

где \mathbf{I} — единичный тензор в \mathcal{V} , и, таким образом, градиент перемещений может быть представлен посредством разложения

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_n^m \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}^n, \quad \beta_n^m = \frac{\partial}{\partial X^n} x^m - \delta_n^m = \frac{\partial}{\partial X^n} u^m.$$

На первый взгляд кажется, что все эти определения могут быть перенесены на гладкие многообразия без существенных изменений. Однако, здесь нас ожидает сюрприз: оказывается, что градиент деформации не

является градиентом векторного поля, а, напротив, является совокупностью трех градиентов скалярных функций, определяющих координаты на многообразии. Лишь особая структура аффинно-евклидова пространства, в которой возможно отождествить по изоморфизму точки и их радиус-векторы, позволяет интерпретировать \mathbf{F} как тензорное поле второго ранга над \mathcal{V} . В противоположность этому, градиент перемещений не имеет аналога в случае гладких многообразий, поскольку на последних не определены трансляции. Указанные обстоятельства важны с идейной точки зрения и по этой причине поясним их более детально.

Градиент деформации vs. градиент перемещений. Важно отметить, что фундаментальное различие между градиентом деформации и градиентом перемещений проявляется уже в евклидовом пространстве при использовании криволинейных координат. Действительно, предположим общую ситуацию, когда отсчетная форма \mathcal{B} представлена в криволинейных координатах $(Q^i)_{i=1}^3$, а актуальная форма \mathcal{S} представлена в некоторых других криволинейных координатах $(q^i)_{i=1}^3$. Для простоты будем полагать, что каждая из форм покрывается лишь одной картой, т.е. что имеются карты (\mathcal{B}, σ) и (\mathcal{S}, ψ) , где $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ — координатные отображения. Такое предположение не умаляет общности дальнейших рассуждений, но, вместе с тем, позволяет избежать лишних технических усложнений.

При пересчете декартовых компонент поля β , представленных частными производными, к криволинейным координатам, получаем разложение

$$\beta = \left(\frac{\partial u^i}{\partial Q^k} + u^j \Gamma_{jk}^{i\cdot\cdot} \right) \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}^k, \quad (1.1.38)$$

в котором $\mathbf{u} = u^i \mathbf{E}_i$ — поле перемещений, разложенное по локальным базисам $(\mathbf{E}_k)_{k=1}^3$. В равенстве (1.1.38) содержатся символы Кристоффеля $\Gamma_{jk}^{i\cdot\cdot}$, определяемые как $\frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial q^k} = \Gamma_{ik}^{l\cdot\cdot} \mathbf{E}_l$. Формула (1.1.38) действительно имеет место, поскольку β — градиент векторного поля, разложенного по локальному базису, меняющемуся от точки к точке. Тогда, в ходе дифференцирования этого разложения, необходимо привлекать правило Лейбница.

Вместе с тем, представление градиента деформации в криволинейных координатах типографически подобно его представлению в декартовых координатах (см. формулы (1.1.32) и (1.1.34)). Инвариантность формы \mathbf{F} является не просто формальным результатом. Она наталкивает на мысль, что \mathbf{F} есть больше, чем градиент векторного поля. Действительно, при его определении (в отличие от β) нет необходимости использо-

вать элементы трансляционного пространства \mathcal{V} , а достаточно работать лишь с координатными представлениями. Рассмотрим более детально, как исчезают символы Кристоффеля при переходе от перемещений к координатам.

Начнем рассуждение с формулы (1.1.37), связывающей градиент деформации с градиентом перемещений (1.1.38). Преобразуем равенство (1.1.38) перейдя от перемещений к координатам. Мы покажем, что в ходе этого преобразования символы Кристоффеля уйдут и в действительности \mathbf{F} полностью определяется частными производными координат.

Во-первых, для компонент $u^i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}^i$ поля перемещений \mathbf{u} справедливы соотношения

$$u^i = u_d^s \mathbf{i}_s \cdot \mathbf{E}^i = u_d^s \frac{\partial Q^i}{\partial X^s}.$$

Здесь $u_d^s = x^s(q^1, q^2, q^3) - X^s(Q^1, Q^2, Q^3)$ — компоненты поля перемещений в ортонормированном базисе $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^3$, представленные разностями актуальных и отсчетных прямоугольных координат. Следует иметь в виду, что величины q^i являются, в свою очередь, функциями (Q^1, Q^2, Q^3) . Применяя правило Лейбница к производной $\frac{\partial u^i}{\partial Q^k}$, получаем

$$\frac{\partial u^i}{\partial Q^k} = \frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \frac{\partial u_d^s}{\partial Q^k} + u_d^s \frac{\partial}{\partial Q^k} \left(\frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \right).$$

Выполняя дифференцирование и принимая во внимание равенства

$$\frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \frac{\partial X^s}{\partial Q^k} = \delta_k^i, \quad \frac{\partial}{\partial Q^k} \left(\frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \right) = \frac{\partial^2 Q^i}{\partial X^r \partial X^s} \frac{\partial X^r}{\partial Q^k},$$

приходим к соотношению

$$\frac{\partial u^i}{\partial Q^k} = \frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \frac{\partial x^s}{\partial Q^k} - \delta_k^i + u_d^s \frac{\partial^2 Q^i}{\partial X^r \partial X^s} \frac{\partial X^r}{\partial Q^k}.$$

Таким образом, компонента градиента перемещений β , соответствующая диаде $\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}^k$, имеет вид:

$$\beta_k^i = \frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \frac{\partial x^s}{\partial Q^k} - \delta_k^i + u_d^s \left(\frac{\partial^2 Q^i}{\partial X^r \partial X^s} \frac{\partial X^r}{\partial Q^k} + \frac{\partial Q^j}{\partial X^s} \Gamma^{i \cdot \cdot jk} \right).$$

Во-вторых, покажем, что выражение в скобках тождественно равно нулю. Для этой цели обозначим его через $A_{\cdot sk}^{i \cdot \cdot}$. Используя соотношение

$\mathbf{E}_k = \frac{\partial X^l}{\partial Q^k} \mathbf{i}_l$ совместно с определением символов Кристоффеля, получаем следующее явное представление для последних:

$$\Gamma_{jk}^{i\cdot\cdot} = \frac{\partial Q^i}{\partial X^n} \frac{\partial^2 X^n}{\partial Q^j \partial Q^k}.$$

По этой причине,

$$A_{\cdot sk}^{i\cdot\cdot} = \frac{\partial^2 Q^i}{\partial X^n \partial X^s} \frac{\partial X^n}{\partial Q^k} + \frac{\partial Q^j}{\partial X^s} \frac{\partial Q^i}{\partial X^n} \frac{\partial^2 X^n}{\partial Q^j \partial Q^k}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial Q^j}{\partial X^s} \frac{\partial^2 X^n}{\partial Q^j \partial Q^k} = \frac{\partial}{\partial X^s} \left(\frac{\partial X^n}{\partial Q^k} \right),$$

то, используя правило Лейбница, получаем желаемый результат:

$$\begin{aligned} A_{\cdot sk}^{i\cdot\cdot} &= \frac{\partial X^n}{\partial Q^k} \frac{\partial}{\partial X^s} \left(\frac{\partial Q^i}{\partial X^n} \right) + \frac{\partial Q^i}{\partial X^n} \frac{\partial}{\partial X^s} \left(\frac{\partial X^n}{\partial Q^k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial X^s} \left(\frac{\partial Q^i}{\partial X^n} \frac{\partial X^n}{\partial Q^k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial X^s} \delta_k^i = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, после замены компонент вектора перемещений координатами векторов мест, формула (1.1.38) переходит в

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \frac{\partial x^s}{\partial Q^k} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}^k - \mathbf{I},$$

и для \mathbf{F} получается следующее соотношение:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \frac{\partial x^s}{\partial Q^k} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}^k.$$

На финальном шаге преобразуем полученное диадное представление к разложению относительно диад вида $\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^k$. Поскольку

$$\mathbf{E}_i = \frac{\partial X^r}{\partial Q^i} \mathbf{i}_r = \frac{\partial X^r}{\partial Q^i} \frac{\partial q^m}{\partial x^r} \mathbf{e}_m,$$

то, в силу цепного правила дифференцирования,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{\partial Q^i}{\partial X^s} \frac{\partial x^s}{\partial Q^k} \frac{\partial X^r}{\partial Q^i} \frac{\partial q^m}{\partial x^r} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^k \\
&= \delta_s^r \frac{\partial x^s}{\partial Q^k} \frac{\partial q^m}{\partial x^r} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^k \\
&= \frac{\partial x^s}{\partial Q^k} \frac{\partial q^m}{\partial x^s} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^k \\
&= \frac{\partial q^m}{\partial Q^k} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^k,
\end{aligned}$$

что приводит к выражению (1.1.34), как и требовалось.

Как уже отмечалось, представление градиента деформации \mathbf{F} посредством перемещений содержит символы Кристоффеля. Вместе с тем, такое представление является слишком узким: оно справедливо только для евклидова пространства, поскольку лишь последнее допускает существование векторного поля перемещений. В противоположность этому, формула (1.1.34) по-прежнему справедлива для многообразий, поскольку последние допускают координатное описание.

Градиент деформации как тройка ковекторных полей. На градиент деформации можно эквивалентно смотреть как на тройку ковекторных полей, что может быть полезно при переносе положений механики континуума на гладкие многообразия [6, 7]. Действительно, напомним, что каждое из множеств \mathcal{B} и \mathcal{S} является открытым подмногообразием \mathcal{E} . отождествим касательные пространства $T_x\mathcal{B}$ и $T_x\mathcal{S}$ с касательными пространствами $T_x\mathcal{E}$ и $T_x\mathcal{E}$ соответственно для всех точек $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, и $x \in \mathcal{S}$. В таком случае градиент деформации \mathbf{F} можно отождествить с касательным отображением $T\gamma : T\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{S}$. Следовательно,

$$\mathbf{F} = F_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dX^j,$$

и мы приходим к соотношению

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes F^i, \quad \text{где} \quad F^i = F_j^i dX^j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.39)$$

При фиксированных координатах на актуальной форме тройка ковекторных полей $F^i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}^*$, $i = 1, 2, 3$, полностью определяет градиент деформации \mathbf{F} .

1.3.2. Меры деформации

Тензоры Коши – Грина. Поскольку векторное пространство \mathcal{V} евклидово, то можно вывести выражение для длины деформированного волокна. Действительно, пусть $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ — точка отсчетной формы. Тогда для точки $\mathcal{Y} \in \mathcal{B}$, лежащей рядом с \mathcal{X} , имеем представление

$$\overrightarrow{\gamma(\mathcal{X})\gamma(\mathcal{Y})} = \mathbf{F}_x[\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}] + o(\|\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}\|).$$

Здесь $\overrightarrow{\gamma(\mathcal{X})\gamma(\mathcal{Y})}$ — деформированное волокно. Умножая это равенство скалярно на себя, приходим к соотношению

$$\|\overrightarrow{\gamma(\mathcal{X})\gamma(\mathcal{Y})}\|^2 = \mathbf{F}_x[\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}] \cdot \mathbf{F}_x[\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}] + o(\|\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}\|^2) \quad \text{при } \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}.$$

Используя определение транспонированного линейного отображения, которое в случае \mathbf{F}_x принимает вид

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_x[\mathbf{u}] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_x^\top[\mathbf{v}], \quad (1.1.310)$$

где $\mathbf{F}_x^\top \in \text{End}(\mathcal{V})$, приходим к формуле

$$\|\overrightarrow{\gamma(\mathcal{X})\gamma(\mathcal{Y})}\|^2 = \overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \cdot \mathbf{F}_x^\top \mathbf{F}_x[\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}] + o(\|\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}\|^2) \quad \text{при } \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}.$$

Симметричное отображение $\mathbf{C}_x = \mathbf{F}_x^\top \mathbf{F}_x \in \text{Sym}(\mathcal{V})$ называется **правым тензором Коши – Грина**. Таким образом, предыдущее равенство можно записать в виде

$$\|\overrightarrow{\gamma(\mathcal{X})\gamma(\mathcal{Y})}\|^2 = \overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \cdot \mathbf{C}_x[\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}] + o(\|\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}\|^2) \quad \text{при } \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}. \quad (1.1.311)$$

С точностью до малых порядка $o(\|\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}\|^2)$, квадрат деформированного материального волокна равен $\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \cdot \mathbf{C}_x[\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}]$.

Тензоры \mathbf{C}_x , $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, в совокупности определяют гладкое тензорное поле

$$\mathbf{C} : \mathcal{B} \rightarrow \text{Sym}(\mathcal{V}), \quad \mathcal{X} \mapsto \mathbf{C}_x,$$

называемое **полем правых тензоров Коши – Грина**.

Теперь рассмотрим обратную деформацию, γ^{-1} . Пусть $\mathbf{x} = \gamma(\mathcal{X})$. Тогда

$$\overrightarrow{\gamma^{-1}(\mathbf{x})\gamma^{-1}(\mathbf{y})} = \mathbf{F}_x^{-1}[\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}}] + o(\|\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}}\|) \quad \text{при } \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}.$$

Домножая последнее равенство скалярно на себя и полагая $\mathbf{B}_x = \mathbf{F}_x \mathbf{F}_x^\top$, получаем

$$\|\overrightarrow{\gamma^{-1}(\mathbf{x})\gamma^{-1}(\mathbf{y})}\|^2 = \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}} \cdot \mathbf{B}_x^{-1}[\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}}] + o(\|\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}}\|^2) \quad \text{при } \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}. \quad (1.1.312)$$

С точностью до малых порядка $o(\|\vec{x}\vec{y}\|^2)$ квадрат длины недеформированного материального волокна равен $\vec{x}\vec{y} \cdot \mathbf{B}_x^{-1}[\vec{x}\vec{y}]$. Тензор $\mathbf{B}_x \in \text{Sym}(\mathcal{V})$ называется **левым тензором Коши – Грина**. Приходим, таким образом, к полю

$$\mathbf{B} : \mathcal{B} \rightarrow \text{Sym}(\mathcal{V}), \quad \mathcal{X} \mapsto \mathbf{B}_x,$$

называемому **полем левых тензоров Коши – Грина**.

Замечание 1.4. Меры Коши – Грина порождают новые меры: \mathbf{C}^{-1} (мера Фингера) и \mathbf{B}^{-1} (мера Альманси).

Замечание 1.5. Построение мер Коши – Грина посредством сравнения длин деформированных и недеформированных материальных волокон (и аналогичного рассмотрения углов между материальными волокнами) является в известной мере искусственным, хотя и непосредственно иллюстрирует их геометрический смысл. В действительности, целесообразность перехода к правой мере Коши – Грина диктуется принципом материальной индифферентности, который в случае простого материала требует исключить из рассмотрения повороты отсеченных волокон. Переход к левой мере Коши – Грина определяется наличием изотропии материала, т.е., образно говоря, инвариантности его отклика при вращениях деформированных волокон.

Выражение через перемещения. Правый и левый тензоры Коши – Грина $\mathbf{C}_x = \mathbf{F}_x^T \mathbf{F}_x$ и $\mathbf{B}_x = \mathbf{F}_x \mathbf{F}_x^T$, $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, могут быть представлены через перемещения. Действительно, используя соотношение (1.1.37), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_x &= \mathbf{I} + \boldsymbol{\beta}_x + \boldsymbol{\beta}_x^T + \boldsymbol{\beta}_x^T \boldsymbol{\beta}_x, \\ \mathbf{B}_x &= \mathbf{I} + \boldsymbol{\beta}_x + \boldsymbol{\beta}_x^T + \boldsymbol{\beta}_x \boldsymbol{\beta}_x^T. \end{aligned} \tag{1.1.313}$$

Меры деформации в криволинейных координатах. Определим представление мер Коши – Грина в криволинейных координатах. Для этого, в силу их определения, необходимо вначале найти компоненты транспонированного отображения \mathbf{F}^T в локальном базисе. Если $\mathbf{F} = F_j^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}^j$ — представление исходного градиента деформации в криволинейных координатах, то представление транспонированного отображения имеет вид $\mathbf{F}^T = (\mathbf{F}^T)_l^k \mathbf{E}_k \otimes \mathbf{e}^l$. Полагая $\mathbf{u} = \mathbf{E}_j$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_l$ в (1.1.310), получаем

$$g_{il} F_j^i = (\mathbf{F}^T)_l^k G_{jk}.$$

Домножая обе части последнего равенства на G^{js} и суммируя по j , окончательно приходим к формуле

$$(\mathbf{F}^T)_l^s = g_{il} G^{js} F_j^i. \quad (1.1.314)$$

Получим теперь соответствующее представление для правого тензора Коши–Грина. Поскольку $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, получаем $\mathbf{C} = (\mathbf{F}^T)_i^k F_j^i \mathbf{E}_k \otimes E^j$. Это соотношение и (1.1.314) влекут

$$\mathbf{C}_x = g_{si}|_{\gamma(x)} G^{kl}|_x \frac{\partial q^s}{\partial Q^l} \Big|_{\tilde{\sigma}_\alpha(x)} \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \Big|_{\tilde{\sigma}_\alpha(x)} \mathbf{E}_k|_x \otimes E^j|_x.$$

Аналогично можно прийти к соотношению для левого тензора Коши–Грина. Действительно, поскольку $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$, получаем $\mathbf{B} = (\mathbf{F}^T)_l^k F_k^i \mathbf{e}_i \otimes e^l$. Из последнего выражения и той же формулы (1.1.314) вытекает, что

$$\mathbf{B}_x = g_{sl}|_{\gamma(x)} G^{jk}|_x \frac{\partial q^s}{\partial Q^j} \Big|_{\tilde{\sigma}_\alpha(x)} \frac{\partial q^i}{\partial Q^k} \Big|_{\tilde{\sigma}_\alpha(x)} \mathbf{e}_i|_{\gamma(x)} \otimes e^l|_{\gamma(x)}.$$

Связь с метриками. Меры Коши–Грина связаны с метрическими тензорами посредством следующих геометрических соотношений. Применяя музыкальный изоморфизм $(\cdot)^{bb}$, ассоциированный с метрическим тензором \mathbf{G} , к полю \mathbf{C} , приходим к полю билинейных функционалов $\mathbf{C}^{bb} : \mathcal{X} \mapsto \mathbf{C}_x^{bb}$,

$$\mathbf{C}_x^{bb} = g_{si}|_{\gamma(x)} \frac{\partial q^s}{\partial Q^m} \Big|_{\tilde{\sigma}_\alpha(x)} \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \Big|_{\tilde{\sigma}_\alpha(x)} E^m|_x \otimes E^j|_x.$$

Последнее равенство влечет, что

$$\mathbf{C}^{bb} = \gamma^* \mathbf{g}.$$

Пусть теперь $(\cdot)^{\sharp p}$ обозначает музыкальный изоморфизм, порожденный тензором \mathbf{g} . Тогда для поля \mathbf{B} имеем поле билинейных функционалов $\mathbf{B}^{\sharp p} : \mathcal{X} \mapsto \mathbf{B}_x^{\sharp p}$,

$$\mathbf{B}_x^{\sharp p} = G^{jk}|_x \frac{\partial q^m}{\partial Q^j} \Big|_{\tilde{\sigma}_\alpha(x)} \frac{\partial q^i}{\partial Q^k} \Big|_{\tilde{\sigma}_\alpha(x)} \mathbf{e}_i|_{\gamma(x)} \otimes \mathbf{e}_m|_{\gamma(x)}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{B}^{\sharp p} = \gamma_* (\mathbf{G}^*).$$

1.4. УСЛОВИЯ СОВМЕСТИСТИ

Вопрос: Дано гладкое тензорное поле $\mathbf{F} : \mathcal{B} \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$. При каких условиях оно является совместным, т.е., порождается некоторой деформацией?

1.4.1. Обзор когомологий де Рама

Точные и замкнутые формы. Соотношения (1.1.39) показывают, что градиент деформации \mathbf{F} может быть рассмотрен как тройка дифференциальных 1-форм на \mathcal{B} . Это наблюдение позволяет использовать такие понятия, как *точная форма*, *замкнутая форма*, и т.д., для изучения вопроса об условии совместности.

Пусть \mathcal{M} — гладкое n -мерное многообразие. Определена последовательность $\{\Omega^k(\mathcal{M})\}$ модулей дифференциальных форм и операций внешнего дифференцирования $\{d^k : \Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M})\}$:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\mathcal{M}) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(\mathcal{M}) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(\mathcal{M}) \xrightarrow{d^2} \Omega^3(\mathcal{M}) \longrightarrow \dots \quad (1.1.41)$$

В соответствии с свойством $d \circ d = 0$ внешнего дифференциала, выполняются равенства

$$d^{k+1} \circ d^k = 0. \quad (1.1.42)$$

Определение 1.4. Последовательность (1.1.41) называется **комплексом де Рама**.

Дифференциальная k -форма $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$ называется **замкнутой**, если $d^k \omega = 0$, и **точной** при $\omega = d^{k-1} \eta$ для некоторой дифференциальной $(k-1)$ -формы $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathcal{M})$. Согласно равенству (1.1.42), каждая точная форма замкнута. Вместе с тем, обратное утверждение в общем случае не верно. Его истинность зависит от топологии полдежащего многообразия и изучается в рамках теории когомологий де Рама.

Пусть $1 \leq k \leq n$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} Z^k(\mathcal{M}) &= \text{Ker}(d^k : \Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M})), \\ B^k(\mathcal{M}) &= \text{Im}(d^{k-1} : \Omega^{k-1}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^k(\mathcal{M})). \end{aligned}$$

Векторное пространство $Z^k(\mathcal{M})$ является пространством всех замкнутых k -форм, а векторное пространство $B^k(\mathcal{M})$ является векторным пространством всех точных k -форм. Поскольку $B^k(\mathcal{M}) \subset Z^k(\mathcal{M})$, можно ввести

следующее отношение эквивалентности:

$$\forall \omega, \eta \in \Omega^k(\mathcal{M}) : (\omega \sim \eta) \Leftrightarrow (\exists \tau \in \Omega^{k-1}(\mathcal{M})) : \omega - \eta = d^{k-1}\tau.$$

Определение 1.5. *Факторпространство*

$$H_{dR}^k(\mathcal{M}) := Z^k(\mathcal{M}) / B^k(\mathcal{M})$$

называется k -мерной группой когомологий де Рама.

Нулевые когомологии. По построению, утверждение «каждая замкнутая k -форма на \mathcal{M} точна» эквивалентно равенству $H_{dR}^k(\mathcal{M}) = 0$. В частности (см., например, [8]):

- Если многообразие \mathcal{M} стягиваемо в точку, т.е., тождественное отображение $\text{Id}_{\mathcal{M}}$ гладко гомотопно³ постоянному отображению, то $H_{dR}^k(\mathcal{M}) = 0$.
- Если \mathcal{M} — гладкое многообразие, то каждая точка \mathcal{M} имеет окрестность, на которой каждая замкнутая форма точна.

1.4.2. Необходимые и достаточные условия совместности

Совместность и точность. Пусть $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ — некоторая деформация. Поскольку каждое координатное отображение $\gamma^i, i = 1, 2, 3$, есть гладкая скалярная функция, то к нему применим внешний дифференциал, что дает

$$d\gamma^i = F^i \in \Omega^1(\mathcal{B}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Полученные поля F^i являются точными формами на \mathcal{B} . Обратно, если $F^i \in \Omega^1(\mathcal{B}), i = 1, 2, 3$, — некоторые точные 1-формы, то можно найти три гладкие функции $\gamma^i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$, такие, что $F^i = d\gamma^i$. Эти функции могут быть рассмотрены как компоненты некоторого гладкого отображения γ . Для последнего, $T\gamma = \partial_{x^i} \otimes F^i$.

Пусть $F^i \in \Omega^1(\mathcal{B}), i = 1, 2, 3$, — произвольные 1-формы. Если существует гладкое отображение $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$, для которого $F^i = d\gamma^i, i = 1, 2, 3$, то эти формы называются **совместными**. Приходим, таким образом, к необходимому и достаточному условию: 1-формы $F^i \in \Omega^1(\mathcal{B}), i = 1, 2, 3$, совместны тогда и только тогда, когда они все точны.

³Два гладких отображения f_0 и f_1 гладких многообразий \mathcal{M} и \mathfrak{N} называются гладко гомотопными, если существует гладкое отображение $F : \mathcal{M} \times [0, 1] \rightarrow \mathfrak{N}$, такое, что $F(\cdot, i) = f_i, i = 0, 1$.

Совместность и односвязность. Вопрос о совместности деформаций, таким образом, тесно связан с внутренними свойствами топологического пространства \mathcal{B} . В частности, пусть пространство \mathcal{B} односвязно, т.е., любая замкнутая кривая в нем может быть непрерывно стянута в точку, оставаясь всегда внутри \mathcal{B} . Тогда $H_{dR}^1(\mathcal{B}) = 0$ и требование точности может быть заменено более слабым требованием замкнутости: 1-формы F^i , $i = 1, 2, 3$, совместны если и только если они все замкнуты. Аналитически это условие означает, что $dF^i = 0$, $i = 1, 2, 3$. В терминах классической механики это условие записывается в виде одного равенства:

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Совместность в общем случае. Условия $dF^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, становятся лишь необходимыми и теряют достаточность в том случае, когда форма \mathcal{B} имеет дыры или иные патологии, нарушающие односвязность. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия совместности в этом случае:

Теорема 1.1. *Необходимыми и достаточными условиями совместности полей F^i являются следующие соотношения:*

(i) $dF^i = 0$, $i = 1, 2, 3$;

(ii) $\int_{c_k} F^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, \beta_1(\mathcal{B})$. Здесь $\beta_1(\mathcal{B})$ — число Бетти, соответствующее \mathcal{B} , а c_k — генераторы⁴ $H_1(\mathcal{B}; \mathbb{R})$.

Доказательство этого утверждения содержится в [10].

Замечание 1.6. Число Бетти $\beta_k(\mathcal{B})$ является топологическим инвариантом, характеризующим число k -мерных дыр [9, 11].

Локальные условия совместности. Физическое пространство, вмещающее формы тел, евклидово. Это означает, в частности, что его тензор кривизны равен нулю: $\mathfrak{R}(\mathbf{g}) = \mathbf{0}$, где \mathbf{g} — пифагорова метрика. Поэтому отсчетная форма также является евклидовым многообразием:

$$\gamma^* \mathfrak{R}(\mathbf{g}) = \mathbf{0}.$$

⁴Здесь $H_1(\mathcal{B}; \mathbb{R})$ — первая группа гомологий с вещественными коэффициентами [9].

С другой стороны,

$$\gamma^* \mathfrak{R}(\mathbf{g}) = \mathfrak{R}(\gamma^* \mathbf{g}) = \mathfrak{R}(\mathbf{C}^b),$$

где \mathbf{C}^b — поле билинейных функционалов, полученное опусканием индекса у правого тензора Коши–Грина \mathbf{C} . Таким образом, необходимым условием совместности тензора \mathbf{C} является равенство

$$\mathfrak{R}(\mathbf{C}^b) = \mathbf{0}.$$

Наряду с этим, как показано в [7], это условие также достаточно, но лишь локально.

Замечание 1.7. Применяя музыкальный изоморфизм $(\cdot)^b$ к первой «лапе» базисной диады, приходим к следующему представлению:

$$\mathbf{C}^b_x = C_{mn}|_x i^m \otimes i^n, \quad \text{где} \quad C_{mn}|_x = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x^k}{\partial X^m} \Big|_x \frac{\partial x^k}{\partial X^n} \Big|_x.$$

В компонентах равенство $\mathfrak{R}(\mathbf{C}^b) = \mathbf{0}$ может быть записано как

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\mathbf{C}^b) = & \frac{1}{2} (\partial_k \partial_j C_{im} + \partial_i \partial_m C_{jk} - \partial_m \partial_j C_{ik} - \partial_i \partial_k C_{jm}) + \\ & + (\mathbf{C}^{-1})^{rs} (A_{jkr} A_{ims} - A_{jmr} A_{iks}) = 0, \end{aligned} \quad (1.1.43)$$

где

$$A_{ijk} = A_{jik} = \frac{1}{2} (\partial_j C_{ik} + \partial_i C_{jk} - \partial_k C_{ij}).$$

Приближение малых деформаций. При аппроксимации конечных деформаций инфинитезимальными, квадратичными членами в (1.1.43) можно пренебречь. В этом случае последнее условие можно записать в более простой форме Сен-Венана:

$$\partial_k \partial_j \varepsilon_{im} + \partial_i \partial_m \varepsilon_{jk} - \partial_m \partial_j \varepsilon_{ik} - \partial_i \partial_k \varepsilon_{jm} = 0.$$

Аналог этого соотношения в криволинейных координатах можно найти в [12]. Используя оператор Гамильтона ∇ можно записать

$$\text{Ink}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \quad \text{Ink}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{curl curl}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^T.$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций, $\boldsymbol{\varepsilon} := [\nabla \mathbf{u}]^{\text{sym}}$, а \mathbf{u} — векторное поле перемещений.

В классических работах по теории упругости условия интегрируемости формулируются в терминах полей малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = [\nabla \mathbf{u}]^{\text{sym}}$ и вихрей $\boldsymbol{\omega} = [\nabla \mathbf{u}]^{\text{asym}}$ следующим образом:

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} - (\nabla \vec{\boldsymbol{\omega}})^{\text{T}} = \mathbf{0},$$

где $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ — векторное поле, ассоциированное с $\boldsymbol{\omega}$. Повышая порядок дифференцирования в левой части этого равенства, получаем независимые соотношения для $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$. Ими являются: уравнение Сен-Венана.

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^{\text{T}} = \mathbf{0},$$

и равенство

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0.$$

Вместе с тем, эти условия необходимы, но недостаточны; при их выполнении поле перемещений, соответствующее заданным $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$, определяется с точностью до жесткого движения и градиента некоторой скалярной функции [13]. Если этот произвол нивелируется дополнительными условиями (например, граничными условиями), то перемещения однозначно определяются по формулам Чезаро.

С использованием тензора изгиба-кручения⁵

$$\boldsymbol{\kappa} = \nabla \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

можно сформулировать более общие условия совместности [13]:

$$\nabla \times \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\kappa} = -(\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^{\text{T}}. \quad (1.1.44)$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными. Последнее условие явно показывает связь между малыми деформациями и вихрями.

Замечание 1.8. *Условия совместности можно вывести без использования рассуждений, апеллирующих к неевклидовой геометрии. Действительно, в случае малых деформаций совместность деформаций является тривиальным следствием симметрии частных производных относительно порядка дифференцирования (теорема Шварца). Этот вывод воспроизводится во всех руководствах по линейной теории упругости. В случае конечных деформаций условие совместности можно получить прямым дифференцированием мер деформации, см., например [15].*

⁵В работе [14] тензор $\boldsymbol{\kappa}$ называется диадой кривизны-поворота.

Определение перемещений по известной мере деформаций. Для заданных 1-форм F^i можно определить позиции материальных точек в актуальной форме:

$$x(p) = \int_{p_0}^p \partial_i \otimes F^i \lrcorner \dot{\chi},$$

где χ — кривая в отсчетной форме, которая начинается в p_0 и заканчивается в переменной точке p .

Если поля $\boldsymbol{\kappa}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ известны и удовлетворяют условию (1.1.44), то искомые вихри и перемещения определяются формулами типа Чезаро [13]:

$$\vec{\omega}(\mathbf{r}) = \vec{\omega}(\mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}'),$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) + \vec{\omega}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}') + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\},$$

в которых \mathbf{r}_0 есть радиус-вектор фиксированной точки. Эти соотношения определяют однозначные векторные поля, которые не зависят от пути интегрирования (что следует из теоремы Стокса и условий совместности (1.1.44)).

1.5. Движение

Движение — это однопараметрическое семейство деформаций: $M = \{\gamma_t\}_{t \in \mathbb{T}}$, где $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ — хронометрический интервал вещественной оси, а $\gamma_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}_t$ — деформация. Выбирая точку $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, определим кривую

$$\chi_{M; \mathcal{X}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \chi_{M; \mathcal{X}}(t) := \gamma_t(\mathcal{X}),$$

представляющую пространственную траекторию частицы с меткой \mathcal{X} .

Часто удобно рассматривать движение M как отображение

$$\gamma : \mathcal{B} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \gamma(\mathcal{X}, t) := \gamma_t(\mathcal{X}),$$

от двух переменных. Предположим, что для всех $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ и $t \in \mathbb{T}$ частные отображения

$$\gamma(\cdot, t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \gamma(\mathcal{X}, \cdot) : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{E},$$

являются гладкими. В таком случае движение M называется **гладким движением**.

Для гладкого движения определяется градиент деформации

$$\mathbf{F} : \mathcal{B} \times \mathbb{T} \rightarrow \text{End}(\mathcal{V}), \quad \mathbf{F}(\mathcal{X}, t) := \frac{\partial \gamma(\mathcal{X}, t)}{\partial \mathcal{X}},$$

а также поля скорости и ускорения:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} : \mathcal{B} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{V}(\mathcal{X}, t) &:= \lim_{\mathbb{T}_t \ni s \rightarrow 0} \frac{\gamma(\mathcal{X}, t+s) - \gamma(\mathcal{X}, t)}{s}, \\ \mathbf{A} : \mathcal{B} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{A}(\mathcal{X}, t) &:= \lim_{\mathbb{T}_t \ni s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}(\mathcal{X}, t+s) - \mathbf{V}(\mathcal{X}, t)}{s}, \end{aligned}$$

где $\mathbb{T}_t = \{s \in \mathbb{R} \mid (s \neq 0) \wedge (t+s \in \mathbb{T})\}$.

1.6. Напряжения

Идеи, приводящие к математической формализации напряжений в деформируемом твердом теле⁶, содержатся в работах Якоба Бернулли, Иоганна Бернулли и Леонарда Эйлера [18, 19]. Понятие напряжений как тензорного поля второго ранга, обобщающее понятие гидростатического давления в идеальной жидкости, было сформулировано в работах Коши [20, 21] и развито в исследованиях Пуассона и Навье [22]. Отметим, что координатное представление таких полей предполагало определенную аналитическую свободу, поскольку использовались различные системы координат, связанные с отсчетной и актуальной формами. В этом случае возникает необходимость в координатных преобразованиях, общий вид которых был дан Пиола [23].

Классическая теория Коши основана на принципах *разрезания* и *замораживания*⁷. В соответствии с первым из них, при вырезании *части* \mathcal{U} — открытого подмножества с произвольной кусочно-гладкой границей $\text{Fr } \mathcal{U}$, — из актуальной формы \mathcal{S} действие оставшейся части формы на \mathcal{U} может быть заменено плотностью контактных сил \mathbf{t}_n , распределенной

⁶Подробное изложение исторических аспектов теории напряжений приведено в работах [16, 17].

⁷По-видимому, принцип разрезания восходит к работам Галилея, а принцип замораживания был сформулирован Симоном Стевином [24] в 1586 году (Stevin S. De beghinselen des waterwichts, 1586). Копия соответствующей страницы может быть найдена в работе [17, стр. 198]. Заметим, что Стевин рассматривал равновесие жидкости, мысленно перенося законы статики абсолютно твердого тела на произвольную ее часть. Это и отражено в названии «замораживание».

по границе $\text{Fr } \mathcal{U}$ [25, 26]. Здесь \mathbf{n} — векторное поле внешних единичных нормалей к $\text{Fr } \mathcal{U}$. Принимается, что результирующая сила $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$, действующая на часть \mathcal{U} , является суммой контактных и объемных сил:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}} = \int_{\text{Fr } \mathcal{U}} \mathbf{t}_n dS + \int_{\mathcal{U}} \mathbf{b} dV,$$

где \mathbf{b} — плотность контактных сил. Для формализации контактных сил Коши принял постулат о зависимости их плотности \mathbf{t}_n лишь от нормали \mathbf{n} к поверхности разреза, т.е.,

$$\mathbf{t}_n(x) := \mathbf{t}(x, \mathbf{n}).$$

Это позволило ему (в соответствии с определенными соглашениями о гладкости и благодаря знаменитому доказательству, использующему тетраэдр) доказать «равенство действия и противодействия»:

$$-\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_{-n},$$

а затем — доказать существование тензорного поля напряжений $\mathbf{T} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^*$, т.е., поля линейных преобразований внешней единичной нормали \mathbf{n} к плотности контактных сил: \mathbf{t}_n :

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}\mathbf{n}.$$

Замечание 1.9. В середине XX века в работах Нолла была переформулирована теорема Коши о существовании тензора напряжений и построено более общее доказательство, в котором использовались не три линейно независимых вектора, а всего два. Доказательство было разделено на доказательство однородности и аддитивности соотношений, определяющих связь между единичной нормалью и плотностью контактных сил [27].

Заметим, что в классических рассуждениях часть формы рассматривалась как «хорошее» подмножество евклидова пространства. Позднее, в рамках теории потенциала (О. Келлог [1]), понятие «хорошего» подмножества было уточнено: это открытое множество, которое ограничено конечным числом гладких регулярных элементарных поверхностей. Каждая из последних, в свою очередь, представляется в виде графика некоторой гладкой функции (см. раздел 1.1). Такое требование позволяет использовать теорему Стокса в ее евклидовой формулировке. Наконец,

применяя принцип замораживания и используя законы динамики Эйлера, можно записать:

$$\int_{\text{Fr } \mathcal{U}} \mathbf{t}_n dS + \int_{\mathcal{U}} \mathbf{b} dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \rho \dot{\mathbf{u}} dV,$$

$$\int_{\text{Fr } \mathcal{U}} \mathbf{p} \times \mathbf{t}_n dS + \int_{\mathcal{U}} \mathbf{p} \times \mathbf{b} dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \rho \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{u}} dV.$$

Здесь \mathbf{u} — векторное поле перемещений, \mathbf{p} — поле векторов места, ρ — плотность массы. Поскольку часть \mathcal{U} произвольна, из теоремы Рейнольдса о переносе получаем дифференциальные уравнения движения:

$$\text{div } \mathbf{T} - \rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}^T = \mathbf{T}.$$

Предположим теперь, что имеются отсчетная и актуальная формы \mathcal{B} и \mathcal{S} соответственно, которые связаны деформацией $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$. Пусть \mathcal{U}_0 — часть \mathcal{B} , сама являющаяся формой, а $\mathcal{U} = \gamma(\mathcal{U}_0)$. Пусть, далее, \mathbf{N} и \mathbf{n} — поля внешних единичных нормалей к границам $\text{Fr } \mathcal{U}_0$ и $\text{Fr } \mathcal{U}$.

Плотность контактных сил \mathbf{t}_n и тензор напряжений Коши $\mathbf{T} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^*$ относятся к эйлеровому описанию, т.е., они позволяют определить контактную силу, действующую на $\text{Fr } \mathcal{U}$ в актуальных координатах. Преобразуя поверхностный интеграл по $\text{Fr } \mathcal{U}$ в интеграл по $\text{Fr } \mathcal{U}_0$, приходим к равенству [2]

$$\mathcal{C} = \int_{\text{Fr } \mathcal{U}} \mathbf{T} \mathbf{n} dS = \int_{\text{Fr } \mathcal{U}_0} \mathbf{P} \mathbf{N} dS_0,$$

где dS_0 — отсчетный элемент поверхности, а dS — актуальный элемент, связанные формулой Хансона [6]

$$\mathbf{n} dS = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dS_0,$$

а $\mathbf{P} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^*$ — первый тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа, связанный с тензором Коши \mathbf{T} преобразованием Пиолы [4]

$$J \mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{F}^T,$$

в котором J — определитель \mathbf{F} (1.1.35). Вводя плотность контактных сил в отсчетной форме, $\mathbf{t}_{R;N}$, приходим к равенству

$$\mathbf{t}_{R;N} = \mathbf{P} \mathbf{N}.$$

Замечание 1.10. В рамках этой книги мы используем тензоры напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа первого рода, хотя существуют и другие меры напряжений. Примерами могут служить второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа \mathbf{S} и тензор напряжений Кирхгофа $\boldsymbol{\tau}$. Они связаны с тензорами напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа первого рода следующим образом: [28]:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}\mathbf{T}.$$

1.7. Нелинейная упругость как теория поля

1.7.1. Действие и лагранжиан

Рассмотрим элементы теории поля, позволяющие вывести уравнения движения и законы сохранения для деформируемого твердого тела в отсчетном и пространственном описаниях. Для этой цели используется наиболее «экономичный» способ рассуждений (по Э. Маху), основанный на вариационном исчислении. Пусть \mathcal{B} — произвольная форма, выбранная в качестве отсчетной, и пусть $\mathfrak{M} \subset \mathcal{E}^{\mathcal{B} \times \mathbb{T}}$ — множество всех движений. Основной объект настоящих рассуждений — *действие*, которое является отображением

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Предполагается справедливым *принцип аддитивности действия*: существует гладкое отображение

$$\mathfrak{L} : \mathcal{B} \times \mathbb{T} \times \mathcal{E} \times \mathcal{V} \times \text{End}(\mathcal{V}) \times \cdots \times \text{Lin}_r(\mathcal{V}, \dots, \mathcal{V}; \mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathfrak{L} : (X, t, x, \mathbf{u}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r) \mapsto \mathfrak{L}(X, t; x, \mathbf{u}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r),$$

называемое *плотностью лагранжиана*, такое, что

$$\mathfrak{A}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \mathfrak{L}(X, t, \gamma(X, t), \mathbf{V}(X, t), \mathbf{F}(X, t), \dots, \mathbf{F}^{(r)}(X, t)) dV dt, \quad (1.1.71)$$

для любых движений $\gamma \in \mathfrak{M}$, моментов времени $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$, и части $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$ отсчетной формы. Значение r в (1.1.71) определяет порядок теории (в рассматриваемом случае мы имеем *упругое тело в теории r -того градиента*).

Замечание 1.11. *Список переменных, представленных в плотности лагранжиана, зависит от рассматриваемой теории. Например, в термоупругости к этому списку следует добавить скалярное поле температуры. В более общем случае плотность лагранжиана может содержать также смешанные производные по пространству и времени и высокие производные по времени.*

Далее рассматривается случай $r = 1$. Таким образом, формула (1.1.71) сводится к

$$\mathfrak{A}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \mathfrak{L}(X, t, \gamma(X, t), \mathbf{V}(X, t), \mathbf{F}(X, t)) dV dt. \quad (1.1.72)$$

Будем говорить, что рассматривается теория *первого градиента* или *простого материала*.

Помимо этого, ограничим себя следующей формой плотности лагранжиана⁸:

$$\mathfrak{L}(X, t, \gamma(\mathfrak{X}), \mathbf{V}(\mathfrak{X}), \mathbf{F}(\mathfrak{X})) = \frac{1}{2} \rho_R(X) \mathbf{V}(\mathfrak{X})^2 - W(X, \mathbf{F}(\mathfrak{X})) - \Phi(\gamma(\mathfrak{X}), t), \quad (1.1.73)$$

где ρ_R — объемная плотность тела в отсчетном состоянии, W — упругий потенциал, а Φ — потенциал физических полей.

Замечание 1.12. *Эквивалентно, действие (1.1.72) может быть записано в виде*

$$\mathfrak{A}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} (\mathfrak{K} - \mathfrak{W} + \mathfrak{P}) dt,$$

где $\mathfrak{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \rho_R \mathbf{V}^2 dV$ — кинетическая энергия, $\mathfrak{W} = \int_{\mathcal{R}} W dV$ — запасенная упругая энергия, а $\mathfrak{P} = - \int_{\mathcal{R}} \Phi dV$ — работа, совершаемая внешними силами.

1.7.2. Частные и полные вариации

Вариации. Определим однопараметрическое семейство $\{g(\varepsilon)\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ преобразований координат и полей. Предполагается, что элементы этого семейства образуют группу Ли G с групповыми свойствами

$$g(0) = \text{Id}, \quad g(\varepsilon) \circ g(\mu) = g(\varepsilon + \mu).$$

⁸Здесь символ \mathfrak{X} обозначает пару (X, t) .

Действие $(X, t, \gamma(X, t)) \mapsto g(\varepsilon) \circ (X, t, \gamma(X, t))$ группы G на тройку $(X, t, \gamma(X, t))$ порождает следующие отображения:

$$\begin{aligned}\tilde{X} &: (X, t, \varepsilon) \mapsto \tilde{X}(X, t, \varepsilon), & \tilde{t} &: (X, t, \varepsilon) \mapsto \tilde{t}(X, t, \varepsilon), \\ \tilde{\gamma} &: (X, t, \varepsilon) \mapsto \tilde{\gamma}(\tilde{X}(X, t, \varepsilon), \tilde{t}(X, t, \varepsilon); \varepsilon).\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{X}(X, t, 0) = X$, $\tilde{t}(X, t, 0) = t$, и $\tilde{\gamma}(\tilde{X}(X, t, 0), \tilde{t}(X, t, 0); 0) = \gamma(X, t)$.

Под действием группы G интеграл (1.1.72) преобразуется в

$$\tilde{\mathfrak{A}}(\varepsilon) = \int_{\tilde{t}_1(\varepsilon)}^{\tilde{t}_2(\varepsilon)} \int_{\tilde{\mathcal{B}}(\varepsilon)} \mathfrak{L}(\tilde{X}(X, t, \varepsilon), \tilde{t}(X, t, \varepsilon), \dots) d\tilde{V}(\varepsilon) d\tilde{t}(\varepsilon). \quad (1.1.74)$$

Вариации пространственных и временных переменных имеют вид⁹:

$$\overrightarrow{\delta X} = \left. \frac{d\tilde{X}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon, \quad \delta t = \left. \frac{d\tilde{t}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon.$$

По определению, полная вариация деформации может быть выражена как

$$\delta\gamma = \left. \frac{d\tilde{\gamma}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\tilde{X}} \frac{d\tilde{X}}{d\varepsilon} + \frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{d\varepsilon} + \frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\varepsilon} \right) \Bigg|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon,$$

и, соответственно,

$$\delta\gamma = \bar{\delta}\gamma + \mathbf{F}[\overrightarrow{\delta X}] + \mathbf{V}\delta t, \quad (1.1.75)$$

где $\bar{\delta}\gamma$ обозначает частную вариацию

$$\bar{\delta}\gamma = \left. \frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon.$$

Определим следующие отображения:

$$\mathfrak{f} : \mathcal{B} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{T} \times \mathcal{E} \times \mathcal{V} \times \text{End}(\mathcal{V}),$$

такое, что $\mathfrak{f}(X, t) := (X, t, \gamma(X, t), \mathbf{V}(X, t), \mathbf{F}(X, t))$, и

$$\tilde{\mathfrak{f}} : \mathcal{B} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{T} \times \mathcal{E} \times \mathcal{V} \times \text{End}(\mathcal{V}),$$

такое, что $\tilde{\mathfrak{f}}(X, t, \varepsilon) := \mathfrak{L}(\tilde{X}(X, t, \varepsilon), \tilde{t}(X, t, \varepsilon), \dots)$. Их композиции с плотностью лагранжиана

$$\mathfrak{L} : (X, t, x, \mathbf{u}, \mathbf{f}) \mapsto \mathfrak{L}(X, t, x, \mathbf{u}, \mathbf{f})$$

⁹Заметим, что $\overrightarrow{\delta X}$ — векторное поле, а δt — скалярное поле.

приводят к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{L}} &= \mathfrak{L} \circ \mathfrak{f}: (X, t) \mapsto \mathfrak{L}(X, t, \gamma(X, t), \mathbf{V}(X, t), \mathbf{F}(X, t)), \\ \widetilde{\mathfrak{L}} &= \mathfrak{L} \circ \widetilde{\mathfrak{f}}: (X, t, \varepsilon) \mapsto \mathfrak{L}(\widetilde{X}(X, t, \varepsilon), \widetilde{t}(X, t, \varepsilon), \dots).\end{aligned}$$

В настоящем разделе используется следующее обозначение. Если $h: \mathcal{B} \times \mathbb{T} \times \mathcal{E} \times \mathcal{V} \times \text{End}(\mathcal{V}) \rightarrow P$ — отображение со значениями в некотором множестве P , то $h|_{\mathfrak{f}}$ обозначает $h \circ \mathfrak{f}$. Это отображение, заданное на $\mathcal{B} \times \mathbb{T}$ и со значениями в P . Используется аналогичное обозначение для $\widetilde{\mathfrak{f}}$.

Первая форма $\delta \mathfrak{A}$. Рассмотрим теперь вариацию действия (1.1.74). Принимая во внимание, что область интегрирования зависит от ε , приходим к равенству

$$\begin{aligned}\delta \mathfrak{A} &= \left. \frac{d\widetilde{\mathfrak{A}}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \\ &= \left. \left[\int_{\widetilde{t}_1(\varepsilon)}^{\widetilde{t}_2(\varepsilon)} \int_{\widetilde{\mathcal{R}}(\varepsilon)} \left(\frac{d\widetilde{\mathfrak{L}}}{d\varepsilon} + \widetilde{\mathfrak{L}} \operatorname{div} \left(\frac{d\widetilde{X}}{d\varepsilon} \right) + \widetilde{\mathfrak{L}} \frac{d}{dt} \frac{d\widetilde{t}}{d\varepsilon} \right) d\widetilde{V} d\widetilde{t} \right] \right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon,\end{aligned}$$

или, эквивалентно,

$$\delta \mathfrak{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \left(\delta \widehat{\mathfrak{L}} + \widehat{\mathfrak{L}} \operatorname{div}_R \overrightarrow{\delta X} + \widehat{\mathfrak{L}} \frac{d}{dt} \delta t \right) dV dt. \quad (1.1.76)$$

Здесь $\delta \widehat{\mathfrak{L}} = \left. \frac{d\widetilde{\mathfrak{L}}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon$ есть вариация плотности лагранжиана, которая может быть вычислена с использованием цепного правила дифференцирования:

$$\begin{aligned}\delta \widehat{\mathfrak{L}} &= \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \Big|_{\widetilde{\mathfrak{f}}} \left[\frac{d\widetilde{X}}{d\varepsilon} \right] + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \Big|_{\widetilde{\mathfrak{f}}} \left[\frac{d\widetilde{t}}{d\varepsilon} \right] + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} \Big|_{\widetilde{\mathfrak{f}}} \left[\frac{d\widetilde{\gamma}}{d\varepsilon} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\widetilde{\mathfrak{f}}} \left[\frac{d\dot{\widetilde{\gamma}}}{d\varepsilon} \right] + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{f}} \Big|_{\widetilde{\mathfrak{f}}} \left[\frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial \widetilde{X}} \right] \right) \Big|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon.\end{aligned}$$

Принимая во внимание равенства

$$\frac{\partial \widehat{\mathfrak{L}}}{\partial X} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \Big|_{\mathfrak{f}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} \Big|_{\mathfrak{f}} \frac{\partial \gamma}{\partial X} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathfrak{f}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial X} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{f}} \Big|_{\mathfrak{f}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X}, \quad (1.1.77)$$

$$\frac{\partial \widehat{\mathfrak{L}}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \Big|_{\mathfrak{f}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} \Big|_{\mathfrak{f}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathfrak{f}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{f}} \Big|_{\mathfrak{f}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}, \quad (1.1.78)$$

совместно с (1.1.75), приходим к следующему результату¹⁰:

$$\delta \widehat{\mathfrak{L}} = \frac{\partial \widehat{\mathfrak{L}}}{\partial X} [\overrightarrow{\delta X}] + \frac{\partial \widehat{\mathfrak{L}}}{\partial t} [\delta t] + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} \Big|_{\mathfrak{f}} [\overline{\delta \gamma}] + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathfrak{f}} \left[\frac{d}{dt} \overline{\delta \gamma} \right] + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{f}} \Big|_{\mathfrak{f}} \left[\frac{\partial \overline{\delta \gamma}}{\partial X} \right]. \quad (1.1.79)$$

Значения $\mathfrak{x} \mapsto \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{f}}(\mathfrak{x})$ являются линейными отображениями из $\text{End}(\mathcal{V})$ в \mathbb{R} . Поскольку пространство $\text{End}(\mathcal{V})$ снабжено скалярным произведением (\cdot) , существует единственное поле $\mathfrak{L}_{\mathbf{f}} : \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{L}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{x}) \in \text{End}(\mathcal{V})$ линейных отображений, такое, что для любого поля $\mathbf{T} : \mathfrak{x} \mapsto \mathbf{T}(\mathfrak{x}) \in \text{End}(\mathcal{V})$ справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{f}}[\mathbf{T}] = \mathfrak{L}_{\mathbf{f}} : \mathbf{T}.$$

Аналогичные представления справедливы для полей $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{u}}$ линейных функционалов. Существуют единственные векторные поля $\mathfrak{L}_x : \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{L}_x(\mathfrak{x}) \in \mathcal{V}$ и $\mathfrak{L}_u : \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{L}_u(\mathfrak{x}) \in \mathcal{V}$, такие, что для любого векторного поля $\mathbf{v} : \mathfrak{x} \mapsto \mathbf{v}(\mathfrak{x}) \in \mathcal{V}$ выполнены следующие представления:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}[\mathbf{v}] = \mathfrak{L}_x \cdot \mathbf{v}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{u}}[\mathbf{v}] = \mathfrak{L}_u \cdot \mathbf{v}.$$

Следовательно, выражение (1.1.79) для $\delta \widehat{\mathfrak{L}}$ принимает вид:

$$\delta \widehat{\mathfrak{L}} = \frac{\partial \widehat{\mathfrak{L}}}{\partial X} [\overrightarrow{\delta X}] + \frac{\partial \widehat{\mathfrak{L}}}{\partial t} [\delta t] + \mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}} \cdot \overline{\delta \gamma} + \mathfrak{L}_u|_{\mathfrak{f}} \cdot \frac{d}{dt} \overline{\delta \gamma} + \mathfrak{L}_{\mathbf{f}}|_{\mathfrak{f}} : \frac{\partial \overline{\delta \gamma}}{\partial X}. \quad (1.1.710)$$

Подставляя (1.1.710) в (1.1.76) с учетом равенства

$$\frac{d}{dt} \left(\mathfrak{L}_u|_{\mathfrak{f}} \cdot \overline{\delta \gamma} \right) = \frac{d}{dt} \mathfrak{L}_u|_{\mathfrak{f}} \cdot \overline{\delta \gamma} + \mathfrak{L}_u|_{\mathfrak{f}} \cdot \frac{d}{dt} \overline{\delta \gamma},$$

¹⁰Заметим, что частная вариация перестановочна с операторами дифференцирования. То есть, $\overline{\delta \dot{\gamma}} = (d/dt)\overline{\delta \gamma}$, и $\overline{\delta \frac{\partial \gamma}{\partial X}} = \frac{\partial \overline{\delta \gamma}}{\partial X}$.

получаем

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \left\{ \operatorname{div}_R \left(\widehat{\mathfrak{L}} \overrightarrow{\delta X} + \mathfrak{L}_f^T|_f [\overline{\delta \gamma}] \right) + \frac{d}{dt} \left(\widehat{\mathfrak{L}} \delta t + \mathfrak{L}_u|_f \cdot \overline{\delta \gamma} \right) + \right. \\ \left. + \left(\mathfrak{L}_x|_f - \operatorname{div}_R \left(\mathfrak{L}_f|_f \right) - \frac{d}{dt} \left(\mathfrak{L}_u|_f \right) \right) \cdot \overline{\delta \gamma} \right\} dV dt. \end{aligned} \quad (1.1.711)$$

Вводя следующие обозначения для компонент *тока Нетер*:

$$\delta \mathbf{J}_1 = \mathfrak{L}|_f \overrightarrow{\delta X} + \mathfrak{L}_f^T|_f [\overline{\delta \gamma}], \quad (1.1.712)$$

$$\delta \mathbf{J}_2 = \mathfrak{L}|_f \delta t + \mathfrak{L}_u|_f \cdot \overline{\delta \gamma}, \quad (1.1.713)$$

и оператора Эйлера–Лагранжа:

$$\mathbb{E}_\gamma = \mathfrak{L}_x|_f - \operatorname{div}_R \left(\mathfrak{L}_f|_f \right) - \frac{d}{dt} \left(\mathfrak{L}_u|_f \right), \quad (1.1.714)$$

можно переписать (1.1.711) в лаконичной форме:

$$\delta \mathfrak{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \left\{ \operatorname{div}_R \delta \mathbf{J}_1 + \frac{d}{dt} \delta \mathbf{J}_2 + \mathbb{E}_\gamma \cdot \overline{\delta \gamma} \right\} dV dt. \quad (1.1.715)$$

Вторая форма $\delta \mathfrak{A}$. Получим теперь вторую форму для вариации действия $\delta \mathfrak{A}$. Имея в виду выражения (1.1.77), (1.1.78), и (1.1.710), наряду с соотношением (1.1.75) между частными и полными вариациями, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \delta \widehat{\mathfrak{L}} + \widehat{\mathfrak{L}} \operatorname{div}_R \overrightarrow{\delta X} + \widehat{\mathfrak{L}} \frac{d}{dt} \delta t = \\ = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \Big|_f [\overrightarrow{\delta X}] + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \Big|_f \delta t + \mathfrak{L}_x|_f \cdot \delta \gamma + \mathfrak{L}_u|_f \cdot \delta \dot{\gamma} + \\ + \mathfrak{L}_f|_f : \delta \frac{\partial \gamma}{\partial X} + \widehat{\mathfrak{L}} \operatorname{div}_R \overrightarrow{\delta X} + \widehat{\mathfrak{L}} \frac{d}{dt} \delta t. \end{aligned}$$

Принимая во внимание коммутационные соотношения

$$\delta \frac{d}{dt} \gamma = \frac{d}{dt} \delta \gamma - \frac{\partial \gamma}{\partial X} \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\delta X} \right] - \dot{\gamma} \frac{d}{dt} \delta t,$$

$$\delta \frac{\partial}{\partial X} \gamma = \frac{\partial}{\partial X} \delta \gamma - \frac{\partial \gamma}{\partial X} \frac{\partial \delta \vec{X}}{\partial X} - \dot{\gamma} \otimes \frac{\partial}{\partial X} \delta t,$$

и тождества

$$\operatorname{div}_R \delta \vec{X} = \mathbf{I} : \frac{\partial \delta \vec{X}}{\partial X},$$

$$\mathfrak{L}_f|_f : \frac{\partial \gamma}{\partial X} \frac{\partial \delta \vec{X}}{\partial X} = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial X} \right)^T \mathfrak{L}_f|_f : \frac{\partial \delta \vec{X}}{\partial X},$$

$$\mathfrak{L}_f|_f : \left(\dot{\gamma} \otimes \frac{\partial}{\partial X} \delta t \right) = \mathfrak{L}_f^T|_f [\dot{\gamma}] \lrcorner \frac{\partial}{\partial X} \delta t,$$

приходим к следующему выражению для $\delta \mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \Big|_f [\delta \vec{X}] + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \Big|_f \delta t + \left(\mathfrak{L}|_f \mathbf{I} - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial X} \right)^T \mathfrak{L}_f|_f \right) : \frac{\partial}{\partial X} \delta \vec{X} + \right. \\ \left. + \left(\mathfrak{L}|_f - \mathfrak{L}_u|_f \cdot \dot{\gamma} \right) \frac{d}{dt} \delta t + \mathfrak{L}_x|_f \cdot \delta \gamma + \mathfrak{L}_u|_f \cdot \frac{d}{dt} \delta \gamma - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial X} \right)^T \left[\mathfrak{L}_u|_f \right] \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{X} + \mathfrak{L}_f|_f : \frac{\partial}{\partial X} \delta \gamma - \mathfrak{L}_f^T|_f [\dot{\gamma}] \lrcorner \frac{\partial}{\partial X} \delta t \right\} dV dt. \end{aligned} \quad (1.1.716)$$

Стандартные обозначения. Введем теперь следующие обозначения для полей:

- тензор энергии-импульса Эшелби,

$$\mathbf{e} = \mathfrak{L}|_f \mathbf{I} - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial X} \right)^T \mathfrak{L}_f|_f,$$

- плотность гамильтониана,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}|_f - \mathfrak{L}_u|_f \cdot \dot{\gamma},$$

- плотность потока энергии (вектор Умова – Пойнтинга),

$$\mathbf{U} = \mathfrak{L}_f^T|_f [\dot{\gamma}],$$

- плотность канонического импульса,

$$\mathbf{K} = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial X} \right)^T \left[\mathfrak{L}_u|_f \right],$$

- плотность физического импульса,

$$\mathbf{p} = \mathfrak{L}_{\mathbf{u}}|_{\mathfrak{f}},$$

- тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа первого рода,

$$\mathbf{P} = - \mathfrak{L}_{\mathbf{f}}|_{\mathfrak{f}}.$$

С такими обозначениями выражение (1.1.716) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{A} = & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathfrak{R}} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathfrak{f}} [\delta \vec{X}] + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \Big|_{\mathfrak{f}} \delta t + \mathbf{e} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \delta \vec{X} + \mathfrak{H} \frac{d}{dt} \delta t + \mathfrak{L}_x|_{\mathfrak{f}} \cdot \delta \gamma + \right. \\ & \left. + \mathbf{p} \cdot \frac{d}{dt} \delta \gamma - \mathbf{K} \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{X} - \mathbf{P} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \delta \gamma - \mathbf{U} \lrcorner \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \delta t \right\} dV dt. \quad (1.1.717) \end{aligned}$$

Замечание 1.13. Обычно в теории поля используются следующие соглашения об обозначениях. Переменные плотности лагранжиана \mathfrak{L} обозначаются теми же символами, что и соответствующие поля. То есть, пишут

$$\mathfrak{L} : (X, t, \gamma, \mathbf{V}, \mathbf{F}) \mapsto \mathfrak{L}(X, t, \gamma, \mathbf{V}, \mathbf{F}),$$

и используют обозначения $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{V}}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{F}}$ для $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{u}}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{f}}$. Хотя эти обозначения не совсем корректны, они удобны. Другое общепринятое (но также, строго говоря, неверное) соглашение состоит в том, что $\mathfrak{L}_{\mathbf{f}}$ обозначается как $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{F}}$. Таким образом, имеются одинаковые обозначения для тензорного поля 3-го ранга и для соответствующего единственного тензорного поля 2-го ранга, которое связано с первым посредством операции $(:)$. Аналогичное замечание справедливо для \mathfrak{L}_x и $\mathfrak{L}_{\mathbf{u}}$. В силу таких соглашений (1.1.714) имеет следующее представление:

$$\mathbb{E}_{\gamma} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \gamma} - \operatorname{div}_R \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{F}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{V}}.$$

1.7.3. Уравнения поля

Рассмотрим частный случай, когда лишь физические поля (т.е., γ) подвергаются вариациям; тогда формула (1.1.715) сводится к равенству

$$\delta \mathfrak{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \mathbb{E}_\gamma \bar{\delta} \gamma \, dV \, dt.$$

Из последнего вытекает уравнение поля

$$\mathfrak{L}_x|_f - \operatorname{div}_R \left(\mathfrak{L}_f|_f \right) - \frac{d}{dt} \left(\mathfrak{L}_u|_f \right) = \mathbf{0},$$

или, в рамках обозначений, введенных выше,

$$\mathfrak{L}_x|_f + \operatorname{div}_R \mathbf{P} = \frac{d}{dt} \mathbf{p}.$$

Здесь $\mathfrak{L}_x|_f$ обозначает плотность внешних сил.

Поскольку поле \mathfrak{L} определено равенством (1.1.73), приходим к следующему уравнению поля в прямом описании¹¹:

$$\operatorname{div}_R \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = \rho_R \dot{\mathbf{V}}. \quad (1.1.718)$$

1.7.4. Условия инвариантности действия

Рассмотрим еще один частный случай, когда вариациям подвергаются только координаты. Более того, мы предполагаем, что эти вариации определяются группой Ли.

I. Сдвиги по пространству. Пусть $\tilde{X}(X, t, \varepsilon) = X + \varepsilon \mathbf{X}_0$, где $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{V}$ — постоянный вектор, и пусть $\tilde{t}(X, t, \varepsilon) = t$, $\tilde{\gamma}(X, t, \varepsilon) = \gamma$. Поскольку

$$\overrightarrow{\delta X} = \mathbf{X}_0 \delta \varepsilon, \quad \frac{d}{dt} \overrightarrow{\delta X} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial}{\partial X} \overrightarrow{\delta X} = \mathbf{0},$$

¹¹Заметим, что формально $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$ обозначает тензорное поле 3-го ранга. Но традиционно этот символ используется для обозначения единственного тензорного поля 2-го ранга, которое связано с первым посредством операции (:). Мы имеем в виду этот второй случай.

вариация (1.1.717) сводится к выражению

$$\delta \mathfrak{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \Big|_{\mathfrak{f}} [\mathbf{X}_0] \delta \varepsilon \right\} dV dt.$$

Равенство $\delta \mathfrak{A} = 0$ должно выполняться для любого сдвига по пространству. Поскольку вектор \mathbf{X}_0 произволен, приходим к следующему условию:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \Big|_{\mathfrak{f}} = 0.$$

II. Сдвиги по времени. Предположим, что $\tilde{t}(X, t, \varepsilon) = t + \varepsilon t_0$, где $t_0 \in \mathbb{R}$ — постоянное число, и пусть $\tilde{X}(X, t, \varepsilon) = X$, $\tilde{\gamma}(X, t, \varepsilon) = \gamma$. Так как

$$\delta t = t_0 \delta \varepsilon, \quad \frac{d}{dt} \delta t = 0, \quad \frac{\partial}{\partial X} \delta t = \delta t,$$

то вариация (1.1.717) принимает вид

$$\delta \mathfrak{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \Big|_{\mathfrak{f}} t_0 \delta \varepsilon \right\} dV dt.$$

Равенство $\delta \mathfrak{A} = 0$ должно быть справедливым для любого сдвига по времени. Следовательно, в силу произвольности t_0 , приходим к следующему условию:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \Big|_{\mathfrak{f}} = 0.$$

III. Пространственные вращения. Пусть $\tilde{X}(X, t, \varepsilon) = o + \mathbf{Q}(\varepsilon)[X - o]$, где $o \in \mathcal{E}$ — фиксированная точка, а $\mathbb{R} \ni \varepsilon \mapsto \mathbf{Q}(\varepsilon) \in O(3)$ — гладкое поле ортогональных преобразований, такое, что $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$. Временная координата и поля фиксированы: $\tilde{t}(X, t, \varepsilon) = t$, $\tilde{\gamma}(X, t, \varepsilon) = \gamma$. Поскольку \mathbf{Q} гладко, можно записать, что

$$\mathbf{Q}(\varepsilon) = \mathbf{Q}(0) + \varepsilon \boldsymbol{\omega} + \mathbf{o}(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\mathbf{Q}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [1] \in \text{End}(\mathcal{V})$.

Замечание 1.14. *Линейное отображение $\boldsymbol{\omega}$ антисимметрично, т.е., $\boldsymbol{\omega}^T = -\boldsymbol{\omega}$. Это соотношение можно получить следующим образом. Продифференцируем тождество $\mathbf{Q}(\varepsilon)\mathbf{Q}^T(\varepsilon) = \mathbf{I}$ по ε и положим $\varepsilon = 0$.*

В соответствии с выражениями

$$\overrightarrow{\delta X} = \boldsymbol{\omega}[X - o]\delta\varepsilon, \quad \frac{d}{dt}\overrightarrow{\delta X} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial}{\partial X}\overrightarrow{\delta X} = \boldsymbol{\omega}\delta\varepsilon,$$

вариация (1.1.717) сводится к

$$\delta\mathfrak{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \left\{ \left. \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \right|_{\mathfrak{f}} \boldsymbol{\omega}[X - o] + \mathbf{e}:\boldsymbol{\omega} \right\} \delta\varepsilon dV dt.$$

Равенство $\delta\mathfrak{A} = 0$ должно выполняться для каждого пространственного вращения. Следовательно,

$$\left. \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \right|_{\mathfrak{f}} \boldsymbol{\omega}[X - o] + \mathbf{e}:\boldsymbol{\omega} = 0.$$

В соответствии с тождествами

$$\left. \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \right|_{\mathfrak{f}} \boldsymbol{\omega}[X - o] = \left\{ (X - o) \otimes \left. \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \right|_{\mathfrak{f}} \right\}:\boldsymbol{\omega}^T,$$

и $\mathbf{e}:\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}^T:\boldsymbol{\omega}^T$, имеем

$$\left\{ (X - o) \otimes \left. \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \right|_{\mathfrak{f}} + \mathbf{e}^T \right\}:\boldsymbol{\omega} = 0.$$

Наконец, принимая во внимание, что $\boldsymbol{\omega}$ — произвольное антисимметричное отображение, приходим к условию

$$\text{Asym} \left\{ (X - o) \otimes \left. \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial X} \right|_{\mathfrak{f}} + \mathbf{e}^T \right\} = \mathbf{0},$$

в котором $\text{Asym}[\dots]$ есть антисимметричная часть линейного отображения, стоящего в скобках $[\dots]$.

Теперь рассмотрим частный случай вариации, когда координаты фиксированы, а физические поля варьируются, но, в отличие от раздела 1.7.3, их вариация определяется группой Ли.

IV. Сдвиги деформации. Пусть $\tilde{\gamma}(X, t, \varepsilon) = \gamma(X, t) + \varepsilon\gamma_0$, где $\gamma_0 \in \mathcal{V}$ — постоянный вектор, и пусть $\tilde{X}(X, t, \varepsilon) = X$, $\tilde{t}(X, t, \varepsilon) = t$. Поскольку

$$\delta\gamma = \gamma_0\delta\varepsilon, \quad \frac{d}{dt}\delta\gamma = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial}{\partial X}\delta\gamma = \mathbf{0},$$

вариация (1.1.717) сводится к

$$\delta\mathfrak{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \left\{ \mathfrak{L}_x|_f \cdot \gamma_0\delta\varepsilon \right\} dV dt.$$

В этом случае равенство $\delta\mathfrak{A} = 0$ должно выполняться для каждого такого сдвига. Поскольку вектор γ_0 произволен, приходим к следующему условию:

$$\mathfrak{L}_x|_f = \mathbf{0}.$$

V. Вращения деформации. Наконец, пусть $\tilde{\gamma}(X, t, \varepsilon) = o + \mathbf{Q}(\varepsilon)[\gamma(X, t) - o]$, где $o \in \mathcal{E}$ — фиксированная точка, а $\mathbb{R} \ni \varepsilon \mapsto \mathbf{Q}(\varepsilon) \in O(3)$ — гладкое поле ортогональных преобразований, такое, что $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$. Пространственные и временные точки фиксированы: $\tilde{X}(X, t, \varepsilon) = X$, $\tilde{t}(X, t, \varepsilon) = t$. Подобно случаю III, получаем:

$$\delta\gamma = \boldsymbol{\omega}[\gamma(X, t) - o]\delta\varepsilon, \quad \frac{d}{dt}\delta\gamma = \boldsymbol{\omega} \left[\frac{\partial\gamma}{\partial t} \right] \delta\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial X}\delta\gamma = \boldsymbol{\omega} \frac{\partial\gamma}{\partial X} \delta\varepsilon,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — антисимметричное линейное отображение, как и в III. Тогда вариация (1.1.717) сводится к

$$\delta\mathfrak{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R}} \left\{ \mathfrak{L}_x|_f \cdot \boldsymbol{\omega}[\gamma(X, t) - o] + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega} \left[\frac{\partial\gamma}{\partial t} \right] - \mathbf{P} : \left(\boldsymbol{\omega} \frac{\partial\gamma}{\partial X} \right) \right\} \delta\varepsilon dV dt.$$

Условие инвариантности выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{L}_x|_f \cdot \boldsymbol{\omega}[\gamma(X, t) - o] + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega} \left[\frac{\partial\gamma}{\partial t} \right] - \mathbf{P} : \left(\boldsymbol{\omega} \frac{\partial\gamma}{\partial X} \right) = 0.$$

В силу тождеств

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}[\mathbf{v}] &= (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}^b) : \boldsymbol{\omega}^T, \\ \mathbf{L} : (\boldsymbol{\omega} \mathbf{M}) &= (\mathbf{M} \mathbf{L}^T) : \boldsymbol{\omega}^T, \end{aligned}$$

которые выполняются для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ и любых линейных отображений $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \boldsymbol{\omega} \in \text{End}(\mathcal{V})$, имеем

$$\left\{ (\gamma(X, t) - o) \otimes \mathfrak{L}_x^b \Big|_f + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \otimes \mathbf{p}^b - \frac{\partial \gamma}{\partial X} \mathbf{P}^T \right\} : \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Следовательно,

$$\text{Asym} \left\{ (\gamma(X, t) - o) \otimes \mathfrak{L}_x^b \Big|_f + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \otimes \mathbf{p}^b - \frac{\partial \gamma}{\partial X} \mathbf{P}^T \right\} = \mathbf{0}.$$

1.8. Определяющие соотношения. Теория Колемана – Нолла

1.8.1. Принцип материальной индифферентности

Будем рассматривать замену фрейма

$$(x, t) \mapsto (x^*, t^*) = \varphi_{12}(x, t),$$

определенную соотношениями

$$x^* = a(t) + \mathbf{Q}(t)(x - b), \quad (1.1.81)$$

$$t^* = t - c, \quad (1.1.82)$$

в которых \mathbf{Q} — поле вращений. Будем полагать, что отображения a и \mathbf{Q} являются гладкими. Замена фрейма определяет однопараметрические семейства преобразований скаляров, векторов и тензоров второго ранга:

(i) Скаляры остаются неизменными.

(ii) Пусть $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ — некоторый вектор. Его можно представить в виде разности точек $\mathbf{v} = x - y$ в фрейме φ_1 . Тогда в фрейме φ_2 выполняются следующие соотношения:

$$x^* = a(t) + \mathbf{Q}(t)(x - b), \quad y^* = a(t) + \mathbf{Q}(t)(y - b),$$

и для $\mathbf{v}^* = x^* - y^*$ мы имеем, что

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}. \quad (1.1.83)$$

Последнее равенство определяет однопараметрическое семейство $\{f_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ преобразований вектора

$$f_t : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}^*.$$

(iii) Пусть $\mathbf{T} \in \text{End}(\mathcal{V})$. Если $\mathbf{w} = \mathbf{T}[\mathbf{v}]$, то, используя соотношения $\mathbf{v}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{w}$, приходим к равенству $\mathbf{w}^* = \mathbf{T}^*[\mathbf{v}^*]$, где

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}\mathbf{Q}^T(t). \quad (1.1.84)$$

Получили семейство $\{g_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ преобразований тензора

$$g_t : \text{End}(\mathcal{V}) \rightarrow \text{End}(\mathcal{V}), \quad \mathbf{T} \mapsto \mathbf{T}^*.$$

Отображения, значениями которых являются скаляры, векторы и тензоры, называются **фрейм-индифферентными** или **объективными**, если при замене фрейма как зависимые, так и независимые переменные преобразуются в соответствии с выражениями (1.1.81), (1.1.82), (1.1.83), и (1.1.84). То есть, пусть h , \mathbf{v} и \mathbf{T} — скалярное, векторное и тензорное поля относительно фрейма φ_1 , а h^* , \mathbf{v}^* и \mathbf{T}^* — скалярное, векторное и тензорное поля относительно фрейма φ_2 . Тогда эти поля фрейм-индифферентны, если

$$\begin{aligned} h^*(x^*, t^*) &= h(x, t), \\ \mathbf{v}^*(x^*, t^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}(x, t), \\ \mathbf{T}^*(x^*, t^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(x, t)\mathbf{Q}^T(t), \end{aligned} \quad (1.1.85)$$

где (x, t) и (x^*, t^*) связаны преобразованиями (1.1.81) и (1.1.82).

Рассмотрим движение в фрейме φ_1 , определенное отображением

$$\gamma : \mathcal{B} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (X, t) \mapsto x.$$

Отсчетной форме \mathcal{B} , рассматриваемой в фрейме φ_1 , отвечает отсчетная форма \mathcal{B}^* , рассматриваемая в фрейме φ_2 . В соответствии с (1.1.81) и (1.1.82) эти формы связаны равенствами $X^* = a(\tilde{t}) + \mathbf{Q}(\tilde{t})(X - b)$, и $\tilde{t}^* = \tilde{t} - c$, в которых \tilde{t} фиксировано. То же движение рассматривается во фрейме φ_2 как

$$x^* = \gamma^*(X^*, t^*) = a(t) + \mathbf{Q}(t)(\gamma(X, t) - b), \quad t^* = t - c. \quad (1.1.86)$$

Равенство (1.1.86) позволяет получить соотношение между градиентами деформации \mathbf{F} и \mathbf{F}^* . Первый из них определяется относительно фрейма φ_1 , т.е., $\mathbf{F} = \frac{\partial \gamma}{\partial X}$, а последний — относительно фрейма φ_2 , т.е., $\mathbf{F}^* = \frac{\partial \gamma^*}{\partial X^*}$. Из цепного правила дифференцирования следует, что

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}(t) \frac{\partial \gamma}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial X^*},$$

и, потому,

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}\mathbf{Q}^T(\tilde{t}). \quad (1.1.87)$$

Дадим теперь определение физических процессов, которые являются «подобными». Под **динамическим процессом** будем подразумевать упорядоченную пару (γ, \mathbf{T}) , состоящую из однопараметрического семейства деформаций γ и тензора напряжений Коши. Два динамических процесса (γ, \mathbf{T}) и (γ^*, \mathbf{T}^*) , заданные в различных фреймах, называются **эквивалентными**, если они связаны друг с другом соотношениями (1.1.85) и (1.1.86).

Опыт показывает, что два тела с одинаковой формой и одинаковым распределением массы могут совершенно по-разному реагировать под действием одних и тех же сил. Это различие описывается следующим образом: мы говорим, что два твердых тела состоят из разных материалов. Свойства материала твердого тела описываются как условия, ограничивающие возможные динамические процессы. Эти условия называются **определяющими уравнениями** или **определяющими предположениями**. В книге мы рассматриваем материальные уравнения, включающие только движение и тензор напряжений Коши.

Сформулируем фундаментальный физический принцип, согласно которому свойства материала индифферентны, т.е., независимы от системы отсчета. В математических терминах это означает, что определяющие уравнения подчиняются следующему условию¹²:

Принцип материальной индифферентности. *Определяющие уравнения должны быть инвариантными при изменении системы отсчета. Если определяющее уравнение выполняется для процесса с движением и тензором напряжений Коши*

$$x = \gamma(X, t), \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(X, t),$$

то оно должно выполняться и для любого эквивалентного процесса (γ^, \mathbf{T}^*) .*

1.8.2. Теорема Коши о полярном разложении

Далее будем использовать следующий результат, полученный Коши:

Теорема 1.2 (О полярном разложении). *Для любого линейного отображения $\mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathcal{V})$ существуют единственные ортогональное линей-*

¹²Мы даем формулировку, аналогичную формулировке Трусделла и Нолла в книге [4].

ное преобразование $\mathbf{R} \in \text{O}(3)$ и положительно определенные¹³ симметричные линейные отображения $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \text{Aut}(\mathcal{V})$, такие, что выполняются следующие равенства:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{V}\mathbf{R}.$$

Здесь $\mathbf{U}^2 = \mathbf{T}^T\mathbf{T}$ и $\mathbf{V}^2 = \mathbf{T}\mathbf{T}^T$.

Замечание 1.15. Доказательство теоремы можно найти, например, в [29]. Его можно провести в соответствии со следующим рассуждением. Преобразование $\mathbf{T}^T\mathbf{T}$ положительно¹⁴ и поэтому можно построить его квадратный корень $\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{T}^T\mathbf{T}}$, являющийся обратимым и симметричным. Теперь положим $\mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{U}^{-1}$. Поскольку

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{T}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}^{-T}\mathbf{T}^T = \mathbf{T}(\mathbf{U}^2)^{-1}\mathbf{T}^T = \mathbf{I},$$

мы имеем, что $\mathbf{R} \in \text{O}(3)$. Тем самым приходим к желаемому разложению $\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{U}$. Второй случай рассматривается аналогично.

В применении к градиенту деформации \mathbf{F} теорема о полярном разложении утверждает, что имеется единственное ортогональное линейное отображение $\mathbf{R} \in \text{O}(3)$, такое, что¹⁵ $\det \mathbf{R} = 1$, и положительно определенные симметричные линейные отображения $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \text{Aut}(\mathcal{V})$, называемые **правым** и **левым тензорами искажений**; при этом выполнены равенства

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \quad (1.1.88)$$

Правый и левый тензоры искажений определяют **правый** и **левый тензоры Коши – Грина**:

$$\mathbf{C} := \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \quad \text{и} \quad \mathbf{B} := \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T.$$

Рассмотрим механический смысл равенств (1.1.88). Согласно равенству (1.1.31), градиент деформации отображает недеформированное бесконечно малое волокно в деформированное. Деформация волокна распадается на вращение, определяемое \mathbf{R} , и растяжение, определяемое \mathbf{U} или

¹³Линейный оператор \mathbf{L} называется положительно определенным, если $\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}[\mathbf{u}] > 0$ для всякого ненулевого вектора \mathbf{u} . Для положительно определенного оператора определен квадратный корень.

¹⁴Действительно, для любого вектора $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, имеем

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^T\mathbf{T}[\mathbf{u}] = \mathbf{T}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{T}[\mathbf{u}] \geq 0.$$

Поскольку \mathbf{T} обратимо, $\mathbf{T}[\mathbf{u}] \neq \mathbf{0}$ и знак \geq можно заменить на $>$.

¹⁵Поскольку $\det \mathbf{F} > 0$.

V . Вращение — это «жесткое движение», которое может видеть наблюдатель, связанный с пространством \mathcal{E} . Другой наблюдатель, вращающийся вместе с рассматриваемым волокном, увидит только растяжения. Таким образом, объективные величины, которые можно назвать мерами деформации, представляются U и V или, что то же самое, правыми и левыми тензорами Коши-Грина C и B .

1.8.3. Простой материал

Пусть $\text{Sh}(\mathcal{E})$ — множество всех форм в \mathcal{E} . Определим семейство $\{\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}\}_{\mathcal{B} \in \text{Sh}(\mathcal{E})}$ отображений

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \times \text{End}(\mathcal{V}) \rightarrow \text{Sym}(\mathcal{V}),$$

которые назовем **функционалами отклика**. Такое семейство представляет собой механическое поведение твердого тела. Определяющим соотношением тела из **простого материала** относительно отсчетной формы \mathcal{B} является следующее соотношение:

$$\mathbf{T}_X = \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, \mathbf{F}_X). \quad (1.1.89)$$

Пусть \mathcal{B} и $\tilde{\mathcal{B}}$ — любые две отсчетные формы, и пусть \mathcal{S} — некоторая актуальная форма. Далее, пусть $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ и $\tilde{\gamma} : \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{S}$ — деформации, а $\lambda = \tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$. Следующая диаграмма иллюстрирует связь между γ , $\tilde{\gamma}$, λ , и их градиентами:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{S} \\ & \searrow \lambda = \tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma & \uparrow \tilde{\gamma} \\ & & \tilde{\mathcal{B}} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathcal{V} \\ & \searrow \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \circ \mathbf{F} & \uparrow \tilde{\mathbf{F}} \\ & & \tilde{\mathcal{V}} \end{array}$$

Таким образом, справедливо соотношение:

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, \mathbf{F}_X) = \mathfrak{g}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{X}, \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{X}} \mathbf{P}_X).$$

Правую часть этого равенства можно обозначить как $\tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{X}, \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{X}})$, т.е.,

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{X}, \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{X}}) := \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(\lambda^{-1}(\tilde{X}), \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{X}} \mathbf{P}_{\lambda^{-1}(\tilde{X})}).$$

Так, мы имеем функционал отклика $\tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\mathcal{B}}}$. Однако нам нужно отразить, что в действительности мы имеем дело с тем же телом. Следовательно, должно быть $\tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\mathcal{B}}} = \mathfrak{g}_{\tilde{\mathcal{B}}}$. Это мотивирует следующую аксиому:

Аксиома. Для любых форм \mathcal{B} и $\tilde{\mathcal{B}}$ функционалы отклика $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}$ и $\mathfrak{g}_{\tilde{\mathcal{B}}}$ связаны соотношением

$$\mathfrak{g}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{X}, \tilde{F}_{\tilde{X}}) = \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, F_X), \quad \text{где } \tilde{X} = \lambda(X), \quad \tilde{F} = \mathbf{F}\mathbf{P}^{-1}. \quad (1.1.810)$$

Замечание 1.16. Мы можем рассматривать \mathcal{B} как «тестовую» отсчетную форму. Относительно нее в результате экспериментов был получен функционал $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}$. Тогда по отношению (1.1.810) можно построить функционалы отклика одного и того же тела относительно другой отсчетной формы.

Не все отображения $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}$ удовлетворяют принципу материальной индифферентности. Для определения подходящего типа таких отображений, пусть \mathbf{Q} — ортогональный тензор. Тогда, в соответствии с (1.1.85) и принципом материальной индифферентности¹⁶ имеем:

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}^*}(X^*, F_{X^*}^*) = \mathbf{Q}(t)\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, F_X)\mathbf{Q}^T(t).$$

Левую часть равенства можно рассматривать как значение функционала отклика, относящегося к отсчетной форме \mathcal{B}^* . В соответствии с Аксиомой, полагая $\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\tilde{t})$, приходим к следующему равенству:

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, F_{X^*}^*\mathbf{Q}(\tilde{t})) = \mathbf{Q}(t)\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, F_X)\mathbf{Q}^T(t).$$

Принимая во внимание соотношение (1.1.87) и тождество $\mathbf{Q}^T(\tilde{t})\mathbf{Q}(\tilde{t}) = \mathbf{I}$, приходим к следующему выражению:

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, \mathbf{Q}(t)F_X) = \mathbf{Q}(t)\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, F_X)\mathbf{Q}^T(t),$$

которое должно выполняться для каждого ортогонального тензора \mathbf{Q} . Пусть теперь $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ — полярное разложение (см. (1.1.88)). Полагая $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$, получаем окончательный результат:

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, \mathbf{U}_X) = \mathbf{R}^T\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, F_X)\mathbf{R}. \quad (1.1.811)$$

Это выражение определяет функциональное ограничение на возможные отображения $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}$ и отражает требование принципа материальной индифферентности. Из (1.1.811) следует, что

$$\mathbf{T}_X = \mathbf{R}\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, \mathbf{U}_X)\mathbf{R}^T. \quad (1.1.812)$$

¹⁶Рассматриваются эквивалентные процессы. В соответствии с принципом материальной индифферентности, так как $\mathbf{T}_X = \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, F_X)$, то $\mathbf{T}_X^* = \mathfrak{g}_{\mathcal{B}^*}(X^*, F_{X^*}^*)$, и символ \mathfrak{g} один и тот же.

Отсчетная форма \mathcal{B} является **свободной от напряжений**, если $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(X, \mathbf{I}_X) = \mathbf{0}$ для каждого $X \in \mathcal{B}$. Предположение о существовании свободной от напряжений отсчетной формы любого тела является стандартным для классической теории упругости.

1.8.4. Теоремы о представлении

Пусть (\mathcal{V}, \cdot) — n -мерное евклидово векторное пространство. Хотя для целей книги достаточно считать $n = 3$, для достижения большей общности будем полагать n произвольным натуральным числом. Рассмотрим отображения $\varepsilon : \text{End}(\mathcal{V})^k \rightarrow \mathbb{R}$ и $\mathbf{f} : \text{End}(\mathcal{V})^k \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$, где

$$\text{End}(\mathcal{V})^k = \underbrace{\text{End}(\mathcal{V}) \times \dots \times \text{End}(\mathcal{V})}_{k \text{ раз}}.$$

Для таких отображений определим следующие понятия [4]:

Определение 1.6. *Отображение $\varepsilon : (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k) \mapsto \varepsilon(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k)$ называется **изотропным**, если равенство*

$$\varepsilon(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k) = \varepsilon(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^T, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{A}_k\mathbf{Q}^T)$$

выполняется для всех ортогональных преобразований \mathbf{Q} и всех наборов $(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k)$ из области определения ε .

Изотропное отображение $\varepsilon : \mathbf{A} \mapsto \varepsilon(\mathbf{A})$ от одного переменного называется **ортогональным инвариантом** (или просто **инвариантом**) \mathbf{A} . В случае нескольких переменных ε называется **совместным инвариантом**. Следующее утверждение дает необходимые и достаточные условия того, что ε является инвариантом:

Теорема 1.3. *Отображение $\varepsilon : \text{Sym}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ изотропно (является инвариантом) если и только если оно может быть представлено в виде функции от главных инвариантов своего аргумента:*

$$\varepsilon(\mathbf{A}) = \tilde{\varepsilon}(I_1(\mathbf{A}), I_2(\mathbf{A}), \dots, I_n(\mathbf{A})).$$

Определение 1.7. *Отображение $\mathbf{f} : (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k) \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k)$ называется **изотропным**, если равенство*

$$\mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k)\mathbf{Q}^T = \mathbf{f}(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^T, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{A}_k\mathbf{Q}^T)$$

выполняется для всех ортогональных отображений \mathbf{Q} и всех наборов $(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k)$ из области определения \mathbf{f} .

Сформулируем теперь классическую теорему о представлении¹⁷:

Теорема 1.4 (Ривлин & Эриксен). *Отображение $\mathbf{f} : \mathbf{A} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{A})$, определенное на множестве симметричных тензоров, изотропно тогда и только тогда, когда его значение можно представить в виде*

$$\mathbf{D} = \mathbf{f}(\mathbf{A}) = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{A} + \varphi_2 \mathbf{A}^2 + \cdots + \varphi_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}.$$

Здесь $\varphi_k = \tilde{\varphi}_k(I_1(\mathbf{A}), \dots, I_n(\mathbf{A}))$.

Доказательство. Пусть \mathbf{A} — симметричный тензор. Рассмотрим его произвольный собственный вектор \mathbf{e} . Если $\mathcal{U} = \{x\mathbf{e} \mid x \in \mathbb{R}\}$ обозначает одномерное векторное пространство, порожденное \mathbf{e} , то справедливо разложение пространства \mathcal{V} в прямую сумму $\mathcal{V} = \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}^\perp$ одномерного подпространства \mathcal{U} и его ортогонального дополнения \mathcal{U}^\perp . Определим ортогональное преобразование \mathbf{Q} так, чтобы оно оставляло множество \mathcal{U}^\perp на своем месте¹⁸:

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} = \begin{cases} -\mathbf{u}, & \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \\ \mathbf{u}, & \mathbf{u} \in \mathcal{U}^\perp. \end{cases}$$

В соответствии с определением¹⁹, $\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\mathbf{T} = \mathbf{A}$. Поскольку \mathbf{f} является изотропной функцией, то $\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\mathbf{T} = \mathbf{D}$, или, $\mathbf{Q}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{Q}$. Значит,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{D}\mathbf{e}) = \mathbf{D}(\mathbf{Q}\mathbf{e}) = -\mathbf{D}\mathbf{e}.$$

Следовательно, $\mathbf{D}\mathbf{e} \in \mathcal{U}$. Это означает, что $\mathbf{D}\mathbf{e} = d\mathbf{e}$ для некоторого $d \in \mathbb{R}$. Поэтому \mathbf{e} является собственным вектором и для \mathbf{D} .

Для других собственных векторов \mathbf{A} рассуждение аналогично. Таким образом, все собственные значения \mathbf{A} являются собственными значениями \mathbf{D} .

Обозначим все различные собственные значения \mathbf{A} через a_1, \dots, a_m , где $m \leq n$, а соответствующие собственные векторы — через $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$. По доказанному, эти векторы одновременно являются собственными векторами для \mathbf{D} , отвечающие собственным значениям d_1, \dots, d_m . Заметим, однако, что последние не обязательно различны.

¹⁷В доказательстве мы следуем [4].

¹⁸Иными словами, \mathbf{Q} есть отражение относительно плоскости \mathcal{U}^\perp . Если выбрать базис $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ пространства \mathcal{V} , где $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$ и $(\mathbf{e}_i)_{i=2}^n$ — некоторый базис \mathcal{U}^\perp , то $[\mathbf{Q}^i_j] = \text{diag}\{-1, 1, \dots, 1\}$.

¹⁹Действительно, положим $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\mathbf{T}$. Тогда $\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{Q}$. Если $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, то отсюда немедленно следует, что $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}$. Пусть теперь $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^\perp$. Поскольку $\mathbf{e} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{e} = 0$, то $\mathbf{A}\mathbf{u} \in \mathcal{U}^\perp$, и мы снова имеем, что $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}$. Этим доказывается равенство $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Система из m линейных неоднородных уравнений

$$d_k = \varphi_0 + \varphi_1 a_k + \varphi_2 a_k^2 + \cdots + \varphi_{m-1} a_k^{m-1}, \quad k = 1, \dots, m,$$

имеет единственное решение $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$, поскольку ее определитель отличен от нуля:

$$\prod_{j < k} (a_j - a_k) \neq 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{D} = \mathbf{f}(\mathbf{A}) = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{A} + \varphi_2 \mathbf{A}^2 + \cdots + \varphi_{m-1} \mathbf{A}^{m-1}, \quad m \leq n.$$

Наконец, поскольку $\mathbf{Q} \mathbf{f}(\mathbf{A}) \mathbf{Q}^T = \mathbf{f}(\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T)$, то

$$\mathbf{f}(\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T) = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 (\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T) + \cdots + \varphi_{m-1} (\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T)^{m-1}.$$

Это влечет, что коэффициенты φ_k остаются неизменными при замене \mathbf{A} на $\mathbf{Q}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T$. Следовательно, они являются инвариантами \mathbf{A} . \square

Замечание 1.17. Коэффициенты φ_k определены единственным образом по $\mathbf{f}(\mathbf{A})$, если все собственные значения различны, т.е., $n = m$. Если $m < n$, то последние $n - m$ функций φ_k могут считаться нулями.

Вернемся теперь к простым материалам. Образно говоря, свойство изотропии однородного тела означает, что такое тело может быть переведено в особую форму, никакие вращения которой не могут сказаться на значениях тензомера. Имеет место следующее утверждение [3, 4]:

Теорема 1.5. Простой материал изотропен тогда и только тогда, когда его определяющее соотношение можно записать в виде:

$$\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{B}),$$

относительно некоторой неискаженной формы. Здесь \mathbf{B} — левый тензор Коши–Грина, а \mathbf{f} — изотропное отображение.

Из последнего утверждения, а также теоремы 1.4 Ривлина & Эриксона о представлении вытекает, что относительно некоторой неискаженной формы,

$$\mathbf{T} = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{B} + \varphi_2 \mathbf{B}^2.$$

В соответствии с теоремой Кэли – Гамильтона, $\mathbf{B}^3 - I_1(\mathbf{B})\mathbf{B}^2 + I_2(\mathbf{B})\mathbf{B} - I_3(\mathbf{B})\mathbf{I} = \mathbf{0}$, и определяющее соотношение может быть записано в иной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \mathfrak{I}_0(I_1(\mathbf{B}), I_2(\mathbf{B}), I_3(\mathbf{B}))\mathbf{I} + \\ & + \mathfrak{I}_1(I_1(\mathbf{B}), I_2(\mathbf{B}), I_3(\mathbf{B}))\mathbf{B} + \\ & + \mathfrak{I}_{-1}(I_1(\mathbf{B}), I_2(\mathbf{B}), I_3(\mathbf{B}))\mathbf{B}^{-1}, \quad (1.1.813) \end{aligned}$$

1.9. Гиперупругое тело

1.9.1. Выражения для напряжений

Гиперупругое тело определяется как такое упругое тело, для которого соотношение между напряжениями и деформациями получается из упругого потенциала W . В случае простого материала последний является функцией градиента деформации \mathbf{F} , т.е., $W = \widehat{W}(\mathbf{F})$. Тогда первый тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа \mathbf{P} определяется из соотношения

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}},$$

а тензор напряжений Коши \mathbf{T} имеет вид

$$\mathbf{T} = J^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T.$$

Здесь $J = \det \mathbf{F}$. В терминах правой и левой мер Коши–Грина \mathbf{C} и \mathbf{B} напряжения Коши выражаются как

$$\mathbf{T} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T = 2J^{-1} \mathbf{B} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}.$$

1.9.2. Универсальные деформации

Нелинейные уравнения теории упругости достаточно сложны, и применение регулярных методов, развитых в линейной теории, не позволяет построить аналитические решения какой-либо нетривиальной краевой задачи. Вместе с тем, в первой половине 20 века было найдено несколько аналитических представлений для решения частных нелинейных задач. Характерной особенностью этих решений является то, что их можно получить для любого несжимаемого изотропного упругого материала

только за счет поверхностных сил. По этой причине деформации, определяемые такими решениями, называются **управляемыми**. Более того, такие деформации не зависят от конкретного выбора упругого потенциала и поэтому их еще называют **универсальными**.

Общая стратегия получения универсальных решений была разработана Д. Эриксоном. Он показал, что для сжимаемых материалов лишь однородные деформации универсальны [30]. Напротив, изучение несжимаемых материалов оказалось более плодотворным. В результате тщательного исследования Эриксоном было найдено 4 семейства универсальных решений для несжимаемого материала [31]. Дальнейшие исследования были проведены Сингом и Пипкиным для упругого диэлектрика [32], и Кленгбейлом и Шилдом, которые описали пятое семейство для гиперупругого тела [33].

Опишем процедуру построения универсальных деформаций более подробно. Прежде всего, справедливо следующее утверждение [30]:

Теорема 1.6 (Эриксен). *Универсальные деформации для сжимаемого изотропного гиперупругого тела необходимо являются однородными.*

Мы докажем это утверждение в духе оригинальной аргументации Эриксона, явно принимая во внимание евклидовы свойства физического пространства, содержащего отсчетную и актуальную формы. Заметим, однако, что существуют и другие варианты доказательства [34, 35].

Доказательство. Пусть γ — деформация, переводящая натуральную отсчетную форму в искаженную (актуальную) форму и пусть \mathbf{F} — соответствующий градиент деформации. Обозначим через \mathbf{c} меру Альманси, т.е.,

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}.$$

В координатах на актуальной форме компоненты \mathbf{c} могут быть записаны как

$$c^a_{\cdot b} = g^{al} \{ (\mathbf{F}^{-T})^A_{\cdot l} (\mathbf{F}^{-1})^B_{\cdot b} G_{AB} \} \circ \gamma^{-1}.$$

Поскольку, по предположению, материал тела изотропен, упругий потенциал может быть представлен в виде зависимости от главных инвариантов \mathbf{c} :

$$W = W(I_1, I_2, I_3); \quad I_1 = \text{tr } \mathbf{c}, \quad I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr } \mathbf{c})^2 - \text{tr } \mathbf{c}^2), \quad I_3 = \det \mathbf{c}.$$

В силу сжимаемости материала напряжения Коши определяются согласно соотношениям

$$\mathbf{T} = -2I_3^{1/2} \mathbf{c} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{c}^T} = -2I_3^{1/2} \mathbf{c} \sum_{N=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_N} \frac{\partial I_N}{\partial \mathbf{c}^T}. \quad (1.1.91)$$

Подставляя (1.1.91) в уравнение баланса импульса, приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} = -2 \left\{ \sum_{N=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_N} \operatorname{div} \left(I_3^{1/2} \mathbf{c} \frac{\partial I_N}{\partial \mathbf{c}^T} \right) + \right. \\ \left. + I_3^{1/2} \sum_{N=1}^3 \sum_{M=1}^3 \frac{\partial^2 W}{\partial I_N \partial I_M} (\nabla I_M) \mathbf{c} \frac{\partial I_N}{\partial \mathbf{c}^T} \right\} = \mathbf{0}. \quad (1.1.92) \end{aligned}$$

Отыскиваются такие решения (1.1.92), которые не зависят от частного выбора функции $W(I_1, I_2, I_3)$. Таким образом, тензор \mathbf{c} должен быть таков, чтобы множители при производных от переменных I_1, I_2, I_3 обращались в нуль, т.е.,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(I_3^{1/2} \mathbf{c} \frac{\partial I_N}{\partial \mathbf{c}^T} \right) &= \mathbf{0}, \\ I_3^{1/2} \left((\nabla I_M) \mathbf{c} \frac{\partial I_N}{\partial \mathbf{c}^T} + (\nabla I_N) \mathbf{c} \frac{\partial I_M}{\partial \mathbf{c}^T} \right) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание выражения для производных от главных инвариантов,

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{c}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{c}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{c}} = I_3 \mathbf{c}^{-T},$$

с $N = 3$ и $M = 1$ получаем

$$\operatorname{div} \left(I_3^{1/2} \mathbf{c} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{c}^T} \right) = \operatorname{div} \left(I_3^{1/2} \mathbf{c} \mathbf{c}^{-1} I_3 \right) = \operatorname{div} \left(I_3^{3/2} \mathbf{I} \right) = \nabla I_3^{3/2} = \mathbf{0},$$

$$(\nabla I_1) \mathbf{c} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{c}^T} + (\nabla I_3) \mathbf{c} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{c}^T} = (\nabla I_1) I_3 + \nabla I_3 = \mathbf{0}.$$

Таким образом, $I_3 = \text{const}$ и, соответственно, $I_1 = \text{const}$. Эти уравнения влекут, что

$$\nabla(\operatorname{tr} \mathbf{c}) = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (1.1.93)$$

или, в компонентах,

$$c_{\cdot j, i}^j = 0, \quad c_{\cdot \cdot, j}^{ij} = 0.$$

Предполагается, что актуальная форма, наряду с отсчетной формой, вложена в евклидово физическое пространство. Это означает, что тензор кривизны равен нулю, как на метрическом тензоре \mathbf{g} , индуцированном актуальными координатами, рассматриваемыми с картой физического пространства, так и на метрическом тензоре \mathbf{G} , индуцированным мерой Альманси в соответствии с соотношением $\mathbf{c}^b = \gamma_* \mathbf{G}$, т.е.,

$$\mathfrak{R}(\mathbf{c}^b) = \mathfrak{R}(\gamma_* \mathbf{G}) = \gamma_* \mathfrak{R}(\mathbf{G}) = \mathbf{0}.$$

В карте последнее соотношение записывается как

$$R_{ijklm} = \frac{1}{2} (c_{im, kj} + c_{jk, im} - c_{ik, mj} - c_{jm, ik}) + (\mathbf{c}^{-1})^{rs} (A_{jkr} A_{ims} - A_{jmr} A_{iks}) = 0,$$

где

$$A_{ijk} = A_{jik} = \frac{1}{2} (c_{ik, j} + c_{jk, i} - c_{ij, k}),$$

а c_{im} — компоненты \mathbf{c}^b и $(\mathbf{c}^{-1})^{rs}$ — компоненты $(\mathbf{c}^b)^{-1}$. Из (1.1.93) следует, что

$$A_{iik} = \frac{1}{2} (c_{ik, i} + c_{ik, i} - c_{ii, k}) = 0.$$

Поэтому,

$$R_{\cdot\cdot ji}^{ij\cdot\cdot} = -(\mathbf{c}^{-1})^{rs} A_{\cdot\cdot ir}^{j\cdot\cdot} A_{\cdot\cdot js}^{i\cdot\cdot} = 0. \quad (1.1.94)$$

Принимая во внимание, что все собственные значения тензора \mathbf{c}^{-1} положительны, и что его можно представить как $\mathbf{c}^{-1} = \mathbf{c}^{-1/2} \mathbf{c}^{-1/2}$, перепишем соотношение (1.1.94) в форме

$$A_{\cdot\cdot r}^{ij\cdot\cdot} (\mathbf{c}^{-1/2})^{r\cdot\cdot k} A_{ijs} (\mathbf{c}^{-1/2})^{sk\cdot\cdot} = 0.$$

Поскольку тензор $\mathbf{c}^{-1/2}$ обратим,

$$A_{ijs} = 0,$$

и, соответственно,

$$A_{ijk} + A_{ikj} = c_{jk, i} = 0,$$

так что тензор c_{ij} является постоянным. Это, в свою очередь, есть необходимое и достаточное условие того, что c_{ij} отвечает однородной деформации. \square

Если $J = \det \mathbf{F} = 1$, то материал называется **несжимаемым**. В таком случае напряжения Коши определяются по формуле [5]

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{c}^{-1} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{c}, \quad (1.1.95)$$

где p — гидростатическая компонента, W — упругий потенциал, \mathbf{c} — мера Альманси, а I_1, I_2 — главные инварианты \mathbf{c} . Как и выше, \mathbf{I} обозначает единичный тензор. Подставляя выражение (1.1.95) в баланс импульса $\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$, приходим к следующему выражению для градиента p :

$$\nabla p = 2 \left(\mathbf{c}^{-1} \nabla \frac{\partial W}{\partial I_1} - \mathbf{c} \nabla \frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{\partial W}{\partial I_1} \nabla \cdot \mathbf{c}^{-1} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \nabla \cdot \mathbf{c} \right).$$

Из соотношения $\nabla \times \nabla p = \mathbf{0}$ вытекает, что

$$\nabla \times \left(\mathbf{c}^{-1} \nabla \frac{\partial W}{\partial I_1} - \mathbf{c} \nabla \frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{\partial W}{\partial I_1} \nabla \cdot \mathbf{c}^{-1} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \nabla \cdot \mathbf{c} \right) = \mathbf{0}.$$

По своему определению, универсальные деформации должны удовлетворять последнему уравнению при всех мыслимых $W(I_1, I_2)$. Таким образом, множители при всех производных от W должны быть равны нулю. Тем самым, приходим к следующей системе уравнений [5]:

$$\begin{aligned} \nabla I_1 \times (\nabla I_1 \cdot \mathbf{c}^{-1}) &= \mathbf{0}, \\ \nabla I_2 \times (\nabla I_2 \cdot \mathbf{c}) &= \mathbf{0}, \\ \nabla I_2 \times \nabla(I_1 \mathbf{c}^{-1}) + \nabla I_1 \times (\nabla I_2 \cdot \mathbf{c}^{-1}) - \nabla I_1 \times (\nabla I_1 \cdot \mathbf{c}) &= \mathbf{0}, \\ \nabla I_1 \times \nabla(I_2 \mathbf{c}^{-1}) + \nabla I_2 \times (\nabla I_1 \cdot \mathbf{c}) - \nabla I_2 \times (\nabla I_2 \cdot \mathbf{c}^{-1}) &= \mathbf{0}, \\ \nabla \times (\nabla I_1 \cdot \mathbf{c}^{-1}) + \nabla I_1 \times \nabla \cdot \mathbf{c}^{-1} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \times (\nabla I_2 \cdot \mathbf{c}) + \nabla I_2 \times \nabla \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \times (\nabla I_2 \cdot \mathbf{c}^{-1}) + \nabla I_2 \times \nabla \cdot \mathbf{c}^{-1} - \nabla \times (\nabla I_1 \cdot \mathbf{c}) - \nabla I_1 \times \nabla \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \times \nabla \cdot \mathbf{c}^{-1} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \times \nabla \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

которая вместе с условием несжимаемости

$$I_3(\mathbf{c}) = 1$$

и условием совместности (1.1.43) является переопределенной. Она, несмотря на сильную переопределенность, допускает нетривиальные решения. Последние приведены ниже.

1.9.3. Универсальные решения для несжимаемого материала

Исходные положения материальных точек, составляющих тела, подвергающиеся различным семействам универсальных деформаций, определяются соответствующими координатами. Поскольку по предположению физическое пространство, содержащее форму тел, является евклидовым, то и декартовы координаты можно считать заданными. Цилиндрические и сферические координаты связаны с декартовыми следующим образом.

- Семейство 1. Декартовы координаты (X, Y, Z) .
- Семейства 2, 3, 5. Цилиндрические координаты (R, Φ, Z) ,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \Phi = \arctan \frac{Y}{X}; \quad X = R \cos \Phi, \quad Y = R \sin \Phi.$$

- Семейство 4. Сферические координаты $(\mathfrak{R}, \Theta, \Phi)$,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \Theta = \arctan \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z}, \quad \Phi = \arctan \frac{Y}{X}; \\ X = R \cos \Phi \sin \Theta, \quad Y = R \sin \Phi \sin \Theta, \quad Z = R \cos \Theta.$$

Деформация формы тела может быть связана с переходом на новую координатную карту. Тогда координаты материальных точек (упорядоченные тройки чисел) не изменяются, а функции перехода, определяющие связь между отсчетными и актуальными картами, полностью характеризуют деформацию. Такие функции для разных семейств универсальных деформаций приведены в Табл. 1.1.

Положения материальных точек в отсчетной и актуальной формах могут быть выражены элементами локальных базисов, как показано в Табл. 1.2.

Для заданной деформации можно получить градиент деформации \mathbf{F} и меру Коши–Грина \mathbf{C} . Результаты расчетов приведены в Табл. 1.3.

Главные инварианты мер Коши–Грина, I_1 и I_2 , приведены в Табл. 1.4.

Подставив выражения для мер Коши–Грина в уравнение состояния, получим тензор напряжений Коши, физические компоненты которого перечислены ниже (приведена только верхнетреугольная часть симметричной матрицы):

#	Отсч. карта	Акт. карта	Функция перехода	Условие несжимаемости
1	(X, Y, Z)	(r, ϕ, z)	$r = \sqrt{2aX},$ $\phi = bY + cZ,$ $z = dY + eZ$	$a(be - cd) = 1$
2	(R, Φ, Z)	(x, y, z)	$x = 1/2aR^2,$ $y = b\Phi + cZ,$ $z = d\Phi + eZ$	$a(be - cd) = 1$
3	(R, Φ, Z)	(r, ϕ, z)	$r = \sqrt{aR^2 + b},$ $\phi = c\Phi + dZ,$ $z = e\Phi + fz$	$a(cf - de) = 1$
4	$(\mathfrak{R}, \Theta, \Phi)$	$(\mathfrak{r}, \theta, \phi)$	$\mathfrak{r} = (\pm\mathfrak{R}^3 + a)^{1/3},$ $\theta = \pm\Theta,$ $\phi = \Phi$	
5	(R, Φ, Z)	(r, ϕ, z)	$r = aR,$ $\phi = b \log R + c\Phi,$ $z = dZ$	$a^2cd = 1$

Таблица 1.1. Функции перехода для универсальных деформаций

#	Отсчетное положение	Актуальное положение
1	$o + X \mathbf{i}_1 + Y \mathbf{i}_2 + Z \mathbf{i}_3$	$o + \rho \mathbf{e}_r + z \mathbf{i}_3$
2	$o + R \mathbf{e}_r + Z \mathbf{i}_3$	$o + x \mathbf{i}_1 + y \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3$
3	$o + R \mathbf{e}_r + Z \mathbf{i}_3$	$o + r \mathbf{e}_r + z \mathbf{i}_3$
4	$o + \mathfrak{R} \mathbf{e}_r$	$o + \mathfrak{r} \mathbf{e}_r$
5	$o + R \mathbf{e}_r$	$o + x \mathbf{i}_1 + y \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3$

Таблица 1.2. Положения материальных точек в отсчетной и актуальной формах

- Семейство 1.
$$\begin{bmatrix} -p(r) + \frac{a^2}{r^2} \bar{\psi}_1(r) & & & & \\ + \frac{r^2}{a^2} \bar{\psi}_{-1}(r) & 0 & & & 0 \\ & -p(r) + (b^2 + c^2) r^2 \bar{\psi}_1(r) & (bd + ce) & & \\ [2pt/2pt] & + \frac{a^2}{r^2} (d^2 + e^2) \bar{\psi}_{-1}(r) & \times \left(r \bar{\psi}_1(r) - \frac{a^2}{r} \bar{\psi}_{-1}(r) \right) & & \\ & & -p(r) + a^2 (b^2 + c^2) \bar{\psi}_{-1}(r) & & \\ 2 - 3[2pt/2pt] & & + (d^2 + e^2) \bar{\psi}_1(r) & & \end{bmatrix}$$

- Семейство 2.

#	Градиенты деформации	Меры деформации
1	$\begin{bmatrix} \frac{a}{r} & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & b^2 + c^2 & bd + ce \\ 0 & bd + ce & d^2 + e^2 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} \sqrt{2ax} & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2ax & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ab^2}{2x} + c^2 & \frac{abd}{2x} + ce \\ 0 & \frac{abd}{2x} + ce & \frac{ad^2}{2x} + e^2 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{a(r^2-b)}}{r} & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a(r^2-b)}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ac^2}{r^2-b} + d^2 & \frac{ace}{r^2-b} + df \\ 0 & \frac{ace}{r^2-b} + df & \frac{ae^2}{r^2-b} + f^2 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} \left(1 - \frac{a}{r^3}\right)^{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{(r^3-a)^{4/3}}{r^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(r^3-a)^{2/3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\csc^2 \theta}{(r^3-a)^{2/3}} \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ \frac{ab}{r} & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{cd} & \frac{b}{cdr} & 0 \\ \frac{b}{cdr} & \frac{b^2+c^2}{cdr^2} & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{bmatrix}$

Таблица 1.3. Градиенты деформации и левые меры Коши–Грина

$$\begin{bmatrix} -p(x) + 2ax\bar{\psi}_1(x) \\ + \frac{1}{2ax}\bar{\psi}_{-1}(x) & 0 & 0 \\ -p(x) + \frac{1}{2x}(ab^2 + 2c^2x)\bar{\psi}_1(x) & \frac{1}{2}(abd + 2cex) \\ [2pt/2pt] & +a(ad^2 + 2e^2x)\bar{\psi}_{-1}(x) & \times \left(\frac{1}{x}\bar{\psi}_1(x) - 2a\bar{\psi}_{-1}(x)\right) \\ -p(x) + \frac{1}{2x}(ad^2 + 2e^2x)\bar{\psi}_1(x) \\ 2 - 3[2pt/2pt] & +a(ab^2 + 2c^2x)\bar{\psi}_{-1}(x) \end{bmatrix}$$

- Семейство 3.

$$\begin{bmatrix} -p(r) + \frac{r^2}{a(r^2-b)}\bar{\psi}_{-1}(r) \\ + a\left(1 - \frac{b}{r^2}\right)\bar{\psi}_1(r) & 0 & 0 \\ -p(r) + \left(\frac{ac^2}{r^2-b} + d^2\right)r^2\bar{\psi}_1(r) & (ace + (r^2 - b)df) \\ [2pt/2pt] & + \frac{a}{r^2}(ae^2 + (r^2 - b)f^2)\bar{\psi}_{-1}(r) & \times \frac{r^2\bar{\psi}_1(r) + a(b-r^2)\bar{\psi}_{-1}(r)}{r^3-br} \\ -p(r) \\ + a(ac^2 + (r^2 - b)d^2)\bar{\psi}_{-1}(r) \\ 2 - 3[2pt/2pt] & - \frac{ae^2 + (r^2-b)f^2}{b-r^2}\bar{\psi}_1(r) \end{bmatrix}$$

- Семейство 4.

#	I_1	I_2
1	$\frac{a^2}{r^2} + r^2 (b^2 + c^2) + d^2 + e^2$	$a^2 (b^2 + c^2) + \frac{a^2}{r^2} (d^2 + e^2) + \frac{r^2}{a^2}$
2	$\frac{a}{2x} (b^2 + d^2) + 2ax + c^2 + e^2$	$a^2 (b^2 + d^2) + \frac{1}{2ax} + 2ax (c^2 + e^2)$
3	$a \left(\frac{bc^2 + e^2}{r^2 - b} - \frac{b}{r^2} + c^2 + 1 \right) + d^2 r^2 + f^2$	$\frac{r^4}{r^2(r^2 - b)} \left\{ \frac{r^4}{a^2} - a (b - r^2) (c^2 r^2 + e^2) + (b^2 - 2br^2 + r^4) (d^2 r^2 + f^2) \right\}$
4	$\frac{a^2 - 2ar^3 + 3r^6}{r^4(r^3 - a)^{2/3}}$	$\frac{2a^2 - 4ar^3 + 3r^6}{r^2(r^3 - a)^{4/3}}$
5	$\frac{1}{cd} (b^2 + c (c + d^3) + 1)$	$\frac{d}{c} (b^2 + c^2 + 1) + \frac{1}{d^2}$

Таблица 1.4. Главные инварианты

$$\left[\begin{array}{ccc} -p(\mathbf{r}) + \frac{(r^3 - a)^{4/3}}{r^4} \bar{\psi}_1(\mathbf{r}) & & \\ + \frac{r^4}{(r^3 - a)^{4/3}} \bar{\psi}_{-1}(\mathbf{r}) & 0 & 0 \\ [2pt/2pt] & -p(\mathbf{r}) + \frac{(r^3 - a)^{2/3}}{r^2} \bar{\psi}_{-1}(\mathbf{r}) & \\ & + \frac{r^2}{(r^3 - a)^{2/3}} \bar{\psi}_1(\mathbf{r}) & 0 \\ 2 - 3[2pt/2pt] & & -p(\mathbf{r}) + \frac{(r^3 - a)^{2/3}}{r^2} \bar{\psi}_{-1}(\mathbf{r}) \\ & & + \frac{r^2}{(r^3 - a)^{2/3}} \bar{\psi}_1(\mathbf{r}) \end{array} \right]$$

• Семейство 5.

$$\left[\begin{array}{ccc} -p(r) + \frac{1}{cd} \{ (b^2 + c^2) d^2 \bar{\psi}_{-1}(r) & & \\ + \bar{\psi}_1(r) \} & \frac{1}{cd} (b \bar{\psi}_1(r) - d^2 \bar{\psi}_{-1}(r)) & 0 \\ [2pt/2pt] & -p(r) + \frac{1}{cd} \{ d^2 \bar{\psi}_{-1}(r) & \\ + (b^2 + c^2) \bar{\psi}_1(r) \} & & 0 \\ 2 - 3[2pt/2pt] & & -p(r) \\ & & + \frac{1}{d^2} (d^4 \bar{\psi}_1(r) + \bar{\psi}_{-1}(r)) \end{array} \right]$$

Здесь используется обозначение

$$\bar{\psi}_1(r) := \psi_1(I_1(r), I_2(r)), \quad \bar{\psi}_{-1}(r) := \psi_{-1}(I_1(r), I_2(r)).$$

Чтобы найти гидростатическую составляющую напряжений, необходимо подставить эти выражения в уравнения количества движения, записанные в соответствующих координатах. В результате можно получить

- Семейство 1.

$$\begin{aligned} -a^2 r^3 \partial_r p(r) - [a^4 (d^2 + e^2) - 3r^4] \bar{\psi}_{-1}(r) + a^4 r \partial_r \bar{\psi}_1(r) - \\ - a^2 [a^2 + r^4 (b^2 + c^2)] \bar{\psi}_1(r) + r^5 \partial_r \bar{\psi}_{-1}(r) = 0 \end{aligned}$$

- Семейство 2.

$$\partial_x p(x) - 2a x \partial_x \bar{\psi}_1(x) - \frac{1}{2ax} \partial_x \bar{\psi}_{-1}(x) - 2a \bar{\psi}_1(x) - \frac{1}{2ax^2} \bar{\psi}_{-1}(x) = 0$$

- Семейство 3.

$$\begin{aligned} \partial_r p(r) - \left[\frac{a(b+r^2)}{r^3} + \frac{ar^2}{b-r^2} - d^2 r \right] \bar{\psi}_1(r) - \\ - \left[\frac{ab^2}{r^3} (f^2(b-r^2) - ae^2) + \frac{r(r^2-3b)}{a(b-r^2)^2} \right] \bar{\psi}_{-1}(r) + \\ + (b-r^2) \frac{a}{r^2} \partial_r \bar{\psi}_1(r) + \frac{r^2}{a(b-r^2)} \partial_r \bar{\psi}_{-1}(r) = 0 \end{aligned}$$

- Семейство 4.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) - \frac{2a^2}{\mathbf{r}^3} \frac{a-3\mathbf{r}^3}{(\mathbf{r}^3-a)^{\frac{7}{3}}} \bar{\psi}_{-1}(\mathbf{r}) + \frac{2a^2}{\mathbf{r}^5(\mathbf{r}^3-a)^{\frac{2}{3}}} \bar{\psi}_1(\mathbf{r}) - \\ - \frac{(\mathbf{r}^3-a)^{\frac{4}{3}}}{\mathbf{r}^4} \partial_r \bar{\psi}_1(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{r}^4}{(\mathbf{r}^3-a)^{\frac{4}{3}}} \partial_r \bar{\psi}_{-1}(\mathbf{r}) = 0 \end{aligned}$$

- Семейство 5.

$$\begin{cases} r \partial_r p(r, \phi) + (b^2 + c^2 - 1) \left(\frac{1}{cd} \bar{\psi}_1 - d \bar{\psi}_{-1} \right) = 0 \\ \partial_\phi p(r, \phi) + \frac{2b}{c} \left(\frac{1}{d} \bar{\psi}_1 - d \bar{\psi}_{-1} \right) = 0 \end{cases}$$

Интегрирование этих уравнений дает следующие выражения для гидростатической составляющей

- Семейство 1.

$$\begin{aligned} p &= \int \left\{ \left(\frac{a^2}{r^3} + r(b^2 + c^2) \right) \bar{\psi}_1(r) + \left(\frac{a^2}{r^3} (d^2 + e^2) - 3 \frac{r}{a^2} \right) \bar{\psi}_{-1}(r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2}{r^2} \partial_r \bar{\psi}_1(r) - \frac{r^2}{a^2} \partial_r \bar{\psi}_{-1}(r) \right\} dr = -\frac{a^2}{r^2} \bar{\psi}_1(r) - \frac{r^2}{a^2} \bar{\psi}_{-1}(r) + \\ &+ \int \left\{ \left(r^2(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{r^2} \right) \bar{\psi}_1(r) + \left(\frac{a^2}{r^2} (d^2 + e^2) - \frac{r^2}{a^2} \right) \bar{\psi}_{-1}(r) \right\} \frac{dr}{r} = \\ &= -\frac{a^2}{r^2} \bar{\psi}_1(r) - \frac{r^2}{a^2} \bar{\psi}_{-1}(r) + \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial I_1}{\partial r} \bar{\psi}_1(r) - \frac{1}{2} \frac{\partial I_2}{\partial r} \bar{\psi}_{-1}(r) \right\} \frac{dr}{r} = \\ &= -\frac{a^2}{r^2} \bar{\psi}_1(r) - \frac{r^2}{a^2} \bar{\psi}_{-1}(r) + W + p_0. \end{aligned}$$

- Семейство 2.

$$\begin{aligned}
 p &= \int \left\{ 2a x \partial_x \bar{\psi}_1(x) + \frac{1}{2a x} \partial_x \psi_{-1}(x) + 2a \bar{\psi}_1(x) - \frac{1}{2a x^2} \bar{\psi}_{-1}(x) \right\} = \\
 &= 2a x \bar{\psi}_1(x) + \frac{1}{2a x} \bar{\psi}_{-1}(x) + p_0.
 \end{aligned}$$

- Семейство 3.

$$\begin{aligned}
 p &= \int \left\{ \left[\frac{a(b+r^2)}{r^3} + \frac{a r c^2}{b-r^2} - d^2 r \right] \bar{\psi}_1(r) + \right. \\
 &+ \left[\frac{a}{r^3} (f^2(b-r^2) - a e^2) + \frac{r(r^2-3b)}{a(b-r^2)^2} \right] \bar{\psi}_{-1}(r) - (b-r^2) \frac{a}{r^2} \partial_r \bar{\psi}_1(r) - \\
 &\left. - \frac{r^2}{a(b-r^2)} \partial_r \bar{\psi}_{-1}(r) \right\} = (r^2-b) \frac{a}{r^2} \bar{\psi}_1(r) - \frac{r^2}{a(r^2-b)} \bar{\psi}_{-1}(r) + \\
 &+ \int \left\{ \left[\frac{a(r^2-b)}{r^2} + \frac{a r^2 c^2}{b-r^2} - d^2 r^2 \right] \bar{\psi}_1(r) + \right. \\
 &\left. + \left[\frac{a}{r^2} (f^2(b-r^2) - a e^2) + \frac{r^2}{a(r^2-b)} \right] \bar{\psi}_{-1}(r) \right\} \frac{dr}{r}.
 \end{aligned}$$

- Семейство 4.

$$\begin{aligned}
 p &= \int \left\{ \frac{2a^2}{r^3} \frac{a-3r^3}{(r^3-a)^{\frac{7}{3}}} \bar{\psi}_{-1}(r) - \frac{2a^2}{r^5 (r^3-a)^{\frac{2}{3}}} \bar{\psi}_1(r) + \right. \\
 &+ \left. \frac{(r^3-a)^{\frac{4}{3}}}{r^4} \partial_r \bar{\psi}_1(r) + \frac{r^4}{(r^3-a)^{\frac{4}{3}}} \partial_r \bar{\psi}_{-1}(r) \right\} dr = \\
 &= \frac{(r^3-a)^{\frac{4}{3}}}{r^4} \bar{\psi}_1(r) + \frac{r^4}{(r^3-a)^{\frac{4}{3}}} \bar{\psi}_{-1}(r) - \\
 &- 2a \int \left\{ \frac{a-2r^3}{r^2 (r^3-a)^{\frac{4}{3}}} \bar{\psi}_{-1} + \frac{2r^3-a}{r^4 (r^3-a)^{\frac{2}{3}}} \bar{\psi}_1 \right\} \frac{dr}{r}.
 \end{aligned}$$

- Семейство 5.

$$p = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{d} \bar{\psi}_1 - d \bar{\psi}_{-1} \right) [2b \phi + (1-b^2-c^2) \ln r] + p_0.$$

Библиография

1. Kellogg Oliver Dimon. *Foundations of Potential Theory*. — Springer Nature, 1967.
2. Truesdell Clifford, Toupin Richard. *The classical field theories*. — Springer, 1960.
3. Truesdell Clifford A. *A first course in rational continuum mechanics. Volume 1-General concepts*. — Academic Press, Inc., 1977. — Vol. 1.
4. Truesdell Clifford, Noll Walter. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics* / Ed. by Stuart S. Antman. — Springer Berlin Heidelberg, 2004.
5. Lurie Anatolii Isakovich. *Non-linear theory of elasticity*. — Elsevier, 2012.
6. Maugin Gérard A. *Material inhomogeneities in elasticity*. — CRC Press, 1993. — Vol. 3.
7. Marsden Jerrold E, Hughes Thomas JR. *Mathematical foundations of elasticity*. — Courier Corporation, 1994.
8. Lee John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. — Springer New York, 2012.
9. Hatcher A. *Algebraic Topology*. — Cambridge University Press, 2002. — ISBN: 9780521795401.
10. Yavari Arash. *Compatibility Equations of Nonlinear Elasticity for Non-Simply-Connected Bodies* // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. — 2013. — Vol. 209, no. 1. — P. 237–253.
11. Lee John M. *Introduction to Topological Manifolds*. — Springer New York, 2011.
12. Ciarlet Philippe G., Mardare Cristinel, Shen Ming. *Saint Venant compatibility equations in curvilinear coordinates* // *Analysis and Applications*. — 2007. — Vol. 5, no. 3. — P. 231–251.
13. de Wit R. *Fundamental aspects of dislocation theory* / Ed. by John A. Simmons, R. de Wit, R. Bullough. — National Bureau of Standards (U.S.), 1970. — Vol. I. — P. 651–673.

14. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1962. — Vol. 11, no. 1. — P. 415–448.
15. Ryzhak E.I. Direct coordinate-free derivation of the compatibility equation for finite strains // *Mechanics of Solids.* — 2014. — Vol. 49, no. 4. — P. 382–388.
16. Maugin Gérard A. *Continuum Mechanics Through the Eighteenth and Nineteenth Centuries.* — Springer International Publishing, 2014.
17. Truesdell C. *Essays in the History of Mechanics.* — Springer Science & Business Media, 1968.
18. Euler L. Continuation des recherches sur la theorie du mouvement des fluides // *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin.* — 1757. — P. 316–361.
19. Euler L. Sectio tertia de motu fluidorum lineari potissimum aquae // *Novi Commentarii academiae scientiarum Petrop.* — 1771. — P. 219–360.
20. Cauchy A.-L. Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques // *Bulletin de la Société philomatique.* — 1823. — P. 9–13.
21. Cauchy A.-L. De la pression ou tension dans un corps solide // *Ex. de Math.* — 1827. — P. 42–56.
22. Poisson S.-D. Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps élastiques // *Mem. Acad. Sci. Inst. France.* — 1829. — Vol. 8. — P. 356.
23. Capecchi Danilo, Ruta Giuseppe C. Piola's contribution to continuum mechanics // *Archive for History of Exact Sciences.* — 2007. — mar. — Vol. 61, no. 4. — P. 303–342. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00407-007-0002-x>.
24. Devreese J. T., Berghe G. V. 'Magic is no magic': the wonderful world of Simon Stevin. — WIT Press, 2008.
25. Cauchy A.-L. Sur la condensation et la dilatation des corps solides // *Ex. de Math.* — 1827. — P. 60–69.
26. Cauchy A.-L. Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non

- élastique // Oeuvres (2) Gauthier–Villars. — 1890. — Vol. 8. — P. 195–226.
27. Noll Walter. *The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics* // The Foundations of Mechanics and Thermodynamics. — Springer Science & Business Media, 1974. — P. 31–47.
28. Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. — Cambridge University Press, 2008. — ISBN: [9781139467544](#).
29. Halmos P. R. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. — Springer, 1993. — ISBN: [0387900934](#).
30. Ericksen J. L. Deformations possible in every compressible, isotropic, perfectly elastic material // *Journal of Mathematics and Physics*. — 1955. — Vol. 34. — P. 126–128.
31. Ericksen J. L. Deformations possible in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body // *ZAMP*. — 1954. — Vol. 5. — P. 466–488.
32. Singh M., Pipkin A.C. Note on Ericksen’s problem // *ZAMP*. — 1965. — Vol. 16. — P. 706–709.
33. Klingbeil W.W., Shield R.T. On a class of solutions in plane finite elasticity // *ZAMP*. — 1966. — Vol. 17. — P. 489–511.
34. Shield R.T. Deformations possible in every compressible, isotropic, perfectly elastic material // *Journal of Elasticity*. — 1971. — Vol. 1. — P. 91–92.
35. Saccomandi Giuseppe. *Universal Solutions and Relations in Finite Elasticity* // *Topics in Finite Elasticity* / Ed. by Michael Hayes, Giuseppe Saccomandi. — Vienna : Springer Vienna, 2001. — P. 95–130.

Глава 2.

Лекция 5

2.1. Классическая теория малых деформаций

В линейной теории упругости функционал отклика зависит от тензорного поля малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, которое в декартовых координатах (x^1, x^2, x^3) выражается через векторное поле перемещений $\mathbf{u} = u^i \mathbf{c}_i$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_j.$$

В криволинейных координатах (q^1, q^2, q^3) , связанных с декартовыми координатами соотношениями

$$(x^i)_{i=1}^3 = (\hat{x}^i(q^1, q^2, q^3))_{i=1}^3,$$

при условии

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial q^1} & \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial q^2} & \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial q^3} \\ \frac{\partial \hat{x}^2}{\partial q^1} & \frac{\partial \hat{x}^2}{\partial q^2} & \frac{\partial \hat{x}^2}{\partial q^3} \\ \frac{\partial \hat{x}^3}{\partial q^1} & \frac{\partial \hat{x}^3}{\partial q^2} & \frac{\partial \hat{x}^3}{\partial q^3} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тензорное поле малых деформаций вычисляется по формулам

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (u_{i;j} + u_{j;i}) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial q^j} + \frac{\partial u_j}{\partial q^i} - 2\Gamma_{ji}^m u_m \right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j.$$

Здесь (u_1, u_2, u_3) — ковариантные компоненты поля перемещений в локальном базисе, $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i$, т.е.

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = \tilde{u}^j \mathbf{c}_j \cdot \mathbf{e}_i = \Omega_{ij} u^j, \quad \Omega_{ij} = \mathbf{c}_j \cdot \mathbf{e}_i$$

причем, поскольку

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \widehat{x}^j}{\partial q^i} \mathbf{c}_j,$$

то

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial \widehat{x}^j}{\partial q^i};$$

а элементы контравариантного базиса определяются алгебраическим соотношением (биортогональности) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$. Символом Γ_{ji}^m обозначены символы Кристоффеля

$$\Gamma_{ji}^m = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^i} = \frac{\partial \widehat{x}^k}{\partial q^n} \frac{\partial^2 \widehat{x}^j}{\partial q^i \partial q^k} g^{nm}, \quad [g^{nm}] = [g_{nm}]^{-1}, \quad g_{nm} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \widehat{x}^k}{\partial q^n} \frac{\partial \widehat{x}^k}{\partial q^m}.$$

В случае, когда криволинейные координаты ортогональны, т.е.

$$\forall i \neq j \in (1, 2, 3) \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \widehat{x}^n}{\partial q^i} \frac{\partial \widehat{x}^n}{\partial q^j} = 0,$$

то вместо ковариантных и контравариантных базисов используют физический базис

$$\mathbf{e}_{\langle i \rangle} = \frac{\mathbf{e}_i}{h_i} = \mathbf{e}^i h_i, \quad h_i = \sqrt{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i}, \quad \mathbf{u} = u_{\langle i \rangle} \mathbf{e}_{\langle i \rangle}, \quad u_{\langle i \rangle} = \frac{u_i}{h_i}.$$

При этом выражение для тензорного поля малых деформаций принимает вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2h_i h_j} \left(\frac{\partial}{\partial q^j} (h_i u_{\langle i \rangle}) + \frac{\partial}{\partial q^i} (h_j u_{\langle j \rangle}) - 2 \sum_{m=1}^3 \Gamma_{ji}^m h_m u_{\langle m \rangle} \right) \mathbf{e}_{\langle i \rangle} \otimes \mathbf{e}_{\langle j \rangle}.$$

Поле нифинитезимальных поворотов, сопровождающих деформацию, в декартовом базисе задается кососимметричным тензором

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_j.$$

В криволинейных координатах тензорное поле $\boldsymbol{\omega}$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (u_{i;j} - u_{j;i}) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial q^j} - \frac{\partial u_j}{\partial q^i} \right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j.$$

В случае ортогональных координат поле $\boldsymbol{\omega}$ может быть представлено в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2h_i h_j} \left(\frac{\partial}{\partial q^j} (h_i u_{\langle i \rangle}) - \frac{\partial}{\partial q^i} (h_j u_{\langle j \rangle}) \right) \mathbf{e}_{\langle i \rangle} \otimes \mathbf{e}_{\langle j \rangle}.$$

Разумеется, сумма полей инфинитезимальных деформаций и вращений, записанных в любом из приведенных выше диадных разложений, дает градиент перемещений:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T) \\ &= \nabla \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_j \\ &= \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_j \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial q^j} + \frac{\partial u_j}{\partial q^i} - 2\Gamma_{ji}^m u_m \right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial q^j} - \frac{\partial u_j}{\partial q^i} \right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \\ &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial q^j} - \Gamma_{ji}^m u_m \right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2h_i h_j} \left(\frac{\partial}{\partial q^j} (h_i u_{\langle i \rangle}) + \frac{\partial}{\partial q^i} (h_j u_{\langle j \rangle}) - 2 \sum_{m=1}^3 \Gamma_{ji}^m h_m u_{\langle m \rangle} \right) \mathbf{e}_{\langle i \rangle} \otimes \mathbf{e}_{\langle j \rangle} \\ &+ \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2h_i h_j} \left(\frac{\partial}{\partial q^j} (h_i u_{\langle i \rangle}) - \frac{\partial}{\partial q^i} (h_j u_{\langle j \rangle}) \right) \mathbf{e}_{\langle i \rangle} \otimes \mathbf{e}_{\langle j \rangle} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{h_i h_j} \left(\frac{\partial}{\partial q^j} (h_i u_{\langle i \rangle}) - \sum_{m=1}^3 \Gamma_{ji}^m h_m u_{\langle m \rangle} \right) \mathbf{e}_{\langle i \rangle} \otimes \mathbf{e}_{\langle j \rangle}. \end{aligned}$$

Кососимметричному тензорному полю $\boldsymbol{\omega}$ может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие векторное поле

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \\ &= -\frac{1}{2} \omega^{ij} \mathbf{c}_i \times \mathbf{c}_j \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{c}_i \times \mathbf{c}_j \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^3}{\partial x^2} - \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \right) \mathbf{c}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^3} - \frac{\partial u^3}{\partial x^1} \right) \mathbf{c}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^1} - \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right) \mathbf{c}_3, \end{aligned}$$

или, иначе,

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{kij} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{c}_k,$$

где ϵ_{kij} обозначают символы Леви-Чивита

$$\epsilon_{kij} = \begin{cases} 1, & (k, i, j) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1, & (k, i, j) \in \{(2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2)\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Обратно, по заданному векторному полю можно восстановить кососимметричное тензорное поле следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I} \times \mathfrak{S}, \quad \mathbf{I} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_i.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \times \mathfrak{S} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_i \right) \\ &\times \left(\left(\frac{\partial u^3}{\partial x^2} - \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \right) \mathbf{c}_1 + \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^3} - \frac{\partial u^3}{\partial x^1} \right) \mathbf{c}_2 + \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^1} - \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right) \mathbf{c}_3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^3}{\partial x^2} - \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \right) (\mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{c}_3 \times \mathbf{c}_1) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^3} - \frac{\partial u^3}{\partial x^1} \right) (\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{c}_3 \times \mathbf{c}_2) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^1} - \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right) (\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_3) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^3}{\partial x^2} - \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \right) (\mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_3) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^3} - \frac{\partial u^3}{\partial x^1} \right) (\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{c}_1) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^1} - \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right) (\mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_2) \\ &= \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Заметим, что тот же результат можно получить, умножив векторное поле \mathfrak{S} на единичный тензор справа:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathfrak{S} \times \mathbf{I}.$$

Эти формулы сохраняют свой вид и в случае разложений по локальным базисам криволинейных координат, если вместо символов Леви-Чивита ϵ_{kij} использовать компоненты тензора Леви-Чивита \mathcal{E}_{kij} обозначают символы Леви-Чивита

$$\mathcal{E}_{kij} = \sqrt{g}\epsilon_{kij}, \quad g = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial q^1} & \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial q^2} & \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial q^3} \\ \frac{\partial \hat{x}^2}{\partial q^1} & \frac{\partial \hat{x}^2}{\partial q^2} & \frac{\partial \hat{x}^2}{\partial q^3} \\ \frac{\partial \hat{x}^3}{\partial q^1} & \frac{\partial \hat{x}^3}{\partial q^2} & \frac{\partial \hat{x}^3}{\partial q^3} \end{vmatrix}^2.$$

Заметим, что в случае ортогональных координат локальные базисы ортонормированы, т.е. $g = 1$, и, следовательно, компоненты тензора Леви-Чивита количественно совпадают со значениями символов Леви-Чивита. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= -\frac{1}{4}\mathcal{E}_{kij} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{e}^k \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{4} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{kij} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{e}^k \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{kij} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} (h_i u_{\langle i \rangle}) - \frac{\partial}{\partial x^i} (h_j u_{\langle j \rangle}) \right) \mathbf{e}_{\langle k \rangle}. \end{aligned}$$

Если поля инфинитезимальных деформаций и вращений вычислены по некоторому гладкому полю перемещений, то их сумма – так называемое поле дисторсии – содержит полную информацию об этом поле перемещений, и оно может быть получено интегрированием соответствующей системы дифференциальных уравнений. Такое интегрирование удобно выполнять с помощью интегралов по путям (криволинейных интегралов второго рода). Пусть путь γ определяется параметрически

$$\gamma = \{ \mathcal{O} + \gamma^i(t) \mathbf{c}_i \}_{t \in (0,1)}.$$

Тогда может быть определен интеграл вдоль пути γ следующим образом:

$$\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}_{\gamma} = \int_0^1 (\mathbf{v} \circ \gamma) \cdot \mathbf{c}_i \frac{d\gamma^i}{dt} dt.$$

Если в качестве векторного поля \mathbf{v} взять градиент некоторой функции

f , то

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} [(\nabla f) \circ \gamma] \cdot d\mathbf{x}_{\gamma} &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \circ \gamma \right) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \frac{d\gamma^i}{dt} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{d\gamma^i}{dt} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f \circ \gamma) dt \\
 &= f \circ \gamma \Big|_{t=1} - f \circ \gamma \Big|_{t=0}.
 \end{aligned}$$

Осталось лишь вместо f подставить поле перемещений \mathbf{u} . Имеем:

$$\int_{\gamma} \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}_{\gamma} = \mathbf{u} \circ \gamma \Big|_{t=1} - \mathbf{u} \circ \gamma \Big|_{t=0}.$$

2.2. Закон Гука

Законы сохранения количества движения и момента количества движения постулируются справедливыми для любого динамического процесса вне зависимости от того, из какого материала состоит тело. Частный вид материала определяется законом состояния, который накладывает ограничения на возможные динамические процессы. Определим следующий класс материалов:

Определение 2.1. Тело называется *линейно упругим*, если для каждой точки $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ существует линейное преобразование

$$\mathbf{C}_{\mathcal{X}} : \text{End}(\mathcal{V}) \rightarrow \text{Sym}(\mathcal{V}),$$

такое, что

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{X}} = \mathbf{C}_{\mathcal{X}}[\nabla \mathbf{u}(\mathcal{X})].$$

Замечание 2.1. Таким образом, молчаливо подразумевается, что напряжение равно нулю, когда градиент перемещений равен нулю; или, что то же самое, что остаточное напряжение в теле равно нулю.

Тензор четвертого ранга \mathbf{C}_x , связывающий градиент перемещений и тензор напряжений в точке $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, называется **тензором упругих коэффициентов**. Приходим к полю $\mathbf{C} : \mathcal{X} \mapsto \mathbf{C}_x$, которое определяет поле упругих коэффициентов.

В случае, когда поле \mathbf{C} , наряду с объемной плотностью ρ , является постоянным отображением, будем говорить, что тело **однородно**.

В соответствии с принципом материальной индифферентности постулируем, что *на всех жестких смещениях соответствующий тензор напряжений равен нулю в каждой точке тела*. Это означает, в частности, что для любого кососимметричного тензора \mathbf{W} ,

$$\forall \mathcal{X} \in \mathcal{B} : \mathbf{C}_x[\mathbf{W}] = \mathbf{0}.$$

Но тогда исходное определяющее соотношение сводится к равенству

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \mathbf{C}_x[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{X})]$$

— **закону Гука**, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — поле малых деформаций, соответствующее $\nabla \mathbf{u}$.

В ортонормированном базисе $(\mathbf{c}_i)_{i=1}^3$, полагая

$$C_{ijkl} := (\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_j) : \mathbf{C}[\mathbf{c}_k \otimes \mathbf{c}_l]$$

для компонент \mathbf{C} , получаем равенство

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl},$$

связывающее компоненты напряжений с компонентами тензора малых деформаций. Поскольку \mathbf{C} действует на симметричные тензоры и поскольку результат действия является симметричным тензором, компоненты тензора упругих коэффициентов обладают следующими симметриями:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}.$$

Будем полагать, что в каждой точке $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, будучи суженным на симметричные тензоры, тензор \mathbf{C}_x обратим. В таком случае определен тензор

$$\mathbf{K}_x = \mathbf{C}_x^{-1},$$

называемый **тензором коэффициентов податливости**. Закон Гука принимает вид соотношения

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{X}) = \mathbf{K}_x[\boldsymbol{\sigma}_x],$$

между тензором малых деформаций и напряжениями.

Предположим наличие дополнительных симметрий у тензора упругих коэффициентов. Именно, пусть для любой точки $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ выполнено равенство

$$\mathbf{A} : \mathbf{C}_x[\mathbf{B}] = \mathbf{B} : \mathbf{C}_x[\mathbf{A}],$$

для любой пары симметричных тензоров \mathbf{A} и \mathbf{B} . В таком случае для компонент справедливо равенство

$$C_{ijkl} = C_{klij},$$

и в итоге тензор \mathbf{C} имеет 21 независимый коэффициент.

Из термодинамических соображений, сводящихся к условию того, что при любой бесконечно малой деформации из естественной конфигурации производится положительная работа, следует, что тензор \mathbf{C}_x должен быть положительно определенным в любой точке $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, т.е.,

$$\mathbf{A} : \mathbf{C}_x[\mathbf{A}] > 0,$$

для любого ненулевого симметричного тензора \mathbf{A} .

Дальнейшее упрощение тензора \mathbf{C} определяется его группой симметрии. Именно, назовем ортогональный тензор \mathbf{Q} преобразованием симметрии в точке $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$, если справедливо равенство

$$\mathbf{Q}\mathbf{C}_x[\boldsymbol{\varepsilon}]\mathbf{Q}^T = \mathbf{C}_x[\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Q}^T],$$

для любого симметричного тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$. Множество всех преобразований симметрии в точке \mathcal{X} образует группу \mathcal{G}_x — группу симметрии материала в точке \mathcal{X} .

Выделим особые классы симметрии. Скажем, что материал **изотропен** в точке \mathcal{X} , если

$$\mathcal{G}_x = \mathbf{O}(3),$$

и **анизотропен**, если

$$\mathcal{G}_x \subset \mathbf{O}(3),$$

и это включение строгое.

В случае, когда материал изотропен, тензор упругих коэффициентов определяется всего лишь двумя параметрами Ламе $\lambda = \lambda(\mathcal{X})$ и $\mu = \mu(\mathcal{X})$:

$$\mathbf{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1},$$

для любого симметричного тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$. Таким образом, определяющее соотношение для изотропного материала имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}, \quad (2.2.21)$$

или, в ортонормированном базисе,

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}.$$

Из положительной определенности тензора упругих коэффициентов следует, что

$$\mu > 0 \quad \text{и} \quad 3\lambda + 2\mu > 0.$$

Замечание 2.2. *Вместо упругих модулей Ламе часто используются «технические» модули, а именно модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν :*

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu},$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

2.3. Уравнение Навье – Коши

Предположим, что тело линейно упруго, однородно и изотропно. Подставляя определяющее соотношение (закон Гука) (2.2.21) в закон сохранения количества движения и проводя стандартные преобразования, приходим к уравнению движения Навье – Коши:

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}}.$$

В нем \mathbf{u} — поле перемещений, ρ — объемная плотность, а \mathbf{b} — плотность объемных сил. Символ Δ обозначает дифференциальный оператор Лапласа, который в декартовых координатах (x, y, z) имеет вид

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}.$$

2.4. Линейно упругое тело с дислокациями

Для того, чтобы проиллюстрировать особенности напряженного состояния, вызванные наличием источников остаточных напряжений, рассмотрим линейно-упругое тело с дислокациями¹:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^T = -\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^T. \quad (2.2.41)$$

¹Симметричность $\boldsymbol{\eta}$ требуется для того, чтобы поле $\boldsymbol{\varepsilon}$ было симметричным. Это требование техническое и позволит в дальнейшем воспользоваться некоторыми удобными формулами.

Тензорное поле $\boldsymbol{\eta}$ предполагается заданным. Используя (2.2.41) и соотношение закона Гука, получим выражение для связи меры несовместности и остаточных напряжений.

Поскольку поле $\boldsymbol{\varepsilon}$ симметрично, то для него справедливо тождество [?]

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^T = -\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \nabla (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) + 2 \text{def}(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{I}(\Delta(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) - \nabla \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (2.2.42)$$

Здесь $\text{def} \mathbf{u} := \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T)$ — «деформация» векторного поля \mathbf{u} . Вычисляя след от левой и правой части равенства (2.2.41) и учитывая тождество (2.2.42), получаем:

$$\Delta(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) - \nabla \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \text{tr } \boldsymbol{\eta}. \quad (2.2.43)$$

Будем полагать, что материал тела линейно упругий и изотропный, т.е., подчиняется закону Гука:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\mathbf{T} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \mathbf{I} \text{tr } \mathbf{T} \right), \quad (2.2.44)$$

связывающему поле $\boldsymbol{\varepsilon}$ и напряжения \mathbf{T} . Здесь λ, μ — модули упругости Ламе. Подчеркнем, что соотношение (2.2.44) является локальным и потому может быть использовано даже в случае несовместных деформаций². Подставляя (2.2.44) в (2.2.41) и принимая во внимание равенства (2.2.42) и (2.2.43), получаем уравнение

$$-\Delta \mathbf{T} - 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla \text{tr } \mathbf{T} + 2 \text{def } \nabla \cdot \mathbf{T} + \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \mathbf{I} \Delta(\text{tr } \mathbf{T}) = \mathbf{B}_1, \quad (2.2.45)$$

относительно напряжений, в котором поле $\mathbf{B}_1 = 2\mu(\mathbf{I} \text{tr } \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta})$ определяет вклад дефектов в самонапряженное состояние тела. Уравнение (2.2.45) можно преобразовать к более удобному виду, если воспользоваться выражением для следа:

$$2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla(\text{tr } \mathbf{T}) = -2\mu \text{tr } \boldsymbol{\eta} + \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T},$$

полученным, если взять след левой и правой частей (2.2.45). Тогда

$$-\Delta \mathbf{T} - 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla(\text{tr } \mathbf{T}) + 2 \text{def } \nabla \cdot \mathbf{T} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{B}_2, \quad (2.2.46)$$

²В инфинитезимальной окрестности каждой точки значение тензора дисторсии может быть рассмотрено как сужение некоторого градиента деформации (своего, для каждой точки) на эту окрестность.

где $\mathbf{B}_2 = 2\mu \left(2\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \mathbf{I} \text{tr } \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta} \right)$. Соотношение (2.2.46) связывает симметричные тензоры \mathbf{T} и $\boldsymbol{\eta}$ и потому в координатах является системой шести уравнений.

В уравнении (2.2.46), связывающем напряжения \mathbf{T} и меру несовместности $\boldsymbol{\eta}$, поле \mathbf{T} несбалансировано, т.е. напряжения реализуются лишь при действии специального поля массовых сил. Для получения уравнений, характеризующих сбалансированные относительно заданного поля \mathbf{f} внешних сил, предположим справедливым уравнение баланса импульса

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}, \quad (2.2.47)$$

где ρ — массовая плотность тела. Исключая из уравнений (2.2.46) и (2.2.47) след тензора \mathbf{T} , приходим к уравнению [?]

$$-\Delta \mathbf{T} - 2\frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda} \nabla \nabla (\text{tr } \mathbf{T}) + 2 \text{def} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) + \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) = \mathbf{B}_2. \quad (2.2.48)$$

Уравнение (2.2.48) характеризует сбалансированное напряженное состояние тела, вызванное двумя причинами: внешними силами \mathbf{f} и внутренними источниками $\boldsymbol{\eta}$.

Удобно ввести некоторое промежуточное состояние, напряжения которого характеризуются полем \mathbf{T}_0 . В силу малости деформаций, напряженные состояния аддитивны, поэтому

$$\mathbf{T} - \mathbf{T}_0 = 2\mu \text{def } \mathbf{u} + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \text{tr } \mathbf{T} - \text{tr } \mathbf{T}_0 = (2\mu + 3\lambda) \nabla \cdot \mathbf{u},$$

где \mathbf{u} — смещение из промежуточного состояния. Тогда уравнение (2.2.48) примет вид

$$-\Delta (2\mu \text{def } \mathbf{u} + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}) - 2(\mu + \lambda) \nabla \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2 \text{def} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) + \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) = \mathbf{B}_3, \quad (2.2.49)$$

в котором $\mathbf{B}_3 = 2\mu \left(2\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \mathbf{I} \text{tr } \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta} \right) + \Delta \mathbf{T}_0 + 2\frac{\mu+\lambda}{2\mu+3\lambda} \nabla \nabla (\text{tr } \mathbf{T}_0)$.

Левая часть (2.2.49) может быть факторизована:

$$-\left(2 \text{def} + \mathbf{I} 2\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \nabla \cdot \right) (\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{B}_3,$$

и мы приходим к уравнению Коши с дополнительным неоднородным членом («фиктивной нагрузкой») \mathbf{f}_A :

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} + \mathbf{f}_A = \rho \ddot{\mathbf{u}}.$$

Фиктивная нагрузка \mathbf{f}_A , в свою очередь, удовлетворяет уравнению

$$2\text{def } \mathbf{f}_A + \mathbf{I} \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \nabla \cdot \mathbf{f}_A + \mathbf{B}_3 = \mathbf{0}.$$

Исключение из (2.2.49) деформации и дивергенции ускорения,

$$\begin{aligned} \text{def } \ddot{\mathbf{u}} &= \frac{1}{2\mu} \left(\ddot{\mathbf{T}} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \mathbf{I} \text{tr } \ddot{\mathbf{T}} \right), \\ \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} &= \frac{1}{2\mu + \lambda} \text{tr } \ddot{\mathbf{T}}, \end{aligned}$$

приводит к финальному уравнению (здесь $\square_2 = \mu\Delta - \rho\partial_{tt}$) [?]

$$\begin{aligned} \square_2 \mathbf{T} + 2\mu \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\text{tr } \mathbf{T}) + \frac{\lambda(\mu + \lambda)\rho}{(2\mu + 3\lambda)^2} \mathbf{I} \text{tr } \ddot{\mathbf{T}} + 2\mu \text{def } \mathbf{f} + \\ + \frac{\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{f} = -\mu \mathbf{B}_2. \end{aligned} \quad (2.2.410)$$

В частном случае, если $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$, $\mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$, уравнение (2.2.410) принимает вид [?]

$$\square_2 \mathbf{T} + 2\mu \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\text{tr } \mathbf{T}) + \frac{\lambda(\mu + \lambda)\rho}{(2\mu + 3\lambda)^2} \mathbf{I} \text{tr } \ddot{\mathbf{T}} + 2\mu \text{def } \mathbf{f} + \frac{\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0},$$

а уравнение (2.2.48) преобразуется к динамическому уравнению Бельтрами – Мичелла:

$$\Delta \mathbf{T} + 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\text{tr } \mathbf{T}) - 2\text{def } (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) = \mathbf{0}.$$

В статическом приближении ($\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$) приходим к классическому уравнению Бельтрами – Донати – Мичелла:

$$\Delta \mathbf{T} + 2 \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \nabla \nabla (\text{tr } \mathbf{T}) + 2\text{def } \mathbf{f} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

2.5. Линеаризованная упругость

2.5.1. Линеаризованная кинематика

Рассмотрим малые возмущения отсчетной формы \mathcal{B} , определив однопараметрическое семейство $\{\mathcal{S}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in]-a, a[}$ форм $\mathcal{S}_\varepsilon \subset \mathcal{E}$, где число $a > 0$ достаточно мало, и однопараметрическое семейство $\{\gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon \in]-a, a[}$ деформаций $\gamma_\varepsilon : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}_\varepsilon$. Предположим, что при этом удовлетворяются следующие свойства:

- (i) $\mathcal{S}_0 = \mathcal{B}$ и $\gamma_0 = \text{Id}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ — тождественное отображение,
- (ii) для каждой точки $X \in \mathcal{B}$ отображение $\varepsilon \mapsto \gamma_\varepsilon(X)$ из] — a , $a[$ в \mathcal{E} имеет класс C^1 .

Тогда разложение отображения $\varepsilon \mapsto \gamma_\varepsilon(X)$ по формуле Тейлора первого порядка в окрестности точки $\varepsilon = 0$ имеет вид:

$$\gamma_\varepsilon(X) = \gamma_0(X) + \varepsilon \left. \frac{\partial \gamma_\varepsilon(X)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Здесь, в силу первого предположения, $\gamma_0(X) = X$. По этой причине, можно ввести обозначение $\mathbf{u}_\varepsilon(X) := \gamma_\varepsilon(X) - X$. Полученный вектор является перемещением из отсчетного места X в текущее место $\gamma_\varepsilon(X)$, отвечающее искаженной форме \mathcal{S}_ε . Таким образом, приходим к равенству

$$\mathbf{u}_\varepsilon(X) = \varepsilon \mathbf{s}(X) + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где вектор $\mathbf{s}(X) := \left. \frac{\partial \gamma_\varepsilon(X)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ есть темп «возмущения» в точке X . Для представления дальнейших рассуждений в лаконичном виде, введем еще одно обозначение $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon := \varepsilon \mathbf{s}$ для бесконечно малого перемещения — главной линейной части \mathbf{u}_ε относительно малого параметра ε .

Градиент поля $\mathbf{u}_\varepsilon : X \mapsto \mathbf{u}_\varepsilon(X)$ в точке $X \in \mathcal{B}$ имеет вид:

$$D_X \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{H}_\varepsilon(X) + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Здесь $\mathbf{H}_\varepsilon(X) = \varepsilon D_X \mathbf{s}$ — градиент $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$, т.е.,

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(X + \mathbf{h}) = \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(X) + \mathbf{H}_\varepsilon(X)[\mathbf{h}] + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{при } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Определим теперь тензоры малых деформаций и вращений (тензор вихря):

$$\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_\varepsilon + \mathbf{H}_\varepsilon^T), \quad \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_\varepsilon - \mathbf{H}_\varepsilon^T).$$

Поскольку $D\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon + \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon$, то

$$D\mathbf{u}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon + \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, с точностью до $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$, точное мультипликативное разложение $\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{R}_\varepsilon \mathbf{U}_\varepsilon$ может быть аппроксимировано аддитивным разложением $D\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon + \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon$.

Получим асимптотические разложения для правой меры Коши–Грина \mathbf{C}_ε , правого и левого тензоров искажений \mathbf{U}_ε и \mathbf{V}_ε , а также тензора поворота \mathbf{R}_ε . Во-первых, в соответствии с (1.1.313), имеем асимптотические разложения

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_\varepsilon &= \mathbf{I} + (\mathbf{H}_\varepsilon + \mathbf{H}_\varepsilon^\top) + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \mathbf{B}_\varepsilon &= \mathbf{I} + (\mathbf{H}_\varepsilon + \mathbf{H}_\varepsilon^\top) + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,\end{aligned}$$

для правого и левого тензоров Коши–Грина. Далее, по теореме о полярном разложении,

$$\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{I} + D\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{R}_\varepsilon \mathbf{U}_\varepsilon,$$

где

$$\mathbf{U}_\varepsilon = \sqrt{\mathbf{C}_\varepsilon} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathbf{H}_\varepsilon + \mathbf{H}_\varepsilon^\top) + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Приходим к следующему асимптотическому представлению для тензора поворотов \mathbf{R}_ε :

$$\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathbf{H}_\varepsilon - \mathbf{H}_\varepsilon^\top) + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Переходя к полям $\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon$ и $\tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon$, можно представить предыдущие формулы в виде

$$\mathbf{U}_\varepsilon = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad \mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.2.51)$$

Наконец, по той же теореме о полярном разложении также справедливо равенство $\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{V}_\varepsilon \mathbf{R}_\varepsilon$, откуда следует, что

$$\mathbf{V}_\varepsilon = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

2.5.2. Линеаризованное определяющее соотношение

Рассмотрим случай упругого материала, т.е., предположим, что определяющее соотношение для тела имеет вид

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{R}_\varepsilon \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(\mathbf{U}_\varepsilon) \mathbf{R}_\varepsilon^\top,$$

где отображение $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}} : \text{SimLin}(\mathcal{V}; \mathcal{V}) \rightarrow \text{SimLin}(\mathcal{V}; \mathcal{V})$ зависит от выбора отсчетной формы \mathcal{B} (что и отражено в обозначении), а \mathbf{R}_ε и \mathbf{U}_ε — вращение и правый тензор искажений, определяющие градиент деформации $\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{R}_\varepsilon \mathbf{U}_\varepsilon$. Отметим, что хотя напряжения и деформации зависят от малого параметра ε , само отображение $\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}$ от ε , конечно, не зависит.

В рамках формулы (2.2.51) получим асимптотическое представление для определяющего соотношения. С этой целью используем разложение по формуле Тейлора первого порядка:

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(\mathbf{U}_\varepsilon) = \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2)) = \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}) + \mathbf{L}_{\mathcal{B}}[\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon] + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}} = \left. \frac{\partial \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}=\mathbf{I}} : \text{SimLin}(\mathcal{V}; \mathcal{V}) \rightarrow \text{SimLin}(\mathcal{V}; \mathcal{V}).$$

Полагая $\mathbf{T}_0 := \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I})$, и осуществляя преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\varepsilon &= \mathbf{R}_\varepsilon \mathfrak{g}_{\mathcal{B}}(\mathbf{U}_\varepsilon) \mathbf{R}_\varepsilon^T = \\ &= (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2)) (\mathbf{T}_0 + \mathbf{L}_{\mathcal{B}}[\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon] + \mathbf{O}(\varepsilon^2)) (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2)), \end{aligned}$$

приходим к формуле

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{T}_0 + \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0 \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon + \mathbf{L}_{\mathcal{B}}[\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon] + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.2.52)$$

Здесь \mathbf{T}_0 есть тензор напряжений Коши, характеризующий напряженное состояние в форме \mathcal{B} . Тензор четвертого ранга $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ зависит от выбора формы и соответствует тензору упругих модулей.

В случае, когда форма \mathcal{B} свободна от напряжений, т.е., $\mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$, приходим к соотношению

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{L}[\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon] + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

которое является не чем иным, как классическим законом Гука (с точностью до $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$). Заметим, что в обозначении тензора \mathbf{L} опущен нижний индекс, поскольку рассматривается специальный случай, когда отсчетная форма свободна от напряжений.

2.5.3. Линеаризованные напряжения

Введем обозначение

$$\tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon = \mathbf{T}_0 + \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0 \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon + \mathbf{L}_{\mathcal{B}}[\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon],$$

тогда, в силу (2.2.52), справедливо равенство

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Последнее соотношение показывает, что в случае $\mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$ тензор $\tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon$ является главной частью тензора напряжений Коши \mathbf{T}_ε .

Следовательно, в случае отсчетной формы, свободной от напряжений, поля $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ и $\tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon$, полученные после линеаризации, играют роль, соответственно, полей перемещений и напряжений. Можно затем линеаризовать уравнение движения и граничные условия, выразив их через таким образом определенные поля.

Замечание 2.3. Уравнение движения $\operatorname{div} \mathbf{T}_\varepsilon + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}_\varepsilon$ в результате линеаризации принимает вид

$$\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{L} [\tilde{\mathbf{u}}'_\varepsilon + [\tilde{\mathbf{u}}'_\varepsilon]^\top] + \mathbf{b} = \rho \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_\varepsilon,$$

с точностью до $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$. В изотропном случае приходим к уравнению Ламе.

Рассмотрим теперь асимптотические соотношения для тензора напряжений Пиола–Кирхгофа в случае линейного приближения. Прежде всего, получим асимптотическое разложение для определителя $J_\varepsilon = \det \mathbf{F}_\varepsilon$. Поскольку $\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{I} + D\mathbf{u}_\varepsilon$, справедливо равенство

$$J_\varepsilon = \det(\mathbf{I} + D\mathbf{u}_\varepsilon) = \det \mathbf{I} + \left. \frac{d \det \mathbf{A}}{d\mathbf{A}} \right|_{\mathbf{A}=\mathbf{I}} [D\mathbf{u}_\varepsilon] + o(\|D\mathbf{u}_\varepsilon\|^2),$$

где $\left. \frac{d \det \mathbf{A}}{d\mathbf{A}} \right|_{\mathbf{A}=\mathbf{I}} \in \operatorname{End}(\mathcal{V})^*$. В терминах ε ,

$$J_\varepsilon = \det \mathbf{I} + \left. \frac{d \det \mathbf{A}}{d\mathbf{A}} \right|_{\mathbf{A}=\mathbf{I}} [D\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon] + O(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Замечание 2.4. В дальнейшем используется следующий классический результат. Пусть \mathcal{U} — n -мерное векторное пространство, а $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \operatorname{End}(\mathcal{U})$. Тогда

$$\left. \frac{d \det \mathbf{A}}{d\mathbf{A}} \right|_{\mathbf{A}=\mathbf{I}} [\mathbf{B}] = \det \mathbf{A} \operatorname{tr}\{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}\}.$$

Наконец, приходим к соотношению

$$J_\varepsilon = 1 + \operatorname{tr} D\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

или, в соответствии с аддитивной декомпозицией $D\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$, к равенству

$$J_\varepsilon = 1 + \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поскольку $\mathbf{P}_\varepsilon = J_\varepsilon \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{F}_\varepsilon^{-\top}$, то, принимая во внимание, что

$$J_\varepsilon = 1 + O(\varepsilon), \quad \mathbf{F}_\varepsilon^{-\top} = \mathbf{I} + O(\varepsilon), \quad \mathbf{T}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

и $\tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon = \mathbf{L}[\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon]$, приходим к следующему соотношению для первого тензора напряжений Пиола – Кирхгофа:

$$\mathbf{P}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Полученные соотношения для тензоров напряжений Коши и Пиола – Кирхгофа показывают, что с точностью до $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$ относительно свободной от напряжений отсчетной формы эти поля равны $\tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon$.

2.5.4. Формула Грина – Ривлина – Шилдта – Трусделла

Рассмотрим случай малого возмущения в окрестности напряженного состояния. Предположим, что отсчетная форма \mathcal{B} свободна от напряжений, а $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ – некоторая деформация отсчетной формы в форму \mathcal{S} ; обозначим градиент этой деформации через \mathbf{F} . Именно для формы \mathcal{S} определяются малые возмущения. Обобщая рассуждения раздела 2.5.1, определим однопараметрическое семейство $\{\mathcal{S}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in]-a, a[}$ форм $\mathcal{S}_\varepsilon \subset \mathcal{E}$, где число $a > 0$ мало, и однопараметрическое семейство $\{\gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon \in]-a, a[}$ деформаций $\gamma_\varepsilon : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_\varepsilon$. При этом будем полагать, что **1)** $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$ и $\gamma_0 = \text{Id}_\mathcal{S} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$; **2)** для каждой точки $x \in \mathcal{S}$ отображение $\varepsilon \mapsto \gamma_\varepsilon(x)$ из $] - a, a[$ в \mathcal{E} является гладким. Соотношения между γ , γ_ε и соответствующими формами иллюстрируется диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{S} \\ & \searrow \gamma_\varepsilon \circ \gamma & \downarrow \gamma_\varepsilon \\ & & \mathcal{S}_\varepsilon \end{array}$$

Для любой точки $x \in \mathcal{S}$ разложение отображения $\varepsilon \mapsto \gamma_\varepsilon(x)$ по формуле Тейлора первого порядка в окрестности точки $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\gamma_\varepsilon(x) = \gamma_0(x) + \varepsilon \left. \frac{\partial \gamma_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Разность между точками $x, \gamma_\varepsilon(x) \in \mathcal{E}$ определяет трансляционный вектор $\mathbf{u}_\varepsilon(x) := \gamma_\varepsilon(x) - x$, а именно, вектор перемещения частицы, занимавшей место x в форме \mathcal{S} и место $\gamma_\varepsilon(x)$ в форме \mathcal{S}_ε . Дифференциал отображения $\varepsilon \mapsto \mathbf{u}_\varepsilon(x)$, таким образом, имеет вид

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(x) := \varepsilon \mathbf{s}(x), \quad \text{где } \mathbf{s}(x) := \left. \frac{\partial \gamma_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

и определяет главную линейную часть поля перемещений. Вектор $\mathbf{s}(x)$ есть темп изменения этой линейной части относительно ε .

Для фиксированного ε отображение $\mathcal{S} \ni x \mapsto \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(x)$ есть поле инфинитезимальных перемещений; обозначим его градиент через $\mathbf{H}_\varepsilon : x \mapsto \mathbf{H}_\varepsilon(x)$, т.е.,

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(x + \mathbf{h}) = \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(x) + \mathbf{H}_\varepsilon(x)[\mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{при } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0},$$

а соответствующие тензоры малых деформаций и вихрей через $\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon$ и $\tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon$:

$$\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_\varepsilon + \mathbf{H}_\varepsilon^\top), \quad \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_\varepsilon - \mathbf{H}_\varepsilon^\top).$$

Полная деформация из отсчетной формы есть композиция $\chi_\varepsilon := \gamma_\varepsilon \circ \gamma$, а ее градиент является линейным отображением $\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{F}$. Соответствующая левая мера Коши–Грина $\mathbf{B}_\varepsilon = \mathbf{F}_\varepsilon \mathbf{F}_\varepsilon^\top$, и связанные с ней величины могут быть представлены для малого ε следующими асимптотическими разложениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\varepsilon &\doteq \mathbf{B} + \mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{H}_\varepsilon^\top, & \mathbf{B} &= \mathbf{F} \mathbf{F}^\top, \\ \mathbf{B}_\varepsilon^{-1} &\doteq \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{H}_\varepsilon - \mathbf{H}_\varepsilon^\top \mathbf{B}^{-1}. \end{aligned}$$

В них символ \doteq обозначает равенство с точностью до $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$.

Предположим материал тела изотропным, удовлетворяющим соотношению (1.1.813):

$$\mathbf{T} = \mathfrak{I}_0 + \mathfrak{I}_1 \mathbf{B} + \mathfrak{I}_{-1} \mathbf{B}^{-1},$$

где \mathfrak{I}_r , $r = -1, 0, 1$, — функции от главных инвариантов I_k , $k = 1, 2, 3$, тензора \mathbf{B} . Отметим, что это определяющее соотношение записано относительно свободной от напряжений формы \mathcal{B} .

В случае малого ε справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\mathfrak{I}_{r,\varepsilon} \doteq \mathfrak{I}_r + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathfrak{I}_r}{\partial I_k} \left(\frac{dI_k}{d\mathbf{B}} \{ \mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{H}_\varepsilon^\top \} \right).$$

Используя формулы для производных от главных инвариантов [?]

$$\frac{dI_1(\mathbf{B})}{d\mathbf{B}}[\mathbf{A}] = \text{tr}(\mathbf{A}), \quad \frac{dI_2(\mathbf{B})}{d\mathbf{B}}[\mathbf{A}] = \text{tr}[(I_1(\mathbf{B})\mathbf{I} - \mathbf{B}^\top)\mathbf{A}^\top],$$

$$\frac{dI_3(\mathbf{B})}{d\mathbf{B}}[\mathbf{A}] = \text{tr}[(I_3(\mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1})^\top)\mathbf{A}^\top],$$

и подставляя полученные соотношения в (1.1.813), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\varepsilon \doteq & \mathbf{T}_0 + \mathfrak{J}_1 (\mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{H}_\varepsilon^\top) - \mathfrak{J}_{-1} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{H}_\varepsilon + \mathbf{H}_\varepsilon^\top \mathbf{B}^{-1}) + \\ & + \sum_{r=-1}^1 \left(\frac{\partial \mathfrak{J}_r}{\partial I_1} \text{tr} (\mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{H}_\varepsilon^\top) + \frac{\partial \mathfrak{J}_r}{\partial I_2} \text{tr} (I_1(\mathbf{B}) \mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{B} + I_1(\mathbf{B}) \mathbf{B} \mathbf{H}_\varepsilon^\top - \right. \\ & \left. - \mathbf{B} \mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \mathbf{H}_\varepsilon^\top) + \frac{\partial \mathfrak{J}_r}{\partial I_3} \text{tr} (I_3(\mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{B} + I_3(\mathbf{B}) \mathbf{H}_\varepsilon^\top) \right) \mathbf{B}^r, \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

в котором $\mathbf{T}_0 = \mathfrak{J}_0 \mathbf{I} + \mathfrak{J}_1 \mathbf{B} + \mathfrak{J}_{-1} \mathbf{B}^{-1}$.

Соотношение (2.2.53) можно упростить, если использовать тождество

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 (\mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{H}_\varepsilon^\top) - \mathfrak{J}_{-1} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{H}_\varepsilon + \mathbf{H}_\varepsilon^\top \mathbf{B}^{-1}) = \\ = \mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0 \mathbf{H}_\varepsilon^\top - 2(\mathfrak{J}_0 \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon + \mathfrak{J}_{-1} \{ \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon \}), \end{aligned}$$

и теорему Кэли–Гамильтона, из которой вытекает равенство, $\mathbf{B}^2 = I_1 \mathbf{B} - I_2 \mathbf{I} + I_3 \mathbf{B}^{-1}$. Как окончательный результат, получаем формулу Грина–Ривлина–Шилдта–Трусделла [?]:

$$\mathbf{T}_\varepsilon \doteq \mathbf{T}_0 + \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0 \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon + \mathbf{L}_\gamma [\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon], \quad (2.2.54)$$

в которой \mathbf{L}_γ есть тензор упругих констант:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\gamma [\tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon] = & \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0 \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon - 2(\mathfrak{J}_0 \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon + \mathfrak{J}_{-1} \{ \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon \}) + \\ & + 2 \sum_{r=-1}^1 \left\{ \left(I_2 \frac{\partial \mathfrak{J}_r}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial \mathfrak{J}_r}{\partial I_3} \right) \text{tr} \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon + \frac{\partial \mathfrak{J}_r}{\partial I_1} \text{tr} (\mathbf{B} \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon) - I_3 \frac{\partial \mathfrak{J}_r}{\partial I_2} \text{tr} (\mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_\varepsilon) \right\} \mathbf{B}^r. \end{aligned}$$

Библиография